Answers to quiz for RDC math club entrance

Ulysses

September, 2020

Problem 1 Find $a \in \mathbb{R}$ such that

$$\operatorname{sum}\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor) = ax^2\right\} = 420.$$

(2020 AMC 12A, problem 25, ⋆⋆⋆⋆)

Solution. 假设 $a > 0$. 显然, 方程

$$\lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor) = ax^2 \tag{1}$$

没有负的解, 而且它在 $(0, 1)$ 上也必然无解, 同时 $x = 0$ 对求和没有影响, 从而我们只需考虑方程 (1) 的 $x \geq 1$ 的解.

同理, 若假设 $a < 0$, 那么我们只需研究 $x < 0$ 的解, 那此时方程 (1) 的所有解之和必然是负的, 而无法得到 420. 另外, $a = 0$ 是平凡的. 从而我们得到 $a > 0$.

令 $n := \lfloor x \rfloor$, 则方程 (1) 变为

$$n (x - n) = ax^2.$$

解得两解

$$x_{\pm} = \frac{n}{2a} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4a}\right).$$

接下来判断上式中正负号应取正还是负.

假设上式中正负号取正. 由判别式为正, 可得 $a < \frac{1}{4}$. 又由 $a > 0$, 可知

$$x_+ = \frac{n}{2a} \left(1 + \sqrt{1 - 4a}\right) > 2n \left(1 + \sqrt{1 - 4a}\right) > 2n.$$

另一方面, 由 $x \geq 1$ 可知 $n \geq 1$. 又, 我们有 $n \leq x < n + 1$, 从而

$$x_+ < n + 1 \leq 2n.$$

由此引发矛盾. 于是 $x = x_-$ 而非 x_+.

接下来考虑对于哪些 n, 解 $x = x_-$ 符合题意. 考察不等式 $n \leq x < n + 1$, 有

$$n \leq \frac{n}{2a} \left(1 - \sqrt{1 - 4a}\right) < n + 1.$$

由此可得 n 的范围

$$1 \leq n < \frac{1}{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a} - 1}.$$

于是, 我们得到了方程 (1) 的解之和

$$\begin{aligned}
420 &= \sum_{n=1}^{\left\lceil \frac{1}{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}-1} \right\rceil - 1} \frac{n}{2a}\left(1-\sqrt{1-4a}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a} \sum_{n=1}^{\left\lceil \frac{1}{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}-1} \right\rceil - 1} n \\
&= \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a} \cdot \frac{1}{2} \left\lceil \frac{1}{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}-1} \right\rceil \left(\left\lceil \frac{1}{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}-1} \right\rceil - 1 \right).
\end{aligned}$$

令 $y := \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$, $m := \left\lceil \frac{1}{y-1} \right\rceil$, 则上式变为

$$420 = \frac{1}{2} y m (m-1).$$

解得

$$y = \frac{840}{m(m-1)}.$$

由 $m - 1 < \frac{1}{y-1} \leq m$ 得不等式

$$m - 1 < \frac{1}{\frac{840}{m(m-1)} - 1} \leq m.$$

在求解该不等式时应考虑到 $m > 1$. 解得 $\sqrt{840} < m \leq 29$. 由于 $28 < \sqrt{840} < 29$, 故 m 具有唯一整数解 $m = 29$. 从而算得 $y = \frac{30}{29}$, 从而解得 $a = \frac{29}{900}$.

■

Solutions from AoPS.

Problem 2 Calculate

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Re\left((2+\mathrm{i})^n\right) \Im\left((2+\mathrm{i})^n\right)}{7^n}.$$

($\Re z$ denotes the real part of complex number z, and $\Im z$ denotes the imaginary part of complex number z.)

(2020 AMC 12A, problem 22, $\star\star$)

Solution. 注意到对于 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}
&\Re z \Im z \\
=&\frac{z+z^*}{2} \cdot \frac{z-z^*}{2\mathrm{i}} \\
=&\frac{z^2-\left(z^*\right)^2}{4\mathrm{i}} \\
=&\frac{z^2-\left(z^2\right)^*}{4\mathrm{i}} \\
=&\frac{\Im\left(z^2\right)}{2},
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Re\left((2+\mathrm{i})^n\right) \Im\left((2+\mathrm{i})^n\right)}{7^n} \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Im\left((2+\mathrm{i})^{2n}\right)}{2 \cdot 7^n} \\
=&\frac{1}{2} \Im \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2+\mathrm{i})^2}{7}\right)^n \\
=&\frac{1}{2} \Im \frac{1}{1-\frac{(2+\mathrm{i})^2}{7}} \\
=&\frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

■

Solutions from AoPS.

Problem 3 Let $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ be a strictly increasing sequence such that

$$\{a_j | j \in \mathbb{N}\} = \left\{n^k \middle| n, k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2\right\}.$$

Show that there are infinite many j such that

$$\frac{a_{j+1}-a_j}{9999} \in \mathbb{Z}.$$

(2020 Canadian Mathematical Olympiad, problem 4, ⋆⋆⋆⋆⋆)

Proof. 令

$$S := \left\{n^k \middle| n, k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2\right\},$$

则序列 $\{a_j\}$ 就是 S 中的元素从小到大排列组成的序列.

对于 $m \in \mathbb{Z}^+$, 令 $A(m)$ 为 S 中不超过 $(9999m-4999)^2$ 的非完全平方数的个数. 显然, S 中的不超过 y 的形如 n^k 的数的个数为 $\left\lfloor y^{\frac{1}{k}} \right\rfloor$. 从而

$$\begin{aligned}
A(m) &\le \sum_{k=3}^{\infty} \left(\left\lfloor (9999m-4999)^{\frac{2}{k}} \right\rfloor - 1 \right) \\
&= \sum_{k=3}^{\log_2 (9999m-4999)^2} \left(\left\lfloor (9999m-4999)^{\frac{2}{k}} \right\rfloor - 1 \right) \\
&\le \sum_{k=3}^{\log_2 (9999m-4999)^2} (9999m)^{\frac{2}{3}} \\
&\le (9999m)^{\frac{2}{3}} \log_2 (9999m)^2,
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{A(m)} = \infty,$$

从而

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall m > N : \frac{m}{A(m)} > 2.$$

即, 当 m 充分大时, 有 $A(m) < \frac{m}{2}$.

对于任意 $p \in \mathbb{Z}^+, p \le m$, 区间 $\left((9999p-5000)^2, (9999p-4999)^2 \right)$(总共 m 个区间) 中不存在完全平方数. 又因为当 m 充分大时, 这 m 个区间中的非完全平方数不超过 $\frac{m}{2}$ 个 (这是 $A(m) < \frac{m}{2}$ 的必要条件), 从而由抽屉原理, 这 m 个区间中, 至少有 $\frac{m}{2}$ 个不包含任何 S 中的元素. 又因为这些区间的端点都是 S 中的元素 (因为这些区间的端点都是完全平方数), 所以这些区间中至少有 $\frac{m}{2}$ 个区间满足该区间的两个端点为 S 中相邻的两个元素. 又因为这些区间的两个端点之差都是 9999, 考虑到 $\frac{m}{2}$ 可以任意大, 原命题得证.

□

Solutions from Canadian MO official.

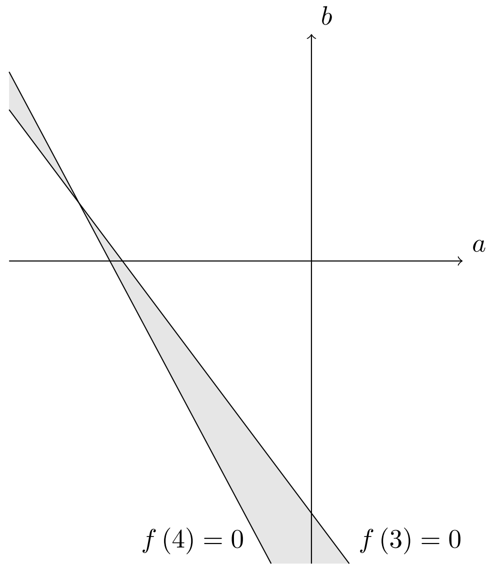
Problem 4 Function $f : x \mapsto ax^2 + (2b+1)x - a - 2$, where $a, b \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$, has only one zero on $[3,4]$. Find $\left(a^2+b^2\right)_{\min}$.

(交中校本某题, $\star$)

Solution. 经过思考后发现, 存在两种情况:

情形一: $f(3)f(4) \le 0$ (并不是充分条件, 但边界情况可以不予讨论).

将条件 $f(3)f(4) \le 0$ 表征的区域画在 a-b 平面上.



由此看出, $\left(a^2+b^2\right)_{\min}$ 是直线 $f(3)=0$ 到原点的距离的平方. 由点到直线距离公式可得距离 $\frac{1}{10}$. 当 $a^2+b^2=\left(a^2+b^2\right)_{\min}=\frac{1}{100}$ 时, 有 $(a,b)=\left(-\frac{2}{25},-\frac{3}{50}\right)$. 考虑到 $f(3)f(4)\le 0$ 并不是 f 在 $[3,4]$ 上只有唯一零点的充分条件, 我们需要检验. 经检验, 确实符合条件.

情形二: $(2b+1)^2+4a(a+2)=0$ 且 $3\le -\frac{2b+1}{2a}\le 4$.

利用方程

$$(2b+1)^2+4a(a+2)=0 \tag{2}$$

将不等式转化为一元不等式, 得

$$3\le -\frac{\sqrt{-4a(a+2)}}{2a}\le 4.$$

解得 $-\frac{1}{5}\le a\le -\frac{2}{17}$.

现在考察满足方程 (2) 的点 (a,b) 中, 使得 a^2+b^2 最小的点, 而不考虑 a 的取值范围. 注意到方程 (2) 可以化为圆的方程

$$(a+1)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=1,$$

考察几何意义后可知, 该圆上使得 a^2+b^2 最小的点, 是圆心在原点的与该圆相切的圆的切点. 由平面几何可知, 这点就是原点和圆心 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 的连线与圆的交点 $\left(\frac{-4+\sqrt{11}}{10},\frac{-4+\sqrt{11}}{5}\right)$. 但注意到 $\frac{-4+\sqrt{11}}{10}>-\frac{2}{17}$, 故这一点不符合条件 $-\frac{1}{5}\le a\le -\frac{2}{17}$. 因此符合不等条件的最值必取在 $a=-\frac{1}{5}$ 或 $a=-\frac{2}{17}$ 处. 经过计算后可知, 总共有四组这样的 (a,b)(两个 a 的取值各有两个点), 其中使得 a^2+b^2 最小的是点 $\left(-\frac{2}{17},-\frac{1}{34}\right)$, 取得 $\left(a^2+b^2\right)_{\min}=\frac{1}{68}$.

综合上述两种情形, 可得 $\left(a^2+b^2\right)_{\min}=\frac{1}{100}$.

■

Problem 5 In $\triangle ABC$, $b^2 = ac$, and $2\sin A = \sin(B-A) + \sin C$. Find $\cos B$.
(2019 全国高中数学联合竞赛一试, problem 9, $\star\star\star$)

Solution.

$$2\sin A = \sin(B-A) + \sin C = \sin(B-A) + \sin(B+A) = 2\sin B\cos A.$$

因为

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

所以

$$b^2+c^2-a^2 = 2ac.$$

将 $b^2 = ac$ 代入后解得 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$. 从而易得

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

■