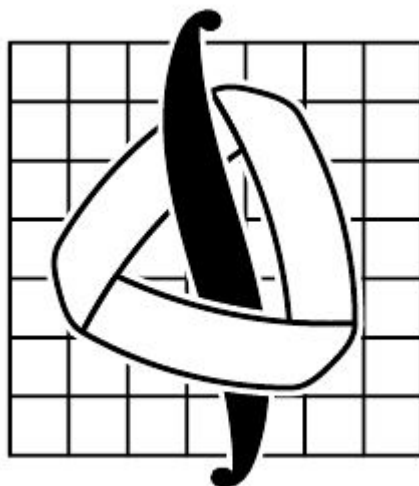


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет



## Конспект лекций по теории чисел

7-ой семестр, осень 2017 г., 4-ый курс, первый поток

Лектор: Олег Николаевич Герман

Москва, 2018 г.

## Предисловие

**Внимание!** Это не курс лекций и не методичка, а всего лишь конспект, набранный в вёрстке  $\text{\LaTeX}$  и не претендующий на окончательную истину. В данном документе не исключены опечатки. Использовать на свой страх и риск. Авторы не несут ответственности за успешность подготовки по данному материалу, а также за его использование в качестве "шпор".

Данный конспект по теории чисел состоит из 14-ти лекций, прочитанных Олегом Николаевичем Германом — доцентом кафедры теории чисел. Курс был прочитан на 7-ом семестре четвёртого курса мехмата МГУ осенью 2017 года.

Весь конспект был подготовлен и за $\text{\TeX}$ ан студентами Артемием Соколовым, группа 405 (нечётные лекции) и Артемием Геворковым, группа 402 (чётные лекции). За основу был взят конспект Юлии Зайцевой. Также в перспективе планируется добавить решения всех упражнений из курса.

Данная версия документа была скомпилирована 24 января 2018 г. Последняя версия .PDF, а также все исходные файлы всегда будут доступны в репозитории: ([ссылка на Github](#)). Если найдена ошибка или опечатка — пожалуйста, сообщите нам.

Спасибо Юлии Зайцевой, Виталию Лобачевскому, Всеволоду Гусеву, Кириллу Сосову, Сергею Джунусову, Айку Эминяну, Александру Думаревскому и команде Алгебрача за поиск ошибок и помощь в оформлении данного материала.

Весь курс будет состоять из трех больших частей:

1. Асимптотический закон распределения простых чисел:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \sim \frac{x}{\ln x}.$$

2. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях: Если  $(l, m) = 1$ , то существует бесконечное количество таких простых  $p$ , что  $p \equiv l \pmod{m}$ .
3. Теоремы о том, что  $e$  и  $\pi$  – иррациональные и трансцендентные числа.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Асимптотический закон распределения простых чисел</b>	<b>5</b>
1.1	Игры с $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$ . . . . .	5
1.2	Оценки Чебышева . . . . .	6
1.3	Дзета-функция Римана . . . . .	7
1.4	Воспоминания из былых времен . . . . .	7
1.5	Преобразование Абеля . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях</b>	<b>16</b>
2.1	Свойства характеров . . . . .	16
2.2	$L$ -функции Дирихле . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Диофантовы приближения</b>	<b>23</b>
3.1	Основные сведения . . . . .	23
3.2	Иррациональность $e$ и $\pi$ . . . . .	26
3.3	Трансцендентность числа $e$ . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Алгебраические и трансцендентные числа</b>	<b>28</b>
4.1	Основные сведения . . . . .	28
4.2	Целые алгебраические числа . . . . .	29

4.3	Конечные расширения $\mathbb{Q}$ . . . . .	30
4.4	Нормальные расширения . . . . .	32
4.5	Трансцендентность $\pi$ . . . . .	34

# 1 Асимптотический закон распределения простых чисел

**Замечание.** Впредь, если мы будем писать сумму вида  $\sum_{\dots p \dots} \dots$ , то мы будем иметь в виду, что  $p$  – простое число.

## 1.1 Игры с $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$

Изучение распределения простых чисел непосредственно связано с изучением следующих функций:

- $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$  – количество простых чисел, не превосходящих  $x$ ;
- $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p = \ln \left( \prod_{p \leq x} p \right)$  –  $\theta$ -функция Чебышева;
- $\psi(x) = \sum_{p^\alpha \leq x} \ln(p) = \sum_{p \leq x} \left[ \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right] \ln(p) = \ln(\text{НОК}(1, 2, \dots, [x]))$  –  $\psi$ -функция Чебышева.

Как эти функции связаны? Оказывается, следующим соотношением:

**Лемма 1.1.**

$$\varliminf \frac{\theta(x)}{x} = \varliminf \frac{\psi(x)}{x} = \varliminf \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq \sum_{p \leq x} \left[ \frac{\ln(x)}{\ln(p)} \right] \ln(p) = \ln(x) \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \ln(x)$$

$$\varliminf \frac{\theta(x)}{x} \leq \varliminf \frac{\psi(x)}{x} \leq \varliminf \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$$

Будем рассматривать простые числа на отрезке  $[x^\alpha, x]$  для некоторого фиксированного  $0 < \alpha < 1$ . Тогда

$$\theta(x) = \left( \sum_{p \leq x} \ln(p) \right) \geq \left( \sum_{x^\alpha < p \leq x} \ln(p) \right) > \left( \ln(x^\alpha) \sum_{x^\alpha < p \leq x} 1 \right) = \alpha \ln(x) (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \geq \alpha \ln(x) (\pi(x) - x^\alpha).$$

$$\frac{\theta(x)}{x} > \alpha \left( \frac{\pi(x)}{x/\ln x} - \frac{\ln(x)}{x^{1-\alpha}} \right) \quad \forall 0 < \alpha < 1.$$

Тогда для любого  $\alpha \in (0, 1)$  получаем, что  $\varliminf \frac{\theta(x)}{x} \geq \varliminf \alpha \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ .

Значит  $\varliminf \frac{\theta(x)}{x} \geq \varliminf \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ . □

## 1.2 Оценки Чебышева

**Теорема 1.2** (Оценки Чебышева). *Существуют  $a, b > 0$  такие, что*

$$a \frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq b \frac{x}{\ln(x)}.$$

Перед доказательством этой теоремы сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

**Лемма 1.3.**

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n.$$

*Доказательство.* Будем доказывать методом математической индукции по  $n$ .

**База.** При  $n = 2, 3$  утверждение верно.

**Переход.** Если  $n = 2k$  – четно, то видно, что  $\prod_{p \leq 2k} p = \prod_{p \leq 2k-1} p \leq 4^{2k-1} \leq 4^{2k}$ .

Если  $n = 2k - 1$  – нечетное, то по предположению индукции  $\prod_{p \leq n} p = \left( \prod_{p \leq k} p \right) \left( \prod_{k < p \leq 2k-1} p \right) \leq 4^k 4^{k-1} =$

$4^n$ . Заметим, что  $\prod_{k < p \leq 2k-1} p < C_{2k-1}^k = \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}$ , т.к. каждое такое простое число входит в числитель, но не входит в знаменатель. Поэтому

$$\prod_{k < p \leq 2k-1} p \leq C_{2k-1}^k \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{2m-1} = 4^{m-1}. \quad \square$$

**Следствие 1.**  $\theta(n) < n \ln(4)$ .

**Следствие 2.**  $\theta(x) < x \cdot 3 \ln(2)$ .

*Доказательство.* Пусть  $n - 1 < x \leq n$ . Тогда  $\theta(x) \leq \theta(n) < n \ln(4) < (x + 1) \ln 4 \leq x \cdot 3 \ln 2$ .  $\square$

**Лемма 1.4.**  $K := \text{НОК}(1, 2, \dots, 2n + 1) > 4^n$

*Доказательство.* Рассмотрим  $I = \int_0^1 x^n (1 - x)^n dx$ . Поскольку на отрезке  $[0, 1]$  величина  $x(1 - x)$  не превосходит  $\frac{1}{4}$ , то  $I < \frac{1}{4^n}$ .

Заметим, что  $x^n (1 - x)^n = a_n x^n + \dots + a_{2n} x^{2n}$  – многочлен с целыми коэффициентами. Тогда  $I = \frac{a_n}{n+1} + \dots + \frac{a_{2n}}{2n+1}$ , и  $K \cdot I \in \mathbb{Z}$ . Причём  $K$  и  $I$  оба больше нуля, т.е.  $K \cdot I \geq 1$ . Откуда следует, что  $K \geq \frac{1}{I} > 4^n$ .  $\square$

**Следствие 3.**  $\psi(2n + 1) > n \ln(4)$ .

**Следствие 4.**  $\psi(x) > x \frac{\ln(2)}{2}$  при  $x \geq 6$ .

*Доказательство.* Пусть  $2n + 1 \leq x < 2n + 3$ . Тогда  $\psi(x) \geq \psi(2n + 1) > n \ln(4) > \frac{x-3}{2} \ln 4 = (x-3) \ln(2) \geq x \frac{\ln(2)}{2}$ .  $\square$

*Доказательство.* (Теоремы 1.2.)

Применим следствия 2 и 4. Тогда при  $x \geq 6$  выполнено  $\frac{\theta(x)}{x} < 3 \ln 2, \frac{\psi(x)}{x} > \frac{\ln 2}{2}$ .

Учитывая Лемму 1.1 получаем, что  $\overline{\lim} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \leq 3 \ln 2$  и  $\underline{\lim} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \geq \frac{\ln 2}{2}$ . □

**Теорема 1.5** (Асимптотический Закон Распределения Простых Чисел).

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

### 1.3 Дзета-функция Римана

Положим при  $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Будем писать  $s = \sigma + it$ . Мы докажем, что  $\zeta(s)$  – аналитическая функция на  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , и аналитически продолжим её на  $\operatorname{Re}(s) > 0$  (можно и на всю  $\mathbb{C}$ , будет единственный полюс в точке 1).

**Теорема 1.6** (Гипотеза Римана). *Нетривиальные нули  $\zeta$ -функции лежат на прямой  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ .*

*Отступление:*

Предположим, что  $p_1, p_2, \dots, p_r$  – все простые. Тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}}$ . Следовательно,

$$\sum_{(k_1, \dots, k_r)} \frac{1}{p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}} = \prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} - \text{сходится}.$$

Но слева – сумма гармонического ряда. Противоречие.

### 1.4 Воспоминания из былых времен

**Теорема 1.7** (Вейерштрасса). *Пусть в области  $\Omega$  функции  $f_n(s)$  аналитичны и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$  сходится равномерно (по  $\Omega$ ). Тогда он сходится к функции  $f(x)$ , аналитической в  $\Omega$ , причём  $f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(s)$  – также сходится равномерно.*

**Признак** (Вейерштрасса). *Если в  $\Omega$  справедливо  $|f_n(s)| < c_n$ , и  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$  равномерно сходится в  $\Omega$ .*

**Определение 1.4.1.** Функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *арифметической* функцией. Если  $f \not\equiv 0$  и  $f(ab) = f(a)f(b)$  для любых  $a, b$  таких, что  $(a, b) = 1$ , то функция называется *мультипликативной*. А если равенство  $f(ab) = f(a)f(b)$  выполнено для абсолютно всех  $a, b \in \mathbb{N}$ , то функция называется

вполне мультипликативной.

Сверткой Дирихле двух арифметических функций  $f(n)$  и  $g(n)$  является функция

$$(f * g)(n) = (g * f)(n) = \sum_{k|n} f(k)g\left(\frac{n}{k}\right)$$

Формула обращения Мебиуса гласит, что если  $F = f * 1$ , то  $f = F * \mu$ , где  $\mu(n)$  – функция Мебиуса<sup>1</sup>

**Определение 1.4.2.** Рядом Дирихле называется ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ , где  $a_n \in \mathbb{Z}$ .

Несложно видеть, что если  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ , а  $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ , то  $F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}$ .

Заметим, что  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ , где  $a_1 = 1$ , а остальные  $a_i = 0, (i \neq 1)$ . Хотим найти "обратную" функцию к  $\zeta(s)$ .

Известно, что  $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ , где  $\mu(n)$  – функция Мёбиуса.

**Теорема 1.8.** Пусть  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Тогда:

1) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  сходится абсолютно и задаёт аналитическую функцию  $\zeta(s)$ ;

2)  $\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}$ ;

3)  $\zeta(s) \neq 0$  и  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ , где  $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), & n = p^k, k \geq 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$  – функция Мангольда.

*Доказательство.*

**Пункт 1):** Обозначим  $s = \sigma + it$ . Тогда  $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma}$ ,  $\sigma > 1$  – таким образом, абсолютная сходимость есть. При этом в области  $\Omega_\delta = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1 + \delta\}$ ,  $\delta > 0$ , сходимость будет равномерной, ибо  $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$  сходится. Но тогда по признаку Вейерштрасса  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  равномерно сходится в  $\Omega_\delta$ . По теореме 1.7 сумма ряда является аналитической в  $\Omega_\delta$  (каждая  $\frac{1}{n^s}$  является целой функцией  $s$ ). И это справедливо для всех  $\delta$ .

**Пункт 2):** По теореме 1.7 в каждой  $\Omega_\delta : \left( \frac{1}{n^s} \right)' = \left( e^{-s \ln n} \right)'$ . Далее очевидно.

**Пункт 3):** Заметим, что в области  $\Omega_\delta$ :

$$\left| \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| = \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leq \frac{\ln n}{n^\sigma} < \frac{\ln(n)}{n^{1+\delta}},$$

---

<sup>1</sup> $\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1, \\ 0, \exists p^2 | n, \\ (-1)^r, n = p_1 \dots, p_r. \end{cases}$



а мы знаем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1+\delta}}$  сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$  сходится в  $\Omega_\delta$  равномерно. По теореме 1.7 сходится к аналитической функции, причём абсолютно. Перемножим два абсолютно сходящихся ряда:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \right) \left( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda(l)}{l^s} \right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\Lambda(l)}{(kl)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{l|n} \Lambda(l)}{n^s} (*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} = -\zeta'(s).$$

((\*) пусть  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ , тогда  $\sum_{l|n} \Lambda(l) = \sum_{j=1}^r \left( \sum_{\beta_j=1}^{\alpha_j} \Lambda(p_j^{\beta_j}) \right) = \sum_{j=1}^r \ln(p_j^{\alpha_j}) = \ln(n)$ ).

Итак, при  $\operatorname{Re}(s) > 1$  имеем

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Из аналитичности всех функций: пусть  $s_0$  – ноль  $\zeta(s)$  кратности  $k > 0$ , тогда  $s_0$  – ноль  $\zeta'(s)$  кратности  $k - 1$ . Так как мы перемножаем две функции, то их кратности должны складываться. Значит,  $k - 1 = k + \text{нечто неотрицательное}$ . Получаем противоречие. Почему кратность обязательно конечна? Предположим противное, пусть она бесконечна и тогда  $\zeta(s)|_{\operatorname{Re}(s)>1} \equiv 0$  – противоречие.  $\square$

**Лемма 1.9.** Пусть  $f$  – вполне мультипликативная функция, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  абсолютно сходится и

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n). \text{ Тогда}$$

$$S = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

*Доказательство.* Положим  $S(x) = \prod_{p \leq x} (1 - f(p))^{-1}$ , покажем, что  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} S$ . Заметим, что из

мультипликативности  $f$  следует  $f(1) = 1$  и что  $|f(n)| < 1$  при  $n \geq 2$  (т.к. иначе  $f(n^k) = f(n)^k \not\rightarrow 0$ , а члены ряда обязаны  $\rightarrow 0$  из его абсолютной сходимости). Далее, при простом  $p$  :  $\frac{1}{1 - f(p)} =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k). \text{ Следовательно, } S(x) = \prod_{p \leq x} (1 - f(p))^{-1} = \prod_{p \leq x} \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}: \\ \forall p|n \ p \leq x}} f(n) \text{ (такие } n$$

$$\text{зовутся "x-гладкими"). Стало быть, } |S - S(x)| = \left| \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}: \\ \exists p|n \ p > x}} f(n) \right| \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}: \\ \exists p|n \ p > x}} |f(n)| \leq \sum_{n > x} |f(n)| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

(т.к. последний ряд – хвост сходящегося).  $\square$

**Теорема 1.10** (формула Эйлера). Пусть  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Тогда

$$\zeta(s) = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

*Доказательство.* Возьмём (и положим)  $f(n) = \frac{1}{n^s}$  и применим лемму 1.9. Тогда

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

□

**Лемма 1.11.**  $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$  (ну, т.е.  $\psi(n) - \psi(n-1) = \Lambda(n)$ ).

*Доказательство.* Следует из определений  $\psi(x)$  и  $\Lambda(n)$ . □

## 1.5 Преобразование Абеля

**Лемма 1.12.** (Преобразование Абеля) Пусть  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – последовательность комплексных чисел. Пусть  $g(x) \in C^1([1; \infty), \mathbb{C})$ ,  $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ . Тогда для любого  $N \in \mathbb{R}$  выполнено

$$\sum_{n \leq N} a_n g(n) = A(N)g(N) - \int_1^N A(x)g'(x)dx.$$

*Доказательство.*

$$A(N)g(N) - \sum_{n \leq N} a_n g(n) = \sum_{n \leq N} a_n (g(N) - g(n)) = \sum_{n \leq N} a_n \int_n^N g'(x)dx.$$

Положим  $\varphi_n(x) = a_n$ , если  $x \geq n$  или 0, если  $x < n$ . Тогда

$$\sum_{n \leq N} a_n \int_n^N g'(x)dx = \sum_{n \leq N} \int_1^N \varphi_n(x)g'(x)dx = \int_1^N \left( \sum_{n \leq N} \varphi_n(x) \right) g'(x)dx = \int_1^N A(x)g'(x)dx.$$

□

**Теорема 1.13.**

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1+s}} dx,$$

причем интеграл в правой части сходится в полуплоскости  $\operatorname{Re}(s) > 0$  и задает аналитическую функцию.

*Доказательство.* При  $\operatorname{Re}(s) > 1$  выполнено  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ . Используя преобразование Абеля с параметрами  $a_n = 1$  и  $g(x) = \frac{1}{x^s}$  получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} &= N \frac{1}{N^s} + s \int_1^N \frac{[x]}{x^{1+s}} = \frac{1}{N^{s-1}} + s \left( \int_1^N \frac{1}{x^s} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}} \right) = \\ &= \frac{1}{N^{s-1}} + s \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}} \right) = 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - s \int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $s = \sigma + it$ , где  $\sigma > 1$ , и  $|N^{s-1}| = N^{\sigma-1}$ , то при  $N \rightarrow \infty$  третье слагаемое стремится к 0, а последнее стремится к несобственному интегралу в условии теоремы.

Итак, при  $\operatorname{Re}(s) > 1$  выполнено равенство

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{1+s}} dx.$$

Как только мы докажем, что этот интеграл задает аналитическую функцию в  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , мы получим две функции, которые аналитичны в  $\operatorname{Re}(s) > 0$  и совпадают в  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , откуда будет следовать, что они совпадают везде<sup>2</sup>.

Положим

$$f_n(s) = \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{s+1}} dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s} dx - n \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}} dx.$$

Первый интеграл аналитичен<sup>3</sup> в  $\mathbb{C}$ , второй отличается от первого просто сдвигом на 1.

Таким образом,  $f_n(s)$  аналитична в  $\mathbb{C}$ . При  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \delta > 0$  получим, что

$$|f_n(s)| \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} \leq \frac{1}{n^{1+\sigma}} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

Поскольку ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$  сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$  сходится равномерно, поэтому задает аналитическую функцию.  $\square$

**Следствие 5.** У функции  $\zeta(s)$  полюс первого порядка с вычетом 1, поскольку  $\operatorname{Res}_1 \frac{1}{s-1} = 1$ .

**Лемма 1.14.** При  $\operatorname{Re}(s) > 1$  выполнено

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{1+s}} dx.$$

*Доказательство.* При  $\operatorname{Re}(s) > 1$  имеем

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Используя преобразование Абеля с параметрами  $a_n = \Lambda(n)$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^s}$  и тот факт, что  $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x)$  получим, что

$$\sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(N)}{N^s} + s \int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{1+s}} dx.$$

Поскольку мы знаем, что у отношения  $\frac{\psi(x)}{x}$  верхний и нижний пределы ограничены, то при  $\operatorname{Re}(s) > 1$   $\frac{\psi(N)}{N^{1+s}} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  пределы выражений  $\sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^s}$  и  $s \int_1^N \frac{\psi(x)}{x^{1+s}} dx$  существуют и равны, откуда следует утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 1.15.** Пусть  $0 < r < 1$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leq 1.$$

*Доказательство.* Положим  $M = |(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})|$ . Тогда

$$\ln M = 3 \ln |1-r| + 4 \ln |1-re^{i\varphi}| + \ln |1-re^{2i\varphi}| = \operatorname{Re} (3 \ln(1-r) + 4 \ln(1-re^{i\varphi}) + \ln(1-re^{2i\varphi})) =$$

<sup>2</sup>Теорема единственности

<sup>3</sup>При  $s \neq 1$  это просто разность степеней, а почему есть аналитичность в точке  $s = 1$ ? Упражнение!

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \operatorname{Re} (3 + 4e^{in\varphi} + e^{2in\varphi}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (\cos 2n\varphi + 4 \cos n\varphi + 3) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} 2 (\cos n\varphi + 1)^2 \leq 0.$$

Следовательно,  $M \leq 1$ .  $\square$

**Лемма 1.16.** При  $s = \sigma + it, \sigma > 1$  выполнено неравенство

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

*Доказательство.* Положим  $r = \frac{1}{p^\sigma}, e^{i\varphi} = p^{-it}$ . Применим лемму 1.15 и формулу Эйлера 1.10.  $\square$

**Теорема 1.17.**  $\zeta(1 + it) \neq 0$  при всех  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

*Доказательство.* Предположим противное: пусть  $\zeta(1 + it_0) = 0$ . Тогда при  $\sigma \rightarrow 1+$ :

$$\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it_0)\zeta(\sigma + 2it_0) = O\left(\frac{1}{(\sigma - 1)^3}(\sigma - 1)^4 \cdot 1\right) = O_{\sigma \rightarrow 1}(\sigma - 1). \text{ (Т.к. } \zeta(\sigma) \rightarrow +\infty \text{ при } \sigma \rightarrow 1+,$$

точнее,  $\zeta(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$  ибо полюс порядка 1;  $\zeta(1 + it_0) = 0 \xrightarrow{\text{из мультипл.}} \zeta(\sigma + it_0) = O(\sigma - 1);$

$\zeta(1 + 2it_0)$  – какая-то константа, полюса там нет из аналитичности функции в  $\operatorname{Re}(s) > 0$  везде, кроме 1). Итак, получили  $\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it_0)\zeta(\sigma + 2it_0) = O_{\sigma \rightarrow 1}(\sigma - 1)$ , но по Лемме 1.16 её модуль  $\geq 1$  при любом  $\sigma > 1$ . Противоречие.

(Из Леммы 1.16 также можно ещё одним способом получить, что в полуплоскости  $\operatorname{Re}(s) > 1$  у  $\zeta$ -функции нет корней: если бы существовал корень  $s = \sigma + it$ , то  $|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(s)\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$ , противоречие).  $\square$

**Лемма 1.18.**  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s - 1}$  аналитична при  $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ .

*Доказательство.* Знаем, что при  $\operatorname{Re}(s) > 1$  оба слагаемых – аналитические функции. Мы также доказали, что  $\zeta(s) = \frac{f(s)}{s - 1}$ , где  $f(s)$  точно аналитична при  $\operatorname{Re}(s) > 0$  и  $f(s) \neq 0$  при  $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ .

Отсюда следует, что  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{f'(s)}{f(s)} - \frac{1}{s - 1}$ , где  $f$  аналитична при  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , а значит, что  $f'$  тоже. В  $\operatorname{Re}(s) \geq 1$  у знаменателя нет нулей.  $\square$

$$\text{Положим } F(s) := -\frac{1}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s - 1}.$$

**Лемма 1.19.** Справедливы следующие утверждения

1)  $F(s)$  аналитична в  $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ .

$$2) F(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx \text{ при } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

*Доказательство.* По порядку.

1)  $F(s) = -\frac{1}{s} \left( \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{s}{s - 1} \right) = -\frac{1}{s} \left( \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s - 1} + 1 \right) - \frac{1}{s}$  аналитична, а второй множитель аналитичен по Лемме 1.18.

2) При  $\operatorname{Re}(s) > 1$   $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)dx}{x^{1+s}}$ ,  $\frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ . Оба интеграла сходятся абсолютно, поэтому можно их складывать:

$$F(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)dx}{x^{1+s}} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx.$$

□

**Теорема 1.20.** В интегральном представлении  $F(s)$  можно перейти к пределу в  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , т.е.

$$F(1) = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx.$$

**Лемма 1.21.** Если интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx$  сходится (это будет следовать из Теоремы 1.20), то  $\psi(x) \sim x$ .

*Доказательство.* Возьмём  $\varepsilon > 0$ :

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\psi(u) - u}{u^2} du \geq \varepsilon x \frac{\psi(x) - (1+\varepsilon)x}{(1+\varepsilon)^2 x^2} = \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2 x^2} \left( \frac{\psi(x)}{x} - (1+\varepsilon) \right).$$

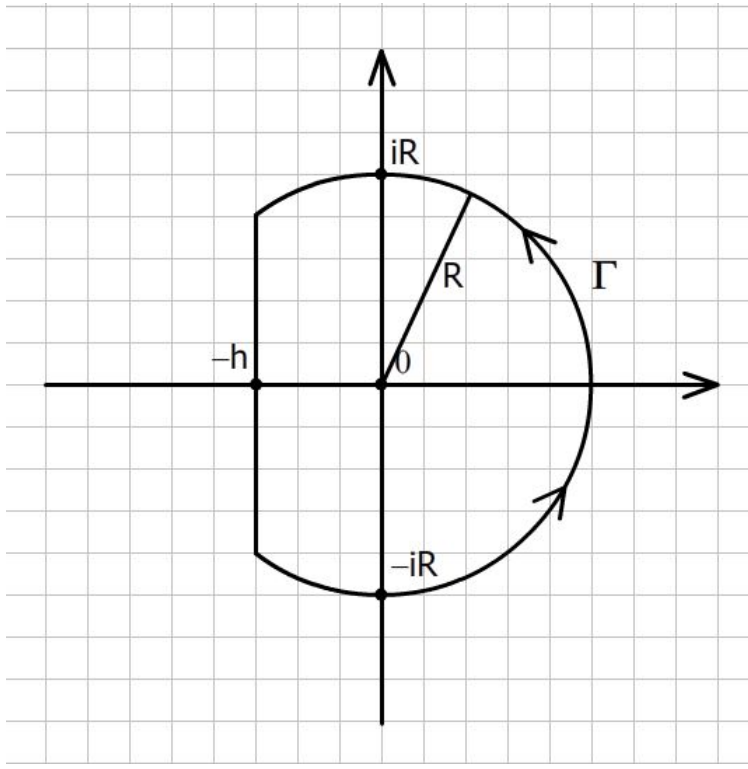
Из сходимости интеграла слева при фиксированном  $\varepsilon$  получаем  $\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\psi(u) - u}{u^2} du \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ . Следовательно,  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \left( \frac{\psi(x)}{x} - (1+\varepsilon) \right) \leq 0$  при фиксированном  $\varepsilon$ . Отсюда  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1 + \varepsilon$ , а т.к. это верно для любого  $x$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1$ . И наоборот, меняя знак неравенства, получаем  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq 1 - \varepsilon$ , а т.к. это верно для любого  $\varepsilon$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq 1$ . □

*Доказательство.* (Теоремы 1.20).

Положим  $F_T(s) = \int_1^T \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx$ ,  $T > 1$ . Поскольку  $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s}$  — целая функция, т.к.  $\psi(x)$  на отрезке  $[n, n+1]$  постоянна, то  $\int_1^T \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx$  является суммой целых функций вида  $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \Rightarrow F_T(s)$  — целая. Нужно показать, что  $F_T(1) \rightarrow F(1)$  при  $T \rightarrow \infty$ . По определению предела, возьмём  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим следующий интеграл

$$I(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (F(1+s) - F_T(1+s)) T^s \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) ds, \quad R = \frac{1}{\varepsilon}.$$

$F(s)$  аналитична в  $\operatorname{Re}(s) \geq 1 \Rightarrow F(1+s)$  аналитична в  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ . То есть, она аналитична на отрезке  $[-iR, iR]$  (см. Рис. 1). Если  $F(s)$  аналитична в точке, то она аналитична в некоторой окрестности этой точки. Применяя это к каждой точке нашего отрезка, получаем его покрытие открытыми кругами и выделяем конечное подпокрытие по компактности  $[-iR, iR]$ . Теперь выбираем  $h$  так, чтобы прямоугольник был внутри объединения кругов, т.е. чтобы  $F(1+s)$  была аналитична на нарисованном контуре ( $h = h(\varepsilon)$ ).



(Рис. 1)

Значит, в  $I(T)$ :  $F(1+s)$  – аналитична в области (по построению),  $F_T(1+s)$  – везде целая,  $T^s$  – целая (экспонента),  $\frac{s}{R^2}$  – целая,  $\frac{1}{s}$  – полюс порядка 1 в нуле. Следовательно, по теореме Коши о вычетах

$$I(T) = (F(1) - F_T(1)) T^0 = F(1) - F_T(1).$$

□

**Лемма 1.22.**

При  $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 0$ :  $|F(1+s) - F_T(1+s)| \leq A \frac{T^{-\sigma}}{\sigma};$

при  $\sigma = \operatorname{Re}(s) < 0$ :  $|F_T(1+s)| \leq A \frac{T^{-\sigma}}{-\sigma},$

где  $A$  такое, что  $\left| \frac{\psi(x)}{x} - 1 \right| \leq A$  при  $x \geq 1$ .

*Доказательство.*

$$\sigma > 0: |F(1+s) - F_T(1+s)| = \left| \int_T^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} dx \right| \leq A \int_T^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = A \frac{T^{-\sigma}}{\sigma};$$

$$\sigma < 0: |F_T(1+s)| = \left| \int_1^T \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} dx \right| \leq A \int_1^T \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = A \frac{T^{-\sigma}}{-\sigma}.$$

□

**Лемма 1.23.** Если  $|s| = R$ , то  $\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} = \frac{2 \operatorname{Re}(s)}{R^2}$

*Доказательство.*

$$\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} = \frac{1}{R} \left( \frac{s}{R} + \frac{R}{s} \right) = \frac{1}{R} \cdot 2 \operatorname{Re} \left( \frac{s}{R} \right) = \frac{2 \operatorname{Re}(s)}{R^2}.$$

□

**Лемма 1.24.** При  $T > 1$  и  $x \in \mathbb{R}$  выполнено  $xE^{-x} \leq \frac{1}{e \ln(T)}.$

*Доказательство.* Считаем производную  $(xT^{-x})' = (1 - x \ln(T))T^{-x}$ . Она обращается в 0 в точке  $x_0 = \frac{1}{\ln(T)}$ . Ну и несложно видеть, что функция при  $x < x_0$  возрастает, при  $x > x_0$  убывает, значит максимум значения функции равен  $\frac{1}{\ln(T)} T^{-\frac{1}{\ln(T)}} = \frac{1}{e \ln(T)}$ .  $\square$

Положим  $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma \cap \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \leq 0\}$ .

Тогда  $I(T) = I_1(T) + I_2(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \dots$

По Лемме 1.22

$$|I_1(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} A \frac{T^{-\sigma}}{\sigma} T^\sigma \frac{2\sigma}{R^2} ds = \frac{1}{2\pi} \frac{2A}{R^2} = A\varepsilon$$

$$I_2(T) = I_3(T) - I_4(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} F(1+s) T^\sigma \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} F_T(1+s) T^\sigma \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) ds.$$

По Лемме 1.22,  $I_4(T)$  оценивается точно так же, как и  $I_1(T)$ , только надо заменить контур  $\Gamma_1$  на  $\Gamma_3$ . Это можно сделать, так как у подынтегральной функции нет полюсов вне контура  $\Gamma_3 \cup \Gamma_2$  (полюс только 0). Таким образом,  $|I_4(T)| \leq A\varepsilon$ .

Осталось оценить  $I_3(T) = \int_{\Gamma_2} F(1+s) T^s \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right)$ .

Заметим, что

1. на малых дугах  $\left| T^s \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) \right| = \frac{2\sigma}{R^2} T^\sigma \stackrel{\text{Лемма 1.23}}{=} \frac{2\sigma T^{-|\sigma|}}{R^2} \stackrel{\text{Лемма 1.24}}{\leq} \frac{2}{R^2} \frac{1}{e \ln(T)}$ ;
2. на вертикальном отрезке  $T^s = T^{-h}$ ;
3. на  $\Gamma_2$  верно  $|F(1+s) \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right)| \leq C = C(\varepsilon)$  — не зависит от  $T$ .

Следовательно,  $I_3(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow +\infty$ . То есть,  $\exists T_0(\varepsilon) : \forall T > T_0$  выполняется  $|I_3(T)| < \varepsilon$ .

Итак,  $|I(T)| \leq |I_1(T)| + |I_4(T)| + |I_3(T)| \leq A\varepsilon + A\varepsilon + \varepsilon = (2A + 1)\varepsilon$ .

Теорема 1.20  $\Rightarrow$  Лемма 1.21. Леммы 1.1 и 1.21  $\Rightarrow$  Теорема 1.5 — АЗРПЧ.

## 2 Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях

**Теорема 2.1** (Дирихле). Пусть  $l, m \in \mathbb{Z}, (l, m) = 1, m \geq 2$ . Тогда существует бесконечно много простых  $p$  таких, что  $p \equiv l \pmod{m}$ .

**Замечание.** При фиксированном  $m$  таких прогрессий ровно  $\varphi(m)$  штук.

Число простых до  $x$  в этой прогрессии на самом деле  $\frac{1}{\varphi(m)} \frac{x}{\ln x}$ , то есть эти простые распределены по прогрессии равномерно. Но доказывать мы это, конечно же, не будем.

### 2.1 Свойства характеров

**Определение 2.1.1.** Пусть  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ . Функция  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *числовым характером* (Дирихле) по модулю  $m$ , если

1.  $\forall a \in \mathbb{Z}$  выполняется  $\chi(a + m) = \chi(a)$ ;
2.  $\chi(a) = 0 \Leftrightarrow (a, m) \neq 1$ ;
3.  $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ .

**Замечание.** Несложно провести биекцию  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \leftrightarrow \bar{\chi} : \mathbb{Z}_m^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

**Замечание.**  $|\chi(a)| = 0$ , если  $(a, m) \neq 1$ ; иначе. Для начала заметим, что  $\chi(1) = \chi(1 \cdot 1) = \chi(1)^2$ , и поскольку  $\chi(1) \neq 0$ , то  $\chi(1) = 1$ . Вспомним, что если  $(a, m) = 1$ , то  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  (Малая теорема Ферма). Тогда  $\chi(a)^{\varphi(m)} = \chi(a^{\varphi(m)}) = \chi(1) = 1$ . Таким образом, мы получили, что  $\chi(a) \in \sqrt[\varphi(m)]{1}$ .

Вспомним теорему с первого курса:  $\mathbb{Z}_m^*$  циклическая  $\Leftrightarrow m = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$  для простого  $p$ .<sup>4</sup>

**Предложение 2.2.**  $\mathbb{Z}_m^*$  разлагается в прямое произведение циклических групп.

**Лемма 2.3.** Пусть  $\eta_1, \dots, \eta_r$  — произвольный набор корней из 1 степеней  $d_1, \dots, d_r$  соответственно (т.е.  $\eta_i^{d_i} = 1$ ). Тогда  $\exists! \chi : \chi(g_i) = \eta_i$ .

**Доказательство.** Для  $(a, m) = 1$  полагаем  $\chi(a) = \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_r^{\alpha_r}$ , где  $\bar{a} = \bar{g}_1^{\alpha_1} \dots \bar{g}_r^{\alpha_r}$ . Для  $(a, m) \neq 1$  полагаем  $\chi(a) = 0$ . Достаточно проверить, что если  $(a, m) = 1, (b, m) = 1$ , то  $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ .

Пусть  $\bar{a} = \bar{g}_1^{\alpha_1} \dots \bar{g}_r^{\alpha_r}, \bar{b} = \bar{g}_1^{\beta_1} \dots \bar{g}_r^{\beta_r}, \bar{c} = \bar{g}_1^{\gamma_1} \dots \bar{g}_r^{\gamma_r}$ , где  $0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq d_i - 1, i = 1 \dots r$ . Тогда  $\gamma_i \equiv \alpha_i + \beta_i \pmod{d_i}$ . Следовательно, т.к.  $\eta_i$  — корень из 1 степени  $d_i$ , получаем

$$\chi(a)\chi(b) = \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_r^{\alpha_r} \cdot \eta_1^{\beta_1} \dots \eta_r^{\beta_r} = \eta_1^{\gamma_1} \dots \eta_r^{\gamma_r} = \chi(ab).$$

□

**Лемма 2.4.** Если  $a \not\equiv 1 \pmod{m}$ , то  $\exists \chi : \chi(a) \neq 1$ .

<sup>4</sup>Это эквивалентно наличию первообразного корня по искомому модулю



*Доказательство.* Очевидно из Леммы 2.3: если  $(a, m) \neq 1$ , то все характеры подходят; если  $(a, m) = 1$ , то  $\bar{a} = \bar{g}_1^{\alpha_1} \dots \bar{g}_r^{\alpha_r} \pmod{m}$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq d_i - 1$ . Т.к.  $a \not\equiv 1 \pmod{m}$ , то  $\exists \alpha_i \neq 0$ , можно положить, что это  $\alpha_1 > 0$ .

Положим  $\chi(g_1) = \eta_1 = e^{\frac{2\pi i}{d_1}}$ ,  $\chi(g_j) = \eta_j = 1$ ,  $\forall j = 2, \dots, r$ . Тогда, т.к. по Лемме 2.3 характер существует, то  $\chi(a) = e^{\frac{2\pi i}{d_1} \alpha_1} \neq 1$ .  $\square$

**Определение 2.1.2.** Характер  $\chi_0$ , где  $\chi_0(a) = \begin{cases} 1, & (a, m) = 1, \\ 0, & (a, m) \neq 1 \end{cases}$  называется *главным характером*.

Ясно, что  $\chi \cdot \chi_0 = \chi$ , где операция  $\cdot$  – поточечное перемножение функций. Для любого  $\chi$  существует обратное  $\chi^{-1}$ :  $\chi^{-1}(a) = \begin{cases} \chi(a)^{-1}, & \chi(a) \neq 0, \\ 0, & \chi(a) = 0. \end{cases}$  В общем, ясно, что характеры образуют группу.

**Задача 2.1.** Доказать, что группа характеров изоморфна  $\mathbb{Z}_m^*$ .

Характеров по модулю  $m$  ровно  $\varphi(m)$  штук (следует из Леммы 2.3,  $d_1 \dots d_r = |\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$ ).

**Лемма 2.5.** Справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} 1) \sum_{a=1}^m \chi(a) &= \begin{cases} \varphi(m), & \text{если } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \\ 2) \sum_{\chi} \chi(a) &= \begin{cases} \varphi(m), & \text{если } a \equiv 1 \pmod{m}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

*Доказательство.* По порядку.

1) Если  $\chi = \chi_0$ , то всё понятно.

Если  $\chi \neq \chi_0$ , то  $\exists b \in \mathbb{Z}$ :  $\chi(b) \neq 0, 1$ . Положим  $s = \sum_{a=1}^m \chi(a)$ , тогда  $s\chi(b) = \sum_{a=1}^m \chi(ab) = \sum_{a=1}^m \chi(a) = s \Rightarrow s = 0$ .

2) Если  $a \equiv 1 \pmod{m}$ , то всё понятно.

Если  $(a, m) \neq 1$ , то сумма из нулей равна нулю (действительно).

Если  $(a, m) = 1$  и  $a \not\equiv 1 \pmod{m}$ , то по Лемме 2.4 можно взять характер  $\chi_1$ :  $\chi_1(a) \neq 0, 1$ .

Положим  $s = \sum_{\chi} \chi(a)$ , тогда  $s\chi_1(a) = \sum_{\chi} \chi(a)\chi_1(a) = \sum_{\chi} \chi(a) = s \Rightarrow s = 0$ .

$\square$

**Следствие 6.** Если  $\chi \neq \chi_0$ , то  $\left| \sum_{n=1}^m \chi(n) \right| \leq \varphi(m)$ .

## 2.2 $L$ -функции Дирихле

Пусть  $m \geq 2$ ,  $\chi$  – характер по модулю  $m$ .

**Определение 2.2.1.**  $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$  называется  $L$ -функцией Дирихле.

**Лемма 2.6.** При  $\operatorname{Re}(s) > 1$

1) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$  сходится абсолютно, задаёт аналитическую функцию;

2)  $L'(s, \chi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s}$ ;

3)  $L(s, \chi) \neq 0$  и  $\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s}$ .

*Доказательство.* Доказательство этой теоремы очень схоже с доказательством теоремы 1.8. Напомним, что  $s = \sigma + it$ .

1)  $\left| \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^\sigma} \Rightarrow$  сходится абсолютно при  $\sigma > 1$ . Но для аналитичности предела нам необходима равномерная сходимость. В области  $\Omega_\delta = \{\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta\}$   $\left| \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$  – общий член сходящегося ряда. значит, по признаку Вейерштрасса в  $\Omega_\delta$  наша последовательность равномерна. Следовательно, по теореме 1.7 (Вейерштрасса) ряд сходится к аналитической функции.

2) В первом пункте мы воспользовались теоремой Вейерштрасса, которая, в частности, гласит, что наш ряд можно почленно дифференцировать.

$$3) L(s, \chi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s} = \sum_{k, n \in \mathbb{N}} \frac{\chi(k) \chi(n) \Lambda(n)}{(kn)^s} = \sum_{k, n \in \mathbb{N}} \frac{\chi(kn) \Lambda(n)}{(kn)^s} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \frac{\chi(n) \Lambda(d)}{n^s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\chi(n) \ln(n)}{n^s} = -L'(s, \chi).$$

Итак, получили  $L(s, \chi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s} = -L'(s, \chi)$ .

Если  $s_0$  – ноль порядка  $k \in \mathbb{N}$ , то порядок нуля левой части будет больше или равен 0, т.к. мы умножаем на некую аналитическую функцию. Но порядок нуля правой части равен  $k - 1$ . Противоречие.

Осталось показать, почему  $L(s, \chi) \neq 0$ :  $\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{\alpha^\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\sigma}$  – первый множитель стремится к 0, второй множитель ограничен некой константой  $C \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ .

Второе слагаемое по модулю стремится к 0 при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $L(s, \chi) \neq 0$  для некоторого  $s$ .

□

**Лемма 2.7.** При  $\operatorname{Re}(s) > 1$  выполнено

$$L(s, \chi) = \prod_p \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

*Доказательство.* Поскольку функция  $\frac{\chi(p)}{p^s}$  вполне мультипликативна, то по лемме 1.9 все следует.  $\square$

**Следствие 7.**

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|m} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right).$$

*Доказательство.* Подставим  $\chi = \chi_0$ .  $\chi$  – характер по модулю  $m \Rightarrow \chi(p) = 0 \Leftrightarrow p|m$ .  $\zeta(s) = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$ , однако это представление верно только при  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Равенство везде следует из аналитичности  $L$ -функции,  $\zeta$ -функции и  $\left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)$ .  $\square$

**Замечание.** Обобщенная гипотеза Римана звучит, что с некоторой оговоркой все нули  $L$ -функции Дирихле лежат на  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ .

**Следствие 8.** В  $\operatorname{Re}(s) > 0$  у  $L(s, \chi_0)$  ровно один полюс в  $s = 1$  порядка 1 с вычетом  $\frac{\varphi(m)}{m}$ , и в  $\{\operatorname{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$  функция  $L(s, \chi_0)$  аналитична.

*Доказательство.* Вспомним, что  $\varphi(m) = m \prod_{p|m} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)$ . У  $\zeta(s)$  вычет в 1 равен 1, и функция  $\left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)$  аналитична в 1.  $\square$

**Лемма 2.8.** Если  $\chi \neq \chi_0$ , то  $L(s, \chi)$  аналитична при  $\operatorname{Re}(s) > 0$  (то есть полюс пропадает!).

*Доказательство.* Применим преобразование Абеля к  $a_n = \chi(n)$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^s}$ . Тогда  $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} \chi(n)$ , и используя следствие 6  $|A(x)| \leq \varphi(m)$ .

$$\sum_{n=1}^N \frac{\chi(n)}{n^s} = A(N) \frac{1}{N^s} + s \int_1^N \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Так как  $|A(N)| \leq \varphi(m)$ , то первое слагаемое стремится к 0 при  $N \rightarrow \infty$  и  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Рассмотрим  $\int_1^N \frac{A(x)}{x^{1+s}} = \sum_{n=1}^{N-1} \varphi_n(s)$ , где  $\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \frac{A(x)}{x^{1+s}}$  – аналитическая в  $\mathbb{C}^5$

Покажем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s)$  задает аналитическую функцию в  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . При  $\operatorname{Re}(s) > \delta > 0$

$$|\varphi_n(s)| \leq \int_n^{n+1} \frac{\varphi(m)}{x^{1+\sigma}} dx \leq \frac{\varphi(m)}{n^{2+\sigma}} < \frac{\varphi(m)}{n^{2+\delta}} - \text{общий член сходящегося ряда} \Rightarrow$$

---

<sup>5</sup>Упражнение!

$\sum_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно при  $\operatorname{Re}(s) > \delta \Rightarrow$  по теореме Вейерштрасса ряд сходится к аналитической функции.

Тогда в предыдущем равенстве

$$\sum_{n=1}^N \frac{\chi(n)}{n^s} = A(N) \frac{1}{N^s} + s \int_1^N \frac{A(x)}{x^{1+s}} dx$$

первое слагаемое стремится к 0, а второе сходится к аналитической функции, значит и вся сумма стремится к аналитической функции.  $\square$

**Лемма 2.9.** При  $\chi \neq \chi_0$  выполнено  $L(1, \chi) \neq 0$ .

*Доказательство.*

**Случай 1:**  $\chi^2 \neq \chi_0$ . По лемме 1.15 из I части

$$|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leq 1 \text{ при } 0 < r < 1.$$

Положим  $r = \frac{1}{p^\sigma}$ ,  $e^{i\varphi} = \chi(p)$  для каждого простого  $p$ .

Тогда при  $\sigma > 1$ :

$$|L^3(\sigma, \chi_0)L^4(\sigma, \chi)L(\sigma, \chi^2)| = \prod_p \left| \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^\sigma}\right)^3 \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^4 \left(1 - \frac{\chi^2(p)}{p^\sigma}\right) \right|^{-1} \geq 1.$$

Поскольку  $\chi^2 \neq \chi_0$ , то у  $L(\sigma, \chi^2)$  в 1 есть значение. Предположим, что  $L(1, \chi) = 0$ . Тогда  $L(\sigma, \chi) = O(\sigma - 1)$  при  $\sigma \rightarrow 1 + 0$ .

При этом  $L(\sigma, \chi_0) = O(\frac{1}{\sigma - 1})$  при  $\sigma \rightarrow 1 + 0$  – полюс порядка 1.

$L(\sigma, \chi^2) = O(1)$ , т.к.  $\chi^2 \neq \chi_0$ . Отсюда  $|L^3(\sigma, \chi_0)L^4(\sigma, \chi)L(\sigma, \chi^2)| = O(\frac{1}{(\sigma - 1)^3}(\sigma - 1)^4 \cdot 1) = O(\sigma - 1)$  при  $\sigma \rightarrow 1 + 0$ , т.е.  $\rightarrow 0$ , что противоречит неравенству выше.

**Случай 2:**  $\chi^2 = \chi_0$ .

Заметим, что если рассуждать похожим образом, то мы получим  $O(1)$ , и ничего не выйдет.

Пусть  $L(1, \chi) = 0$ . Рассмотрим  $F(s) = \zeta(s)L(s, \chi)$ . Первая функция дает в точке 1 имеет полюс порядка 1, а вторая в точке 1 дает ноль порядка 1, значит она аналитична при  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . Докажем, что

- 1) ряд  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  сходится абсолютно при  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , причем  $F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)^k a_n}{n^s}$ ,
- 2)  $a_n \geq 0$ ,
- 3)  $a_{r,2} \geq 1, \forall r \in \mathbb{N}$ ,
- 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  расходится при  $s = \frac{1}{2}$ .

**Пункт 1):**

Надо доказать, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^s}$  сходится при  $\operatorname{Re}(s) > 1$ . При  $\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta, \delta > 0$  выполнено  $\frac{a_n}{n^s} \leq \frac{|a_n|}{n^\sigma} <$

$\frac{|a_n|}{n^{1+\delta}}$  – общий член сходящегося ряда. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  сходится

равномерно. Но тогда по Теореме 1.7 Вейерштрасса этот ряд задаёт аналитическую функцию, причём его можно почленно дифференцировать.

**Пункт 2):**

$$a_n = \sum_{d|n} \chi(d) = \prod_{j=1}^r \sum_{\beta_j=0}^{a_j} \chi(p_j)^{\beta_j} = \prod_{j=1}^r a_{n_j},$$

$$\text{где } a_{n_j} = 1 + \chi(p_j) + \dots + \chi(p_j)^{\alpha_j} = \begin{cases} 1, & \chi(p_j) = 0, \\ \frac{1-\chi(p_j)^{1+\alpha_j}}{1-\chi(p_j)}, & \chi(p_j) \neq 0, 1, \\ 1 + \alpha_j, & \chi(p_j) = 1. \end{cases}$$

То есть

$$a_{n_j} = \begin{cases} 1 + \alpha_j, & \chi(p_j) = 1, \\ 1, & \chi(p_j) = 0 \text{ или } \chi(p_j) = -1, \alpha_j \neq 2, \\ 0, & \chi(p_j) = -1, \alpha_j = 2. \end{cases}$$

Из того, что  $a_{n_j} \geq 0$ , следует  $a_n \geq 0$ .

**Пункт 3):** Очевидно из 2).

**Пункт 4):** Следует из 2) и 3).

$F(s)$  аналитична в  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , поэтому в круге  $|s - 2| < 2$  на вещественной прямой выполняется

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(2)}{k!} (\sigma - 2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma - 2)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln n)^k a_n}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 - \sigma)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k a_n}{n^2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln n)^k (2 - \sigma)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} n^{2-\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma}}. \end{aligned}$$

В частности, при  $\sigma = \frac{1}{2}$ :  $F\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}}}$ . Но мы доказали, что он расходится. Противоречие.  $\square$

*Доказательство.* (теоремы Дирихле). При  $\operatorname{Re}(s) > 1$   $-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}$ .

Пусть далее  $s = \sigma \in \mathbb{R}$ ,  $s > 1$ .  $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^k, k \geq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$  Тогда

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_p \frac{\ln p \chi(p)}{p^s} + \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln p \cdot \chi(p^k)}{p^{ks}}$$

(первое слагаемое для  $n = p$ , второе – для  $n = p^k$ ). Покажем, что второе слагаемое ограничено константой, не зависящей от  $s$  при  $s > 1$ :

$$\left| \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln p \cdot \chi(p^k)}{p^{ks}} \right| \leq \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{ks}} = \sum_p \ln p \frac{1/p^2}{1 - 1/p} \leq 2 \sum_p \frac{\ln p}{p^2} < 2 \sum_n \frac{\ln n}{n^2} < \infty.$$

Итак, для любого характера  $\chi$  по модулю  $m$ :

$$\sum_p \frac{\chi(p) \ln p}{p^s} = -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} + O(1). \quad (*)$$

Поскольку  $(l, m) = 1$ , то  $\exists v \in \mathbb{Z} : vl \equiv 1 \pmod{m}$  (т.е. обратный). Домножим  $(*)$  на  $\chi(v)$  и просуммируем по всем характерам:

$$\sum_p \frac{\ln p}{p^s} \sum_{\chi} \chi(pv) = - \sum_{\chi} \chi(v) \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} + O(1),$$

$$\sum_{\chi} \chi(pv) = \begin{cases} 0, & pv \not\equiv 1 \pmod{m}, \\ \varphi(m), & pv \equiv 1 \pmod{m}. \end{cases}$$

Но  $pv \equiv 1 \pmod{m}$ , следовательно,  $p \equiv l \pmod{m}$  т.к.  $pl \equiv 1 \pmod{m}$ . Значит,

$$\sum_{p \equiv l \pmod{m}} \frac{\ln p}{p^s} = - \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \chi(v) \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} + O(1).$$

Перейдём к пределу при  $s \rightarrow 1+$ . Если  $p \equiv l \pmod{m}$  конечное количество, то слева предел конечен. Докажем, что правая часть стремится к бесконечности (т.е. в левой части бесконечное число слагаемых):

При  $\chi \neq \chi_0$   $\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = O(1)$  при  $s \rightarrow 1+$ .

При  $\chi = \chi_0$   $L(s, \chi) = \frac{f(s)}{s-1}$ , где  $f(s)$  аналитична в 1 и  $f(1) \neq 0$ .

Значит,

$$\frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{f'(s)}{f(s)} = -\frac{1}{s-1} + O(1) \xrightarrow{\text{при } s \rightarrow 1+} \infty.$$

То есть мы показали, что правая часть стремится к бесконечности при  $s \rightarrow 1+$ . Следовательно,

$$\sum_{p \equiv l \pmod{m}} \frac{\ln p}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)(s-1)} + O(1).$$

□

Из последнего равенства можно, в частности, получить, что  $\sum_p \frac{\ln p}{p^s} = \frac{1}{s-1} + O(1)$ .

Each lecture  
should begin  
with Dirichlet's  
approximation  
theorem



#### 3.1 Основные сведения

Пусть  $\theta \in \mathbb{R}$ . Насколько маленькой можно сделать разность  $|\theta - \frac{p}{q}|$  так, чтобы  $|\theta - \frac{p}{q}| < f(a)$  ( $p$  и  $q$  — не простые).

Характеристика  $\theta$ : насколько хорошо она приближается  $\frac{p}{q}$ . Мы знаем, что существуют иррациональные числа ( $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ ). Легко доказать, что корни многочленов с целыми коэффициентами (алгебраические числа) не будут рациональными. Например, у многочлена  $x^2 - x - 1 = 0$  корень  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , а у него корни имеют вид  $\frac{\text{делитель} - 1}{\text{делитель} 1} \in \{\pm 1\}$  —  $\pm 1$  оба не корни.

А вдруг все числа алгебраические? Нет, алгебраических чисел счётное количество. Это доказал Ливуилль через теорию приближений: он показал, что алгебраические числа не могут приближаться "слишком хорошо". Т.е. для алгебраических чисел не найдётся такой  $f$ , для которой будет бесконечно много решений.

**Утверждение 3.1.** Если  $\theta = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ , то  $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  такая, что  $\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1/b}{q}$ .

*Доказательство.*  $\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq}$ , т.к.  $|aq - bp| \in \mathbb{Z} \neq 0$ . □

**Теорема 3.1** (Дирихле о приближении).

Пусть  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qT}$ ,  $1 \leq q \leq T$ .

*Доказательство.*

Хотим:  $|q\theta - p| < \frac{1}{T}$ . Можно считать, что  $\theta \in [0, 1)$ , потом просто прибавить целую часть.

Рассмотрим числа  $\{n\theta\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, T$ . Разобьём отрезок  $[0, 1]$  на полуинтервалы  $\left[\frac{k}{T}, \frac{k+1}{T}\right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, T-1$  (т.е. на  $T$  равных). По принципу Дирихле  $\exists n_1, n_2 : (n_1 - n_2)\theta - ([n_1\theta] - [n_2\theta]) < \frac{1}{T}$ . Остаётся положить  $q = n_1 - n_2$ ,  $p = [n_1\theta] - [n_2\theta]$ ;  $q \geq 1$ ,  $q \leq T$  (т.е.  $n_1, n_2 \leq T$ ).  $\square$

**Следствие 9.** Если  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , то неравенство  $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$  имеет бесконечно много решений в  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.* От противного: пусть  $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_k}{q_k}$  – все решения  $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ . Положим  $\delta = \min_i \left| \theta - \frac{p_i}{q_i} \right| > 0$ ,  $T = \lceil \frac{1}{\delta} \rceil$  (любое  $T > \frac{1}{\delta}$ ). По теореме 3.1 Дирихле  $\exists \frac{p}{q}$ ,  $q \leq T$ :  $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qT} \leq \frac{1}{q^2}$ . Т.е.  $\frac{p}{q}$  должно быть среди  $\frac{p_i}{q_i}$ . Но  $|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qT} < \frac{\delta}{q} \leq \delta$ , т.е. оно ближе, чем наименьшее  $\delta$ . Противоречие.  $\square$

Мера иррациональности числа  $\theta = \sup_s : \left\{ \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^s} \right\}$  имеет бесконечно много решений  $\frac{p}{q}$ .

В качестве  $\frac{p}{q}$  можно брать подходящие дроби в разложении  $\theta$  в цепную дробь.

**Определение 3.1.1.** Иррациональное число  $\theta$  называется *плохо приближаемым*, если  $\exists C = C(\theta) > 0$  такое, что  $\forall \frac{p}{q}$  выполняется  $\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^2}$ .

Известно (существует такая теорема), что число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда неполные частные при разложении в цепную дробь ограничены. Например, для квадратичной иррациональности неполные частные периодичны<sup>6</sup>, а значит и ограничены, т.е. квадратичные иррациональности плохо приближаемы.

Отныне и далее мы будем подразумевать, что  $\theta$  – вещественное число, а  $\alpha$  – комплексное.

**Определение 3.1.2.** Число  $\alpha \in \mathbb{C}$  называется *алгебраическим*, если существует ненулевой многочлен  $f(x)$  с рациональными (или целыми) коэффициентами такой, что  $f(\alpha) = 0$ . Такой многочлен  $f(x)$  называется *аннулирующим* многочленом для числа  $\alpha$ .

**Определение 3.1.3.** Степенью алгебраического числа  $\deg \alpha$  называется минимальная степень аннулирующего многочлена.

**Теорема 3.2** (Лиувилля). Пусть  $\theta$  – вещественное алгебраическое число степени  $d$ . Тогда  $\exists C = C(\theta) > 0$  такое, что для любого  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  справедливо  $\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}$ , или, другими словами,  $\mu(\theta) \leq d$ .

*Доказательство.* Случай  $d = 1$  уже доказан в первом утверждении в разделе.

Пусть далее  $\theta \notin \mathbb{Q}$ . Рассмотрим многочлен  $f(x)$  степени  $d$  с целыми коэффициентами такой, что  $f(\theta) = 0$ .

---

<sup>6</sup>Теорема Лагранжа с 1-го курса



Заметим, что для любого  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  выполнено  $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ . Действительно, так как иначе бы многочлен  $\frac{f(x)}{x - \frac{p}{q}}$  был бы аннулирующим многочленом для  $\alpha$  степени  $d - 1$ .

Поскольку  $f(x)$  с целыми коэффициентами, то  $q^d f\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left|q^d f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1 \Rightarrow \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^d}$ .

Если  $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq 1$ , то для любого  $\frac{p}{q}$   $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d}$ .

Пусть теперь  $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < 1$ , т.е.  $\frac{p}{q} \in [\theta - 1, \theta + 1]$ . Тогда

$$\frac{1}{q^d} \leq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\theta)\right| = \left|\left(\frac{p}{q} - \theta\right) f'(\xi)\right| \leq M \cdot \left|\theta - \frac{p}{q}\right|, \text{ где } M = \max_{[\theta-1, \theta+1]} |f'(x)|.$$

Таким образом,  $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^d}$ , и искомое  $C = \min(1, \frac{1}{M})$ .  $\square$

**Определение 3.1.4.** Если  $\theta \in \mathbb{R}$  таково, что  $\forall n \in \mathbb{N}$  неравенство  $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$  имеет бесконечное количество решений в  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , то число  $\theta$  называется *луивиллевым* (= число Луивилля). Числа, не являющиеся луивиллевыми, называются *диофантовыми*.

**Предложение 3.3.** Луивиллевы числа трансцендентны.

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. пусть  $\theta$  алгебраическое. Тогда для него верна теорема Луивилля, а именно

$$\exists C > 0 : \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ выполнено } \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}.$$

Тогда при  $n \geq d$  из неравенства  $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$  следует, что  $q \leq \frac{1}{C}$ .

Кроме того,  $|q\theta - p| \leq 1 \Rightarrow |p| \leq 1 + q|\theta| < 1 + \frac{|\theta|}{C}$ .

То есть числа  $q$  и  $p$  ограничены, значит и количество решений. Противоречие.  $\square$

**Пример 3.1.** Число  $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$  — луивиллево.

*Доказательство.* Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $N \geq m$ . Обозначим через  $\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^{n!}}$ . Тогда  $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| =$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}} \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{(N+1)!}} = \frac{2}{2^{N+1}} \leq \frac{1}{2^N} \leq \frac{1}{2^m}.$$

Таким образом, неравенство  $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^m}$  имеет бесконечное число решений.  $\square$

Кругозора ради добавим, что существует следующая очень сложная

**Теорема 3.4** (Туэ-Зигеля-Рота). Пусть  $\theta$  – иррациональное алгебраическое число. Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  такое, что  $\exists C = C(\theta, \varepsilon)$ , что для любых  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  справедливо

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}} = \frac{2}{q^{N+1}} \leq \frac{1}{q^N} \leq \frac{1}{q^m}.$$

Таким образом, неравенство  $\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^m}$  имеет бесконечное количество решений.

### 3.2 Иррациональность $e$ и $\pi$

**Теорема 3.5.**  $e \notin \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.* Вспомним, что  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . Пусть  $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $q!e \in \mathbb{N}$ . Несложно видеть, что

$$\mathbb{N} \ni \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^k} \leq 1.$$

Получаем противоречие. □

**Теорема 3.6.**  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\pi = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . Положим  $f_n(x) = q^n \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n(q - px)^n}{n!} = \frac{q(x)}{n!}$ , где  $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .

Рассмотрим  $I_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \sin(x) dx$ ,  $I_n \geq 0$ .

Положим  $F_n(x) = f_n(x) - f_n''(x) + f_n^{(4)}(x) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$ .

Поскольку  $f_n(x) = f_n(\pi - x)$ , то  $f_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(\pi - x)$  для четных  $k$ . Из этого мы видим, что  $F_n(x) = F_n(\pi - x)$ .

Заметим, что  $(F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x)' = f_n(x) \sin x$ .

$I_n = (F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x)_0^{\pi} = F_n(0) + F_n(\pi)$ .

$$|f(x) \sin x| \leq \frac{b^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{n!} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$I_n = 2F_n(0) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Итак, последовательность  $\{I_n\}$  положительна, целочисленна, и стремится к нулю, в чём и заключается противоречие. □

### 3.3 Трансцендентность числа $e$

**Теорема 3.7.** Число  $e$  трансцендентно.

*Доказательство.* Предположим противное: пусть  $\exists a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z} : \sum_{k=0}^m a_k e^k = 0$ , где не все  $a_k = 0$ .

Считаем, что  $(a_0, \dots, a_m) = 1$ . Ортогональным дополнением к  $(a_0, \dots, a_m)$  является полуплоскость  $\Pi$ , проходящая через  $(1, e, e^2, \dots, e^m)$ . При этом в гиперплоскости можно выбрать базис из целочисленных векторов.

Разбиваем все точки  $\mathbb{Z}^{m+1}$  на параллельные слои  $\mathbb{Z}^m$  (любое  $b \in \mathbb{Z}^{m+1}$  лежит в слое с номером  $\langle a, b \rangle$ ). Расстояние между слоями одинаковое и (при условии, что  $(a_0, \dots, a_m) = 1$ ) оно равно  $\Delta = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2}}$ . Построим последовательность  $\mathcal{B}^{(n)} \in \mathbb{Z}^{m+1}$  такую, что

- 1) расстояние от  $\mathcal{B}^{(n)}$  до  $\langle (1, e, e^2, \dots, e^m) \rangle$  меньше  $\Delta$ ,
- 2) точка  $\mathcal{B}^{(n)}$  не лежит в  $\Pi$ .

Напомним, что  $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!$  Тогда можно брать  $\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx$  для многочленов  $f$ .

Положим  $f_n(x) = \frac{x^{n-1}(x-1)^n \dots (x-m)^n}{(n-1)!}$ . Возьмём  $\mathcal{B}_k^{(n)} = \int_0^{+\infty} f_n(x+k) e^{-x} dx$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

Покажем, что  $\mathcal{B}_0^{(n)} e^k - \mathcal{B}_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ :

При  $k = 0$  это просто 0. Пусть  $k \neq 0$ :  $|\mathcal{B}_0^{(n)} e^k - \mathcal{B}_k^{(n)}| = \left| e^k \int_0^\infty f_n(x) e^{-x} dx - \int_0^\infty f_n(x+k) e^{-x} dx \right| = e^k \left| \int_0^\infty f_n(x) e^{-x} dx - \int_k^\infty f_n(y) e^{-y} dy \right| = e^k \left| \int_0^k f_n(x) e^{-x} dx \right| \leq e^m m \frac{m^{n+nm-1}}{(n-1)!} = \frac{e^m m^{m(n+1)}}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

То есть  $\mathcal{B}_0^{(n)} (1, e, e^2, \dots, e^m)^T - \mathcal{B}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Следовательно, последовательность точек  $\mathcal{B}^{(n)}$  стремится к прямой  $\langle (1, e, e^2, \dots, e^m) \rangle$  и, начиная с некоторого  $n$ , расстояние станет меньше  $\Delta$ .

Покажем теперь, что  $\mathcal{B}_k^{(n)} \in \mathbb{Z}$ , где  $k = 0, \dots, m$ :

При  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^{(n)} &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_k \left[ \text{коэффициент в } x^{n-1}(x-1)^n \dots (x-m)^n \text{ при } x^k \right] \cdot \int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} ((-1)^{mn} m!^n (n-1)! + A_n n! + \dots + A_N N!) \equiv (-1)^{mn} m!^n \pmod{n}. \end{aligned}$$

При  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k^{(n)} &= \int_0^{+\infty} f_n(x+k) e^{-x} dx = \sum_j \left[ \text{коэффициент в } \frac{(x+k)^{n-1}(x+k-1)^n \dots x^n \dots}{(n-1)!} \text{ при } x^j \right] \cdot j! = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} (C_n n! + C_{n+1} (n+1)! + \dots + C_N N!) \equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned}$$

Покажем, наконец, что для бесконечно многих  $n$   $\sum_{k=0}^m a_k \mathcal{B}_k^{(n)} \neq 0$  (то есть, что  $\mathcal{B}^{(n)} \notin \Pi$ ):

$$\sum_{k=0}^m a_k \mathcal{B}_k^{(n)} \equiv a_0 (-1)^{mn} m!^n \pmod{n}.$$

Тогда при  $(n, a_0 m!) = 1$ , где  $a_0 m!$  – некоторое фиксированное число, ряд будет не равен нулю.  $\square$

## 4 Алгебраические и трансцендентные числа

### 4.1 Основные сведения

Множество алгебраических чисел будем обозначать  $\mathbb{A}$ .

Пусть  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $f(\alpha) = 0$ ,  $\deg f = \deg \alpha$ . Тогда  $f(x)$  неприводим над  $\mathbb{Q}$ . Следовательно, если  $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $g(\alpha) = 0$ ,  $\deg g = \deg \alpha (= \deg f)$ , то  $\text{НОД}(f(x), g(x)) = h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , при этом  $h(\alpha) = 0 = \deg h = \deg f$ , то есть, если  $h|f$ ,  $h|g$ ,  $\deg h = \deg f = \deg g$  то они три все пропорциональны.

**Определение 4.1.1.** Унитарный многочлен  $p_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$  называется *минимальным многочленом*  $\alpha$ , если  $p_\alpha(\alpha) = 0$  и  $\deg p_\alpha = \deg \alpha$ .

Оказывается, что  $\mathbb{A}$  – алгебраически замкнутое поле, т.е. корень многочлена с алгебраическими коэффициентами тоже будет алгебраическим числом.

Для доказательства нам сначала понадобятся несколько лемм.

**Теорема 4.1** (О симметрических многочленах).

Пусть  $R$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля.

Пусть  $f(x_1, \dots, x_m) \in R[x_1, \dots, x_m]$  – симметрический многочлен.

Тогда  $\exists g(x_1, \dots, x_m) \in R[x_1, \dots, x_m] : f(x_1, \dots, x_m) = g(s_1(x_1, \dots, x_m), \dots, s_m(x_1, \dots, x_m))$ , где  $s_k(x_1, \dots, x_m)$  –  $k$ -ый симметрический многочлен.

**Лемма 4.2.** Пусть  $f(x, y) \in R[x, y]$ . Тогда  $\exists g(x, y_1, \dots, y_m) \in R[x, y_1, \dots, y_m] : f(x, y_1) \cdot \dots \cdot f(x, y_m) = g(x, s_1(y_1, \dots, y_m), \dots, s_m(y_1, \dots, y_m))$ .

*Доказательство.*  $f(x, y_1) \cdot \dots \cdot f(x, y_m) \in R[x][y_1, \dots, y_m]$ , т.е. он симметричный по  $y_1, \dots, y_m$  над  $R[x]$ . По Теореме 4.1 существует искомый многочлен  $g$ , причём  $g$  – многочлен от  $(x, y_1, \dots, y_m)$  над  $R$ .  $\square$

**Лемма 4.3.** Пусть  $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ ,  $\alpha \in \mathbb{A}$ ,  $\deg \alpha = n$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  – корни  $p_\alpha(x)$ <sup>7</sup>. Тогда  $F(x) = \prod_{k=1}^n f(x, \alpha_k) \in \mathbb{Q}[x]$ .

*Доказательство.* Применим Лемму 4.2:

$$\prod_{k=1}^n f(x, \alpha_k) = g(s_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, s_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

По теореме Виета все  $s_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  выражаются через коэффициенты многочлена  $p_\alpha$  и, следовательно,  $s_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Теорема 4.4.**  $\mathbb{A}$  – поле.

*Доказательство.* Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ . Хотим проверить что  $\{\alpha @ \beta | @ \in \{+, -, /, \cdot\}\}$ .

*Сложение:*

Рассмотрим  $F_1(x) = \prod_{k=1}^m p_\alpha(x - \beta_k)$ , где  $\beta_1 = \beta$ ,  $\beta_2, \dots, \beta_m$  – корни  $p_\beta(x)$ . Тогда по Лемме 4.3:  $F_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$ . При этом  $F_1(\alpha + \beta) = \dots = p_\alpha(\alpha) \cdot \dots = 0$ .

*Вычитание:*

---

<sup>7</sup>Они попарно различны как корни любого неприводимого многочлена  $f(x)$ . Иначе бы у  $f'(x)$  и  $f(x)$  был этот корень общим, но  $\deg(f') < \deg(f)$  – противоречие с неприводимостью.

Если  $\beta$  – алгебраическое, то алгебраическим будет и  $-\beta$ . Тогда  $\alpha - \beta$  – тоже алгебраическое. Ну или так:  $F_2(x) = \prod_{k=1}^m p_\alpha(x + \beta) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $F_2(\alpha - \beta) = 0$ .

*Деление:*

$$F_3(x) = \prod_{k=1}^m p_\alpha(x\beta_k) \in \mathbb{Q}[x], F_3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0.$$

*Умножение:*

$$F_4(x) = \prod_{k=1}^m \beta_k^m p_\alpha\left(\frac{x}{\beta_k}\right) \in \mathbb{Q}[x], F_4(\alpha\beta) = 0. \quad \square$$

## 4.2 Целые алгебраические числа

**Определение 4.2.1.** Алгебраическое число  $\alpha$  называется *целым алгебраическим*, если  $p_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Множество всех целых алгебраических чисел обозначим через  $\mathbb{Z}_\mathbb{A}$ .

**Пример 4.1.** • Пусть  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $\alpha \in \mathbb{Z}_\mathbb{A} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$ .

- $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$
- $a, b, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$

**Определение 4.2.2.** Многочлен  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  называется *примитивным*, если  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) = 1$ .

**Лемма 4.5** (Гаусса). *Произведение примитивных многочленов примитивно.*

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0, g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_1 x + b_0$ .

А также рассмотрим  $h(x) = f(x)g(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \dots + c_1 x + c_0$ .

Пусть существует простое  $p$  такое, что  $p | c_k, \forall 0 \leq k \leq m+n$ .

Пусть  $r = \min k | a_k \cdot p, s = \min k | b_k \cdot p$ .

Тогда  $c_{r+s} = \sum_{i+j=r+s} a_i b_j \equiv a_r b_s \not\equiv 0 \pmod{p}$ , т.е.  $p \nmid c_{r+s}$ . Получаем противоречие.  $\square$

**Теорема 4.6.** *Если существует унитарный многочлен  $f(x) \neq 0 \in \mathbb{Z}[x] : f(\alpha) = 0$ , то  $\alpha \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$ .*

*Доказательство.*  $p_\alpha(x) | f(x)$  в  $\mathbb{Q}[x]$ , т.е.  $\exists g(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(x) = g(x)p_\alpha(x)$ .

Покажем, что  $g(x), p_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .

Пусть  $A, B$  – НОК знаменателей коэффициентов  $g(x)$  и  $p_\alpha(x)$  соответственно. Тогда  $Ag(x)$  и  $Bp_\alpha(x)$  – примитивные многочлены.

$ABf(x) = Ag(x)Bp_\alpha(x)$  – примитивный многочлен по лемме 4.5 Гаусса. Тогда  $AB = 1 \Rightarrow A = B = 1$ .  $\square$

**Лемма 4.7.** *Пусть  $f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ . Пусть  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  – сопряженные к  $\alpha \in \mathbb{Z}_\mathbb{A}$ . Тогда  $F(x) = \prod_{i=1}^n f(x, \alpha_i) \in \mathbb{Z}[x]$ .*

*Доказательство.* Аналогично доказательству леммы 4.3.  $\square$

**Теорема 4.8.**  $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$  – кольцо.

*Доказательство.* Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ . Пусть  $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  – сопряженные к  $\alpha$ ,  $\beta = \beta_1, \dots, \beta_m$  – сопряженные к  $\beta$ . Тогда, по Лемме 4.7:

$$F_1(x) = \prod_{i=1}^m p_{\alpha}(x - \beta_i) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$F_2(x) = \prod_{i=1}^m p_{\alpha}(x + \beta_i) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$F_3(x) = \prod_{i=1}^m \beta_i^{\deg p_{\alpha}} p_{\alpha}(x/\beta_i) \in \mathbb{Z}[x].$$

Тогда все три многочлена унитарны и  $F_1(\alpha + \beta) = F_2(\alpha - \beta) = F_3(\alpha\beta) = 0$ . Применив Теорему 4.6, получаем условие теоремы.  $\square$

**Задача 4.1.**  $\forall \alpha \in \mathbb{A} \exists d \in \mathbb{Z}$  такое, что  $d\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ .

### 4.3 Конечные расширения $\mathbb{Q}$

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  – произвольные алгебраические числа.

**Определение 4.3.1.**  $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \{ \frac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \mid f, g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n], g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 \}$  – расширение  $\mathbb{Q}$ , порожденное  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

**Задача 4.2.** Доказать, что  $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  – минимальное по включению поле, содержащее и  $\mathbb{Q}$ , и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

**Лемма 4.9.** Пусть  $E = \mathbb{Q}(\theta)$ ,  $\deg(\theta) = n$ . Тогда любой элемент  $\alpha \in E$  однозначно представим в виде  $\alpha = c_0 + c_1\theta + \dots + c_{n-1}\theta^{n-1}$ ,  $c_i \in \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.*

Докажем существование: рассмотрим  $\alpha = \frac{f(\theta)}{g(\theta)} \in E$ . Заметим, что поскольку  $g(\theta) \neq 0$ , то  $(p_{\theta}(x), g(x)) = 1$ , т.е.  $\exists u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x] : u(x)p_{\theta}(x) + v(x)g(x) = 1$ .

Тогда  $u(\theta)p_{\theta}(\theta) + v(\theta)g(\theta) = 1$ . Отсюда  $\frac{1}{g(\theta)} = v(\theta)$  и, стало быть,  $\alpha = f(\theta)v(\theta)$ .

Положим  $h(x) = f(x)v(x)$ . Поделим  $h(x)$  с остатком на  $p_{\theta}(x) : h(x) = q(x)p_{\theta}(x) + r(x)$ ,  $\deg r(x) < \deg \theta$ . Тогда  $\alpha = h(\theta) = r(\theta)$ ,  $\deg r(x) < n$ ,  $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ .

Докажем единственность: пусть  $\alpha = c_0 + c_1\theta + \dots + c_{n-1}\theta^{n-1} = d_0 + d_1\theta + d_{n-1}\theta^{n-1}$ . Тогда

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)\theta + \dots + (c_{n-1} - d_{n-1})\theta^{n-1} = 0 - \text{обнуляющий многочлен } \theta \text{ степени не более } \deg(\theta - 1).$$

Следовательно, по определению  $\deg(\theta) : \forall i : c_i = d_i$ .  $\square$

Таким образом,  $\mathbb{Q}(\theta)$  – линейное пространство над  $\mathbb{Q}$  размерности  $n$  с базисом  $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$ .

**Теорема 4.10** (О примитивном элементе). Пусть  $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Тогда  $\exists \theta \in E : E = \mathbb{Q}(\theta)$ .

**Определение 4.3.2.** Такое  $\theta$  называется *примитивным элементом*  $E$  (над  $\mathbb{Q}$ ).

**Следствие 10.** Любое конечное расширение  $\mathbb{Q}$  является конечномерным пространством над  $\mathbb{Q}$ .

**Определение 4.3.3.** Размерность  $E$  как линейного пространства над  $\mathbb{Q}$  называется *степенью расширения*. Обозначается  $[E : \mathbb{Q}]$ .

Обозначим  $\mathbb{Z}_E = E \cap \mathbb{Z}_\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{Z}_\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* (теоремы 4.10)

Достаточно доказать для двух чисел:  $E = \mathbb{Q}(\xi, \eta)$ .

Пусть  $\xi_1 = \xi, \xi_2, \dots, \xi_m$  – сопряженное к  $\xi$ ,  $\eta_1 = \eta, \eta_2, \dots, \eta_l$  – сопряженное к  $\eta$ . Возьмём  $c \in \mathbb{Q}$ : все числа  $\xi_i + c\eta_j$  попарно различны. Положим  $\theta = \xi + c\eta$ , утверждается, что  $\theta$  – искомого. Обозначим  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ , тогда  $\mathbb{Q} \subset K \subset E$  – расширение полей. Покажем, что  $\xi, \eta \in K$  – отсюда будет следовать, что  $E \subset K$ , т.е.  $E = K$ .

Рассмотрим  $p_\xi(x), p_\eta(x)$ , пусть  $f(x) = p_\xi(\theta - cx)$ , где  $\theta \in K, c \in \mathbb{Q}, p_\xi \in \mathbb{Q}[x]$ . Тогда  $f(x) \in K[x]$ . Заметим, что

$$f(\eta) = p_\xi(\theta - c\eta) = p_\xi(\xi) = 0, \text{ т.е. } \eta - \text{корень } f(x).$$

Так как  $f$  и  $p_\eta$  оба имеют коэффициенты из  $K$ , то рассмотрим  $d(x) = \text{НОД}(f(x), p_\eta(x))$ . Ясно, что  $d(\eta) = 0 \Rightarrow (x - \eta) | d(x)$ ;  $p_\eta(x)$  имеет корни  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$ . Поэтому,  $d \in \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l\}$ .

Пусть  $d(\eta_i) = 0$ . Так как  $d | f$ , то  $f(\eta_i) = 0$ , но  $f(\eta_i) = p_\xi(\theta - c\eta_i)$ . То есть,  $\theta - c\eta_i = \xi_j$  для некоторого  $j$  (корни  $p_\xi$ ), но  $\theta = \xi_j + c\eta_i$  только когда  $i = j = 1$ . Следовательно,  $\eta$  – единственный корень  $d(x)$ . Так как  $d$  делит  $p_\eta$ , и у  $p_\eta$  нет кратных корней, то  $d(x) = x - \eta$ . Но  $d(x) \in K[x] \Rightarrow \eta \in K$ . Тогда  $\xi = \theta - c\eta \in K$ , ведь  $\theta \in K$  (по определению  $K$ ),  $c \in \mathbb{Q}, \eta \in K$ .  $\square$

**Теорема 4.11.**

*Поле  $\mathbb{A}$  алгебраически замкнуто. То есть, если  $f(x) \in \mathbb{A}[x]$ , то  $\exists \beta \in \mathbb{A} : f(\beta) = 0$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{A}[x]$ . Так как  $\mathbb{A}$  – поле, то не теряя общности можно считать, что  $\alpha_n = 1$ . Рассмотрим  $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ . По теореме 4.10 о примитивном элементе:  $E = \mathbb{Q}(\theta)$  для некоторого  $\theta$ ,  $\deg(\theta) = m$ . Тогда  $\alpha_i = r_i(\theta)$ , где  $r_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $\deg(r_i) \leq m - 1$ . То есть

$$f(x) = x^n + r_{n-1}(\theta)x^{n-1} + \dots + r_1(\theta)x + r_0(\theta).$$

Пусть  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  – все сопряжены к  $\theta$ . Рассмотрим

$$F(x) = \prod_{j=1}^m [x^n + r_{n-1}(\theta_j)x^{n-1} + \dots + r_1(\theta_j)x + r_0(\theta_j)],$$

заметим, что  $f(x, y) = x^n + r_{n-1}(y)x^{n-1} + \dots + r_1(y)x + r_0(y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ . По лемме 4.3:  $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , при этом  $f(x) | F(x)$  в  $\mathbb{C}[x]$ . Следовательно, все корни  $f(x)$  лежат в  $\mathbb{A}$ .  $\square$

## 4.4 Нормальные расширения

**Определение 4.4.1.** Пусть  $E$  – конечное расширение поля  $\mathbb{Q}$ . Отображение  $\sigma: E \rightarrow \mathbb{C}$  называется *вложением*, если это инъективный гомоморфизм полей.

**Теорема 4.12.** Если  $[E: \mathbb{Q}] = n$ , то существует ровно  $n$  различных вложений  $E$  в  $\mathbb{C}$ . При этом, если  $E = \mathbb{Q}(\theta)$  и  $\theta_1, \dots, \theta_m$  – все сопряжённые к  $\theta$ , то отображение  $\sigma: E \rightarrow \mathbb{C} (\alpha \cdot r(\theta) \mapsto r(\theta_i))$ , где  $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$  является вложением  $E$  в  $\mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Покажем, что любое  $\alpha \in E$  при вложении переходит в какое-то своё сопряжённое: Пусть  $\sigma$  – вложение. Тогда  $0 \neq \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1)\sigma(1) \Rightarrow \sigma(1) = 1$ .

Тогда  $\sigma(k) = \sigma(1 + 1 + \dots + 1) = \sigma(1) + \sigma(1) + \dots + \sigma(1) = k$ ,  $\sigma(-1) + \sigma(1) = \sigma(0) = 0 \Rightarrow \sigma(-1) = -1$ . Значит,  $\forall k \in \mathbb{Z} \sigma(k) = k$ .

Далее,  $\forall k \in \mathbb{N} \sigma(k)\sigma(\frac{1}{k}) = \sigma(1) = 1$ , откуда  $\forall k \in \mathbb{Q} \sigma(k) = k$ . Стало быть, если  $f \in \mathbb{Q}[x]$ , то  $\forall \alpha \in E \sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$ . В частности,  $p_\alpha(\sigma(\alpha)) = \sigma(p_\alpha(\alpha)) = \sigma(0) = 0 \Rightarrow \sigma(\alpha)$  – сопряжённое к  $\alpha$ . Возьмём  $\alpha = \theta$ , тогда  $\sigma: \theta \mapsto \theta_i$ , где  $i$  зависит от  $\sigma$ . И тогда  $\forall r(x) \in \mathbb{Q}[x]: \sigma(r(\theta)) = r(\sigma(\theta)) = r(\theta_i)$ . Пусть  $\sigma_i: E \rightarrow \mathbb{C} (\alpha = r(\theta) \mapsto r(\theta_i))$ . Почему это вложение?

Пусть  $\alpha, \beta \in E$ ,  $\alpha = r(\theta)$ ,  $\beta = s(\theta)$ ,  $r(x), s(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $\deg(r) \leq n-1$ ,  $\deg(s) \leq n-1$ .

$\alpha + \beta = (r + s)(\theta)$ ,  $\alpha \cdot \beta = u(\theta)$ , где  $u(x)$  – остаток от деления  $r(x)s(x)$  на  $p_\theta(x)$ . Аналогично,  $r(\theta_i)s(\theta_i) = u(\theta_i)$ .

Тогда

$$\sigma_i(\alpha) + \sigma_i(\beta) = r(\theta_i) + s(\theta_i) = (r + s)(\theta_i) = \theta_i((r + s)(\theta)) = \sigma_i(\alpha + \beta).$$

$$\sigma_i(\alpha)\sigma_i(\beta) = r(\theta_i)s(\theta_i) = u(\theta_i) = \sigma_i(u(\theta)) = \sigma_i(r(\theta)s(\theta)) = \sigma_i(\alpha\beta).$$

Если  $\sigma_i(\alpha) = 0$  для некоторого  $\alpha \neq 0$ , то  $1 = \sigma_i(1 = \sigma_i(\alpha)\sigma_i(\alpha^{-1})) = 0$ . Противоречие.  $\square$

**Теорема 4.13.** Пусть  $[E: \mathbb{Q}] = n$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  – все вложения  $E$  в  $\mathbb{C}$ ,  $\alpha \in E$ ,  $\deg(\alpha) = d$ . Тогда  $d|n$  и множество  $\{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_n(\alpha)\}$  состоит из всех сопряжений к  $\alpha$ , каждое из которых повторяется  $\frac{n}{d}$  раз.

*Доказательство.*  $\alpha = r(\theta)$ ,  $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $\deg(r) \leq n-1$ . Рассмотрим  $F(x) = \prod_{i=0}^n (x - \sigma_i)(\alpha)$ . Тогда

$F(x) = \prod_{i=1}^n (x - r(\theta_i))$  и по лемме 4.3  $F(x) \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow p_\alpha(x)|F(x)$ . Пусть  $k$  максимальное такое, что

$p_\alpha^k(x)|F(x)$ . Рассмотрим  $\frac{F(x)}{p_\alpha^k(x)} = g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ . Если у  $g$  есть корни (если  $g \neq \text{const}$ ), то его корни – какие-то сопряжённые с  $\alpha$ . Следовательно,  $p_\alpha(x)|g(x)$  – противоречие с максимальнойностью  $k$ . Значит,  $g(x) = 1$ ,  $F(x) = p_\alpha^k(x)$ ,  $n = kd$ .  $\square$

**Следствие 11.**  $\sigma(\alpha) = \alpha$  при всех вложениях  $E$  в  $\mathbb{C} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.*

( $\Leftarrow$ ) Очевидно.

( $\Rightarrow$ ) Из теоремы 4.13.  $\square$

**Определение 4.4.2.** Если для любого вложения  $\sigma$  расширения  $E$  справедливо  $\sigma(E) = E$ , то  $E$  называется *нормальным*.

**Лемма 4.14.** Пусть  $E$  – конечное расширение  $\mathbb{Q}$ ,  $\sigma$  – вложение  $E$  в  $\mathbb{C}$ . Пусть  $\sigma(E) \subset E$ . Тогда  $\sigma(E) = E$ .



*Доказательство.*  $E$  – конечномерное линейное пространство над  $\mathbb{Q}$ ,  $\sigma : E \rightarrow E$  – линейное отображение с нулевым ядром. Следовательно,  $\dim \sigma(E) = \dim E$  и  $\sigma(E) = E$ .  $\square$

**Пример 4.2.** •  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  – нормально;

•  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  – не нормально.

**Теорема 4.15.** Пусть  $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  и пусть все сопряженные ко всем  $\alpha_i$  лежат в  $E$ . Тогда  $E$  – нормально.

*Доказательство.* Пусть  $\alpha \in E$ . Тогда  $\alpha = \frac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}$ ,  $f, g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ .

Если  $\sigma$  – вложение  $E$  в  $\mathbb{C}$ , то  $\sigma(\alpha) = \frac{f(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_m))}{g(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_m))} \in E$ .

Таким образом,  $\sigma(E) \subset E$ . Применяя лемму 4.14 получаем, что  $\sigma(E) = E$ , т.е.  $E$  нормально.  $\square$

Если  $E$  нормально, то все вложения  $E$  в  $\mathbb{C}$  – автоморфизмы  $E$ . Можно брать их композиции, существует обратный элемент. Получается группа автоморфизмов  $E$ , называемой *группой Галуа*.

**Пример 4.3.** Группа Галуа  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  изоморфна  $\mathbb{Z}_2$ .

Пусть  $E$  – конечное расширение  $\mathbb{Q}$ ,  $[E : \mathbb{Q}] = n$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  – все вложения  $E$  в  $\mathbb{C}$ .

**Определение 4.4.3.** Для каждого  $\alpha \in E$  *нормой относительно  $E$*  называется величина

$$N(\alpha) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(\alpha).$$

**Пример 4.4.**  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  :  $N(\alpha + \beta\sqrt{2}) = (\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha - \beta\sqrt{2}) = \alpha^2 - 2\beta^2$ .

**Теорема 4.16.**

1. Если  $\alpha \in E$  и  $p_\alpha(x) = x^d + \dots + a_1x + a_0$ , то  $N(\alpha) = (-1)^n a_0^{\frac{n}{d}}$ .
2. Если  $\alpha \in E$ , то  $N(\alpha) \in \mathbb{Q}$ . Если  $\alpha \in \mathbb{Z}_E = \mathbb{Z}_{\mathbb{A}} \cap E$ , то  $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ .
3.  $N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ .
4.  $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ ,  $N(\frac{\alpha}{\beta}) = \frac{N(\alpha)}{N(\beta)}$ .

*Доказательство.*

1. Следует из теоремы 4.13 и теоремы Виета.
2. Следует из первого пункта.
3. Следует из определения вложения.
4. Следует из определения вложения.

$\square$

## 4.5 Трансцендентность $\pi$

**Теорема 4.17** (Линдемана-Вейерштрасса). Пусть  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  – различные алгебраические числа. Тогда  $e^{\alpha_0}, \dots, e^{\alpha_m}$  линейно независимы (ЛНЗ) над  $\mathbb{A}$ .

**Теорема 4.18** (Об экспоненциальной линейной форме). Пусть  $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{A}, a_0, \dots, a_m \in \mathbb{A}$ . Пусть  $A(x) = \sum_{k=0}^m a_k e^{\alpha_k x} = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m a_k \frac{\alpha_k^l}{l!} \right) x^l \in \mathbb{Q}[[x]] \setminus \{0\}$ . Тогда  $A(1) \neq 0$ .

**Теорема 4.19.** 4.18  $\Rightarrow$  4.17.

*Доказательство.* Нужно показать, что  $A(1) \neq 0$ . Тогда мы применим 4.18 и получим, что  $\forall a_0, \dots, a_m$   $A(1) \neq 0$ , т.е. линейная комбинация  $e^{\alpha_0}, \dots, e^{\alpha_m}$  не 0, и утверждение теоремы выполнено.

Можно считать, что все  $a_0, \dots, a_m \neq 0$ .

Тогда  $A(x) = \sum_{k=0}^m a_k e^{\alpha_k x} \neq 0$ , т.к. вронскиан  $W$

$$W(e^{\alpha_0 x}, \dots, e^{\alpha_m x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_0 x} & e^{\alpha_1 x} & \dots & e^{\alpha_m x} \\ \alpha_0 e^{\alpha_0 x} & \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \dots & \alpha_m e^{\alpha_m x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^m e^{\alpha_0 x} & \alpha_1^m e^{\alpha_1 x} & \dots & \alpha_m^m e^{\alpha_m x} \end{vmatrix} = \exp \left( \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k \right) x \right) V(\alpha_0, \dots, \alpha_m) \neq 0,$$

где  $V(x_1, \dots, x_m)$  является Вандермондом для чисел  $x_1, \dots, x_m$ .

Почему  $A(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ ? Рассмотрим нормальное расширение  $E$  поле  $\mathbb{Q}$ , содержащее  $a_0, \dots, a_m, \alpha_0, \dots, \alpha_m$ . (Например, можно взять все сопряженные к ним и добавить к  $\mathbb{Q}$ , по теореме 4.15 будет нормальное расширение).

Пусть  $[E : \mathbb{Q}] = \eta, \sigma_1, \dots, \sigma_\eta$  – все автоморфизмы  $E$  над  $\mathbb{Q}$ . Тогда  $A(x) = E[[x]]$ .

Определим  $\sigma_1, \dots, \sigma_\eta$  на  $E[[x]]$  так:

$$\sigma_i : \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l x^l \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_i(\gamma_l) x^l$$

$$\sigma_i(A(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m \sigma_i(a_k) \frac{\sigma_i(\alpha_k)^l}{l!} \right) x^l = \sum_{k=0}^m \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k) x} = A_i(x)$$

Поскольку  $A(x) \neq 0$ , то  $A_i(x) \neq 0$ .

Рассмотрим  $B(x) = \prod_{i=1}^{\eta} A_i(x) \in E[[x]], B(x) \neq 0$ .

Заметим, что

$$\sigma_i(B(x)) = \sigma_i \left( \prod_{i=1}^{\eta} A_i(x) \right) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma_i(A_i(x)) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma_i(\sigma_j(x)) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma_j(A_i(x)) = B(x) \Rightarrow B(x) \in \mathbb{Q}[[x]].$$

$$B(x) = \prod_{i=1}^{\eta} \sum_{k=0}^n \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k) x} = \sum_{l=0}^L b_l e^{\beta_l x}.$$

По Теореме 4.18  $B(1) \neq 0$ . Тогда  $B(1) = \prod_{j=1}^{\eta} A_j(1) \neq 0 \Rightarrow \forall j A_j(1) \neq 0$ . А для тождественного  $\sigma_j$

имеем  $A_j(x) = A(x)$  получаем, что  $A(1) \neq 0$ .  $\square$

**Лемма 4.20.** Пусть  $b_0, \dots, b_m, \beta_0, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$ , пусть  $\sum_{k=0}^m b_k e^{\beta_k} = 0$ . Рассмотрим многочлен  $f(x) = f_n(x) = (x - \beta_0)^n (x - \beta_1)^{n+1} \dots (x - \beta_m)^{n+1}$ , пусть  $g(x) = \frac{1}{n!} \sum_{l \geq n} f^{(l)}(x)$  (с некоторого  $l$  они все станут равны нулю). Тогда

$$\left| \sum_{k=0}^m b_k g(\beta_k) \right| \leq \frac{c^{n+1}}{n!}, \quad \text{где } c = c(b_0, \dots, b_m, \beta_0, \dots, \beta_m) \text{ — не зависит от } n.$$

*Доказательство.* Положим  $F(x) = \sum_{l \geq 0} f^{(l)}(x)$ . Нужно доказать, что  $\left| \sum_{k=0}^m b_k F(\beta_k) \right| \leq c^{n+1}$ . Заметим,

что  $F(0)e^{\beta_k} - F(\beta_k) = e^{\beta_k} \int_0^{\beta_k} e^{-z} f(z) dz$  (по частям).

Домножим на  $b_k$  и просуммируем по  $k$  от 0 до  $m$ :

$$F(0) \sum_{k=0}^m b_k e^{\beta_k} - \sum_{k=0}^m b_k F(\beta_k) = \sum_{k=0}^m \left[ b_k \int_0^{\beta_k} e^{\beta_k - z} f(z) dz \right] \text{ — хотим оценить модуль правой части.}$$

$$\left| \sum_{k=0}^m \left[ b_k \int_0^{\beta_k} e^{\beta_k - z} f(z) dz \right] \right| \leq \sum_{k=0}^m |b_k| e^r \cdot (2r)^{(m+1)(n+1)} \leq c^{n+1}, \quad \text{где } r = \max_{0 \leq k \leq m} |\beta_k|$$

$$\text{для } c = (2r)^{m+1} e^r \cdot \max \left( 1, \sum_{k=0}^m |b_k| \right).$$

□

*Доказательство.* (теоремы об экспоненциальной линейной форме (Т.Э.Л.Ф.)).

Пусть  $E$  — нормальное расширение поля  $\mathbb{Q}$ , содержащее  $a_0, \dots, a_m, \alpha_0, \dots, \alpha_m$ ,  $[E: \mathbb{Q}] = \nu$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$  — все автоморфизмы  $E$  над  $\mathbb{Q}$  (аналогично доказательству теоремы 4.19 о Т.Э.Л.Ф.  $\Rightarrow$  Т.Л.-В.). Можно считать, что  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_A$  ( $\in \mathbb{Z}_E$ ), так как существует  $\tilde{d} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  такое, что все  $\tilde{d}a_0, \tilde{d}a_1, \dots, \tilde{d}a_m \in \mathbb{Z}_A$ . От замены то, что дано, и то, что требуется доказать, не поменяется.

Пусть  $d \in \mathbb{N}$  — такое, что  $d\alpha_0, d\alpha_1, \dots, d\alpha_m \in \mathbb{Z}_E$ . Предположим противное: пусть  $A(1) = 0$ . Тогда продлеваем наши автоморфизмы  $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$  на  $E[[x]]$  как в доказательстве теоремы о Т.Э.Л.Ф.  $\Rightarrow$  Т.Л.-В. То есть можно рассматривать  $(\sigma_i A)(x)$ .

Так как  $A(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ , то  $(\sigma_i A)(x) = A(x) \forall i = 1, 2, \dots, \nu$ . Следовательно,  $\sum_{k=0}^m \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k)x} = (\sigma_i A)(x) = A(x)$ , т.е.

$$\sum_{k=0}^m \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k)} = A(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \nu.$$

Положим  $f(x) = f_n(x) = (x - \alpha_0)^n (x - \alpha_1)^{n+1} \dots (x - \alpha_m)^{n+1}$ ,  $g(x) = g_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{l \geq n} f^{(l)}(x)$ . Положим

$I = I_n = d^{m(n+1)} \sum_{k=0}^m a_k g(\alpha_k)$ . Покажем, что  $I \in \mathbb{Z}_E$ :

$$I = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{l \geq n} d^{m(n+1)} \frac{1}{n!} f^{(l)}(\alpha_k) = \sum_{k=0}^m a_k \cdot (\text{целое алгебраическое число}), \text{ т.к. } d^{m(n+1)} f(x) = d^{-n} h(dx),$$

где  $h(t) = (t - d\alpha_0)^n (t - d\alpha_1)^{n+1} \dots (t - d\alpha_m)^{n+1}$  (т.е.  $h(t) \in \mathbb{Z}_E$ ). Следовательно,  $d^{m(n+1)} \frac{1}{l!} f^{(l)}(\alpha_k) =$

$d^{-n+l} \frac{1}{l!} h^{(l)}(d\alpha_k) \in \mathbb{Z}_E$  при  $l \leq n$ . Далее,

$$I = d^{m(n+1)} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha_0) + (n+1) \sum_{k=0}^m \sum_{l \geq n+1} a_k \frac{l!}{(n+1)!} d^{m(n+1)} \frac{1}{l!} f^{(l)}(\alpha_k) = a_0 \prod_{k=1}^m (d\alpha_0 - d\alpha_k)^{n+1} + (n+1)J,$$

где  $J \in \mathbb{Z}_E$ .

Следовательно,  $I \in \mathbb{Z}_E$ , причём  $I \neq 0$ , если  $\left( n+1, N \left( a_0 \prod_{k=1}^m (d\alpha_0 - d\alpha_k) \right) \right) = 1$ .

Таких  $n$  бесконечно много:  $n+1$  – простое,  $\rightarrow \infty$ . Но тогда и  $\sigma_i(I) \in \mathbb{Z}_E$  и  $\sigma_i(I) \neq 0$  при "хороших"  $n$ .

Но  $\sigma_i(I) = d^{m(n+1)} \sum_{k=0}^m \sigma_i(a_k) g_i(\sigma_i(\alpha_k))$ , где  $f_i(x) = (\sigma_i f)(x) = (x - \sigma_i(\alpha_0))^n (x - \sigma_i(\alpha_1))^{n+1} \dots (x - \sigma_i(\alpha_m))^{n+1}$ ,  $g_i(x) = (\sigma_i g)(x) = \frac{1}{n!} \sum_{l \geq n} f_i^{(l)}(x)$ . Применим Лемму 4.20 для  $b_k = \sigma_i(a_k)$ ,  $\beta_i = \sigma_i(\alpha_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$ . Получим

$$|\sigma_i(I)| \leq d^{m(n+1)} \frac{c_i^{n+1}}{n!} \leq \frac{c^{n+1}}{n!}, \text{ где } c = d^m \max_i (c_i).$$

Итак, все  $\sigma_i(I) \in \mathbb{Z}_E$ ,  $\sigma_i(I) \neq 0$  при "хороших"  $n$ ,  $\sigma_i(I) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Следовательно,  $N(I) = \prod_{i=1}^{\nu} \sigma_i(I) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $N(I) \neq 0$  при "хороших"  $n$ . Но  $N(I) \in \mathbb{Z}$ !

Противоречие.  $\square$

**Следствие 12** (из теоремы Л.-В.). Если  $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ , то  $e^\alpha \notin \mathbb{A}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ . По теореме Л.-В.  $e^{\alpha_0} = 1$  и  $e^{\alpha_1} = e^\alpha$  линейно независимы над  $\mathbb{A}$ .  $\square$

**Следствие 13.** Число  $\pi$  – трансцендентно.

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = i\pi$ . По теореме Л.-В.  $e^{\alpha_0} = 1$ ,  $e^{\alpha_1} = -1$  линейно независимы над  $\mathbb{A}$ , но они линейно зависимы. Противоречие.  $\square$

**Следствие 14.** Если  $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{1\}$ , то  $\ln(\alpha) \notin \mathbb{A}$ .

**Следствие 15.** Если  $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ , то  $\sin(\alpha)$ ,  $\cos(\alpha)$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) \notin \mathbb{A}$ .

*Доказательство.*  $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i} e^{i\alpha} - \frac{1}{2i} e^{-i\alpha}$ .  $i\alpha \neq -i\alpha$  и принадлежит  $\mathbb{A} \Rightarrow$  для  $0, i\alpha, -i\alpha$  по теореме Л.-В. 1,  $e^{i\alpha}$ ,  $e^{-i\alpha}$  ЛНЗ, а если бы  $\sin(\alpha) \in \mathbb{A}$ , то это было бы ЛЗ.  $\square$

**Следствие 16.** Если  $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{A}$  ЛНЗ над  $\mathbb{Q}$ , то  $e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_k}$  – алгебраически независимы над  $\mathbb{A}$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{A}[x_1, \dots, x_k]$ . Тогда  $f(e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_k}) = \sum_{(n_1, \dots, n_k)} a_{n_1 \dots n_k} e^{n_1 \beta_1 + \dots + n_k \beta_k} =: \alpha_{n_1 \dots n_k}$  – все попарно различны, т.к.  $\beta_1, \dots, \beta_k$  ЛНЗ над  $\mathbb{Q}$ . По теореме Л.-В.  $e^{n_1 \beta_1 + \dots + n_k \beta_k}$  ЛНЗ над  $\mathbb{A}$ , следовательно, вся сумма не обращается в ноль.  $\square$