ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ ОДНОРОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Р. Мустафокулов

Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Рассмотрим на отрезке (a, b) линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$(x-a)^{n\alpha}y^{(n)}+A_1(x)(x-a)^{(n-1)\alpha}y^{(n-1)}+\ldots+A_{n-1}(x)(x-a)^{\alpha}y'+A_n(x)y=0, \tag{1}$$

где коэффициенты $A_i(x)(i=\overline{1,n})$ являются непрерывными в (a, b) функциями, а числовой параметр $\alpha > 0$.

Если $A_i(x) \equiv a_i$ (a_i - постоянные) и $\alpha = 1$, то уравнение (1) превращается в известное линейное уравнение Эйлера [1], которое заменой независимой переменной приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. В работе [2] была решена задача об интегральном представлении решений неоднородного уравнения вида (1) при $\alpha \neq 1$ и $n = 2$.

В настоящей работе изучается уравнение высшего порядка вида (1) при $\alpha \neq 1$. Находятся необходимые и достаточные условия приводимости этих уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами. Эти условия определяют, так называемое, модельное уравнение, решения которого определяются в явном виде.

В уравнении (1) сделаем замену переменной $t = \omega(x)$, где $\omega(x)$ - некоторая достаточно гладкая функция. Тогда $y(x) = y(\nu(t)) = z(t) = z(\omega(x))$, где $x = \nu(t)$ - обратное к $t = \omega(x)$ преобразование, и

$$\begin{cases} y'(x) = z'(t)t'_x = z'(t)\omega'(x), \\ y''(x) = z''(t)[\omega'(x)]^2 + z'(t)\omega''(x), \\ y'''(x) = z'''(t)[\omega'(x)]^3 + 3z''(t)\omega'(x)\omega''(x) + z'(t)\omega'''(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)}(x) = z^{(n)}(t)[\omega'(x)]^n + ... + z'(t)\omega^{(n)}(x). \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя эти выражения в (1) и деля полученное уравнение на $(x-a)^{n\alpha}[\omega'(x)]^n$, получаем

$$z^{(n)}(t) + ... + \frac{A_n(x)}{(x-a)^{n\alpha}[\omega'(x)]^n}y = 0, \tag{3}$$

Для того, чтобы это уравнение было с постоянными коэффициентами, необходимо, чтобы

$$\frac{A_n(x)}{(x-a)^{n\alpha}[\omega'(x)]^n} \equiv a_n \quad (a_n - const.).$$

Отсюда находим

$$\omega = \int \sqrt[n]{\frac{A_n(x)}{a_n}} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

Таким образом, имеет место утверждение (см. также [3]):

Лемма 1. *Для того, чтобы уравнение* (1) *приводилось при помощи замены независимой переменной к уравнению с постоянными коэффициентами, необходимо, чтобы формула замены переменной имела следующий вид:*

$$t = \int \sqrt[n]{\frac{A_n(x)}{a_n}} * \frac{dx}{(x-a)^\alpha}.$$

Отсюда, беря $A_n(x) \equiv a_n$, получаем формулу подстановки

$$t = \omega(x) = \frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha} \quad (\alpha \neq 1). \tag{4}$$

Определим коэффициенты уравнения (3) при подстановки(4). Находим $\omega'(x) = (x-a)^{-\alpha}$, $\omega''(x) = -\alpha(x-a)^{-\alpha-1}$, $\omega'''(x) = \alpha(\alpha+1)(x-a)^{-\alpha-2}$, ..., $\omega^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1) * \ldots * (\alpha+n-2)(x-a)^{-\alpha-(n-1)}$ и в силу (2) получаем

$$\begin{cases} y'(x) = (x-a)^{-\alpha} z'(t), \\ y''(x) = (x-a)^{-2\alpha}\left(z''(t) - \alpha(x-a)^{\alpha-1} z'(t)\right), \\ y'''(x) = (x-a)^{-3\alpha}\left(z'''(t) - 3\alpha(x-a)^{\alpha-1} z''(t) + \alpha(\alpha+1)(x-a)^{2(\alpha-1)} z'(t)\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)}(x) = (x-a)^{-n\alpha}(z^{(n)}(t) - ... + (-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot \\ \qquad\qquad \cdot(\alpha+n-2)(x-a)^{(n-1)(\alpha-1)} z'(t)). \end{cases}$$

Из этих формул видно, что $y^{(k)}(x)$ выражается в виде произведения $(x-a)^{-k\alpha}$ на однородную линейную функцию от $z'(t)$, $z''(t)$, $\ldots$, $z^{(k)}(t)$ с переменными коэффициентами $P_k^i(\alpha)(x-a)^{i(\alpha-1)}$, где $P_k^i(\alpha)$ для каждого k является полиномом степени i по степеням α, причем $P_k^0(\alpha)=1$ и $P_k^k(\alpha)=0$. Следующее утверждение позволяет получить формулу зависимости производных $y^{(k)}(x)$ от $z'(t)$, $z''(t)$, $\ldots$, $z^{(k)}(t)$ при любом $k=1,2,\ldots,n$ и, тем самым, определить явное выражение для коэффициентов $P_k^i(\alpha)$.

Лемма 2. *Пусть $z(t)=z(\omega(x))=y(x)$, где $\omega(x)$ - определенная равенством* (4) *функция. Тогда для каждого $k=1,2,\ldots,n$ справедливо равенство*

$$y^{(k)}(x)=(x-a)^{-k\alpha}\sum_{i=0}^{k-1}P_k^i(\alpha)(x-a)^{i(\alpha-1)}z^{(k-i)}(t), \tag{5}$$

где $P_{k+1}^r(\alpha)=P_k^r(\alpha)+P_k^{r-1}(\alpha)[-k\alpha+(r-1)(\alpha-1)] \quad (1\le r\le k)$, $P_k^0(\alpha)=1$, $P_k^k(\alpha)=0$.

Подставляя (5) при $k=1,2,\ldots,n$ в (1) получаем

$$\begin{aligned}&z^{(n)}+[A_1(x)+P_n^1(\alpha)(x-a)^{\alpha-1}]z^{(n-1)}+[A_2(x)+A_1(x)P_{n-1}^1(\alpha)(x-a)^{\alpha-1}+\\&+P_n^2(\alpha)(x-a)^{2(\alpha-1)}]z^{n-2}+\ldots+[A_{n-1}(x)+A_{n-2}(x)P_2^1(\alpha)(x-a)^{\alpha-1}+\ldots+\\&+A_1(x)P_{n-1}^{n-2}(\alpha)(x-a)^{(n-2)(\alpha-1)}+P_n^{n-1}(\alpha)(x-a)^{(n-1)(\alpha-1)}]z'+A_n(x)z=0\end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда следует

Теорема. *Для того, чтобы уравнение* (1) *подстановкой* (4) *приводилось к уравнению с постоянными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{cases}A_1(x)=a_1-P_n^1(\alpha)(x-a)^{\alpha-1},\\ A_2(x)=a_2-a_1P_{n-1}^1(\alpha)(x-a)^{\alpha-1}-P_n^2(\alpha)(x-a)^{2(\alpha-1)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{n-1}(x)=a_{n-1}-a_{n-2}P_2^1(\alpha)(x-a)^{\alpha-1}-\ldots-\\ \qquad -a_1P_{n-1}^{n-2}(\alpha)(x-a)^{(n-2)(\alpha-1)}-P_n^{n-1}(\alpha)(x-a)^{(n-1)(\alpha-1)},\\ A_n(x)=a_n,\end{cases} \tag{7}$$

где a_1, a_2, $\ldots$, a_n - постоянные.

Замечание. Если в уравнении (1) все коэффициенты $A_1(x)$, $A_2(x)$, $\ldots$, $A_n(x)$ являются постоянными, то оно подстановкой (4) при $\alpha \neq 1$ не может быть приведено к уравнению с постоянными коэффициентами. В этом случае из условий (7) получаем $\alpha = 1$, а это приводит нас к уравнению Эйлера.

Уравнение (1), коэффициенты $A_i(x)$ которого определены равенствами (7), называется *модельным уравнением.* В ряде работ профессора Н. Раджабова (см., напр., [4] и библиогр. там же) модельное уравнение было построено и изучено в виде

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(D_x^{\alpha}\right)^{n-i} u = 0,$$

где $D_x^{\alpha} = (x-a)^{\alpha}\frac{d}{dx}$. Преимущество нашего подхода к определению модельного уравнения заключается в том, что коэффициенты этого уравнения определяются в явном виде при помощи формул (7).

Модельное уравнение заменой (4) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n z = 0. \tag{8}$$

Так как уравнение (8) имеет частные решения вида $e^{\lambda t}$ (если λ - простой корень) и $t^m e^{\lambda t}$ (если λ - кратный корень характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{9}$$

то модельное уравнение (1) с коэффициентами из (7) имеет частные решения вида $e^{\lambda\omega(x)}$ или, соответственно, $[\omega(x)]^m e^{\lambda\omega(x)}$, где $\omega(x) = \frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}$ $(\alpha \neq 1)$. Отсюда следует, если все корни λ_1, λ_2,$\ldots$,λ_n характеристического уравнения (9) вещественны и различны, то общим решением модельного уравнения будет

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i \omega(x)} \quad (c_i \text{ - постоянные числа}).$$

Если среди корней характеристического уравнения (9) имеются комплексно – сопряженные $\alpha \pm i\beta$, то в формуле общего решения этой паре характеристических чисел будет соответствовать решение вида

$$e^{\alpha\omega(x)} \left(c_1 \cos\left[\beta\omega(x)\right] + c_2 \sin\left[\beta\omega(x)\right]\right) \quad (c_1, c_2 \text{ - постоянные числа}).$$

Пусть λ_1 есть k - кратный вещественный корень характеристического уравнения (9). Тогда в формуле общего решения модельного уравнения этому корню будет соответствовать выражение

$$e^{\lambda_1 \omega(x)} Q_{k-1}\left(\omega(x)\right),$$

где $Q_{k-1}(\ldots)$ - полином степени $k-1$ с произвольными коэффициентами.

Нетрудно показать, что если $(\alpha \pm i\beta)$ — комплексно - сопряженные корни характеристического уравнения (9) кратности k, то в формуле общего решения им соответствует выражение

$$e^{\alpha\omega(x)}\left(\cos\left[\beta\omega(x)\right]Q_{k-1}(\omega(x)) + \sin\left[\beta\omega(x)\right]R_{k-1}(\omega(x))\right),$$

где $Q_{k-1}(\ldots)$ и $R_{k-1}(\ldots)$ - полиномы степени $k-1$ с произвольными коэффициентами.

Литература

1) Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев // - М.: “Высшая школа”, 1967. - с.564
2) Мустафокулов Р. Об одном линейном дифференциальном уравнении второго порядка с особой точкой / Р. Мустафокулов // Вестник Таджикского национального университета (научный журнал). Серия естественных наук. - Душанбе, 2016, №1/4 (216). с. 7-14.
3) Егурин Н.П. Приводимые системы / Н. П. Еругин // Труды математического института им. В. А. Стеклова. - М., 1946. - т. XIII.
4) Раджабов Н.К. Теории одного класса вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков / Н. Раджабов, Г.М. Кодиров, А. Сатторов // Вестник ТНУ (научный журнал). Серия естеств. наук. - Душанбе, 2014, №1/1(126), с. 3-6.