组合数学

主要内容：

1. 鸽巢原理及其应用
2. 中国剩余定理
3. 加强形式的鸽巢原理
4. Ramsey定理
5. 基本的计数原理及其应用
6. 集合的排列与组合
7. 多重集的排列与组合

鸽巢原理

定理: 若有n个鸽巢, $n+1$只鸽子,

则至少有一个鸽巢里至少有两只鸽子.

注意这里的任意性.

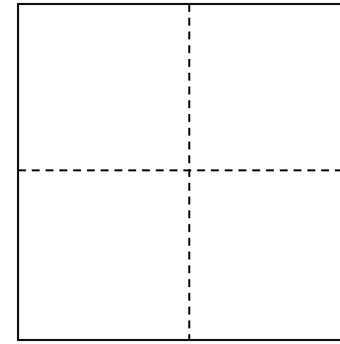
例1. 一年365天, 今有366个人,

则其中至少有两个人生日相同.

例2. 抽屉里有10双手套, 从中取11只出来,

其中至少有两只是完整配对的.

应用举例



例. 在边长为1的正方形内任取5点,则

其中至少有2点的距离不超过 $\sqrt{2}/2$

故事: *Halloween treats*

例. 设$a_1,a_2,\ldots,a_m$是正整数序列, 则至少存在

整数k和l, $0\le k<l\le m$, 使得$m|(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l)$.

令$r_k=a_1+a_2+\ldots+a_k \bmod m$, $k=1,2,\ldots,m$, 则

(a) 若有$r_h=0$, 即$m|(a_1+a_2+\ldots+a_h)$;

(b) 否则, $r_1,r_2,\ldots,r_m$取值为$\{1,2,\ldots,m-1\}$, 所以

存在$k<l$使得$r_k=r_l$, 即$m|(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_l)$.

抽屉原理（鸽巢原理）问题

- 如果平面上任取 n 个整点（横纵坐标都是整数），其中一定存在两个点，它们连线的中点也是整点，那么 n 至少是____________。(NOIP2012提高组问题求解1)
- 存在两个点中点是整点，要求两点横纵坐标奇偶性都相同，根据鸽巢原理，n至少是2*2+1=5

例

（2010问题求解3）记T为一队列，初始时为空，现有n个总和不超过32的正整数依次入队。如果无论这些数具体为何值，都能找到一种出队的方式，使得存在某个时刻队列T中的数之和恰好为9，那么n的最小值是__________。

设T的队列顺序为 a1,a2,a3… an,设bi为前i项数之和,则 b0=0 , b1=a1 , b2=a1+a2 , b3=a1+a2+a3 ….如队列T中的数之和恰好为9,实际上即是找到某个bj和bi ,使得 bj-bi=9.

例

由题意可知bi取值范围为1-32,现将这32个数构造为集合{1,10}, {2,11}, …, {8,17}, {18,27}, {19,28},…,{23,32} ,{24},{25},{26},这17个集合中的任一个集合不能包含两个或两个以上的 ,否则它们的差为9.例如设n=17时,队列T为 1 1 1 1 1 1 1 1 10 1 1 1 1 1 1 1 1,即 b1=1, b2 =2,… b8=8, b9 =18, b10=19, b11=20… b17=26,它们中没有任意两个数是在同一集合内的,所以不存在数之和恰好等于9.

故根据抽屉原理可得,当n=18时,至少存在两个 在同一个集合,即它们的差为9.

因此,答案为n=18.

应用:国际象棋大师

一位国际象棋大师有11周的时间备战比赛,

他决定每天至少下1盘棋,但每周不超过12盘.

则存在连续若干天,他恰好下了21盘棋.

证明: 令a_i为到第i天下的总盘数, $(a_i+21=a_j?)$

$$1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{77} \le 11\times 12=132,$$

$$22 \le a_1+21 < a_2+21 < \ldots < a_{77}+21 \le 132+21=153$$

总共有153种取值, 却有154个数

所以存在$i<j$使得

$$a_i+21=a_j.$$

进制转换问题

- 一位银矿勘探员无力支付3月份的房租。他有一根长31英寸的纯银条，因此他和女房东达成如下协议。他说，他将把银条切成小段。3月份的第一天，他给女房东1英寸长的一段，然后每天给他增加1英寸，以此作为抵押。勘探员预期到3月份的最后一天，能全数付清租金，而届时女房东将把银条小段全部还给他。
- 问：勘探员至少需要把他的银条切成多少段?
- 5段，分别切成1,2,4,8,16英寸。

进制转换问题

- 重量为1克、3克、9克、27克、81克、…3^n克的砝码各一枚，砝码允许放在天平的两边，用来称物体的质量,最多可称出1克到$3^{n+1}/2$克之间的所有质量，如N=4时，可称出1克到121克之间的所有质量；当M=14时，有14+9+3+1=27，即天平一端放14克的物体和9克、3克、1克的砝码,另一端放27克的砝码，即可称出M的质量。
- 当M=518克时，请你写出称出该物体的质量的方法，并用上述所示的等式来表示。
- 左侧放729,27,9克砝码,右侧放M和243,3,1克砝码

中国剩余定理(简单形式)

令m,n互素, $0 \le a \le m-1$, $0 \le b \le n-1$, 则方程组

$$x \equiv a \bmod m$$
$$x \equiv b \bmod n$$

在$[0,mn)$内有唯一解.

证明: 下面的n个数(模m都是a)

$$a,\ m+a,\ 2m+a,\ \ldots,\ (n-1)m+a,$$

模n的余数两两不同.

中国剩余定理(完全形式)

令$m_1, \ldots, m_r$两两互素, $a_1, \ldots, a_r$为整数,
则同余方程组

$$x \equiv a_i \ mod\ m_i,\ i=1,\ldots,r$$

模$M(=m_1m_2\ldots m_r)$有唯一解

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{M}_i \boldsymbol{y}_i \bmod \boldsymbol{M}$$

其中$M_i=M/m_i$, $y_i M_i \equiv 1\ mod\ m_i$.

例: (3,5,7)--(35,2), (21, 1), (15, 1)

$$x = 70a_1 + 21a_2 + 15a_3\ mod\ 105$$

射雕英雄传中的问题

黄蓉给瑛姑出题:
今有物不知其数,
三三数之剩二,
五五数之剩三,
七七数之剩二,
问物几何.

答案:
三人同行七十稀,
五树梅花廿一支,
七子团圆正半月,
除百零五便得知.

同余方程组

$$x \equiv a_1 \ mod\ 3,\ x \equiv a_2 \ mod\ 5,\ x \equiv a_3 \ mod\ 7$$

的解是

$$x = 70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \ mod\ 105$$

韩信点兵, 孙子算经, 数书九章(秦九韶)

补充: 不互素的情况

定理: 设m,n是正整数, $0 \le a < m$, $0 \le b < n$, 则方程组

$$x \equiv a \bmod m, \quad x \equiv b \bmod n \qquad (*)$$

有解当且仅当$\gcd(m,n) | (b-a)$.

令$d=\gcd(m,n)$, $M=\mathrm{lcm}(m,n)$.

若$d | (b-a)$, 则$(*)$在$[0,M)$内有唯一解:

$$x \equiv a + c\, m\, [(b-a)/d] \bmod M.$$

参考多元一次同余方程组的解法.

加强形式

条件：鸽巢n 个，鸽子$m_1+m_2+\ldots+m_n-n+1$只，其中 $m_1, m_2, \ldots, m_n$，n都是正整数，

结论：

鸽巢1 鸽子数 $\geq m_1$，

或，鸽巢2 鸽子数 $\geq m_2$，

…… ……

或，鸽巢n 鸽子数 $\geq m_n$，

至少有一个成立.

证明：否则，总鸽子数$\leq (m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_n-1)$

与总鸽子数为$m_1+m_2+\ldots+m_n-n+1$矛盾.

颜色重合扇形数目

大小两圆盘, 划分成200个恒等扇形.

大盘任选100个扇形涂红色, 其余涂蓝色.

小盘的200个扇形任选涂红或蓝色.

求证能大小盘对齐使得100个以上扇形同色.

- 固定大盘, 小盘转动, 有200种对齐方式.
- 小盘的每个扇形有200个对齐位置.
- 小盘的每个扇形有100个位置发生颜色重合.
- 所有对齐位置颜色重合总次数?
- 若小盘的每种对齐方式颜色重合数 ≤ 99?

Erdös-Szekeres 定理

定理: 在由n^2+1个实数构成的序列中, 必然含有长为$n+1$的单调(增或减) 子序列.

证明: 设序列为 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$,

令m_k是从a_k开始的最长单调增子序列的长度.

若没有长于$n+1$的单增序列, 则$m_1, \dots, m_{n^2+1} \in [1,n]$

由加强鸽巢原理, 存在$k_1<k_2<\dots<k_{n+1}$使得

$$\boldsymbol{m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}}}$$

若$a_{k_1} \le a_{k_2}$则必有$m_{k_1} > m_{k_2}$, 于是:

$$\boldsymbol{a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_{n+1}}}$$

a_k	5	4	6	3	4	2	3	1	9	2
m_k	3	3	2	3	2	3	2	2	1	1

Ramsey问题

命题: 6人中或者至少存在3人互相认识,

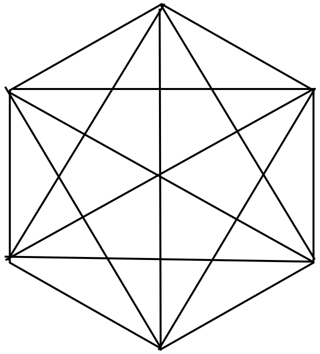
或者至少存在3人互相不认识.

特点: 对所有具体互相认识情况(2^{15})都成立.

该Ramsey问题等价于:

六个顶点的<u>完全图</u>的边, 用红,蓝二色任意着色,

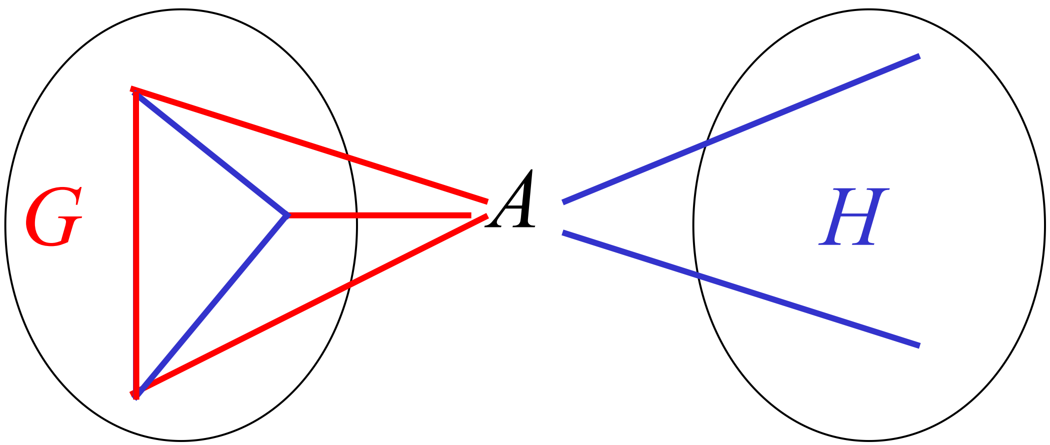
则至少存在一红色边三角形, 或一蓝色边三角形.



完全图, C(6,2)条边

图示证明

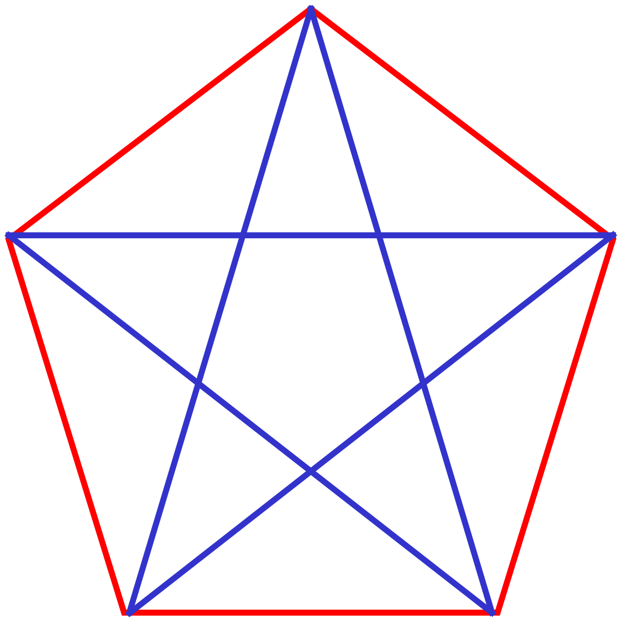
从6人任取一人A.



和A互相认识的人的集合G

和A互不认识的人的集合H

5个人的反例



$$K_6 \to K_3, K_3, \qquad \neg(K_5 \to K_3, K_3)$$

Ramsey数与Ramsey定理

Ramsey数r(a,b)定义为:

$r(a,b) = min\{ n \mid n$个人中必有 a个互相认识,

或者b个互相不认识$\}$

$= min\{ n \mid K_n \rightarrow K_a, K_b \}$

例如: $r(3,3)=6$, $r(3,4)=9$, $r(4,4)=18$.

Ramsey定理: $\forall a,b \geq 2$, $\exists p$ $K_p \rightarrow K_a, K_b$.

即 $r(a,b) < \infty$

Ramsey定理的证明

$r(a,b)=r(b,a)$, $r(a,2)=r(2,a)=a$

性质: 当$a,b\geq 2$时, $r(a,b)\leq r(a-1,b)+r(a,b-1)$.

在$r(a-1,b)+r(a,b-1)$个人中任选一人A,

其他人分成两个集合Know, Unknow.

$|Know|+|Unknow|= r(a-1,b) + r(a,b-1) - 1$

$\Rightarrow |Know|\geq r(a-1,b)$ 或者 $|Unknow|\geq r(a,b-1)$

$K_{r(a-1,b)}\rightarrow K_{a-1}, K_b \Rightarrow A\cup Know$有$K_a$或$K_b$.

Ramsey数表

b \ a	3	4	5
3	6	9	14
4	9	18	25
5	14	25	[43,49]
6	18	[35,41]	
7	23	[49,61]	
8	28	[55,84]	
9	36	[69,115]	
10	[40,43]		

*Ramsey*定理的推广

*Ramsey*定理: $\forall n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 2$,

$$\exists p\ K_p \to K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_k}.$$

例: $K_{17} \to K_3, K_3, K_3$.

作业: 第2章 ex1, ex4, ex16, ex20.

选作: 证明若$n>1$, $t=[(\log_2 n)/2]$, 则$r(t,t) \leq n$.

基本计数原理

加法原理:

设 $S = S_1 \cup \ldots \cup S_m$, 且 $S_i \cap S_j = \varnothing$ $(i \neq j)$

则 $|S| = |S_1| + \ldots + |S_m|$.

乘法原理:

设S是由(a,b)组成的集合,

其中a有p种选择,

且对a的每种选择,b有q种选择,

则 $|S| = p \times q$.

乘法原理应用

例: 确定$3^4\times5^2\times11^7\times13^8$的正整数因子的个数.

解: 其正整数因子的形式为

$$3^i\times5^j\times11^m\times13^n,$$

其中 $0\le i\le4,\ 0\le j\le2,$

$0\le m\le7,\ 0\le n\le8,$

根据乘法原理正整数因子的个数是

$$5\times3\times8\times9=1080.$$

例

例. 求1000~9999之间具有不同数字的奇数的个数

解:1.个位有 $|\{1,3,5,7,9\}|$ $= 5$ 种选择

2.千位有 $|\{1,\ldots,9\}|$ -1 $= 8$ 种选择

3.百位有 $|\{0,1,\ldots,9\}|$ -2 $= 8$ 种选择

4.十位有 $|\{0,1,\ldots,9\}|$ -3 $= 7$ 种选择

总个数 $= 5\times8\times8\times7 = 2240$.

换次序: 1. 百位有 $|\{0,1,\ldots,9\}|$ $= 10$ 种选择

2. 个位有 $|\{1,3,5,7,9\}| -$? 种选择

集合与多重集的记法

集合: 不能重复,没有次序

$$\{ a, b, b \} = \{ a, b \}$$

多重集: 可以重复, 没有次序

$$\{ a, b, b \} = \{ b, a, b \} \neq \{ a, b \}$$

多重集的记法:

$$M=\{a,a,a,b,c,c,d,d,d,d\}:=\{3\cdot a,b,2\cdot c,4\cdot d\}$$

$$N=\{\infty\cdot a, 2\cdot b, \infty\cdot c, 4\cdot d\}$$

集合的排列与组合

令S是集合, $|S| = n$, $r \geq 0$,

S的一个**r-排列**是 S中r个元素的有序摆放.

S的一个**r-组合**是 S中r个元素的无序选择,

或者说是 S的r个元素的子集.

例: S={a,b,c}

S的1-排列: a,b,c, 1-组合: {a}, {b}, {c}

S的2-排列: ab, ca,…, 2-组合: {a,b}, {b,c}, {a,c}

S的3-排列: cab,…, 3-组合: {a,b,c}

S的4-排列: ? 4-组合: ?

S的0-排列: ? 0-组合: $\varnothing$

排列数与组合数

用P(n,r)表示n元素集合的r-排列的个数

用C(n,r)表示n元素集合的r-组合的个数

定理: $0 \le r \le n$, $P(n,r) = n!/(n-r)!$

定理: $0 \le r \le n$, $C(n,r) = n!/(n-r)!/r!$

通常记C(n,r)为

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

定理: $C(n,r)=C(n,n-r)$.

定理: $C(n,0)+C(n,1)+\ldots+C(n,n)=2^n$.

例

例1: 平面上25个点, 无3点共线,
　　求他们所确定的直线数和三角形数.

例2: 排列26个字母, a,e,i,o,u两两不相邻, 求方案数.

定义: 循环排列, 即沿圆圈排列.

定理: n元素集合的循环r-排列的个数是

$$P(n,r)/r.$$

例3. 8个不同颜色念珠穿成一条项链, 求方案数.

例4. 10人围坐一圆桌, 其中两个不相邻, 求方案数.
　　与例2比较.

多重集的排列和组合

特点: 每个元素可以出现0到多次.

例: S={2·a, b, 3·c}

S的4-排列有 abac, cacc 等

S的4-组合有 {2·a, b, c}, {a, 3·c} 等

S的6-排列有 abccac 等

S的6-组合有 {2·a, b, 3·c}

S的7-排列 无,　S的7-组合 无.

两个简单情况

定理: 设 $S = \{ \infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k \}, r \geq 0$,

则S的r-排列个数是k^r,

S的r-组合个数是C(r+k-1,r).

定理: 设 $S = \{ n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k \}$,

且 $|S| = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

则 S 的全排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

例

例. 求MISSISSIPPI中字母的排列数.

例. $S = \{3\cdot a, 2\cdot b, 4\cdot c\}$, 求S的8排列的个数.

例. 一面包房生产8种炸面包圈, 若一打面包一盒, 求不同盒数.

例. 不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, 其中 $x_1 \geq 3, x_2 \geq 1, x_3 \geq 0, x_4 \geq 5$, 求其整数解的数目.

例

（2008问题求解2）书架上有21本书，编号从1到21，从其中选4本，其中每两本的编号都不相邻的选法一共有________种。

21本书首先分成两组，17本为未被选出的，4本为被选出来的，然后用插空法将4本书放到17本书形成的18个空位中，这样就完成了选书。总共有C(n-m+1,m)=C(18,4)=18!/(4!*14!)=3060种。

不相邻的组合问题公式：C(n-m+1,m) 即从n中选择m个数，保证m个数不相邻。

例

（2014问题求解1）由数字 1,1,2,4,8,8 所组成的不同的四位数的个数是__________。

（1）1124 ;1128;1148;1288;1488;2488组成,
各有P(4,2)=4×3=12(种)；共有12×6=72种.
（2）1248,P(4,4)=4×3×2×1=24(种)
（3）1188,C(4,2)=6(种)
一共有102种

本章小结与作业

集合: 排列组合 容易

多重集: 无个数限制的排列组合 容易

有限多重集的全排列 容易

有限多重集的部分排列组合 困难

作业: 第三章 ex1, ex4, ex6, ex9, ex38.

问题求解

- ***NOIP2012***

2.对于一棵二叉树，独立集是指两两互不相邻的节点构成的集合。例如，图 1 有 5 个不同的独立集（1 个双点集合、3 个单点集合、1 个空集），图 2 有 14 个不同的独立集。那么，图 3 有___________个不同的独立集。

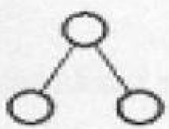


图 1

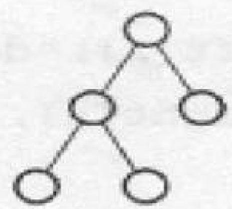


图 2

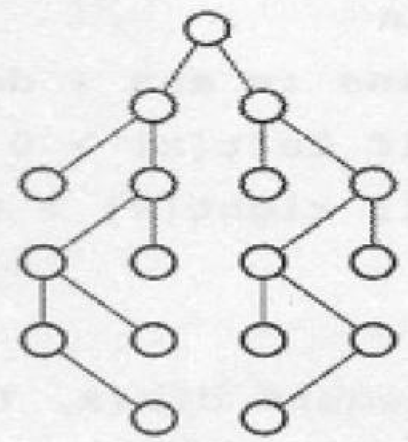


图 3

- *f[i]:=g[i,0]+g[i,1](g[i]表示以i为根节点的独立集个数，1表示选，0表示不选）；*
- *显然两两不相邻，所以选根节点时，两个子节点不能选；不选根节点时，直接是左右儿子相乘（根据计数原理可得）*
- *即:g[i,0]:=f[left[i]]*f[right[i]];*
- *g[i,1]:=g[left[i],0]*g[right[i],0];*
- *从下往上编号，这样根节点编号即为节点总数，求出f[17]即可;*