

Методы машинного обучения. Логические методы классификации

Воронцов Константин Вячеславович

www.MachineLearning.ru/wiki?title=User:Vokov

вопросы к лектору: vokov@forecsys.ru

материалы курса:

github.com/MSU-ML-COURSE/ML-COURSE-21-22

орг.вопросы по курсу: ml.cmc@mail.ru

1 Решающие деревья

- Обучение решающих деревьев
- Усечение дерева (pruning)
- CART: деревья регрессии и классификации

2 Индукция правил

- Понятие закономерности
- Алгоритмы поиска закономерностей
- Критерии информативности

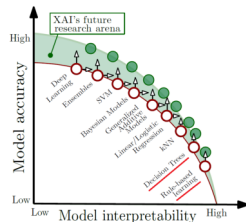
3 Решающие списки и таблицы

- Решающие списки
- Решающие таблицы
- Бинаризация признаков

Интерпретируемость (XAI, eXplainable Artificial Intelligence)

Обучающая выборка $X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^\ell$, $y_i \in Y$ — метки классов

- **Interpretability** — пассивная интерпретируемость строения модели или предсказания на объекте
- **Understandability, Transparency** — понятность, самоочевидность, прозрачность строения модели
- **Explainability** — активная генерация объяснений на объекте как дополнительных выходных данных модели
- **Comprehensibility** — возможность представить выученные закономерности в виде понятного людям знания



“Do you want an interpretable model, or the one that works?”

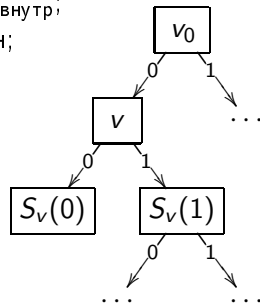
[Yann LeCun, NIPS'17]

V.Belle, I.Papantonis. Principles and practice of explainable machine learning. 2020

Определение решающего дерева (Decision Tree)

Решающее дерево — алгоритм классификации $a(x)$, задающийся *деревом* (связным ациклическим графом) с корнем $v_0 \in V$ и множеством вершин $V = V_{\text{внутр}} \sqcup V_{\text{лист}}$;
 $f_v: X \rightarrow D_v$ — дискретный признак, $\forall v \in V_{\text{внутр}}$;
 $S_v: D_v \rightarrow V$ — множество дочерних вершин;
 $y_v \in Y$ — метка класса, $\forall v \in V_{\text{лист}}$;

```
 $v := v_0;$   
пока ( $v \in V_{\text{внутр}}$ ):  $v := S_v(f_v(x));$   
вернуть  $a(x) = y_v;$ 
```

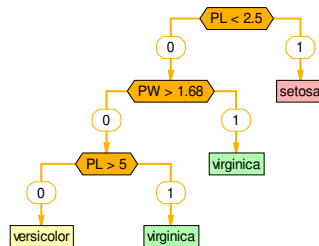
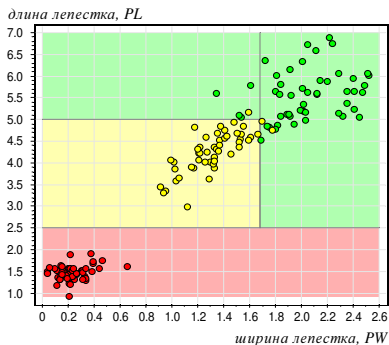


Чаще всего используются бинарные признаки вида $f_v(x) = [f_j(x) \geq a]$

Если $D_v \equiv \{0, 1\}$, то решающее дерево называется *бинарным*

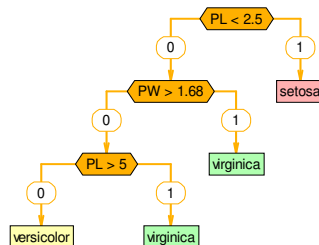
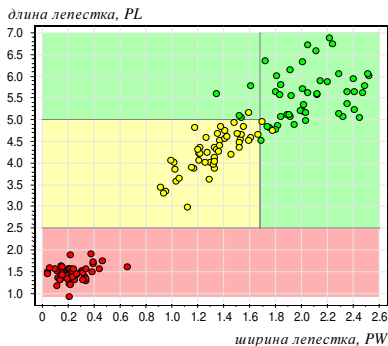
Пример решающего дерева

Задача Фишера о классификации цветков ириса на 3 класса, в выборке по 50 объектов каждого класса, 4 признака.



На графике: в осях двух самых информативных признаков (из 4) два класса разделились без ошибок, на третьем 3 ошибки.

Решающее дерево → покрывающий набор конъюнкций



setosa
virginica
virginica
versicolor

$$r_1(x) = [PL \leq 2.5]$$

$$r_2(x) = [PL > 2.5] \wedge [PW > 1.68]$$

$$r_3(x) = [PL > 5] \wedge [PW \leq 1.68]$$

$$r_4(x) = [PL > 2.5] \wedge [PL \leq 5] \wedge [PW < 1.68]$$

Обучение решающего дерева: ID3 (Iterative Dichotomiser)

$v_0 := \text{TreeGrowing}(X^\ell)$ — функция рекурсивно вызывает себя

$\text{TreeGrowing}(\text{Вход: } U \subseteq X^\ell) \mapsto \text{Выход:}$ корень дерева v ;

$f_v := \arg \max_{f \in F} \text{Gain}(f, U)$ — критерий ветвления дерева;

если $\text{Gain}(f_v, U) < G_0$ **то**

└ создать новый лист v ; $y_v := \text{Major}(U)$; **вернуть** v ;
создать новую внутреннюю вершину v с функцией f_v ;

для всех $k \in D_v$

└ $U_k := \{x \in U : f_v(x) = k\}$;
└ $S_v(k) := \text{TreeGrowing}(U_k)$;

вернуть v ;

Мажоритарное правило: $\text{Major}(U) := \arg \max_{y \in Y} P(y|U)$.

John Ross Quinlan. Induction of Decision Trees // Machine Learning, 1986.

Неопределённость распределения по классам в вершине

$p_y = \frac{1}{|U|} \sum_{x_i \in U} [y_i = y]$ — частотная оценка вероятности $P(y|U)$

$\Phi(U)$ — мера *неопределённости* (impurity) распределения p_y :

$$\Phi\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \text{■} & & & \\ \hline\end{array}\right) < \Phi\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \text{■} & \text{■} & \text{■} & \\ \hline\end{array}\right) = \Phi\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \text{■} & & \text{■} & \text{■} \\ \hline\end{array}\right) < \Phi\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \text{■} & \text{■} & \text{■} & \text{■} \\ \hline\end{array}\right)$$

- 1) минимальна и равна нулю, когда $p_y \in \{0, 1\}$,
- 2) максимальна, когда $p_y = \frac{1}{|Y|}$ для всех $y \in Y$,
- 3) симметрична: не зависит от перенумерации классов.

$\Phi(U)$ — матожидание убывающей функции потерь $\mathcal{L}(p_y)$;
при $p_y = 1$ потеря минимальна и равна нулю, $\mathcal{L}(1) = 0$:

$$\Phi(U) = \sum_{y \in Y} p_y \mathcal{L}(p_y) = \frac{1}{|U|} \sum_{x_i \in U} \mathcal{L}(P(y_i|U)) \rightarrow \min$$

Подходящие функции потерь: $\mathcal{L}(p) = -\log p$, $1-p$, $1-p^2$

Критерий ветвления

Неопределённость распределений $P(y_i|U_k)$ после ветвления по признаку f_v и разбиения U на $U_k = \{x \in U: f_v(x) = k\}$:

$$\begin{aligned}\Phi(U_1, \dots, U_{|D_v|}) &= \frac{1}{|U|} \sum_{x_i \in U} \mathcal{L}(P(y_i|U_{f(x_i)})) = \\ &= \frac{1}{|U|} \sum_{k \in D_v} \sum_{x_i \in U_k} \mathcal{L}(P(y_i|U_k)) = \sum_{k \in D_v} \frac{|U_k|}{|U|} \Phi(U_k)\end{aligned}$$

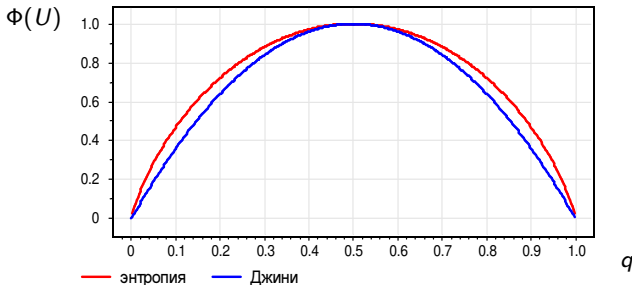
Выигрыш от ветвления вершины v :

$$\begin{aligned}\text{Gain}(f, U) &= \Phi(U) - \Phi(U_1, \dots, U_{|D_v|}) = \\ &= \Phi(U) - \sum_{k \in D_v} \frac{|U_k|}{|U|} \Phi(U_k) \rightarrow \max_{f \in F}\end{aligned}$$

Критерий Джини и энтропийный критерий

Два класса, $Y = \{0, 1\}$, $P(y|U) = \begin{cases} q, & y=1 \\ 1-q, & y=0 \end{cases}$

- Если $\mathcal{L}(p) = -\log_2 p$, то
 $\Phi(U) = -q \log_2 q - (1-q) \log_2(1-q)$ — энтропия выборки.
- Если $\mathcal{L}(p) = 2(1 - p)$, то
 $\Phi(U) = 4q(1 - q)$ — неопределённость Джини (Gini impurity).



Обработка пропущенных значений

На стадии обучения:

- $f_v(x_i)$ не определено $\Rightarrow x_i$ исключается из U для $\text{Gain}(f_v, U)$
- $q_{vk} = \frac{|U_k|}{|U|}$ — оценка вероятности k -й ветви, $v \in V_{\text{внутр}}$
- $P(y|x, v) = \frac{1}{|U|} \sum_{x_i \in U} [y_i = y]$ для всех $v \in V_{\text{лист}}$

На стадии классификации:

- $a(x) = \arg \max_{y \in Y} P(y|x, v_0)$ — наиболее вероятный класс

если значение $f_v(x)$ не определено **то**

средневзвешенное распределение по всем дочерним:

$$P(y|x, v) = \sum_{k \in D_v} q_{vk} P(y|x, S_v(k));$$

иначе

$P(y|x, v) = P(y|x, s)$ из дочерней вершины $s = S_v(f_v(x))$;

Жадная нисходящая стратегия: достоинства и недостатки

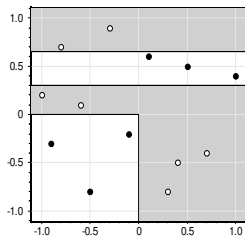
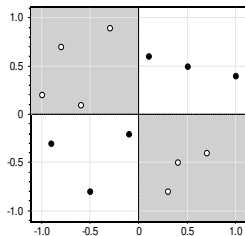
Достоинства:

- Интерпретируемость и простота классификации
- Правила $[f_j(x) < \alpha]$ не требуют масштабирования признаков
- Допустимы разнотипные данные и данные с пропусками
- Трудоёмкость линейна по длине выборки $O(|F|h\ell)$
- Не бывает отказов от классификации

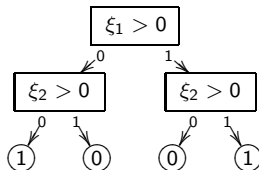
Недостатки:

- Жадная стратегия переусложняет структуру дерева, и, как следствие, сильно переобучается
- Фрагментация выборки: чем дальше v от корня, тем меньше статистическая надёжность выбора f_v, y_v
- Высокая чувствительность к шуму, к составу выборки, к критерию информативности

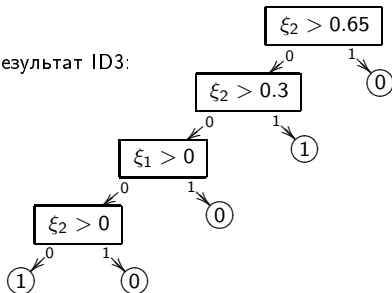
Жадная стратегия может переусложнять структуру дерева



Оптимальное дерево для задачи XOR:



Результат ID3:



Усечение дерева: стратегии post-pruning

X^q — независимая контрольная выборка, $q \approx 0.5\ell$

для всех $v \in V_{\text{внутр}}$:

X_v^q := подмножество объектов X^q , дошедших до v ;

если $X_v^q = \emptyset$ то

└ создать новый лист v ; $y_v := \text{Major}(U)$; **вернуть** v ;
по минимуму числа ошибок классификации $Q(X_v^q)$:
 либо сохранить целиком поддерево вершины v ;
 либо заменить поддерево v дочерним $S_v(k)$, $k \in D_v$;
 либо заменить поддерево v листом, выбрав класс y_v ;

Стратегии перебора вершин:

- снизу вверх: Minimum Cost Complexity Pruning (MCCP), Reduced Error Pruning (REP), Minimum Error Pruning (MEP)
- сверху вниз: Pessimistic Error Pruning (PEP)

CART: деревья регрессии и классификации

Обобщение на случай *регрессии*: $Y = \mathbb{R}$, $y_v \in \mathbb{R}$,

$$C(a) = \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_a$$

Пусть U — множество объектов x_i , дошедших до вершины v
Мера неопределённости — среднеквадратичная ошибка

$$\Phi(U) = \min_{y \in Y} \frac{1}{|U|} \sum_{x_i \in U} (y - y_i)^2$$

Значение y_v в терминальной вершине v — МНК-решение:

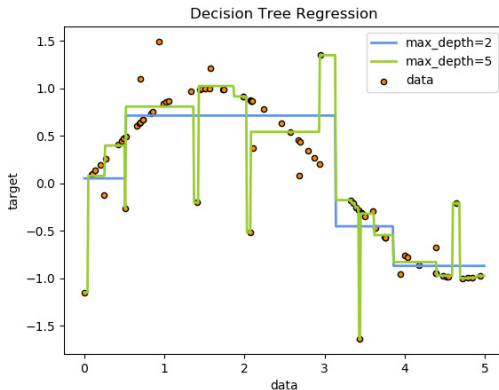
$$y_v = \frac{1}{|U|} \sum_{x_i \in U} y_i$$

Дерево регрессии $a(x)$ — это кусочно-постоянная функция.

Leo Breiman et al. Classification and regression trees. 1984.

Пример. Деревья регрессии различной глубины

Чем сложнее дерево (чем больше его глубина), тем выше влияние шумов в данных и выше риск переобучения.



scikit-learn.org/stable/auto_examples/tree/plot_tree_regression.html

CART: критерий Minimal Cost-Complexity Pruning

Среднеквадратичная ошибка со штрафом за сложность дерева:

$$C_{\alpha}(a) = \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2 + \alpha |V_{\text{лист}}| \rightarrow \min_a$$

При увеличении α дерево последовательно упрощается.

Причём последовательность вложенных деревьев единственна.

Из этой последовательности выбирается дерево с минимальной ошибкой на тестовой выборке (Hold-Out).

Для случая классификации используется аналогичная стратегия усечения, с критерием Джини.

Leo Breiman et al. Classification and regression trees. 1984.

Резюме по решающим деревьям

- Преимущества решающих деревьев:
 - интерпретируемость,
 - допускаются разнотипные данные,
 - возможность обхода пропусков.
- Недостатки решающих деревьев:
 - переобучение,
 - чувствительность к шумам, составу выборки, критерию.
- Способы устранения этих недостатков:
 - редукция,
 - композиции (леса) деревьев (в следующей лекции).
- Упрощённые варианты решающих деревьев:
 - решающие списки — для вывода знаний из данных;
 - ODT — для построения композиций (Yandex MatrixNet).

Логические закономерности в задачах классификации

$X^\ell = (x_i, y_i)_{i=1}^\ell \subset X \times Y$ — обучающая выборка, $y_i = y(x_i)$.

Логическая закономерность (правило, rule) — это предикат $R: X \rightarrow \{0, 1\}$, удовлетворяющий двум требованиям:

① *интерпретируемость*:

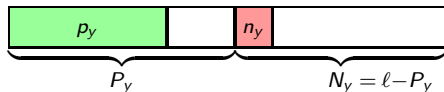
- 1) R записывается на естественном языке;
- 2) R зависит от небольшого числа признаков (1–7);

② *информативность* относительно одного из классов $y \in Y$:

$$p_y(R) = \# \{x_i: R(x_i)=1 \text{ и } y_i=y\} \rightarrow \max;$$

$$n_y(R) = \# \{x_i: R(x_i)=1 \text{ и } y_i \neq y\} \rightarrow \min;$$

$$\frac{p_y(R)}{P_y} \gg \frac{n_y(R)}{N_y}$$



Если $R(x) = 1$, то говорят « R выделяет x » (R covers x).

Требование интерпретируемости

- 1) $R(x)$ записывается на естественном языке;
- 2) $R(x)$ зависит от небольшого числа признаков (1–7);

Пример (из области медицины)

Если «возраст > 60 » и «пациент ранее перенёс инфаркт»,
то операцию не делать, риск отрицательного исхода 60%

Пример (из области кредитного скоринга)

Если «в анкете указан домашний телефон»
и «зарплата $> \$2000$ » и «сумма кредита $< \$5000$ »
то кредит можно выдать, риск дефолта 5%

Замечание. *Риск* — частотная оценка вероятности класса, вычисляемая, как правило, по отложенной контрольной выборке

Обучение логических классификаторов

Алгоритмов *индукции правил* (rule induction) очень много!

Четыре основных шага их построения:

- 1 Выбор семейства правил для поиска закономерностей
- 2 Выбор алгоритма порождения правил (rule generation)
- 3 Выбор критерия информативности (rule selection)
- 4 Построение классификатора из правил как из признаков, например, линейного классификатора (weighted voting):

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \sum_{j=1}^{n_y} w_{yj} R_{yj}(x)$$

Две трактовки понятия «логическая закономерность» $R(x)$:

- высокоинформативный интерпретируемый признак
- одноклассовый классификатор с отказами

Шаг 1. Часто используемые семейства правил

- Пороговое условие (решающий пенъ, decision stump):

$$R(x) = [f_j(x) \leq a_j] \text{ или } [a_j \leq f_j(x) \leq b_j].$$

- Конъюнкция пороговых условий:

$$R(x) = \bigwedge_{j \in J} [a_j \leq f_j(x) \leq b_j].$$

- Синдром — выполнение не менее d условий из $|J|$,
(при $d = |J|$ это конъюнкция, при $d = 1$ — дизъюнкция):

$$R(x) = \left[\sum_{j \in J} [a_j \leq f_j(x) \leq b_j] \geq d \right],$$

Параметры J, a_j, b_j, d настраиваются по обучающей выборке путём оптимизации критерия информативности.

Шаг 1. Часто используемые семейства правил

- *Полуплоскость* — линейная пороговая функция:

$$R(x) = \left[\sum_{j \in J} w_j f_j(x) \geq w_0 \right]$$

- *Шар* — пороговая функция близости:

$$R(x) = [\rho(x, x_0) \leq w_0]$$

ABO — алгоритмы вычисления оценок [Ю. И. Журавлёв, 1971]:

$$\rho(x, x_0) = \max_{j \in J} w_j |f_j(x) - f_j(x_0)|$$

SCM — машины покрывающих множеств [M. Marchand, 2001]:

$$\rho(x, x_0) = \sum_{j \in J} w_j |f_j(x) - f_j(x_0)|^\gamma$$

Параметры J , w_j , w_0 , x_0 настраиваются по обучающей выборке путём оптимизации выбранного критерия информативности.

Шаг 2. Мета-эвристики для поиска информативных правил

Вход: обучающая выборка X^ℓ ;

Выход: множество закономерностей Z ;

инициализировать начальное множество правил Z ;

повторять

$Z' :=$ множество *локальных модификаций* правил из Z ;

 удалить слишком похожие правила из $Z \cup Z'$;

$Z :=$ наиболее *информативные* правила из $Z \cup Z'$;

пока правила продолжают улучшаться;

вернуть Z ;

Частные случаи (см. лекцию про методы отбора признаков):

- стохастический локальный поиск (stochastic local search)
- генетические (эволюционные) алгоритмы
- усечённый поиск в ширину (beam search)
- поиск в глубину (метод ветвей и границ)

Шаг 2. Локальные модификации правил

Пример. Семейство конъюнкций пороговых условий:

$$R(x) = \bigwedge_{j \in J} [a_j \leq f_j(x) \leq b_j].$$

Локальные модификации конъюнктивного правила:

- варьирование одного из порогов a_j и b_j
- варьирование обоих порогов a_j , b_j одновременно
- добавление признака f_j в J с варьированием порогов a_j , b_j
- удаление признака f_j из J

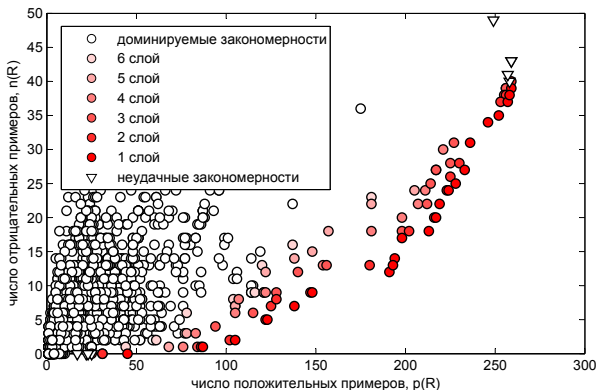
При удалении признака (pruning) информативность обычно оценивается по контрольной выборке (hold-out)

Вообще, для оптимизации множества J подходят те же методы, что и для отбора признаков (feature selection)

Шаг 3. Двухкритериальный отбор закономерностей

Два критерия: $p(R) \rightarrow \max$, $n(R) \rightarrow \min$

Парето-фронт — множество неулучшаемых закономерностей
(точка неулучшаема, если правее и ниже неё точек нет)



UCI:german

Шаг 3. Зоопарк критериев информативности

Очевидные, но не вполне адекватные критерии:

- $I(p, n) = \frac{p}{p+n} \rightarrow \max$ (precision)
- $I(p, n) = p/P \rightarrow \max$ (recall)
- $I(p, n) = p/P - n/N \rightarrow \max$ (relative accuracy)

Адекватные, но не очевидные критерии:

- энтропийный критерий прироста информации:

$$\text{IGain}(p, n) = h\left(\frac{P}{\ell}\right) - \frac{p+n}{\ell} h\left(\frac{p}{p+n}\right) - \frac{\ell-p-n}{\ell} h\left(\frac{P-p}{\ell-p-n}\right) \rightarrow \max$$

где $h(q) = -q \log_2 q - (1 - q) \log_2 (1 - q)$

- критерий Джини (Gini impurity):

$$\text{IGini}(p, n) = \text{IGain}(p, n) \text{ при } h(q) = 4q(1 - q)$$

- критерий бустинга и его нормированный вариант:

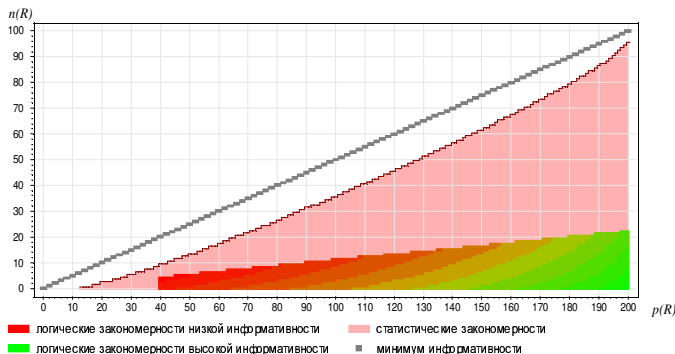
$$\sqrt{p} - \sqrt{n} \rightarrow \max, \quad \sqrt{p/P} - \sqrt{n/N} \rightarrow \max$$

J.Fürnkranz, P.Flach. ROC'n'rule learning – towards a better understanding of covering algorithms // Machine Learning, 2005.

Шаг 3. Критерии поиска закономерностей в плоскости (p, n)

Логические закономерности: $\text{Precision} \geq 0.9$, $\text{Recall} \geq 0.2$

Статистические закономерности: $\text{IGain} \geq 3$



- статистический критерий удобнее для поиска правил
- логический критерий — для финального отбора правил

Шаг 4. Построение классификатора из закономерностей

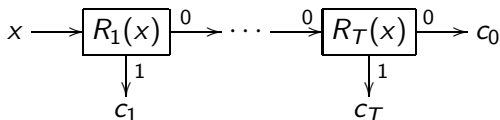
Взвешенное голосование (линейный классификатор с весами w_{yt} и, возможно, с регуляризацией для отбора признаков):

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \sum_{t=1}^{T_y} w_{yt} R_{yt}(x)$$

Простое голосование (комитет большинства):

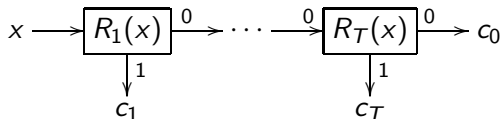
$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \frac{1}{T_y} \sum_{t=1}^{T_y} R_{yt}(x)$$

Решающий список (комитет старшинства), $c_0, c_1, \dots, c_T \in Y$:



Определение решающего списка (Decision List, DL)

DL — это алгоритм классификации $a: X \rightarrow Y$, задаваемый закономерностями $R_1(x), \dots, R_T(x)$ классов $c_1, \dots, c_T \in Y$:



Это способ представления знаний в виде *системы продукций* — последовательности правил «если-условие то-решение»

для всех $t = 1, \dots, T$

└ если $R_t(x) = 1$ то вернуть c_t ;

вернуть c_0 (отказ от классификации объекта x);

$$E(R_t, X^\ell) = \frac{n_{c_t}(R_t)}{n_{c_t}(R_t) + p_{c_t}(R_t)} \rightarrow \min \quad \text{— доля ошибок } R_t \text{ на } X^\ell$$

Жадный алгоритм построения решающего списка

Вход: выборка X^ℓ ; параметры: T_{\max} , I_{\min} , E_{\max} , ℓ_0 ;

Выход: решающий список $\{R_t, c_t\}_{t=1}^T$;

$U := X^\ell$;

для всех $t := 1, \dots, T_{\max}$

 выбрать класс c_t ;

 поиск правила R_t по максимуму информативности:

$R_t := \arg \max_R I(R, U)$ при ограничении $E(R, U) \leq E_{\max}$;

если $I(R_t, U) < I_{\min}$ **то выход**;

$U := \{x \in U : R_t(x) = 0\}$ — не покрытые правилом R_t ;

если $|U| \leq \ell_0$ **то выход**;

Замечания к алгоритму построения решающего списка

- **Стратегии выбора класса c_t :**
 - 1) все классы по очереди
 - 2) на каждом шаге определяется оптимальный класс
- Параметр E_{\max} управляет сложностью списка:
$$E_{\max} \downarrow \Rightarrow p(R_t) \downarrow, T \uparrow$$
- **Преимущества:**
 - интерпретируемость модели и классификаций
 - простой обход проблемы пропусков в данных
- **Недостаток:** низкое качество классификации
- **Другие названия:**
 - комитет с логикой старшинства (Majority Committee)
 - голосование по старшинству (Majority Voting)
 - машина покрывающих множеств (Set Covering Machine, SCM)

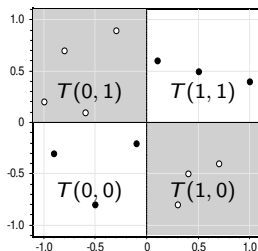
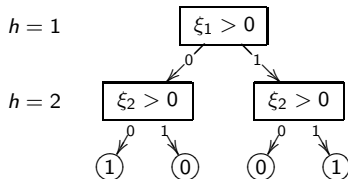
Небрежные решающие деревья (Oblivious Decision Tree, ODT)

Решающая таблица: дерево глубины H , $D_v = \{0, 1\}$;
для всех узлов уровня h условие ветвления $f_h(x)$ одинаково;
на уровне h ровно 2^{h-1} вершин; X делится на 2^H ячеек.

Классификатор задаётся *таблицей решений* $T: \{0, 1\}^H \rightarrow Y$:

$$a(x) = T(f_1(x), \dots, f_H(x)).$$

Пример: задача XOR, $H = 2$.



Алгоритм обучения ODT

Вход: выборка X^ℓ ; множество признаков F ; глубина дерева H ;

Выход: признаки f_h , $h = 1, \dots, H$; таблица $T: \{0, 1\}^H \rightarrow Y$;

для всех $h = 1, \dots, H$

 предикат с максимальным выигрышем определённости:

$$f_h := \arg \max_{f \in F} \text{Gain}(f_1, \dots, f_{h-1}, f);$$

классификация по мажоритарному правилу:

$$T(\beta) := \text{Major}(U_{H\beta});$$

Выигрыш от ветвления на уровне h по всей выборке X^ℓ :

$$\text{Gain}(f_1, \dots, f_h) = \Phi(X^\ell) - \sum_{\beta \in \{0,1\}^h} \frac{|U_{h\beta}|}{\ell} \Phi(U_{h\beta}),$$

$$U_{h\beta} = \{x_i \in X^\ell: f_s(x_i) = \beta_s, s = 1..h\}, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_h) \in \{0, 1\}^h.$$

Вспомогательная задача бинаризации вещественного признака

Цель: сократить перебор предикатов вида $[f(x) \leq \alpha]$.

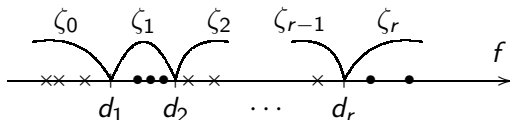
Дано: выборка значений вещественного признака $f(x_i)$, $x_i \in X^\ell$.

Найти: наилучшее (в каком-то смысле) разбиение области значений признака на относительно небольшое число зон:

$$\zeta_0(x) = [f(x) < d_1];$$

$$\zeta_s(x) = [d_s \leq f(x) < d_{s+1}], \quad s = 1, \dots, r-1;$$

$$\zeta_r(x) = [d_r \leq f(x)].$$



Способы разбиения области значений признака на зоны

- 1 Жадная максимизация информативности путём слияний
- 2 Разбиение на равномошные подвыборки
- 3 Разбиение по равномерной сетке «удобных» значений
- 4 Объединение нескольких разбиений

Повышение «удобства» пороговых значений

Задача: на отрезке $[a, b]$ найти значение x^* с минимальным числом значащих цифр.

Если таких x^* несколько, выбрать

$$x^* = \arg \min_x \left| \frac{1}{2}(a + b) - x \right|.$$

Алгоритм разбиения области значений признака на зоны

Вход: выборка X^ℓ ; класс $c \in Y$; параметры r и δ_0 ;

Выход: $D = \{d_1 < \dots < d_r\}$ — последовательность порогов;

$D := \emptyset$; упорядочить выборку X^ℓ по возрастанию $f(x_i)$;

для всех $i = 2, \dots, \ell$

если $f(x_{i-1}) \neq f(x_i)$ и $[y_{i-1} = c] \neq [y_i = c]$ **то**
 добавить порог $\frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))$ в конец D

повторять

для всех $d_i \in D, i = 1, \dots, |D| - 1$

$\delta I_i := I(\zeta_{i-1} \vee \zeta_i \vee \zeta_{i+1}) - \max\{I(\zeta_{i-1}), I(\zeta_i), I(\zeta_{i+1})\}$;
 $i := \arg \max_s \delta I_s$;

если $\delta I_i > \delta_0$ **то**

 слить зоны $\zeta_{i-1}, \zeta_i, \zeta_{i+1}$, удалив d_i и d_{i+1} из D ;

пока $|D| > r + 1$;

- Rule Induction — обучение правил, обычно конъюнкций
- ID3 — обучение решающих деревьев
- ID3+Pruning — решающее дерево с усечением
- ID3-Rules — с преобразованием дерева в конъюнкции
- CART — деревья регрессии и классификации
- CART+MCCP — CART с усечением путём регуляризации
- ODT — небрежные деревья
- DL — решающие списки