УДК 512.5

Р. Мустафокулов

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ФОРМУЛЫ ФАА-ДИ-БРУНО И РЕШЕНИЯХ ДИОФАНТОВОГО УРАВНЕНИЯ $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$

Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в г.Душанбе

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан З.Х.Рахмоновым)

Аннотация. *В работе приводится один аналог классической формулы Фаа-ди-Бруно, который применяется при вычислении производных сложой функции и, в отличии от формулы Фаа-ди-Бруно, не использует решения диофантового уравнения. Сравнения этих формул даёт возможность определить для любого натурального n все целые неотрицательные решения диофантового уравнения $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$.*

Ключевые слова: *формула Фаа-ди-Бруно, дифференцирование сложной функции, диофантовое уравнение.*

Пусть имеем функции $y = F(u)$ и $u = f(x)$ такие, что определена их суперпозиция $z(x) = F(f(x))$. Пусть функции $F(u)$ и $f(x)$ имеют n-ю производную. Тогда для n-й производной функции $z(x)$ имеет место *формула Фаа-ди-Бруно* [1]:

$$z^{(n)}(x) = \sum_{p_1+2p_2+\ldots+np_n=n} F^{(p_1+p_2+\ldots+p_n)}(u) \cdot Q_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}(f), \tag{1}$$

$$Q_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}(f) = \frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_n!} \left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{p_1} \left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^{p_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{p_n}, \tag{2}$$

где суммирование в (1) производится по всем целым неотрицательным числам p_1, p_2, ..., p_n, удовлетворющим равенству

$$p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = n. \tag{3}$$

Доказательство формулы (1) можно найти в [2, с.108]. Отметим также работу [3], в которой даётся модификация формулы (1) для сложной функции многих переменных $z(x) = F[u(x), v(x), \ldots, w(x)]$ и приводятся некоторые приложения этой формулы.

Адресс для корреспонденции: *Мустафокулов Рахмонкул. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе ул. Бохтар, 35/1 филиал МГУ в г. Душанбе. E-mail: rmustaf@list.ru*

Перепишем формулу (1) в другом виде. Пусть $\mathfrak{M}_i^n$ обозначает множество всех целых неотрицательных решений $P^n = (p_1, p_2, ..., p_n)$, уравнения (3), для которых $|P^n| = p_1 + p_2 + ... + p_n = i$. Обозначим

$$Q_i^n(f) = \sum_{P^n \in \mathfrak{M}_i^n} Q_{(p_1, p_2, \dots, p_n)}(f) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{4}$$

Тогда формулу (1) Фаа-ди-Бруно можно записать в виде

$$z^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(u) \cdot Q_i^n(f). \tag{5}$$

Формула (5) для нахождения производной, например, четвёртого порядка $z^{(IV)}(x)$ от функции $z(x) = F(f(x))$ применяется следующим образом. Сначала находим все целые неотрицательные решения уравнения

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 4. \tag{6}$$

Методом подбора можно убедиться, что такими решениями будут компоненты векторов $P_1^4 = (0, 0, 0, 1)$, $P_2^4 = (1, 0, 1, 0)$, $P_3^4 = (0, 2, 0, 0)$, $P_4^4 = (2, 1, 0, 0)$, и $P_5^4 = (4, 0, 0, 0)$. Затем, по формуле (2) определим
$Q_{P_1^4}(f) = f^{(IV)}(x)$, $\qquad Q_{P_2^4}(f) = 4f^{'}(x)f^{'''}(x)$, $\qquad Q_{P_3^4}(f) = 3\left(f^{''}(x)\right)^2$,
$Q_{P_4^4}(f) = 6\left(f^{'}(x)\right)^2 f^{''}(x)$, $\qquad Q_{P_5^4}(f) = \left(f^{'}(x)\right)^4$.
Далее, составим суммы (4):

$$\begin{aligned}
&Q_1^4(f) = Q_{P_1^4}(f) = f^{(IV)}(x),\\
&Q_2^4(f) = Q_{P_2^4}(f) + Q_{P_3^4}(f) = 4f^{'}(x)f^{'''}(x) + 3\left(f^{''}(x)\right)^2,\\
&Q_3^4(f) = Q_{P_4^4}(f) = 6\left(f^{'}(x)\right)^2 f^{''}(x),\\
&Q_4^4(f) = Q_{P_5^4}(f) = \left(f^{'}(x)\right)^4.
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (5) получаем окончательно

$$\begin{gathered}
z^{(IV)}(x) = F^{'}(u)f^{(IV)}(x) + F^{''}(u)\left[4f^{'}(x)f^{'''}(x) + 3\left(f^{''}(x)\right)^2\right] + \\
+F^{'''}(u) \cdot 6\left(f^{'}(x)\right)^2 f^{''}(x) + F^{(IV)}(u)\left(f^{'}(x)\right)^4.
\end{gathered} \tag{7}$$

В справедливости этой формулы можно убедиться вычисляя последовательно все производные до 4-го порядка включительно от функции $z(x) = F(f(x))$:

$$\begin{cases} z^{'}(x) = F^{'}(u) \cdot f^{'}(x), \\ z^{''}(x) = F^{''}(u)\left(f^{'}(x)\right)^2 + F^{'}(x) f^{''}(x), \\ z^{'''}(x) = F^{'''}(u)\left(f^{'}(x)\right)^3 + F^{''}(u) \cdot 3 f^{'}(x) f^{''}(x) + F^{'}(u) f^{'''}(x), \\ z^{(IV)}(x) = F^{IV}(u)\left(f^{'}(x)\right)^4 + F^{'''}(u) \cdot 6\left(f^{'}(x)\right)^2 f^{''}(x) + \\ \qquad\qquad + F^{''}(u)\left[4 f^{'}(x) f^{'''}(x) + 3\left(f^{''}(x)\right)^2\right] + F^{'}(u) f^{(IV)}(x), \end{cases} \tag{8}$$

то-есть, формула (7) для $z^{(IV)}(x)$ является спаведливой.

Таким образом, для применения формулы Фаа-ди-Бруно при вычислении производной $z^{(n)}(x)$, необходимо знать все целые неотрицательные решения уравнения (3), то-есть задача сводится к решению диофантового уравнения (3). Но, как известно (см., напр., [4]), решить уравнения типа (3) для произвольного n является непростой задачей.

Ниже предлагается другая формула для вычисления n-й производной от функции $z(x) = F(f(x))$, которая в отличие от формулы Фаа-ди-Бруно не использует решения уравнения (3).

Из равенств (8) видно, что производные $z^{(k)}(x)$ для каждого $k = 1$, 2, 3, ... выражается линейно через $F^{'}(u)$, $F^{''}(u)$, $F^{'''}(u)$, ..., $F^{(k)}(u)$, причём коэффициент при $F^{i}(u)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ определяется произведением степеней производных

$$\left(f^{'}(x)\right)^{s_1}\left(f^{''}(x)\right)^{s_2} \cdot ... \cdot \left(f^{(k)}(x)\right)^{s_k},$$

где $s_1 + s_2 + ... + s_k = i$. Обозначим эти коэффициенты через $R_i^k(f)$, где верхний индекс k означает порядок производной $z^{(k)}(x)$, а нижний индекс i - порядок производной $F^{(i)}(u)$ в разложении $z^{(k)}(x)$. Тогда $z^{(k)}(x)$, для любого $k = 1, 2, 3, ...$, можно записать в виде

$$z^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{k} F^{(i)}(u) R_i^k(f). \tag{9}$$

Определим конкретное значения коэффициентов $R_i^k(f)$ для каждого k и $1 \leqslant i \leqslant n$ в равенстве (9). Прежде всего заметим, что для любого $k = 1$, 2, 3, ..., n имеют место равенства

$$R_1^k(f) = f^{(k)}(x), \qquad R_k^k(f) = \left(f^{'}(x)\right)^k.$$

Далее,

$$z^{(k)}(x) = \left(z^{(k-1)}(x)\right)' = \left(\sum_{i=1}^{k-1} F^{(i)}(u)R_i^{k-1}(f)\right)' =$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left[F^{(i+1)}(u)f'(x)R_i^{k-1}(f) + F^{(i)}(u)\left(R_i^{k-1}(f)\right)'\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} F^{(i+1)}(u)f'(x)R_i^{k-1}(f) + \sum_{i=1}^{k-1} F^{(i)}(u)\left(R_i^{k-1}(f)\right)'.$$

Объединим слагаемые обеих сумм, содержащие одинаковые порядки производной $F^{(i)}(u)$. Произведение $F^{(k)}(u)f'(x)R_{k-1}^{k-1}(f) = F^{(k)}(u)\left(f'(x)\right)^k = F^{(k)}(u)R_k^k(f)$ входит только в первую сумму (при $i = k-1$), а $F'(u)\left(R_1^{k-1}(f)\right)' = F'(u)\left(f^{(k-1)}(x)\right)' = F'(u)f^{(k)}(x)$ входит только во вторую сумму (при $i = 1$). Объединяя все остальные произведения, входящие в эти суммы, получим

$$F^{(i)}(u)\left[f'(x)R_{i-1}^{k-1}(f) + \left(R_i^{k-1}(f)\right)'\right], \quad i = 2, 3, ..., k-1.$$

Поэтому сравнивая эти выражения с правой частью равенства (9), для коэффициентов $R_i^k(f)$ получаем следующие формулы:

$$R_i^k(f) = f'(x)R_{i-1}^{k-1}(f) + \left(R_i^{k-1}(f)\right)', \quad \text{при} \quad i = 2, 3, ..., k-1,$$
$$R_1^k(f) = f^{(k)}(x), \quad R_k^k(f) = \left(f'(x)\right)^k.$$

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 1. *Пусть функции $y = F(u)$, $u = f(x)$ имеют n-е производные. Тогда для n-й производной функции $z(x) = F(f(x))$ справедлива формула*

$$z^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} F^{(i)}(u)R_i^n(f), \tag{10}$$

где коэффициенты $R_i^n(f)$ определены равенствами

$$\begin{cases} R_i^n(f) = f'(x)R_{i-1}^{n-1}(f) + \left(R_i^{n-1}(f)\right)' \quad (i = 2, 3, ..., n-1), \\ R_1^n(f) = f^{(n)}(x), \quad R_n^n(f) = \left(f'(x)\right)^n. \end{cases} \tag{11}$$

Покажем теперь как при помощи формул (10) и (11) вычисляется $z^{(4)}(x)$ от функции $z(x) = F\left(f(x)\right)$, не используя целые неотрицательные решения уравнения (6). Из равенств (11) при $n = 4$ имеем

$$\begin{cases} R_1^4(f) = f^{(IV)}(x), \\ R_2^4(f) = f^{'}(x)R_1^3(f) + \left(R_2^3(f)\right)' = f^{'}(x)f^{'''}(x) + \left(f^{'}(x)R_1^2(f) + \left(R_2^2(f)\right)'\right)' = \\ \qquad = f^{'}(x)f^{'''}(x) + \left(f^{'}(x)f^{''}(x) + 2f^{'}(x)f^{''}(x)\right)' = 4f^{'}(x)f^{'''}(x) + 3\left(f^{''}(x)\right)^2, \\ R_3^4(f) = f^{'}(x)R_2^3(f) + \left(R_3^3(f)\right)' = f^{'}(x)\cdot 3f^{'}(x)f^{''}(x) + 3\left(f^{'}(x)\right)^2 f^{''}(x) = \\ \qquad = 6\left(f^{'}(x)\right)^2 f^{''}(x), \\ R_4^4(f) = \left(f^{'}(x)\right)^4. \end{cases} \tag{12}$$

Подставляя эти выражения в формулу (10) при $n = 4$, получаем равенсто (7), которое на этот раз было установлено при помощи формул (10) и (11), не используя решения уравнения (6).

Формула (10) является аналогом формулы Фаа-ди-Бруно (5), коэффициенты $R_i^n(f)$ которого определяются равенствами (11) и, в отличие от (4), для их определения не требуются решения диофантового уравнения (3).

Таким образом, для вычисления n-й производной $z^{(n)}(x)$ функции $z(x) = F(f(x))$ мы имеем две формулы: формулу Фаа-ди-Бруно (5), которая использует целые неотрицательные решения диофантового уравнения (3) и аналог этой формулы - формулу (10), которая использует рекурентное соотношение (11). Сравнивая эти формулы, для коэффициентов получаем равенство

$$Q_i^n(f) = R_i^n(f), \tag{13}$$

где n - любое натуральное число и $i = 1, 2, ..., n$.

Согласно определению, коэффициенты $R_i^n(f)$ выражаются, в конечном итоге, через произведения

$$\left(f^{'}(x)\right)^{s_1}\left(f^{''}(x)\right)^{s_2}\cdot ...\cdot\left(f^{(n)}(x)\right)^{s_n}, \tag{14}$$

где $s_1 + s_2 + ... + s_n = i$ (ср. с равенствами (12), при $n = 4$), причём $s_1, s_2, ..., s_n$ определяются из системы равенств (11) и не связаны с решениями уравнения (3). С другой стороны, в силу равенств (4) и (13) имеем $S^n = (s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathfrak{M}_i^n$, то-есть числа $s_1, s_2, ..., s_n$ образуют целые неотрицательные решения уравнения (3).

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 2. *Для дюбого натурального n выражения $R_i^n(f)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ из системы равенств* (11)*, определяют все целые неотрицательные решения уравнения $x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = n$.*

В качестве приложения теоремы 2 определим все целые неотрицательные решения уравнения (6) с помощью равенств (11) для коэффициентов $R_i^4(f)$. Из системы равенств (12) и (14) (при $n = 4$) видим, что коэффициент $R_1^4(f)$ пораждает вектор $S_1^4 = (0, 0, 0, 1)$, а коэффициент $R_2^4(f)$ пораждает два вектора $S_2^4 = (1, 0, 1, 0)$, и $S_3^4 = (0, 2, 0, 0)$, для которых $|S_2^4| = |S_3^4| = 2$. Коэффициенты $R_3^4(f)$ и $R_4^4(f)$ пораждают сответственно векторы $S_4^4 = (2, 1, 0, 0)$ и $S_5^4 = (4, 0, 0, 0)$. Поэтому, в силу (13), (4) и (2) получаем, что компоненты этих векторов удовлетворяют уравнению (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Faa di Bruno. Note sur un nuvelle formul de calcul differentiel. - Quart. J. M. 1857, 1, p.359-360

2. Архипов Г.Н., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. -М.: Дрофа, 2004. -640 с.

3. Шабат А.Б., Эфендиев М.Х. О приложениях формулы Фаа-ди-Бруно. - Уфимский математ. журнал, 2017, т.9., $N^o 3$, с.132-137

4. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах, 4-е изд. -М.: Физматгиз, 1983.

R. Mustafokulov

ABOUT ONE ANALOGUE FORMULA FAA-DI-BRUNO AND SOLUTIONS OF THE DIOPHANTINE EQUATION $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$

Branch of Moscow State University M.V. Lomonosov in Dushanbe

The paper gives an analogue of the classical Faa-di-Bruno's formula, which is used in the calculation of derivatives of a complex function and, in contrast to the Faa-di-Bruno formula, does not use solutions of the Diophantine equation. Comparison of these formulas makes it possible to determine for any natural n *all non-negative integer solutions of the Diophantine equation* $x_1+2x_2+\ldots+nx_n = n$.

Keywords: *the Faa-di-Bruno formula, the differentiation of a complex function, the Diophantine equation.*