

Relatório - Iniciação científica

Mateus Scheffer Mendes Maziviero Dolce
Orientadora: Profa. Dra. Aline Duarte de Oliveira

4 de dezembro de 2025

1 Introdução

O cérebro é uma rede complexa com grande número de componentes, os *neurônios*. Ao olhar para evidências empíricas, estas sugerem ambos que o cérebro pode ser representado por meio de distribuições de probabilidade e que ele processa informação através de inferências probabilísticas. Justifica-se, assim, uma abordagem probabilística na modelagem de redes neurais. Realizaremos esta abordagem através do modelo proposto por Galves and Löcherbach 2013.

A dinâmica de cada neurônio depende da atividade passada de seus neurônios pré-sinápticos, o que torna as cadeias interagentes, considerando apenas os disparos ocorridos após o seu último disparo. Em outras palavras, cada neurônio reinicia sua memória a cada disparo. Essa característica, biologicamente motivada, implica que o sistema possui memória de comprimento variável de acordo com o histórico de disparos.

2 Modelo

2.1 Definição geral

Seja $I = \{1, 2, \dots, N\}$, com $N \in \mathbb{N}$, um conjunto finito de neurônios. Cada neurônio $i \in I$ é descrito por uma sequência de disparos ao longo do tempo. Seja $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ uma cadeia estocástica, assumindo valores em $\{0, 1\}^t$, definida em um espaço de probabilidade adequado $(\omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, onde

$$X_t(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ disparou no tempo } t \\ 0 & \text{se } i \text{ não disparou no tempo } t. \end{cases}$$

Para cada $t \in \mathbb{N}$, seja \mathcal{F}_t a σ -álgebra gerada por todos os neurônios do sistema e todos os eventos passados até o tempo t , ou seja, $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s(i) : s \leq t, i \in I)$, e defina o tempo do último disparo do neurônio i antes de t , dado por

$$L_t^i = \sup\{s \leq t : X_s(i) = 1\},$$

Com a convenção $L_t^i = -1$ quando $\sup(\emptyset)$.

Considerando a cadeia $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$, $X_t(i)$ e $X_t(j)$ são independentes $\forall (i, j) \in I^2 : i \neq j$ e $t \in \mathbb{N}$.

Considere $V_t(i)$ uma variável aleatória que descreve o potencial do neurônio i no tempo t e seja φ uma função não decrescente que associa $V_t(i)$ à probabilidade de ocorrência de um disparo de i no tempo $t + 1$. Como φ representa uma função de probabilidade de disparo, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ e $X_{t+1}(i) \sim \beta(\varphi(V_t(i)))$.

Basta agora definir $V_s(i)$ em termos de $(X_t)_{t \leq s}$. Sendo $W_{j \rightarrow i}$ o peso que representa a influência do disparo de j em i , com $(j, i) \in I^2 : j \neq i$, e g uma função de vazamento como descrito por Galves and Löcherbach 2013, definimos

$$V_t(i) = \begin{cases} \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^t g(t-s) \cdot W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j), & \text{se } t > L_t^i \\ 0, & \text{se } t = L_t^i \end{cases} \quad (1)$$

2.2 Propriedades markovianas

Suponha que i não tenha disparado no tempo t , então, por (1),

$$\begin{aligned} V_t(i) &= \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^t g(t-s) \cdot W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j) \\ &= \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^{t-1} g(t-s) \cdot W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j) + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} g(0) \cdot W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j), \end{aligned}$$

suponha também que g é tal que a propriedade $g(t) = g(t-s)g(s)$ é válida $\forall (t, s) \in \mathbb{N}^2 : s < t$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_t(i) &= g(1) \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \sum_{s=L_{t+1}^i}^{t-1} g(t-1-s) \cdot W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j) + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} g(0) \cdot W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j) \\ &= g(1)V_{t-1}(i) + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} g(0) \cdot W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j). \end{aligned}$$

Para que g possua a propriedade necessária, deverá seguir uma função exponencial de Cauchy, analisada em Sahoo and Kannappan 2011. Então, g é na forma ρ^x . Como g é uma função de vazamento, $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, logo $\rho \in [0, 1]$. Por fim, teremos

$$V_t(i) = \rho V_{t-1}(i) + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} W_{j \rightarrow i} \cdot X_s(j). \quad (2)$$

2.3 Definição da Phi

Fixado N e ρ , resta encontrar uma função φ adequada. Como queremos que φ seja não decrescente e com contradomínio $[0, 1]$, uma sigmoide se apresenta como um ótimo candidato. Então, teremos

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}. \quad (3)$$

Buscando simplificar a função φ tendo certo controle de seu aspecto, optamos por f ser um polinômio de grau 1. Desta forma, $f(x) = \frac{x}{a} - b$, com a controlando a inclinação da sigmoide e b , o deslocamento horizontal.

Seja ϵ a probabilidade de disparo espontâneo, isto é, com potencial do neurônio em questão zerado.

$$\begin{aligned} \epsilon = \varphi(0) &= \frac{1}{1 + e^{-(0/a-b)}} = \frac{1}{1 + e^{0+b}} = \frac{1}{1 + e^b} \\ \Rightarrow b &= \ln\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Seja p_{w^+} e p_{w^-} a variação de potencial positiva e negativa, respectivamente, esperada em um neurônio j de cada $i \in I : i \neq j$, caso i dispare. Desta forma, a variação de potencial esperada em j é

$$(p_{w^+} - p_{w^-})(N - 1),$$

no caso extremal onde todos os demais neurônios disparem. Então, com o intuito de compensar esta variação, tomaremos um $a = (p_{w^+} - p_{w^-})(N - 1)/k$ inicial, com k sendo uma constante a ser definida.

3 Simulação

Para simular o modelo estocástico a tempo discreto descrito em 2, um algoritmo foi desenvolvido para gerar a sequência de n disparos em uma rede de N neurônios em linguagem C++¹⁷. A decisão se um neurônio dispara ou não é feita a partir de um $U_t(i) \in [0, 1]$ obtido de maneira pseudo-aleatória com *Mersenne Twister 19937*, *Matsumoto and Nishimura 1998*. O neurônio i dispara no tempo t se, e somente se, $U_t(i) < \varphi(V_t(i))$, garantindo

$$\mathbb{P}(X_{t+1}(i) = 1 | \mathcal{F}_t) = \varphi(V_t(i)) \quad (5)$$

Na ausência de um grafo de neurônios específico para a simulação, utiliza-se um grafo direcionado do tipo Erdős-Rényi com pesos nas arestas, *Erdős and Rényi 1960*. Para cada par $(i, j) \in I^2 : i \neq j$,

$$\mathbb{P}(W_{i \rightarrow j} = 1) = p_{w^+} \quad (6)$$

$$\mathbb{P}(W_{i \rightarrow j} = -1) = p_{w^-} \quad (7)$$

$$\mathbb{P}(i \text{ não influencia em } j) = 1 - (p_{w^+} + p_{w^-}) \quad (8)$$

4 Tuning da Phi

Baseando-se no simulador disponibilizado em *Galves et al. 2024*, fixaremos $p_{w^+} = 0.2$ e $p_{w^-} = 0.05$.

Referências

- Paul Erdős and Alfréd Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 5:17–61, 1960. URL <https://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/erdos60random.pdf>.
- Antonio Galves and Eva Löcherbach. Infinite systems of interacting chains with memory of variable length—a stochastic model for biological neural nets. *Journal of Statistical Physics*, 151(5):896–921, 2013. doi: 10.1007/s10955-013-0733-9. URL <https://doi.org/10.1007/s10955-013-0733-9>.
- Antonio Galves, Eva Löcherbach, and Christophe Pouzat. Probabilistic spiking neuronal nets. *Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences*, Springer, Cham, 2024. doi: 10.1007/978-3-031-68409-8. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-031-68409-8>.
- Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1):3–30, 1998. doi: 10.1145/272991.272995. URL <https://doi.org/10.1145/272991.272995>.
- Prasanna K Sahoo and Palaniappan Kannappan. *Introduction to functional equations*. CRC press, 2011. doi: 10.1201/b10722. URL <https://doi.org/10.1201/b10722>.