Processamento Digital de Imagens

Sinais Aleatórios

Eduardo A. B. da Silva
Programa de Engenharia Elétrica - COPPE/UFRJ
Laboratório de Sinais, Multimídia e Telecomunicações
eduardo@smt.ufrj.br

Sergio L. Netto
Programa de Engenharia Elétrica - COPPE/UFRJ
Laboratório de Sinais, Multimídia e Telecomunicações
sergioln@smt.ufrj.br

Abril de 2017

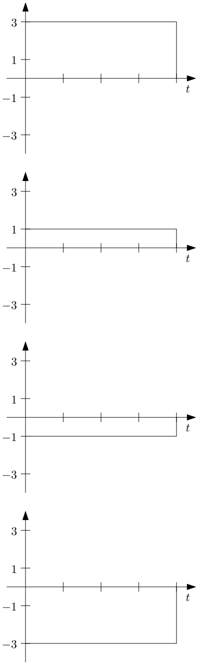
Sumário

1. Sinais Aleatórios
    - Campos Aleatórios Discretos
    - Função Densidade Espectral
    - Resultados da Teoria da Estimação
    - Alguns Resultados da Teoria da Informação

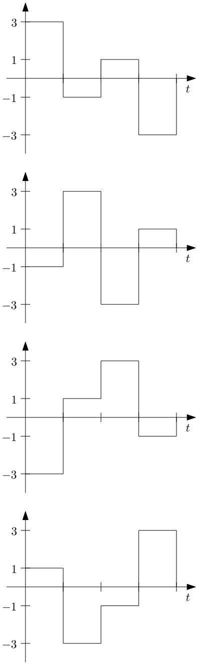
Sinais Aleatórios

- Na maioria das aplicações, não conhecemos a priori o sinal que vamos processar.
  - Por exemplo, em transmissão, se o sinal for conhecido a priori, não é necessário transmití-lo.
- Nestes casos, para projetar um sistema, precisamos conhecer as propriedades da classe de sinais em que estamos interessados como um todo.
- Uma boa maneira de fazer isto é usar a estatística.
- Usar a estatística significa saber a probabilidade de ocorrência de cada sinal em particular.
- Um sinal aleatório pode ser definido como uma sequência de variáveis aleatórias $u(n)$.
  - Variável aleatória: função que associa um número a um evento.

- Por exemplo, uma imagem pode ter pixels variando entre 0 e 255, de 1 em 1.
  - Se ela tiver dimensões pequenas, como, por exemplo, 256×256, ela vai ter $256^2 = 65536$ pixels.
  - Como cada pixel pode ter 256 valores diferentes, pode haver $256^{65536} \approx 10^{157826}$ imagens diferentes.
- Para estimar a probabilidade de cada imagem 256×256 teríamos que observar imagens de modo a preencher um histograma com aproximadamente 10^{157826} que é um número com 157826 zeros.
  - Considerando que estima-se que o universo tenha apenas aproximadamente 10^{80} partículas elementares, esta tarefa é impraticável sob quaisquer aspectos!
- Neste caso, temos que fazer medidas mais simples do que achar a probabilidade de cada sinal possível. As mais intuitivas são:
  - **Média:** $\mu_u(n) \triangleq \mu(n) = E[u(n)]$ (cada n pode ter uma média diferente)
  - **Variância:** $\sigma_u(n) = \sigma(n) = E[|u(n) - \mu(n)|^2]$
- Entretanto, a média e a variância muitas vezes não dão informação completa sobre a dinâmica de um conjunto de sinais.



$\mu = 0 \quad \sigma^2 = 5 \quad \forall t$



$\mu = 0 \quad \sigma^2 = 5 \quad \forall t$

- Notamos que os conjuntos de sinais da esquerda e da direita possuem características claramente diferentes, mas ambos têm média zero e variância 5, para qualquer instante de tempo.
- Outras medidas são necessárias nestes casos, as mais intuitivas sendo:
  - **Covariância:**
    $\text{cov}[u(n), u(n')] = r_u(n, n') = r(n, n') = E[(u(n) - \mu(n))(u^*(n') - \mu^*(n'))]$
  - **Covariância cruzada:**
    $\text{cov}[u(n), v(n')] = r_{uv}(n, n') = E[(u(n) - \mu_u(n))(v^*(n') - \mu_v^*(n'))]$
  - **Autocorrelação:** $a_{uu}[n, n'] = a(n, n') = E[u(n)u^*(n')] = r(n, n') + \mu(n)\mu^*(n')$
  - **Correlação cruzada:** $a_{uv}[n, n'] = E[u(n)v^*(n')] = r_{uv}(n, n') + \mu_u(n)\mu_v^*(n')$

- Para um vetor $\mathbf{u}$, $N \times 1$, definimos:
  - $E[\mathbf{u}] = \boldsymbol{\mu} = \{\mu(n)\}$, vetor $N \times 1$
  - $\mathrm{cov}[\mathbf{u}] = E[(\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{u}^* - \boldsymbol{\mu}^*)^T] \triangleq \mathbf{R_u} \triangleq \mathbf{R} = \{r(n, n')\})$, matriz $N \times N$
  - $\mathrm{cov}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = E[(\mathbf{u} - \boldsymbol{\mu}_u)(\mathbf{v}^* - \boldsymbol{\mu}_v^*)^T] \triangleq \mathbf{R_{uv}} \triangleq \mathbf{R} = \{r_{uv}(n, n')\})$, $N \times N$
- **Função densidade de probabilidade:** $p_u(u)$ tal que $P[x \leq u \leq x + dx] = p_u(x)dx$
- **Gaussiana:**

$$p_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- **Laplaciana:**

$$p_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{|u-\mu|\sqrt{2}}{\sigma}}$$

- **Processos Gaussianos:**

$$p_u(\mathbf{u}) = p_u(u_1, u_2, \cdots, u_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\mu})^{*t}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}-\boldsymbol{\mu})}$$

$\Rightarrow$ Qualquer subsequência é gaussiana.

- **Processos estacionários.**

$\Rightarrow$ No **sentido estrito**: $u(n)$ tal que a densidade conjunta de qualquer subsequência é a mesma da sequência deslocada, ou seja, $\{u(l), 1 \leq l \leq k\}$ possui a mesma p.d.f. que $\{u(l+m), 1 \leq l \leq k\}, \forall m, \forall k$.

$\Rightarrow$ No **sentido amplo**: $\begin{cases} E[u(n)] = \text{constante} \\ E[u(n)u^*(n')] = r(n-n') \end{cases}$

sentido amplo $\rightarrow$ sentido estrito, **mas** sentido estrito $\rightarrow$ sentido amplo **só para processos gaussianos**

$$r(n) = \text{cov}[u(n), u(0)] = \text{cov}[u(n+n'), u(n')], \forall n', n.$$

$$\begin{cases} r(n, n') = r^*(n', n) \\ \displaystyle\sum_n \sum_n x(n) r(n, n') x^*(n') \geq 0, \quad x(n) \neq 0, \forall n \end{cases}$$

- **Processo de Markov:**

$$P[u(n)|\underbrace{u(n-1), u(n-2), \cdots}_{\text{todo o passado}}] =$$

$$P[u(n)|\underbrace{u(n-1), u(n-2), \cdots, u(n-p)}_{\text{p amostras passadas}}] \quad \text{(Markov de ordem p)}$$

- **Exemplo:** Processo estacionário de markov de primeira ordem
$r(n) = \rho^{|n|}, \quad |\rho| < 1, \quad \forall n \quad$ (bom modelo para linhas de imagens)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{(toepliz)}$$

- **Ortogonalidade e Independência**
Independência: $p_{x,y}(x,y) = p_x(x)p_y(y)$
Ortogonalidade: $E[xy^*] = 0$
Descorrelação: $E[xy^*] = E[x]E[y^*], \quad$ ou $\quad E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)^*] = 0$

Campos Aleatórios Discretos

- **Imagens:** Enorme número de variáveis aleatórias ($512 \times 512 = 262.144$ v.a.)

  $\Rightarrow$ Não é praticável medir ou especificar densidades conjuntas.

  $\Rightarrow$ Especificar somente 1^o e 2^o momentos (médias e covariâncias).

- $E[u(m,n)] = \mu(m,n)$

- $\text{cov}[u(m,n), u(m',n')] = E[(u(m,n) - \mu(m,n))(u^*(m',n') - \mu^*(m',n'))] = r(m,n;m',n')$

- Caso estacionário (sentido amplo): $\begin{cases} \mu(m,n) = \mu = \text{constante} \\ r(m,n;m',n') = r(m-m';n-n') \end{cases}$

- Abuso de notação: $r(m,n) = \text{cov}[u(m,n), u(0,0)] = \text{cov}[u(m+m', n+n'), u(m',n')]$

- O campo aleatório $x(m,n)$ é ruído branco se quaisquer dois elementos diferentes $x(m,n)$ e $x(m',n')$ são descorrelatados: $r_x(m,n;m',n') = \sigma_x^2(m,n)\delta(m-m',n-n')$
- Um campo aleatório é Gaussiano se qualquer segmento do campo definido numa malha finita é gaussiano.
- **Simetria e não-negatividade:** $r(m,n;m',n') = r(m',n';m,n)$

$$\sum_m \sum_{m'} \sum_n \sum_{n'} x(m,n) r(m,n;m',n') x^*(m',n') \geq 0, \quad x(m,n) \geq 0, \forall m,n$$

- **Covariâncias separáveis e isotrópicas**

Separável: $r(m,n;m',n') = r_1(m,m')r_2(n,n')$ não-estacionário
$r(m,n) = r_1(m)r_2(n)$ estacionário

Modelo separável muito usado em processamento de imagens:

$$\begin{cases} r(m,n) = \sigma^2 \rho_1^{|m|} \rho_2^{|n|} & |\rho_1| < 1, \quad |\rho_2| < 1 \\ \sigma^2 : \text{ variância do campo aleatório} \\ \rho_1 = \dfrac{r(1,0)}{\sigma^2} \qquad \rho_2 = \dfrac{r(0,1)}{\sigma^2} \end{cases}$$

Modelo mais realista (mas menos tratável) para muitas imagens (isotrópico, não-separável):

$$\begin{cases} r(m,n) = \sigma^2 e^{-\sqrt{\alpha_1 m^2 + \alpha_2 n^2}} & \alpha_1 = -\ln \rho_1, \quad \alpha_2 = -\ln \rho_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \Rightarrow r(m,n) = \sigma^2 \rho^d & d = \sqrt{m^2 + n^2}, \qquad \rho = e^{-|\alpha|} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ para muitas imagens, $\rho_1, \rho_2 \simeq 0.95$

Função Densidade Espectral

$$S_u(z) \triangleq S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_u(n) z^{-n}$$

Densidade espectral de potência: $$\begin{cases} S_u(\omega) = S_u(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_u(n) e^{-j\omega n} \\ r_u(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S_u(\omega) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

2 dimensões:

$$\begin{cases} S_u(z_1, z_2) \triangleq S(z_1, z_2) \triangleq \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_u(m, n) z_1^{-m} z_2^{-n} \\ S_u(\omega_1, \omega_2) \triangleq S_u(z_1, z_2)\Big|_{z_1=e^{j\omega_1}, z_2=e^{j\omega_2}} = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_u(m, n) e^{-j\omega_1 m} e^{-j\omega_2 n} \\ r_u(m, n) = \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(\omega_1 \omega_2) e^{j\omega_1 n + j\omega_2 m} d\omega_1 d\omega_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_u^2 = E[|u(m,n) - \mu|^2] = r_u(0,0) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_u(\omega_1\omega_2)d\omega_1 d\omega_2$$

- $S(\omega_1, \omega_2) = S^*(\omega_1, \omega_2)$ (pois $r(m,n) = r^*(-m,-n)$)
- $S(\omega_1, \omega_2) \geq 0, \quad \forall \omega_1, \omega_2$
- $x(m,n) \longrightarrow \boxed{H(\omega_1, \omega_2)} \longrightarrow y(m,n) \qquad S_y(\omega_1, \omega_2) = |H(\omega_1, \omega_2)|^2 S_x(\omega_1, \omega_2)$
- **Exemplo 1:**

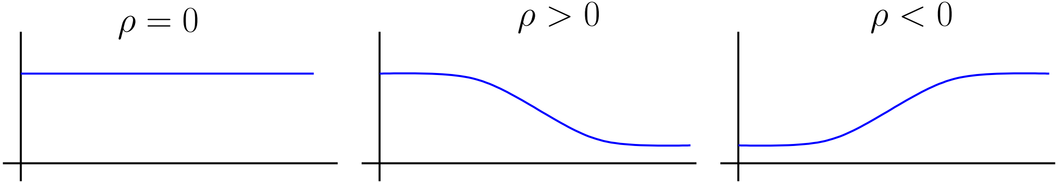
  $r(m,n) = \sigma^2 \delta(m,n)$ (ruído branco)

  $S(\omega_1, \omega_2) = \sigma^2$

- **Exemplo 2:**

$$r(m,n) = \sigma^2 \rho_1^{|m|} \rho_2^{|n|}$$

$$S(\omega_1,\omega_2) = \frac{\sigma^2(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)}{(1+\rho_1^2 - 2\rho_1 \cos\omega_1)(1+\rho_2^2 - 2\rho_2 \cos\omega_2)} = S_1(\omega_1)S_2(\omega_2)$$



- **Resultados da Teoria da Estimação:**

  $\{y(n), 1 \leq n \leq N\} \Rightarrow$ observações

  $x \Rightarrow$ variável aleatória que se quer estimar.

  $\Rightarrow \hat{x}$ tal que $\sigma_\varepsilon^2 = E[(x - \hat{x})^2]$ é mínimo.

  $$\Rightarrow \hat{x} = E[x|\mathbf{y}] \triangleq E[x|y(1), y(2), \cdots, y(N)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon p_{x|y}(\varepsilon) d\varepsilon$$

  $$E[\hat{x}] = E[E(x|\mathbf{y})] = E[x]$$

- **Princípio da ortogonalidade:**

  $\forall g(\mathbf{y})$, se $\hat{x}$ é o estimador ótimo (MSE), então $E[(x - \hat{x})g(\mathbf{y})] = 0$.

  Prova:

  $$E[\hat{x}g(\mathbf{y})] = E[E(x|\mathbf{y})g(\mathbf{y})] = E[E(xg(\mathbf{y}))|\mathbf{y})] = E[xg(\mathbf{y})]$$

  $$\Rightarrow \begin{cases} E[(x-\hat{x})\hat{x}] = 0 \\ E[(x-\hat{x})g(\hat{x})] = 0 \end{cases} \qquad \text{pois } \hat{x} \text{ também é uma função de } \mathbf{y}$$

- **Melhor estimador linear:**

$$\hat{x} = \sum_{n=1}^{N} \alpha(n) y(n)$$

$\alpha(k)$ tal que $E[(x - \hat{x})^2]$ é minimizado

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \alpha(k) E[y(k)y(n)] = E[xy(n)] \Rightarrow \mathbf{R}_y \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}_{xy}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{r}_{xy}$$

$\mathbf{r}_{xy} : N \times 1$
$\boldsymbol{\alpha} : N \times 1$
$\mathbf{R}_y : N \times N$

$\sigma_\varepsilon = \sigma_x^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_{xy} \Rightarrow$ erro mínimo

$\Rightarrow$ Exato para variáveis gaussianas de média zero, melhor estimativa baseada no MSE para variáveis não-gaussianas.

Média $\neq 0 \Rightarrow \hat{x} - \mu_x = \sum_{n=1}^{N} \alpha(n)[y(n) - \mu_y(n)]$

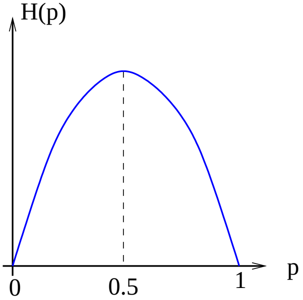
$\Rightarrow$ Mesmo resultado, só que $\mathbf{R}_y$ e $\mathbf{r}_{xy}$ são matrizes de covariância e covariância cruzada.

Alguns Resultados da Teoria da Informação

- **Informação:** $I_k = -\log_2 p_k$ (bits) (p_k é a probabilidade do símbolo k, isto é, $\sum_{k=1}^{L} p_k = 1$)
- **Entropia:** Informação média $H = -\sum_{k=1}^{L} p_k \log_2 p_k$ (bits/mensagem)

  L símbolos: entropia máxima $= -\sum_{k=1}^{L} \frac{1}{L} \log_2 \frac{1}{L} = \log_2 L$ bits.
- **Shannon:** Fonte com entropia H Codifica-se sem distorção com $H + \varepsilon$ bits, $\varepsilon \to 0$
  Codifica-se com H bits, e distorção $\to 0$

- **Ex:** 2 símbolos $H = -p \log p - (1-p)\log(1-p)$



- **"Rate-Distortion Function"**

  $\Rightarrow$ Conversão A/D: quanto mais bits, menos distorção.

  $\Rightarrow$ $R_D(x)$: menor número de bits necessário para atingir uma distorção D.

  $\Rightarrow$ x reproduzido com valor y: $D = E[(x-y)^2]$

Para variáveis gaussianas:

$$R_D = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma^2}{D}\right), & D \leq \sigma^2 \\ 0, & D > \sigma^2 \end{cases} \tag{1}$$

$$= \max\left[0, \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma^2}{D}\right)\right] \tag{2}$$

"Justificativa grosseira": sinal com $\begin{cases} \text{energia} = \sigma^2 \Rightarrow \text{“amplitude”}\ \sigma \\ \text{distorção}\ D \Rightarrow \text{“amplitude” do erro}\ \sqrt{D} \end{cases}$

Intervalo entre passos de quantização $\sqrt{D} \Rightarrow$ número de níveis $= \frac{\sigma}{\sqrt{D}}$
$\Rightarrow 2^{R_D} = \frac{\sigma}{\sqrt{D}} \Rightarrow R_D = \frac{1}{2}\log_2\frac{\sigma}{\sqrt{D}}$

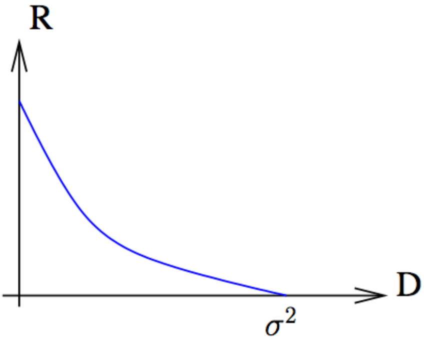
se $\sigma^2 < D, \quad R_D = 0$ (não preciso transmitir nada)

- Sejam $\{x(0), x(1), \cdots, x(N-1)\}$, v.a. gaussianas, codificadas independentemente, e $\{y(0), y(1), \cdots, y(N-1)\}$ seus valores reproduzidos. Então:

$$D = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E\left[(x(k) - y(k))^2\right]$$

$$\begin{cases} R_D = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \max\left[0, \dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{\sigma_k^2}{\theta}\right] \\ D = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \min\left[0, \sigma_k^2\right] \end{cases}$$

$\boxed{\text{Resolução do sistema de equações}}$


R
D
σ^2