

# *Processamento Digital de Imagens*

## Quantização de Imagens

**Eduardo A. B. da Silva**

**Programa de Engenharia Elétrica - COPPE/UFRJ**

Laboratório de Sinais, Multimídia e Telecomunicações  
eduardo@smt.ufrj.br

**Sergio L. Netto**

**Programa de Engenharia Elétrica - COPPE/UFRJ**

Laboratório de Sinais, Multimídia e Telecomunicações  
sergioln@smt.ufrj.br

Abril de 2017



# Sumário

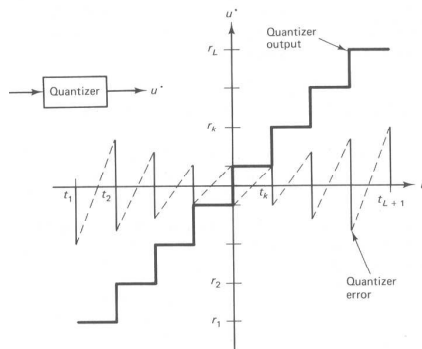
## ① Quantização de Imagens

- Quantização
- Compandors
- Entropia da Saída Vs. Distorção
- Quantização Visual

# Quantização

- Representação num computador  $\Rightarrow$  valores discretos.
- Quantização: mapeia  $u \rightarrow u'$   $u'$  toma valores em  $\{r_1, \dots, r_L\}$
- $u \in [t_k, t_{k+1}) \rightarrow u' = r_k$

Em geral: processo irreversível.



**Exemplo:** Quantizador uniforme entre 0.0 e 10.0, 256 níveis:

$$t_k = \frac{10(k-1)}{256}$$

$$r_k = t_k + \frac{5}{256}$$

$\Rightarrow q \triangleq t_k - t_{k-1} = r_k - r_{k-1} :$  intervalo ou passo de quantização.

# Quantizador Ótimo de Lloyd-Max

$$\varepsilon = E[(u - \hat{u})^2] = \int_{t_1}^{t_{L+1}} (u - \hat{u})^2 p_u(u) du = \sum_{i=1}^L \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u - r_i)^2 p_u(u) du$$

$$\varepsilon_{\text{mínimo}} \rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt_k} = 0 \Rightarrow (t_k - r_{k-1})^2 p_u(t_k) - (t_k - r_k)^2 p_u(t_k) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dr_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u - r_k)^2 p_u(u) du = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow (t_k - r_{k-1})^2 = (t_k - r_k)^2 \Rightarrow \text{Se } t_1 < t_2 < \dots < t_{L+1}$$

$$\Rightarrow t_k = \frac{r_{k-1} + r_k}{2}$$

$$(2) \Rightarrow \int_{t_k}^{t_{k+1}} u p_u(u) du = r_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_u(u) du$$

$$\Rightarrow r_k = \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} u p_u(u) du}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} p_u(u) du} = E[u | u \in \mathcal{I}_k]$$

## Soluções:

1) a. Inicializar  $r_k^{(1)}$ ,  $k = 1, \dots, L$  tal que  $r_1^{(1)} < r_2^{(1)} < \dots < r_L^{(1)}$ ,  $r_{L+1}^{(1)}$  dependendo do problema.

b. Para cada  $i$ ,  $i = 1, \dots, N_{\max}$ :

■ Para cada  $k$ ,  $k = 1, \dots, L + 1$ :

$$t_k^{(i)} = \frac{r_{k-1}^{(i)} + r_k^{(i)}}{2}$$

$$r_k^{(i+1)} = \frac{\int_{t_k^{(i)}}^{t_{k+1}^{(i)}} up_u(u) du}{\int_{t_k^{(i)}}^{t_{k+1}^{(i)}} p_u(u) du}$$

- A seguir são apresentadas tabelas para os quantizadores ótimos de números de níveis entre 2 e 36, 64 e 128, para uma densidade gaussiana de média zero e variância unitária.

**TABLE 4.1** Optimum mean square quantizers for Gaussian density with zero mean and unity standard deviation;  $t_{-k} = -t_k$ ,  $r_{-k} = -r_k$ ,  $t_{L/2+1} = \Delta$ .

Levels	2	3	4	5	6	7	8
MSE	.3634	.1902	.1175	.0799	.0580	.0440	.0345
SNR (dB)	4.3964	7.2085	9.3003	10.972	12.367	13.565	14.616
Entropy	1.0000	1.5358	1.9111	2.2029	2.4428	2.6469	2.8248

$k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$
1	0.0000	.7979	.6120	0.0000	0.0000	.4528	.3823	0.0000	0.000	.3177	.2803	0.0000	0.0000	.2451
2			1.2240	.9816	1.5104	1.2444	.7646	1.7242	1.4469	1.0001	.8744	.5606	.5006	.7561
3										1.8936	1.6108	1.1882	1.0500	1.3440
4												2.0334	1.7480	2.1520

Levels	9	10	11	12	13	14	15
MSE	.0279	.0229	.0192	.0163	.0141	.0122	.0107
SNR (dB)	15.551	16.395	17.163	17.868	18.519	19.125	19.691
Entropy	2.9826	3.1245	3.2534	3.3716	3.4806	3.5819	3.6765

$k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$
1	.2218	0.0000	0.0000	.1996	.1838	0.0000	0.0000	.1685	.1569	0.0000	0.0000	.1457	.1370	0.0000
2	.6813	.4437	.4048	.6099	.5600	.3675	.3402	.5119	.4761	.3138	.2936	.4414	.4144	.2739
3	1.1977	.9189	.8339	1.0579	.9657	.7525	.6944	.8769	.8127	.6384	.5960	.7506	.7031	.5549
4	1.8656	1.4765	1.3247	1.5914	1.4359	1.1789	1.0814	1.2859	1.1843	.9871	.9182	1.0858	1.0132	.8513
5		2.2547	1.9683	2.3452	2.0593	1.6928	1.5345	1.7832	1.6231	1.3314	1.2768	1.4677	1.3607	1.1751
6					2.4259	2.1409	2.4986	2.2147	1.8647	1.7033	1.9388	1.7765	1.5463	1.2811
7									2.5647	2.2820	2.6253	2.3439	2.0067	1.6811
8														



Levels	16	17	18	19	20	21	22
MSE	.0095	.0085	.0076	.0069	.0062	.0057	.0052
SNR (dB)	20.222	20.723	21.196	21.644	22.071	22.477	22.865
Entropy	3.7652	3.8486	3.9275	4.0023	4.0773	4.1410	4.2056

$k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$
1	0.0000	.1284	.1215	0.0000	0.0000	.1148	.1093	0.0000	0.0000	.1038	.0992	0.0000	0.0000	.9474
2	.2583	.3882	.3671	.2431	.2306	.3465	.3295	.2185	.2084	.3129	.2990	.1985	.1901	.2854
3	.5226	.6569	.6203	.4910	.4655	.5845	.5553	.4405	.4198	.5267	.5029	.3996	.3824	.4795
4	.7998	.9426	.8877	.7495	.7093	.8341	.7910	.6700	.6378	.7488	.7140	.6062	.5797	.6798
5	1.0995	1.2565	1.1785	1.0259	.9683	1.1024	1.0426	.9120	.8664	.9840	.9364	.8218	.7848	.8897
6	1.4374	1.6183	1.5080	1.3312	1.2513	1.4002	1.3187	1.1732	1.1114	1.2389	1.1756	1.0510	1.0016	1.1135
7	1.8438	2.0693	1.9060	1.6848	1.5733	1.7464	1.6340	1.4642	1.3814	1.5238	1.4399	1.3002	1.2355	1.3576
8	2.4011	2.7328	2.4542	2.1273	1.9638	2.1813	2.0177	1.8037	1.6906	1.8574	1.7437	1.5797	1.4949	1.6321
9				2.7810	2.5037	2.8261	2.5501	2.2317	2.0683	2.2791	2.1158	1.9078	1.7937	1.9553
10								2.8684	2.5937	2.9083	2.6349	2.3237	2.1606	2.3659
11												2.9460	2.6738	2.9817

Levels	23	24	25	26	27	28	29
MSE	.0047	.0044	.0040	.0037	.0035	.0032	.0030
SNR (dB)	23.237	23.593	23.935	24.264	24.581	24.887	25.182
Entropy	4.2675	4.3267	4.3837	4.4384	4.4911	4.5420	4.5911

$k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$
1	.0909	0.0000	0.0000	.0871	.0839	0.0000	0.0000	.0807	.0778	0.0000	0.0000	.0751	.0726	0.0000
2	.2737	.1818	.1747	.2623	.2535	.1677	.1617	.2427	.2342	.1557	.1504	.2258	.2184	.1453
3	.4596	.3656	.3512	.4401	.4233	.3370	.3247	.4068	.3924	.3126	.3020	.3782	.3658	.2916
4	.6510	.5536	.5314	.6227	.5985	.5096	.4908	.5747	.5540	.4722	.4560	.5337	.5158	.4400
5	.8508	.7484	.7176	.8125	.7801	.6874	.6614	.7481	.7206	.6358	.6136	.6935	.6698	.5916
6	1.0626	.9531	.9126	1.0126	.9707	.8727	.8388	.9294	.8941	.8054	.7765	.8594	.8293	.7480
7	1.2918	1.1721	1.1199	1.2272	1.1739	1.0686	1.0254	1.1214	1.0772	.9829	.9465	1.0336	.9962	.9106
8	1.5466	1.4116	1.3448	1.4624	1.3949	1.2792	1.2249	1.3283	1.2732	1.1715	1.1263	1.2189	1.1729	1.0817
9	1.8408	1.6816	1.5954	1.7283	1.6416	1.5105	1.4423	1.5561	1.4872	1.3750	1.3191	1.4193	1.3628	1.2640
10	2.2029	2.0001	1.8854	2.0426	1.9277	1.7725	1.6854	1.8146	1.7270	1.5995	1.5300	1.6407	1.5708	1.4615
11	2.7107	2.4058	2.2431	2.4437	2.2813	2.0829	1.9679	2.1213	2.0062	1.8546	1.7668	1.8928	1.8047	1.6801
12		3.0156	2.7458	3.0479	2.7792	2.4797	2.3177	2.5141	2.3524	2.1578	2.0428	2.1928	2.0778	1.9293
13						3.0787	2.8111	3.1081	2.8416	2.5470	2.3856	2.5784	2.4174	2.2263
14										3.1363	2.8709	3.1634	2.8989	2.6085
15														3.1893

TABLE 4.1 Continued

Levels	30	31	32	33	34	35	36
MSE	.0028	.0027	.0025	.0024	.0022	.0021	.0020
SNR (dB)	25.468	25.744	26.012	26.272	26.525	26.770	27.009
Entropy	4.6386	4.6846	4.7291	4.7723	4.8142	4.8550	4.8946

$k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$
1	0.0000	.0702	.0681	0.0000	0.0000	.0660	.0641	0.0000	0.0000	.0622	.0605	0.0000	0.0000	.0588
2	.1407	.2111	.2047	.1362	.1321	.1983	.1926	.1281	.1246	.1869	.1818	.1210	.1178	.1768
3	.2823	.3535	.3425	.2732	.2650	.3318	.3221	.2570	.2497	.3126	.3040	.2426	.2361	.2955
4	.4258	.4982	.4826	.4119	.3995	.4672	.4535	.3872	.3762	.4399	.4277	.3654	.3556	.4157
5	.5723	.6465	.6259	.5533	.5364	.6056	.5874	.5197	.5048	.5696	.5536	.4900	.4768	.5378
6	.7231	.7996	.7736	.6985	.6767	.7479	.7251	.6553	.6362	.7026	.6826	.6173	.6003	.6627
7	.8794	.9593	.9271	.8487	.8217	.8954	.8675	.7950	.7713	.8399	.8154	.7479	.7269	.7911
8	1.0434	1.1275	1.0884	1.0056	.9726	1.0497	1.0160	.9400	.9113	.9826	.9531	.8828	.8576	.9240
9	1.2173	1.3071	1.2596	1.1711	1.1313	1.2128	1.1723	1.0919	1.0574	1.1323	1.0972	1.0234	.9933	1.0625
10	1.4045	1.5019	1.4443	1.3481	1.3001	1.3874	1.3389	1.2527	1.2116	1.2909	1.2493	1.1710	1.1353	1.2081
11	1.6098	1.7177	1.6471	1.5404	1.4824	1.5773	1.5189	1.4250	1.3760	1.4611	1.4117	1.3276	1.2855	1.3628
12	1.8410	1.9642	1.8757	1.7538	1.6828	1.7883	1.7171	1.6127	1.5539	1.6467	1.5876	1.4958	1.4460	1.5292
13	2.1113	2.2584	2.1434	1.9977	1.9091	2.0298	1.9411	1.8215	1.7501	1.8534	1.7818	1.6794	1.6201	1.7110
14	2.4479	2.6375	2.4772	2.2892	2.1743	2.3188	2.2040	2.0607	1.9720	2.0905	2.0017	1.8842	1.8124	1.9138
15	2.9259	3.2143	2.9518	2.6653	2.5054	2.6912	2.5326	2.3473	2.2326	2.3748	2.2602	2.1192	2.0303	2.1469
16				3.2384	2.9768	3.2616	3.0010	2.7179	2.5588	2.7428	2.5841	2.4013	2.2869	2.4269
17								3.2840	3.0242	3.3056	3.0468	2.7669	2.6086	2.7902
18												3.3265	3.0685	3.3469

TABLE 4.1 Continued

Bit Levels	6	7	Bits Levels	6	7	Bits Levels	7					
MSE	.0006	.0002	MSE	64	128	MSE	128					
SNR (dB)	31.9094	37.8634	SNR (dB)			SNR (dB)						
Entropy	5.7074	6.6892	Entropy			Entropy						
$k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$	$t_k$	$r_k$				
1	.0000	.0336	0.0000	.0171	23	1.7173	1.7718	.7763	.7950	45	1.7472	1.7749
2	.0671	.1007	.0343	.0514	24	1.8300	1.8882	.8140	.8329	46	1.8035	1.8322
3	.1344	.1680	.0685	.0657	25	1.9510	2.0138	.8520	.8712	47	1.8618	1.8915
4	.2018	.2356	.1028	.1199	26	2.0824	2.1510	.8905	.9098	48	1.9223	1.9531
5	.2696	.3035	.1371	.1543	27	2.2270	2.3030	.9293	.9489	49	1.9851	2.0172
6	.3377	.3719	.1715	.1887	28	2.3892	2.4753	.9686	.9884	50	2.0507	2.0342
7	.4064	.4408	.2059	.2231	29	2.5757	2.6761	1.0084	1.0284	51	2.1193	2.1544
8	.4756	.5105	.2404	.2577	30	2.7986	2.9210	1.0487	1.0689	52	2.1913	2.2282
9	.5457	.5809	.2770	.2923	31	3.0824	3.2438	1.0895	1.1100	53	2.2673	2.3064
10	.6166	.6523	.3097	.3270	32	3.4955	3.7471	1.1309	1.1517	54	2.3479	2.3695
11	.6885	.7248	.3445	.3619	33			1.1729	1.1941	55	2.4339	2.4784
12	.7617	.7986	.3794	.3969	34			1.2156	1.2371	56	2.5264	2.5744
13	.8362	.8737	.4147	.4320	35			1.2590	1.2609	57	2.6266	2.6789
14	.9122	.9506	.4497	.4673	36			1.3032	1.3254	58	2.7366	2.7942
15	.9900	1.0294	.4851	.5028	37			1.3481	1.3708	59	2.8588	2.9234
16	1.0698	1.1103	.5207	.5387	38			1.3940	1.4172	60	2.9972	3.0711
17	1.1519	1.1936	.5564	.5744	39			1.4409	1.4645	61	3.1582	3.2453
18	1.2367	1.2798	.5924	.6105	40			1.4887	1.5129	62	3.3528	3.4602
19	1.3245	1.3692	.6285	.6468	41			1.5378	1.5625	63	3.6036	3.7470
20	1.4159	1.4625	.6651	.6834	42			1.5880	1.6134	64	3.9738	4.2006
21	1.5113	1.5601	.7019	.7203	43			1.6395	1.6657			
22	1.6115	1.6628	.7389	.7575	44			1.6926	1.7194			

## 2) Número de níveis de quantização é grande:

■  $\Rightarrow p_u(u)$  “constante” por partes (constante dentro do intervalo)

■  $\Rightarrow p_u(u) = p_u(\hat{t}_j), \quad \hat{t}_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \quad t_j \leq u < t_{j+1}$

■  $\Rightarrow$

$$t_{k+1} = \frac{A \int_{t_1}^{z_k + t_1} [p_u(u)]^{-\frac{1}{3}} du}{\int_{t_1}^{t_{L+1}} [p_u(u)]^{-\frac{1}{3}} du} + t_1$$

■  $\Rightarrow$

$$\varepsilon = \frac{1}{12L^2} \left( \int_{t_1}^{t_{L+1}} [p_u(u)]^{\frac{1}{3}} du \right)^3 \Rightarrow \text{distorção}$$

■  $A = t_{L+1} - t_1, \quad z_k = \left(\frac{k}{L}\right) A, \quad k = 1, \dots, L.$

# Quantizador Ótimo para Densidades Uniformes

$$p_u(u) = \begin{cases} \frac{1}{t_{L+1}-t_1}, & t_1 \leq u < t_{L+1} \\ 0, & n.d.p. \end{cases}$$

$$r_k = \frac{t_{k+1}^2 - t_k^2}{2(t_{k+1} - t_k)} = \frac{t_{k+1} + t_k}{2}, \quad t_k = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$$

$$t_k = \frac{t_{k+1} + t_k + t_k + t_{k-1}}{4} \Rightarrow t_k = \frac{t_{k+1} + t_{k-1}}{2}$$

$$\Rightarrow t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k = \text{constante} = q$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{t_{L+1} - t_1}{L}, \quad t_k = t_{k-1} + q, \quad r_k = t_k + \frac{q}{2}} \Rightarrow \text{uniformemente espaçado!}$$

$e = u - u' \Rightarrow$  uniformemente distribuído em  $(-\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$

$$\varepsilon = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} u^2 du = \frac{q^2}{12}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{A^2}{12} = \frac{(t_{L+1} - t_1)^2}{12} \Rightarrow SNR = \frac{\sigma_u^2}{\varepsilon} = \frac{A^2}{q^2} = \left(\frac{A}{q}\right)^2$$

$$B \text{ bits} \Rightarrow A = 2^B q \Rightarrow SNR = 2^{2B} \Rightarrow \boxed{SNR_{dB} = 6BdB}$$

# Propriedades do Quantizador Ótimo

- 1  $E[u'] = E[u] \Rightarrow u'$  é “unbiased estimate” de  $u$ .
- 2  $E[(u - u')u'] = 0 \Rightarrow$  erro é ortogonal à saída do quantizador.
- 3  $\sigma_{u'}^2 = [1 - f(B)]\sigma_u^2$
- 4 Basta projetar quantizadores para distribuições com média zero e variância unitária.

## Provas

1. Se  $p_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_u(u) du = P[r = r_k]$

$$\begin{aligned} E[u] &= E[E[u|u \in \mathcal{I}_k]] = \sum_{k=1}^L \left( \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} u p_u(u) du}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} p_u(u) du} \right) p_k \\ &= \sum_{k=1}^L \int_{t_k}^{t_{k+1}} u p_u(u) du = \int_{t_1}^{t_{L+1}} p_u(u) du = E[u] \end{aligned}$$



$$2. E[uu'] = \int_{t_1}^{t_{L+1}} uu' p_u(u) du = \sum_{k=1}^L \int_{t_k}^{t_{k+1}} uu' p_u(u) du = \sum_{k=1}^L \int_{t_k}^{t_{k+1}} ur_k p_u(u) du$$

$$= \sum_{k=1}^L r_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} u p_u(u) du = \sum_{k=1}^L r_k r_k p_k = \sum_{k=1}^L p_k r_k^2 = E[u'^2]$$

$$\Rightarrow E[uu' - u'^2] = 0 \Rightarrow E[(u - u')u'] = 0$$

$\Rightarrow$  se  $\eta = u - u' \Rightarrow u = u' + \eta$ ,  $\eta$  e  $u'$  são **descorrelatados**.

$$\sigma_\eta^2 = E[(u - u')^2] = E[u^2] - 2E[uu'] + E[u'^2] = E[u^2] - E[u'^2]$$

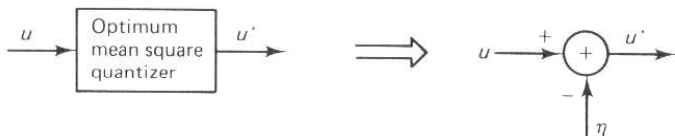
$$\Rightarrow \sigma_\eta^2 = \sigma_u^2 - \sigma_{u'}^2$$

3. Como  $\sigma_\eta^2 \leq \sigma_u^2 \Rightarrow \sigma_\eta^2 = \sigma_u^2 f(B)$ ,  $f(B) \leq 1 \Rightarrow \sigma_{u'}^2 = \sigma_u^2 (1 - f(B))$ .

também:  $E[u\eta] = E[u(u - u')] = E[u^2] - E[uu'] = E[u^2] - E[u'^2] = \sigma_\eta^2$

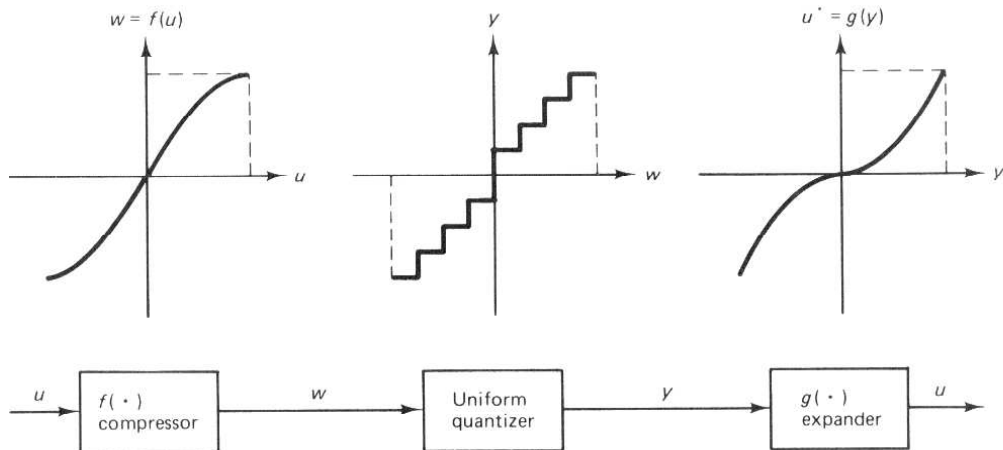
⇒ Isto implica que a quantização equivale a “**subtrair**” um ruído (potência diminui).

■ Notar a diferença do caso usual, quando **somamos** um ruído (potência aumenta).

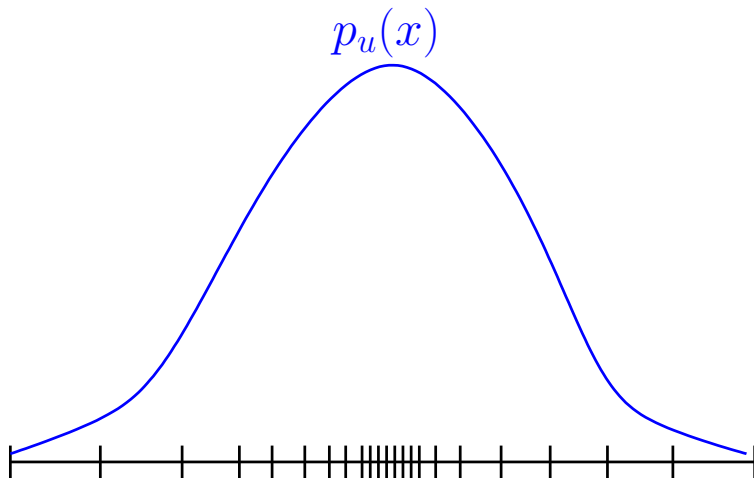


$$\begin{aligned} u &= u' + \eta \\ E[u' \eta] &= 0 \\ E[u\eta] &= E[\eta^2] \end{aligned}$$

# Compandors



Compressor:



$$f(x) = \frac{2a \int_{t_1}^x [p_u(u)]^{\frac{1}{3}} du}{\int_{t_1}^{t_{L+1}} [p_u(u)]^{\frac{1}{3}} du} - a, \quad g(x) = f^{-1}(x)$$

$\Rightarrow [-a, a]$  é a faixa dinâmica do quantizador.

$p_u(u)$  par:

$$f(x) = \frac{a \int_0^x [p_u(u)]^{\frac{1}{3}} du}{\int_0^{t_{L+1}} [p_u(u)]^{\frac{1}{3}} du}, \quad x \geq 0$$

$$f(x) = -f(-x), \quad x < 0$$

## Observações:

❶ A variável  $w(f(x))$  não fica uniformemente distribuída.

$$\text{❷ } \varepsilon = \frac{1}{12L^2} \left( \int_{t_1}^{t_{L+1}} [p_u(u)]^{\frac{1}{3}} du \right)^3$$

❸  $t_1$  e  $t_{L+1}$  não precisam ser finitos.

❹ Implementação usa dispositivos analógicos não-lineares e conversores A/D.

❺ Equivalente a um quantizador uniforme com níveis:

$$\begin{cases} t_k = g(kq), & t_{-k} = -t_k, & k = 0, \dots, \frac{L}{2} \\ r_k = g((k - \frac{1}{2})q), & r_{-k} = -r_k, & k = 1, \dots, \frac{L}{2} \end{cases} \quad p_u(u) \text{ par.}$$

# Quantizador Uniforme Ótimo para Densidades Não Uniformes

$L$  níveis, passo  $q$ .

Seja  $p_u(u)$  par,  $2a = Lq$ .

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{-a+q} (u-r_1)^2 p_u(u) du + \sum_{j=2}^{L-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u-r_j)^2 p_u(u) du + \int_{a-q}^{\infty} (u-r_L)^2 p_u(u) du$$

$$= \sum_{j=2}^{L-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u-r_j)^2 p_u(u) du + 2 \int_{a-q}^{\infty} (u-r_L)^2 p_u(u) du$$

como  $t_j = -\frac{L}{2} + (j-1)q = -a + (j-1)q$ . Então:

$$\varepsilon = 2 \sum_{j=1}^{\frac{L}{2}-1} \int_{(j-1)q}^{jq} \left( u - \frac{(2j-1)q}{2} \right)^2 p_u(u) du + 2 \int_{(\frac{L}{2}-1)q}^{\infty} \left( u - \frac{(L-1)q}{2} \right)^2 p_u(u) du$$

Projeto o quantizador fazendo  $\frac{d\varepsilon}{dq} = 0$

## Comparações:

- Gaussiana:  $B_s = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma^2}{D}$ , ou  $D = \sigma^2 2^{-2B_s}$  (Shannon Lower Bound)
  - Bloco infinito quantizado conjuntamente (Shannon Quantizer).
  - Limite superior na distorção obtido com o Shannon Quantizer.
- Quantizadores com memória zero (1D): Em geral, não conseguem distorção abaixo do Shannon Upper Bound.
- Quantizador uniforme ótimo para densidades uniformes: Possui distorção igual à do Shannon Upper Bound.
- A taxa do Shannon quantizer é, na prática, a menor taxa obtível com um quantizador de memória zero para qualquer densidade de probabilidade
- A seguir é apresentada uma tabela com os quantizadores uniformes ótimos de números de níveis entre 2 e 36, 64, 128, 256 e 512, para densidades gaussiana e laplaciana de média zero e variância unitária.



**TABLE 4.3** Optimum Uniform Quantizers for Zero Mean, Unity Variance Gaussian, and Laplacian Densities

No. of Output levels	Gaussian			Laplacian		
	Step size	M.S.E.	Entropy	Step size	M.S.E.	Entropy
2	1.596	.363	1.00	1.414	.500	1.00
3	1.224	.190	1.54	1.414	.264	1.32
4	.996	.119	1.90	1.087	.196	1.75
5	.843	.082	2.18	1.025	.133	1.86
6	.733	.070	2.41	.871	.110	2.13
7	.651	.049	2.60	.822	.083	2.21
8	.586	.037	2.76	.731	.072	2.39
9	.534	.031	2.90	.694	.058	2.46
10	.491	.026	3.03	.633	.051	2.60
11	.455	.022	3.15	.605	.043	2.66
12	.424	.019	3.25	.561	.039	2.78
13	.397	.016	3.35	.539	.034	2.83
14	.374	.015	3.44	.506	.031	2.93
15	.353	.013	3.52	.487	.027	2.98
16	.335	.012	3.60	.461	.025	3.06
17	.319	.010	3.68	.445	.023	3.11
18	.304	.009	3.75	.424	.021	3.18
19	.291	.009	3.81	.411	.019	3.22
20	.279	.008	3.87	.394	.018	3.29

21	.268	.007	3.93	.383	.017	3.33
22	.258	.007	3.99	.368	.016	3.39
23	.248	.006	4.04	.358	.014	3.42
24	.240	.006	4.10	.346	.014	3.48
25	.232	.005	4.15	.337	.013	3.51
26	.224	.005	4.19	.326	.012	3.56
27	.217	.005	4.24	.318	.011	3.59
28	.211	.004	4.29	.309	.011	3.64
29	.204	.004	4.33	.302	.010	3.67
30	.199	.004	4.37	.294	.010	3.71
31	.193	.004	4.41	.287	.009	3.74
32	.188	.003	4.45	.280	.009	3.78
33	.183	.003	4.49	.274	.008	3.81
34	.179	.003	4.52	.268	.008	3.85
35	.174	.003	4.56	.263	.008	3.87
36	.170	.003	4.59	.257	.007	3.91
64	.104	.001	5.31	.166	.003	4.54
128	.057	.00030	6.18	.100	.001	5.32
256	.030	.00004	7.07	.055	.0003	6.15
512	.017	.00002	7.97	.031	.00009	6.96

# Entropia da Saída Vs. Distorção

- **Quantizador Ótimo do ponto de vista de taxa  $\times$  distorção:** Quantizador que minimiza a distorção dada uma entropia.
  - **Quantizador Uniforme Ótimo com entropy coding:** melhor que quantizador não uniforme ótimo sem entropy coding.
  - **Quantizador Uniforme:** Bem próximo do ótimo segundo o critério Entropia X MSE (desde que o “stepsize” seja otimizado de acordo com este critério).
- ⇒ Na prática: Projeto de quantizadores uniformes consiste em achar  $L$  (número de níveis) e  $A$  (faixa dinâmica).

## Modelos Analíticos para Quantizadores Práticos

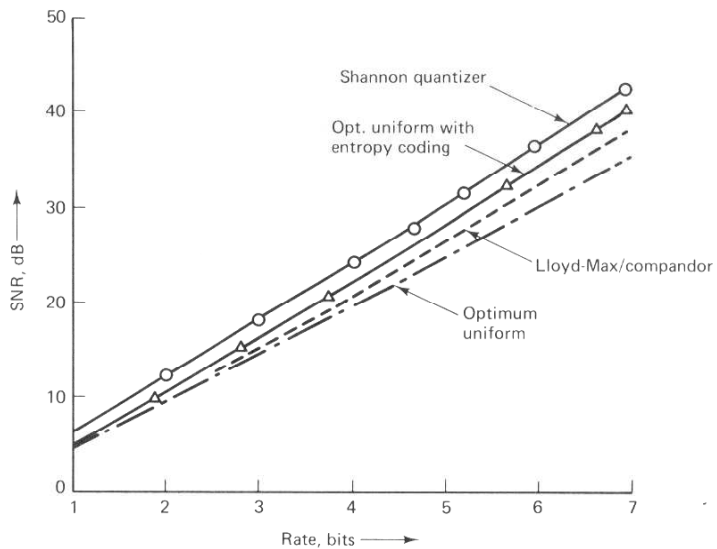
$$D = \sigma^2 f(B), \quad f(B) = a 2^{-bB}$$

Exemplo: Shannon  $D_1 = 2^{-2B_1}$

Mean Square,  
Gaussian,  
B grande,  
Zero Memory

$$\Rightarrow D_2 = 2.26(2^{-1.963B_2})$$

$$\Rightarrow D_1 = D_2 \Rightarrow B_2 = B_1 + 0.5$$



## Quantização de Variáveis Aleatórias Gaussianas Complexas

$$z = x + jy, \quad x, y \text{ iid v.a. Gaussianas}$$

$\Rightarrow$  não é ótimo quantizar  $x$  e  $y$  independentemente.

$$z = Ae^{j\theta} \quad A = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$A : \text{Rayleigh} \quad p_A(A) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}, & A > 0 \\ 0, & A < 0 \end{cases}$$

$\theta$  : uniforme

Quantizando  $A$  independente de  $\theta$ :

A:  $v_k$  níveis de decisão                       $\theta : L_1$  níveis  
      $w_k$  níveis de reconstrução               $A : L_2$  níveis

Quantizando  $A$  e  $\theta$  conjuntamente:

A:  $t_k = v_k$                       para  $L_2$  grande, são iguais  
      $r_k = w_k \text{sinc}\left(\frac{1}{L}\right)$                $(\text{sinc}\left(\frac{1}{L}\right) \rightarrow 1)$

# Quantização Visual

- Abaixo de 5 a 6 bits/pixel, nota-se falsos contornos, bastante incomodativos à visão.
- 8 bits: indistinguível pelo olho humano (256 níveis são suficientes)
- Necessidade de um sistema de quantização visual que mantenha os contornos abaixo do limite de visibilidade.

## 1. Quantizar o Contraste

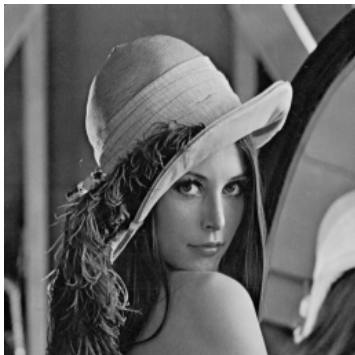
$$c = \alpha \ln(1 + \beta u) \quad 0 \leq u \leq 1$$
$$c = \alpha u^\beta$$

⇒ Mudança de 2% no contraste é “just noticeable” ⇒ 50 níveis de contraste (6 bits)

⇒ Com quantizador ótimo, 4 a 5 bits seriam suficientes.



## 2. Quantização com Ruído Pseudo-Aleatório (Dithering)





- ⇒ O ruído “quebra” os contornos.
- ⇒ Sem contornos com  $\approx 3$  bits/pixel.
- ⇒ Posso não remover o ruído.

## “Halftoning”









- O olho humano vê tons de cinza porque faz filtragem passa baixa.
- Ruído Aleatório  $\times$  Padrões Periódicos (na prática)
- Padrões de Moiré ocorrem se a imagem e o padrão possuem periodicidades próximas.

## Quantização de Cores

- Ideal: Quantização vetorial no espaço de cores.
- Na prática: transformação para espaço de cores mais uniforme perceptualmente.