Relatório - Iniciação científica

Mateus Scheffer Mendes Maziviero Dolce
Orientadora: Profa. Dra. Aline Duarte de Oliveira

14 de novembro de 2025

1 Introdução

O cérebro é uma rede complexa com grande número de componentes, os *neurônios*. Ao olhar para evidências empíricas, estas sugerem ambos que o cérebro pode ser representado por meio de distribuições de probabilidade e que ele processa informação através de inferências probabilísticas. Justifica-se, assim, uma abordagem probabilística na modelagem de redes neurais. Realizaremos esta abordagem através do modelo proposto por Galves and Löcherbach 2013.

A dinâmica de cada neurônio depende da atividade passada de seus neurônios pré-sinápticos, o que torna as cadeias interagentes, considerando apenas os disparos ocorridos após o seu último disparo. Em outras palavras, cada neurônio reinicia sua memória a cada disparo. Essa característica, biologicamente motivada, implica que o sistema possui memória de comprimento variável de acordo com o histórico de disparos.

2 Modelo

2.1 Definição geral

Seja $I = \{1, 2, \dots, N\}$, com $N \in \mathbb{N}$, um conjunto finito de neurônios. Cada neurônio $i \in I$ é descrito por uma sequência de disparos ao longo do tempo. Seja $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ uma cadeia estocástica, assumindo valores em $\{0,1\}^t$, definida em um espaço de probabilidade adequado $(\omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, onde

$$X_t(i) = \begin{cases} 1 \text{ se i disparou no tempo t} \\ 0 \text{ se i } \textbf{não} \text{ disparou no tempo t.} \end{cases}$$

Para cada $t \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{F}_t$ a σ-álgebra gerada por todos os neurônios do sistema e todos os eventos passados até o tempo t, ou seja, $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s(i) : s \leq t, i \in I)$, e defina o tempo do último disparo do neurônio i antes de t, dado por

$$L_t^i = sup\{s \leq t : X_s(i) = 1\},$$

Com a convenção $L_t^i = -1$ quando $sup(\emptyset)$.

Considerando a cadeia $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $X_t(i)$ e $X_t(j)$ são independentes $\forall (i,j) \in I^2 : i \neq j$ e $t \in \mathbb{N}$.

Considere $V_t(i)$ uma variável aleatória que descreve o potencial do neurônioq i no tempo t e seja φ uma função não decrescente que associa $V_t(i)$ à probabilidade de ocorrência de um disparo de i no tempo $t+1$. Como φ representa uma função de probabilidade de disparo, $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ e $X_{t+1}(i) \sim \beta\big(\varphi(V_t(i))\big)$.

Basta agora definir $V_s(i)$ em termos de $(X_t)_{t\leq s}$. Sendo $W_{j\to i}$ o peso que representa a influência do disparo de j em i, com $(j,i) \in I^2 : j \neq i$, e g uma função de vazamento como descrito por Galves and Löcherbach 2013, definimos

$$V_t(i) = \begin{cases} \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^{t} g(t-s)\cdot W_{j\to i}\cdot X_s(j), \text{ se } t > L_t^i \\ 0, \text{ se } t = L_t^i \end{cases} \tag{1}$$

2.2 Propriedades markovianas

Suponha que i não tenha disparado no tempo t, então, por (1),

$$\begin{aligned} V_t(i) &= \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^{t} g(t-s)\cdot W_{j\to i}\cdot X_s(j) \\ &= \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^{t-1} g(t-s)\cdot W_{j\to i}\cdot X_s(j) + \sum_{j\in I\setminus\{i\}} g(0)\cdot W_{j\to i}\cdot X_s(j), \end{aligned}$$

suponha também que g é tal que a propriedade $g(t) = g(t-s)g(s)$ é válida $\forall (t,s)\in\mathbb{N}^2 : s < t$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_t(i) &= g(1)\sum_{j\in I\setminus\{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^{t-1} g(t-1-s)\cdot W_{j\to i}\cdot X_s(j) + \sum_{j\in I\setminus\{i\}} g(0)\cdot W_{j\to i}\cdot X_s(j) \\ &= g(1)V_{t-1}(i) + \sum_{j\in I\setminus\{i\}} g(0)\cdot W_{j\to i}\cdot X_s(j). \end{aligned}$$

Para que g possua a propriedade necessária, deverá seguir uma função exponencial de Cauchy, analisada em Sahoo and Kannappan 2011. Então, g é na forma ρ^x. Como g é uma função de vazamento, $g:\mathbb{R}\to[0,1]$, logo $\rho\in[0,1]$. Por fim, teremos

$$V_t(i) = \rho V_{t-1}(i) + \sum_{j\in I\setminus\{i\}} W_{j\to i}\cdot X_s(j). \tag{2}$$

2.3 Definição da φ

Fixado N e ρ, resta encontrar uma função φ adequada. Como queremos que φ seja não decrescente e com contradomínio $[0,1]$, uma sigmoide se apresenta como um ótimo candidato. Então, teremos

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}}. \tag{3}$$

Buscando simplificar a função φ tendo certo controle de seu aspecto, optamos por f ser um polinômio de grau 1. Desta forma, $f(x) = \frac{x}{a} - b$, com a controlando a inclinação da sigmoide e b, o deslocamento horizontal.

Seja ϵ a probabilidade de disparo espontâneo, isto é, com potencial do neurônio em questão zerado.

$$\epsilon = \varphi(0) = \frac{1}{1+e^{-(0/a-b)}} = \frac{1}{1+e^{0+b}} = \frac{1}{1+e^b}$$
$$\Rightarrow b = ln\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right). \tag{4}$$

Seja p_{w^+} e p_{w^-} a variação de potencial positiva e negativa, respectivamente, esperada em um neurônio j de cada $i \in I : i \neq j$, caso i dispare. Desta forma, a variação de potencial esperada em j é

$$(p_{w^+} - p_{w^-})(N-1),$$

no caso extremal onde todos os demais neurônios disparem. Então, com o intuito de compensar esta variação, tomaremos um $a = (p_{w^+} - p_{w^-})(N-1)$ inicial.

3 Simulação

Para simular o modelo estocástico a tempo discreto descrito em 2, um algoritmo foi desenvolvido para gerar a sequência de n disparos em uma rede de N neurônios em linguagem *C++17*. A decisão se um neurônio dispara ou não é feita a partir de um $U_t(i) \in [0,1]$ obtido de maneira pseudo-aleatória com *Mersenne Twister 19937*, Matsumoto and Nishimura 1998. O neurônio i dispara no tempo t se, e somente se, $U_t(i) < \varphi\big(V_t(i)\big)$, garantindo

$$\mathbb{P}(X_{t+1}(i) = 1 | \mathcal{F}_t) = \varphi\big(V_t(i)\big) \tag{5}$$

Na ausência de um grafo de neurônios específico para a simulação, utiliza-se um grafo direcionado do tipo Erdös-Rényi com pesos nas arestas, Erdös and Rényi 1960. Para cada par $(i,j) \in I^2 : i \neq j$,

$$\mathbb{P}(W_{i \to j} = 1) = p_{w^+} \tag{6}$$

$$\mathbb{P}(W_{i \to j} = -1) = p_{w^-} \tag{7}$$

$$\mathbb{P}(i \text{ não influencia em } j) = 1 - (p_{w^+} + p_{w^-}) \tag{8}$$

Referências

Paul Erdös and Alfréd Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci*, 5:17–61, 1960. URL https://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/erdos60random.pdf.

A Galves and E Löcherbach. Infinite systems of interacting chains with memory of variable Length—A stochastic model for biological neural nets. *Journal of Statistical Physics*, 151 (5):896–921, June 2013. doi: 10.1007/s10955-013-0733-9. URL https://doi.org/10.1007/s10955-013-0733-9.

Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1):3–30, 1998. doi: 10.1145/272991.272995. URL https://doi.org/10.1145/272991.272995.

Prasanna K Sahoo and Palaniappan Kannappan. *Introduction to functional equations*. CRC press, 2011. doi: 10.1201/b10722. URL https://doi.org/10.1201/b10722.