МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико–математический факультет

Конспект лекций по теории чисел

4-й курс, первый поток, 7-й семестр, осень 2017 г.

Лектор: Олег Николаевич Герман

Москва, 2018 г.

Предисловие

Внимание! Это не курс лекций и не методичка, а всего лишь конспект, набранный в вёрстке LaTeX и не претендующий на окончательную истину. В данном документе не исключены опечатки. Использовать на свой страх и риск. Авторы не несут ответственности за успешность подготовки по данному материалу, а также за его использование в качестве "шпоры".

Данный конспект по теории чисел состоит из 14-ти лекций, прочитанных Олегом Николаевичем Германом — доцентом кафедры теории чисел. Курс был прочитан на 7-ом семестре четвёртого курса мехмата МГУ осенью 2017 года. Он состоит из трёх больших раздедов:

1. Асимптотический закон распределения простых чисел:
$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 \sim \frac{x}{\ln x}.$$
2. Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях: Если $(l, m) = 1$, то существует бесконечное количество таких простых p, что $p \equiv l \mod m$.
3. Теоремы о том, что e и π – иррациональные и трансцендентные числа.

Конспект был подготовлен и заTEXан студентами Артемием Соколовым, группа 405 (нечётные лекции) и Артемием Геворковым, группа 402 (чётные лекции). За основу был взят конспект Юлии Зайцевой. Также в перспективе планируется добавить решения всех упражнений из курса.

Данная версия документа была скомпилирована 24 января 2018 г. Последняя версия .PDF, а также все исходные файлы всегда будут доступны в репозитории по (кликабельной) ссылке:

https://github.com/arvego/numbertheory-sem7

Если найдена ошибка или опечатка — пожалуйста, сообщите нам.

Спасибо Юлии Зайцевой, Виталию Лобачевскому, Всеволоду Гусеву, Кириллу Сосову, Сергею Джунусову, Айку Эминяну, Александру Думаревскову и команде Алгебрача за поиск ошибок и помощь в оформлении данного материала.

Содержание

1 Асимптотический закон распределения простых чисел

Замечание. *Впредь, если мы будем писать сумму вида* $\sum\limits_{...p...} \ldots$, *то мы будем иметь в виду, что* p *– простое число.*

1.1 Игры с $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$

Изучение распределения простых чисел непосредственно связано с изучением следующих функций:

- $\pi(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} 1$ – количество простых чисел, не превосходящих x;
- $\theta(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \ln p = \ln\left(\prod\limits_{p \leqslant x} p\right)$ – θ-функция Чебышева;
- $\psi(x) = \sum\limits_{p^\alpha \leqslant x} \ln(p) = \sum\limits_{p \leqslant x} \left[\dfrac{\ln(x)}{\ln(p)}\right] \ln(p) = \ln\left(\text{НОК}(1, 2, \ldots, [x])\right)$ – ψ-функция Чебышева.

Как эти функции связаны? Оказывается, следующим соотношением:

Лемма 1.1.

$$\underline{\overline{\lim}} \frac{\theta(x)}{x} = \underline{\overline{\lim}} \frac{\psi(x)}{x} = \underline{\overline{\lim}} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}, \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\theta(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{\ln(x)}{\ln(p)}\right] \ln(p) = \ln(x) \sum_{p \leqslant x} 1 = \pi(x)\ln(x)$$

$$\underline{\overline{\lim}} \frac{\theta(x)}{x} \leqslant \underline{\overline{\lim}} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \underline{\overline{\lim}} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$$

Будем рассматривать простые числа на отрезке $[x^\alpha, x]$ для некоторого фиксированного $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\theta(x) = \left(\sum_{p \leqslant x} \ln(p)\right) \geqslant \left(\sum_{x^\alpha < p \leqslant x} \ln(p)\right) > \left(\ln\left(x^\alpha\right) \sum_{x^\alpha < p \leqslant x} 1\right) = \alpha \ln(x)\left(\pi(x) - \pi(x^\alpha)\right) \geqslant \alpha \ln(x)\left(\pi(x) - x^\alpha\right).$$

$$\frac{\theta(x)}{x} > \alpha\left(\frac{\pi(x)}{x/\ln x} - \frac{\ln(x)}{x^{1-\alpha}}\right) \quad \forall 0 < \alpha < 1.$$

Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ получаем, что $\overline{\lim} \dfrac{\theta(x)}{x} \geqslant \overline{\lim} \alpha \dfrac{\pi(x)}{x/\ln x}$.

Значит $\underline{\overline{\lim}} \dfrac{\theta(x)}{x} \geqslant \underline{\overline{\lim}} \dfrac{\pi(x)}{x/\ln x}$. □

1.2 Оценки Чебышева

Теорема 1.2 (Оценки Чебышева)**.** *Существуют* $a, b > 0$ *такие, что*

$$a\frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant b\frac{x}{\ln(x)}.$$

Перед доказательством этой теоремы сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.3.

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

Доказательство. Будем доказывать методом математической индукции по n.
База. При $n = 2, 3$ утверждение верно.
Переход. Если $n = 2k$ – чётно, то видно, что $\prod\limits_{p \leqslant 2k} p = \prod\limits_{p \leqslant 2k-1} p \leqslant 4^{2k-1} \leqslant 4^{2k}$.

Если $n = 2k-1$ – нечётное, то по предложению индукции $\prod\limits_{p \leqslant n} p = \left(\prod\limits_{p \leqslant k} p\right)\left(\prod\limits_{k < p \leqslant 2k-1} p\right) \leqslant 4^k 4^{k-1} = 4^n$. Заметим, что $\prod\limits_{k<p\leqslant 2k-1} p < C^k_{2k-1} = \dfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}$, т.к. каждое такое простое число входит в числитель, но не входит в знаменатель. Поэтому $\prod\limits_{k<p\leqslant 2k-1} p \leqslant C^k_{2k-1} \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot 2^{2m-1} = 4^{m-1}$. ∎

Следствие 1. $\theta(n) < n\ln(4)$.

Следствие 2. $\theta(x) < x \cdot 3\ln(2)$.

Доказательство. Пусть $n - 1 < x \leqslant n$. Тогда $\theta(x) \leqslant \theta(n) < n\ln(4) < (x+1)\ln 4 \leqslant x \cdot 3\ln 2$. ∎

Лемма 1.4. $K := НОК(1, 2, \ldots, 2n+1) > 4^n$

Доказательство. Рассмотрим $I = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx$. Поскольку на отрезке $[0, 1]$ величина $x(1-x)$ не превосходит $\frac{1}{4}$, то $I < \frac{1}{4^n}$.
Заметим, что $x^n(1-x)^n = a_n x^n + \ldots + a_{2n}x^{2n}$ – многочлен с целыми коэффициентами. Тогда $I = \dfrac{a_n}{n+1} + \ldots + \dfrac{a_{2n}}{2n+1}$, и $K \cdot I \in \mathbb{Z}$. Причём K и I оба больше нуля, т.е. $K \cdot I \geqslant 1$. Откуда следует, что $K \geqslant \dfrac{1}{I} > 4^n$. ∎

Следствие 3. $\psi(2n+1) > n\ln(4)$.

Следствие 4. $\psi(x) > x\frac{\ln(2)}{2}$ *при* $x \geqslant 6$.

Доказательство. Пусть $2n + 1 \leqslant x < 2n + 3$. Тогда $\psi(x) \geqslant \psi(2n+1) > n\ln(4) > \dfrac{x-3}{2}\ln 4 = (x-3)\ln(2) \geqslant x\dfrac{\ln(2)}{2}$. ∎

Доказательство. (Теоремы 1.2.)

Применим следствия 2 и 4. Тогда при $x \geqslant 6$ выполнено $\dfrac{\theta(x)}{x} < 3\ln 2, \dfrac{\psi(x)}{x} > \dfrac{\ln 2}{2}$.

Учитывая Лемму 1.1 получаем, что $\overline{\lim}\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x} \leqslant 3\ln 2$ и $\underline{\lim}\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x} \geqslant \dfrac{\ln 2}{2}$. □

Теорема 1.5 (Асимптотический Закон Распределения Простых Чисел)**.**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

1.3 Дзета-функция Римана

Положим при $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Будем писать $s = \sigma + it$. Мы докажем, что $\zeta(s)$ – аналитическая функция на $\mathrm{Re}(s) > 1$, и аналитически продолжим её на $\mathrm{Re}(s) > 0$ (можно и на всю $\mathbb{C}$, будет единственный полюс в точке 1).

Теорема 1.6 (Гипотеза Римана)**.** *Нетривиальные нули ζ-функции лежат на прямой* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Отступление:

Предположим, что $p_1, p_2, \dots, p_r$ – все простые. Тогда $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}$. Следовательно,

$$\sum_{(k_1,\dots,k_r)} \frac{1}{p_1^{k_1}\dots p_r^{k_r}} = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1-\frac{1}{p_j}} \text{ – сходится.}$$

Но слева – сумма гармонического ряда. Противоречие.

1.4 Воспоминания из былых времен

Теорема 1.7 (Вейерштрасса)**.** *Пусть в области Ω функции $f_n(s)$ аналитичны и ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ сходится равномерно (по Ω). Тогда он сходится к функции $f(x)$, аналитической в Ω, причём $f'(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(s)$ – также сходится равномерно.*

Признак (Вейерштрасса)**.** *Если в Ω справедливо $|f_n(s)| < c_n$, и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ равномерно сходится в Ω.*

Определение 1.4.1. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ называется *арифметической* функцией. Если $f \not\equiv 0$ и $f(ab) = f(a)f(b)$ для любых a, b таких, что $(a, b) = 1$, то функция называется *мультипликативной*. А если равенство $f(ab) = f(a)f(b)$ выполнено для абсолютно всех $a, b \in \mathbb{N}$, то функция называется

вполне мультипликативной.
Сверткой Дирихле двух арифметических функций $f(n)$ и $g(n)$ является функция

$$(f * g)(n) = (g * f)(n) = \sum_{k|n} f(k) g\left(\frac{n}{k}\right)$$

Формула обращения Мебиуса гласит, что если $F = f * \mathbf{1}$, то $f = F * \mu$, где $\mu(n)$ – функция Мебиуса[1]

Определение 1.4.2. Рядом Дирихле называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, где $a_n \in \mathbb{Z}$.

Несложно видеть, что если $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, а $G(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$, то $F(s)G(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}$.

Заметим, что $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, где $a_1 = 1$, а остальные $a_i = 0, (i \neq 1)$. Хотим найти "обратную"функцию к $\zeta(s)$.
Известно, что $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$, где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

Теорема 1.8. *Пусть* $\operatorname{Re}(s) > 1$. *Тогда:*

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *сходится абсолютно и задаёт аналитическую функцию* $\zeta(s)$*;*

2) $\zeta'(s) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}$*;*

3) $\zeta(s) \neq 0$ *и* $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, *где* $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p), & n = p^k,\ k \geqslant 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ *– функция Мангольдта.*

Доказательство.
Пункт 1): Обозначим $s = \sigma + it$. Тогда $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma}$, $\sigma > 1$ – таким образом, абсолютная сходимость есть. При этом в области $\Omega_\delta = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1 + \delta\}$, $\delta > 0$, сходимость будет равномерной, ибо $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ сходится. Но тогда по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ равномерно сходится в Ω_δ. По теореме 1.7 сумма ряда является аналитичной в Ω_δ (каждая $\frac{1}{n^s}$ является целой функцией s). И это справедливо для всех δ.
Пункт 2): По теореме 1.7 в каждой Ω_δ : $\left(\frac{1}{n^s}\right)' = \left(e^{-s\ln n}\right)'$. Далее очевидно.
Пункт 3): Заметим, что в области Ω_δ :

$$\left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| = \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leqslant \frac{\ln n}{n^\sigma} < \frac{\ln(n)}{n^{1+\delta}},$$

[1] $\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1, \\ 0, \exists p^2 | n, \\ (-1)^r, n = p_1 \ldots, p_r. \end{cases}$

а мы знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1+\delta}}$ сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ сходится в Ω_δ равномерно. По теореме 1.7 сходится к аналитической функции, причём абсолютно. Перемножим два абсолютно сходящихся ряда:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda(l)}{l^s}\right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\Lambda(l)}{(kl)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{l|n} \Lambda(l)\ (*)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} = -\zeta'(s).$$

($(*)$ пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, тогда $\sum\limits_{l|n} \Lambda(l) = \sum\limits_{j=1}^{r} \left(\sum\limits_{\beta_j=1}^{\alpha_j} \Lambda\left(p_j^{\beta_j}\right)\right) = \sum\limits_{j=1}^{r} \ln\left(p_j^{\alpha_j}\right) = \ln(n)$).

Итак, при $\mathrm{Re}(s) > 1$ имеем

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Из аналитичности всех функций: пусть s_0 – ноль $\zeta(s)$ кратности $k > 0$, тогда s_0 – ноль $\zeta'(s)$ кратности $k-1$. Так как мы перемножаем две функции, то их кратности должны складываться. Значит, $k-1 = k+$нечто неотрицательное. Получаем противоречие. Почему кратность обязательно конечна? Предположим противное, пусть она бесконечна и тогда $\zeta(s)|_{\mathrm{Re}(s)>1} \equiv 0$ – противоречие. □

Лемма 1.9. *Пусть f – вполне мультипликативная функция, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ абсолютно сходится и $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. Тогда*

$$S = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

Доказательство. Положим $S(x) = \prod\limits_{p \leqslant x} (1 - f(p))^{-1}$, покажем, что $S(x) \xrightarrow{x\to\infty} S$. Заметим, что из мультипликативности f следует $f(1) = 1$ и что $|f(n)| < 1$ при $n \geqslant 2$ (т.к. иначе $f(n^k) = f(n)^k \not\to 0$, а члены ряда обязаны $\to 0$ из его абсолютной сходимости). Далее, при простом p : $\frac{1}{1-f(p)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(p)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(p^k)$. Следовательно, $S(x) = \prod\limits_{p \leqslant x} (1 - f(p))^{-1} = \prod\limits_{p \leqslant x} \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum\limits_{\substack{n \in \mathbb{N}: \\ \forall p|n\ p \leqslant x}} f(n)$ (такие n зовутся "x-гладкими"). Стало быть, $|S - S(x)| = \left|\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}: \\ \exists p|n\ p>x}} f(n)\right| \leqslant \sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}: \\ \exists p|n\ p>x}} |f(n)| \leqslant \sum\limits_{n>x} |f(n)| \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (т.к. последний ряд – хвост сходящегося). □

Теорема 1.10 (формула Эйлера)**.** *Пусть* $\mathrm{Re}(s) > 1$. *Тогда*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Возьмём (и положим) $f(n) = \frac{1}{n^s}$ и применим лемму 1.9. Тогда

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

□

Лемма 1.11. $\psi(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} \Lambda(n)$ *(ну, т.е.* $\psi(n) - \psi(n-1) = \Lambda(n)$*).*

Доказательство. Следует из определений $\psi(x)$ и $\Lambda(n)$. □

1.5 Преобразование Абеля

Лемма 1.12. *(Преобразование Абеля) Пусть* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– последовательность комплексных чисел. Пусть* $g(x) \in C^1([1;\infty), \mathbb{C}), A(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} a_n$*. Тогда для любого* $N \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\sum_{n \leqslant N} a_n g(n) = A(N)g(N) - \int_1^N A(x)g'(x)dx.$$

Доказательство.

$$A(N)g(N) - \sum_{n \leqslant N} a_n g(n) = \sum_{n \leqslant N} a_n (g(N) - g(n)) = \sum_{n \leqslant N} a_n \int_n^N g'(x)dx.$$

Положим $\varphi_n(x) = a_n$, если $x \geqslant n$ или 0, если $x < n$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant N} a_n \int_n^N g'(x)dx = \sum_{n \leqslant N} \int_1^N \varphi_n(x)g'(x)dx = \int_1^N \left(\sum_{n \leqslant N} \varphi_n(x)\right) g'(x)dx = \int_1^N A(x)g'(x)dx.$$

□

Теорема 1.13.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{1+s}}dx,$$

причем интеграл в правой части сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 0$ *и задает аналитическую функцию.*

Доказательство. При $\mathrm{Re}(s) > 1$ выполнено $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Используя преобразование Абеля с параметрами $a_n = 1$ и $g(x) = \frac{1}{x^s}$ получим, что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = N\frac{1}{N^s} + s\int_1^N \frac{[x]}{x^{1+s}} = \frac{1}{N^{s-1}} + s\left(\int_1^N \frac{1}{x^s} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}}\right) =$$

$$= \frac{1}{N^{s-1}} + s\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}}\right) = 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - s\int_1^N \frac{\{x\}}{x^{1+s}}.$$

Поскольку $s = \sigma + it$, где $\sigma > 1$, и $|N^{s-1}| = N^{\sigma-1}$, то при $N \to \infty$ третье слагаемое стремится к 0, а последнее стремится к несобственному интегралу в условии теоремы.
Итак, при $Re(s) > 1$ выполнено равенство

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{1+s}}dx.$$

Как только мы докажем, что этот интеграл задает аналитическую функцию в $\mathrm{Re}(s) > 0$, мы получим две функции, которые аналитичны в $\mathrm{Re}(s) > 0$ и совпадают в $\mathrm{Re}(s) > 1$, откуда будет следовать, что они совпадают везде[2].

Положим

$$f_n(s) = \int_n^{n+1} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx = \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{s+1}}dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}dx - n\int_n^{n+1} \frac{1}{x^{s+1}}dx.$$

Первый интеграл аналитичен[3] в $\mathbb{C}$, второй отличается от первого просто сдвигом на 1.

Таким образом, $f_n(s)$ аналитична в $\mathbb{C}$. При $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \delta > 0$ получим, что

$$|f_n(s)| \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} \leqslant \frac{1}{n^{1+\sigma}} < \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ сходится равномерно, поэтому задает аналитическую функцию. □

Следствие 5. *У функции $\zeta(s)$ полюс первого порядка с вычетом 1, поскольку $\underset{1}{Res}\frac{1}{s-1} = 1$.*

Лемма 1.14. *При $\mathrm{Re}(s) > 1$ выполнено*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}dx.$$

Доказательство. При $\mathrm{Re}(s) > 1$ имеем

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Используя преобразование Абеля с параметрами $a_n = \Lambda(n), g(x) = \frac{1}{x^s}$ и тот факт, что $\sum\limits_{n\leqslant x} \Lambda(n) = \psi(x)$ получим, что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(N)}{N^s} + s\int_1^{N} \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}dx.$$

Поскольку мы знаем, что у отношения $\frac{\psi(x)}{x}$ верхний и нижний пределы ограничены, то при $\mathrm{Re}(s) > 1$ $\frac{\psi(N)}{N^{1+s}} \to 0$ при $N \to \infty$.

Таким образом, при $N \to \infty$ пределы выражений $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ и $s\int_1^{N} \frac{\psi(x)}{x^{1+s}}dx$ существуют и равны, откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 1.15. *Пусть $0 < r < 1, \varphi \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leqslant 1.$$

Доказательство. Положим $M = |(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})|$. Тогда

$$\ln(M) = 3\ln(|1-r|) + 4\ln(|1-re^{i\varphi}|) + \ln(|1-re^{2i\varphi}|) = \mathrm{Re}\left(3\ln(1-r) + 4\ln(1-re^{i\varphi}) + \ln(1-re^{2i\varphi})\right) =$$

[2]Теорема единственности

[3]При $s \neq 1$ это просто разность степеней, а почему есть аналитичность в точке $s = 1$? Упражнение!

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \operatorname{Re}\left(3 + 4e^{in\varphi} + e^{2in\varphi}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \left(\cos 2n\varphi + 4\cos n\varphi + 3\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} 2\left(\cos n\varphi + 1\right)^2 \leqslant 0.$$

Следовательно, $M \leqslant 1$. □

Лемма 1.16. *При $s = \sigma + it, \sigma > 1$ выполнено неравенство*

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + 2it)| \geqslant 1.$$

Доказательство. Положим $r = \dfrac{1}{p^\sigma}, e^{i\varphi} = p^{-it}$. Применим лемму 1.15 и формулу Эйлера 1.10. □

Теорема 1.17. $\zeta(1 + it) \neq 0$ *при всех* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\zeta\left(1 + it_0\right) = 0$. Тогда при $\sigma \to 1+:$
$\zeta^3(\sigma)\zeta^4\left(\sigma + it_0\right)\zeta\left(\sigma + 2it_0\right) = O\left(\dfrac{1}{(\sigma - 1)^3}(\sigma - 1)^4 \cdot 1\right) = O_{\sigma \to 1}(\sigma - 1)$. (Т.к. $\zeta(\sigma) \to +\infty$ при $\sigma \to 1+$, точнее, $\zeta(\sigma) = O\left(\dfrac{1}{\sigma - 1}\right)$ ибо полюс порядка 1; $\zeta\left(1 + it_0\right) = 0 \xRightarrow{\text{из мультипл.}} \zeta\left(\sigma + it_0\right) = O(\sigma - 1)$; $\zeta\left(1 + 2it_0\right)$ – какая-то константа, полюса там нет из аналитичности функции в $\operatorname{Re}(s) > 0$ везде, кроме 1). Итак, получили $\zeta^3(\sigma)\zeta^4\left(\sigma + it_0\right)\zeta\left(\sigma + 2it_0\right) = O_{\sigma \to 1}(\sigma - 1)$, но по Лемме 1.16 её модуль $\geqslant 1$ при любом $\sigma > 1$. Противоречие.
(Из Леммы 1.16 также можно ещё одним способом получить, что в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > 1$ у ζ-функции нет корней: если бы существовал корень $s = \sigma + it$, то $|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(s)\zeta(\sigma + 2it)| \geqslant 1$, противоречие). □

Лемма 1.18. $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \dfrac{1}{s - 1}$ *аналитична при* $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$.

Доказательство. Знаем, что при $\operatorname{Re}(s) > 1$ оба слагаемых – аналитические функции. Мы также доказали, что $\zeta(s) = \dfrac{f(s)}{s - 1}$, где $f(s)$ точно аналитична при $\operatorname{Re}(s) > 0$ и $f(s) \neq 0$ при $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$. Отсюда следует, что $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \dfrac{f'(s)}{f(s)} - \dfrac{1}{s - 1}$, где f аналитична при $\operatorname{Re}(s) > 0$, а значит, что f' тоже. В $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$ у знаменателя нет нулей. □

Положим $F(s) := -\dfrac{1}{s}\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \dfrac{1}{s - 1}$.

Лемма 1.19. *Справедливы следующие утверждения*

1) $F(s)$ *аналитична в* $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$.

2) $F(s) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{1+s}} dx$ *при* $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Доказательство. По порядку.

1) $F(s) = -\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \dfrac{s}{s - 1}\right) = -\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \dfrac{1}{s - 1} + 1\right)$ – $-\dfrac{1}{s}$ аналитична, а второй множитель аналитичен по Лемме 1.18.

2) При $\mathrm{Re}(s)>1$ $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-s\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{\psi(x)dx}{x^{1+s}}$, $\dfrac{1}{s-1}=\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^s}$. Оба интеграла сходятся абсолютно, поэтому можно их складывать:

$$F(s)=\int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)dx}{x^{1+s}}-\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}=\int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^{1+s}}dx.$$

□

Теорема 1.20. *В интегральном представлении $F(s)$ можно перейти к пределу в $\mathrm{Re}(s)>1$, т.е.*

$$F(1)=\int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx.$$

Лемма 1.21. *Если интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx$ сходится (это будет следовать из Теоремы 1.20), то $\psi(x)\sim x$.*

Доказательство. Возьмём $\varepsilon>0$:

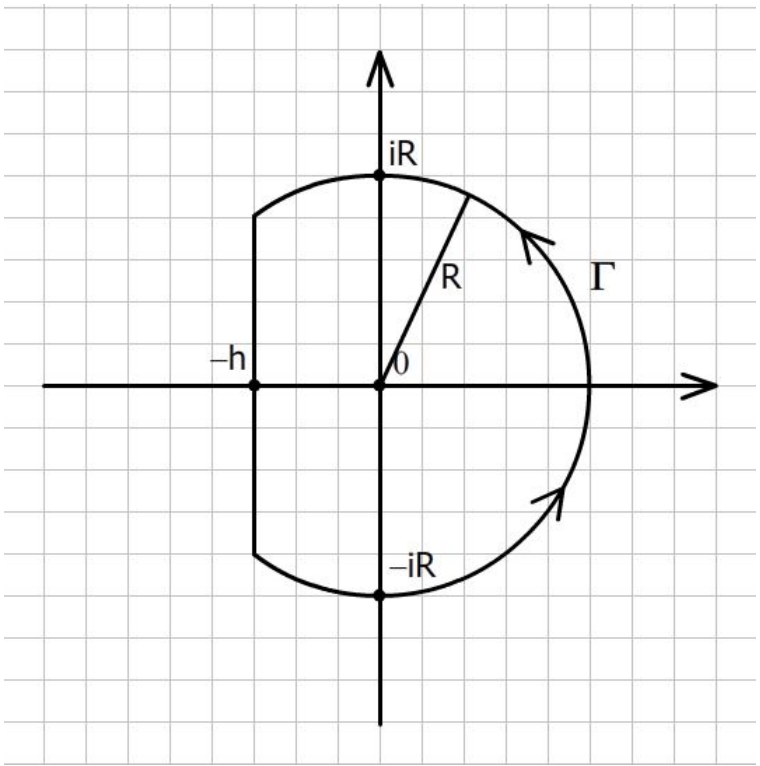
$$\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\psi(u)-u}{u^2}du\geqslant\varepsilon x\frac{\psi(x)-(1+\varepsilon)x}{(1+\varepsilon)^2x^2}=\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)\,x^2}\left(\frac{\psi(x)}{x}-(1+\varepsilon)\right).$$

Из сходимости интеграла слева при фиксированном ε получаем $\displaystyle\int_x^{(1+\varepsilon)x}\frac{\psi(u)-u}{u^2}du\xrightarrow{x\to\infty}0$. Следовательно, $\displaystyle\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\left(\frac{\psi(x)}{x}-(1+\varepsilon)\right)\leqslant 0$ при фиксированном ε. Отсюда $\displaystyle\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\leqslant 1+\varepsilon$, а т.к. это верно для любого x, то $\displaystyle\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\leqslant 1$. И наоборот, меняя знак неравенства, получаем $\displaystyle\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\geqslant 1-\varepsilon$, а т.к. это верно для любого ε, то $\displaystyle\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\geqslant 1$. □

Доказательство. (Теоремы 1.20).
Положим $F_T(s)=\displaystyle\int_1^T\frac{\psi(x)-x}{x^{1+s}}dx$, $T>1$. Поскольку $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s}$ – целая функция, т.к. $\psi(x)$ на отрезке $[n,n+1]$ постоянна, то $\displaystyle\int_1^T\frac{\psi(x)-x}{x^{1+s}}dx$ является суммой целых функций вида $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^s}$ $\Rightarrow F_T(s)$ – целая. Нужно показать, что $F_T(1)\to F(1)$ при $T\to\infty$. По определению предела, возьмём $\varepsilon>0$ и рассмотрим следующий интеграл

$$I(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(F(1+s)-F_T(1+s)\right)T^s\left(\frac{s}{R^2}+\frac{1}{s}\right)ds,\ \ R=\frac{1}{\varepsilon}.$$

$F(s)$ аналитична в $\mathrm{Re}(s)\geqslant 1\ \Rightarrow\ F(1+s)$ аналитична в $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$. То есть, она аналитична на отрезке $[-iR,iR]$ *(см. Рис. 1)*. Если $F(s)$ аналитична в точке, то она аналитична в некоторой окрестности этой точки. Применяя это к каждой точке нашего отрезка, получаем его покрытие открытыми кругами и выделяем конечное подпокрытие по компактности $[-iR,iR]$. Теперь выбираем h так, чтобы прямоугольник был внутри объединения кругов, т.е. чтобы $F(1+s)$ была аналитична на нарисованном контуре ($h=h(\varepsilon)$).



(Рис. 1)

Значит, в $I(T)$: $F(1+s)$ – аналитична в области (по построению), $F_T(1+s)$ – везде целая, T^s – целая (экспонента), $\dfrac{s}{R^2}$ – целая, $\dfrac{1}{s}$ – полюс порядка 1 в нуле. Следовательно, по теореме Коши о вычетах

$$I(T) = (F(1) - F_T(1))\, T^0 = F(1) - F_T(1).$$

□

Лемма 1.22.
При $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0:\quad |F(1+s) - F_T(1+s)| \leqslant A\dfrac{T^{-\sigma}}{\sigma}$;
при $\sigma = \mathrm{Re}(s) < 0:\quad |F_T(1+s)| \leqslant A\dfrac{T^{-\sigma}}{-\sigma}$,
где A *такое, что* $\left|\dfrac{\psi(x)}{x} - 1\right| \leqslant A$ *при* $x \geqslant 1$.

Доказательство.

$$\sigma > 0: \quad |F(1+s) - F_T(1+s)| = \left|\int_T^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} dx\right| \leqslant A\int_T^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = A\frac{T^{-\sigma}}{\sigma};$$

$$\sigma < 0: \quad |F_T(1+s)| = \left|\int_1^{T} \frac{\psi(x) - x}{x^{2+s}} dx\right| \leqslant A\int_1^{T} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = A\frac{T^{-\sigma}}{-\sigma}.$$

□

Лемма 1.23. *Если* $|s| = R$, *то* $\dfrac{s}{R^2} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(s)}{R^2}$

Доказательство.

$$\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} = \frac{1}{R}\left(\frac{s}{R} + \frac{R}{s}\right) = \frac{1}{R}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{2\,\mathrm{Re}(s)}{R^2}.$$

□

Лемма 1.24. *При* $T > 1$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *выполнено* $xT^{-x} \leqslant \dfrac{1}{e\ln(T)}$.

Доказательство. Считаем производную $(xT^{-x})' = (1 - x\ln(T))T^{-x}$. Она обращается в 0 в точке $x_0 = \dfrac{1}{\ln(T)}$. Ну и несложно видеть, что функция при $x < x_0$ возрастает, при $x > x_0$ убывает, значит максимум значения функции равен $\dfrac{1}{\ln(T)}T^{-\frac{1}{\ln(T)}} = \dfrac{1}{e\ln(T)}$. □

Положим $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) \geqslant 0\}$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) \leqslant 0\}$.
Тогда $I(T) = I_1(T) + I_2(T) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_1} \ldots + \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \ldots$
По Лемме 1.22

$$|I_1(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} A\frac{T^{-\sigma}}{\sigma}T^{\sigma}\frac{2\sigma}{R^2}ds = \frac{1}{2\pi}\frac{2A}{R^2} = A\varepsilon$$

$$I_2(T) = I_3(T) - I_4(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} F(1+s)T^{\sigma}\left(\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s}\right)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} F_T(1+s)T^{\sigma}\left(\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s}\right)ds.$$

По Лемме 1.22, $I_4(T)$ оценивается точно так же, как и $I_1(T)$, только надо заменить контур Γ_1 на Γ_3. Это можно сделать, так как у подынтегральной функции нет полюсов вне контура $\Gamma_3 \cup \Gamma_2$ (полюс только 0). Таким образом, $|I_4(T)| \leqslant A\varepsilon$.
Осталось оценить $I_3(T) = \displaystyle\int_{\Gamma_2} F(1+s)T^s\left(\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s}\right)$.
Заметим, что

1. на малых дугах $\left|T^s\left(\dfrac{s}{R^2} + \dfrac{1}{s}\right)\right| = \dfrac{2\sigma}{R^2}T^{\sigma} \underset{\text{Лемма 1.23}}{=} \dfrac{2\sigma T^{-|\sigma|}}{R^2} \underset{\text{Лемма 1.24}}{\leqslant} \dfrac{2}{R^2}\dfrac{1}{e\ln(T)}$;
2. на вертикальном отрезке $T^s = T^{-h}$;
3. на Γ_2 верно $|F(1+s)\left(\dfrac{s}{R^2} + \dfrac{1}{s}\right)| \leqslant C = C(\varepsilon)$ – не зависит от T.

Следовательно, $I_3(T) \to 0$ при $T \to +\infty$. То есть, $\exists T_0(\varepsilon) : \forall T > T_0$ выполняется $|I_3(T)| < \varepsilon$.
Итак, $|I(T)| \leqslant |I_1(T)| + |I_4(T)| + |I_3(T)| \leqslant A\varepsilon + A\varepsilon + \varepsilon = (2A+1)\varepsilon$.
Теорема 1.20 $\Rightarrow$ Лемма 1.21. Леммы 1.1 и 1.21 $\Rightarrow$ Теорема 1.5 – АЗРПЧ.

2 Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях

Теорема 2.1 (Дирихле)**.** *Пусть* $l, m \in \mathbb{Z}, (l, m) = 1, m \geqslant 2$*. Тогда существует бесконечно много простых* p *таких, что* $p \underset{m}{\equiv} l$.

Замечание. *При фиксированном* m *таких прогрессий ровно* $\varphi(m)$ *штук.*
Число простых до x *в этой прогрессии на самом деле* $\frac{1}{\varphi(m)}\frac{x}{\ln x}$*, то есть эти простые распределены по прогрессии равномерно. Но доказывать мы это, конечно же, не будем.*

2.1 Свойства характеров

Определение 2.1.1. Пусть $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$. Функция $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ называется *числовым характером (Дирихле) по модулю* m, если

1. $\forall a \in \mathbb{Z}$ выполняется $\chi(a + m) = \chi(a)$;
2. $\chi(a) = 0 \Leftrightarrow (a, m) \neq 1$;
3. $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

Замечание. *Несложно провести биекцию* $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \leftrightarrow \overline{\chi} : \mathbb{Z}_m^* \to \mathbb{C}^*$.

Замечание. $|\chi(a)| = 0$*, если* $(a, m) \neq 1; 1$*, иначе. Для начала заметим, что* $\chi(1) = \chi(1 \cdot 1) = \chi(1)^2$ *, и поскольку* $\chi(1) \neq 0$*, то* $\chi(1) = 1$*. Вспомним, что если* $(a, m) = 1$*, то* $a^{\varphi(m)} \underset{m}{\equiv} 1$ *(Малая теорема Ферма). Тогда* $\chi(a)^{\varphi(m)} = \chi(a^{\varphi(m)}) = \chi(1) = 1$*. Таким образом, мы получили, что* $\chi(a) \in \sqrt[\varphi(m)]{1}$*.*

Вспомним теорему с первого курса: $\mathbb{Z}_m^*$ циклическая $\Leftrightarrow m = 1, 2, 4, p^k, 2p^k$ для простого p. [4]

Предложение 2.2. $\mathbb{Z}_m^*$ *разлагается в прямое произведение циклических групп.*

Лемма 2.3. *Пусть* $\eta_1, \ldots, \eta_r$ *– произвольный набор корней из* 1 *степеней* $d_1, \ldots, d_r$ *соответственно (т.е.* $\eta_i^{d_i} = 1$*). Тогда* $\exists! \chi : \ \chi(g_i) = \eta_i$.

Доказательство. Для $(a, m) = 1$ полагаем $\chi(a) = \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_r^{\alpha_r}$, где $\overline{a} = \overline{g}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{g}_r^{\alpha_r}$. Для $(a, m) \neq 1$ полагаем $\chi(a) = 0$. Достаточно проверить, что если $(a, m) = 1$, $(b, m) = 1$, то $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
Пусть $\overline{a} = \overline{g}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{g}_r^{\alpha_r}$, $\overline{b} = \overline{g}_1^{\beta_1} \ldots \overline{g}_r^{\beta_r}$, $\overline{c} = \overline{g}_1^{\gamma_1} \ldots \overline{g}_r^{\gamma_r}$, где $0 \leqslant \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leqslant d_1 - 1$, $i = 1 \ldots r$. Тогда $\gamma_i \equiv \alpha_i + \beta_i \pmod{d_i}$. Следовательно, т.к. η_i – корень из 1 степени d_i, получаем

$$\chi(a)\chi(b) = \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_r^{\alpha_r} \cdot \eta_1^{\beta_1} \ldots \eta_r^{\beta_r} = \eta_1^{\gamma_1} \ldots \eta_r^{\gamma_r} = \chi(ab).$$

□

Лемма 2.4. *Если* $a \not\equiv 1 \pmod{m}$*, то* $\exists \chi : \ \chi(a) \neq 1$.

[4] Это эквивалентно наличию первообразного корня по искомому модулю

Доказательство. Очевидно из Леммы 2.3: если $(a, m) \neq 1$, то все характеры подходят; если $(a, m) = 1$, то $\overline{a} = \overline{g}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{g}_r^{\alpha_r} \pmod{m}$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i - 1$. Т.к. $a \not\equiv 1 \pmod{m}$, то $\exists \alpha_i \neq 0$, можно положить, что это $\alpha_1 > 0$.

Положим $\chi(g_1) = \eta_1 = e^{\frac{2\pi i}{d_1}}$, $\chi(g_j) = \eta_j = 1$, $\forall j = 2, \ldots, r$. Тогда, т.к. по Лемме 2.3 характер существует, то $\chi(a) = e^{\frac{2\pi i}{d_1}\alpha_1} \neq 1$. □

Определение 2.1.2. Характер χ_0, где $\chi_0(a) = \begin{cases} 1, & (a, m) = 1, \\ 0, & (a, m) \neq 1 \end{cases}$ называется *главным характером.*

Ясно, что $\chi \cdot \chi_0 = \chi$, где операция $\cdot$ – поточечное перемножение функций. Для любого χ существует обратное $\chi^{-1}: \ \chi^{-1}(a) = \begin{cases} \chi(a)^{-1}, & \chi(a) \neq 0, \\ 0, & \chi(a) = 0. \end{cases}$ В общем, ясно, что характеры образуют группу.

Задача 2.1. *Доказать, что группа характеров изоморфна* $\mathbb{Z}_m^*$.

Характеров по модулю m ровно $\varphi(m)$ штук (следует из Леммы 2.3, $d_1 \ldots d_r = |\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$).

Лемма 2.5. *Справедливы следующие равенства*

1) $\displaystyle\sum_{a=1}^{m} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{если } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

2) $\displaystyle\sum_{\chi} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{если } a \equiv 1 \pmod{m}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Доказательство. По порядку.

1) Если $\chi = \chi_0$, то всё понятно.
   Если $\chi \neq \chi_0$, то $\exists b \in \mathbb{Z}: \ \chi(b) \neq 0, 1$. Положим $s = \displaystyle\sum_{a=1}^{m} \chi(a)$, тогда $s\chi(b) = \displaystyle\sum_{a=1}^{m} \chi(ab) = \sum_{a=1}^{m} \chi(a) = s \ \Rightarrow \ s = 0$.

2) Если $a \equiv 1 \pmod{m}$, то всё понятно.
   Если $(a, m) \neq 1$, то сумма из нулей равна нулю (действительно).
   Если $(a, m) = 1$ и $a \not\equiv 1 \pmod{m}$, то по Лемме 2.4 можно взять характер $\chi_1: \ \chi_1(a) \neq 0, 1$. Положим $s = \displaystyle\sum_{\chi} \chi(a)$, тогда $s\chi_1(a) = \displaystyle\sum_{\chi} \chi(a)\chi_1(a) = \sum_{\chi} \chi(a) = s \ \Rightarrow \ s = 0$.

□

Следствие 6. *Если $\chi \neq \chi_0$, то* $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \chi(n)\right| \leqslant \varphi(m)$.

2.2 L-функции Дирихле

Пусть $m \geqslant 2$, χ – характер по модулю m.

Определение 2.2.1. $L(s,\chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ *называется L-функцией Дирихле.*

Лемма 2.6. *При* $\mathrm{Re}(s) > 1$

1) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ *сходится абсолютно, задаёт аналитическую функцию;*

2) $L'(s,\chi) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\ln(n)}{n^s}$*;*

3) $L(s,\chi) \neq 0$ *и* $\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы очень схоже с доказательством теоремы 1.8. Напомним, что $s = \sigma + it$.

1) $\left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant \frac{1}{n^\sigma} \Rightarrow$ сходится абсолютно при $\sigma > 1$. Но для аналитичности предела нам необходима равномерная сходимость. В области $\Omega_\delta = \{\mathrm{Re}(s) > 1+\delta\}$ $\left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leqslant \frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{n^{1+\delta}}$ – общий член сходящегося ряда. значит, по признаку Вейерштрасса в Ω_δ наша последовательность равномерна. Следовательно, по теореме 1.7 (Вейерштрасса) ряд сходится к аналитической функции.

2) В первом пункте мы воспользовались теоремой Вейерштрасса, которая, в частности, гласит, что наш ряд можно почленно дифференцировать.

3) $L(s,\chi) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = \sum\limits_{k,n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(k)\chi(n)\Lambda(n)}{(kn)^s} = \sum\limits_{k,n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(kn)\Lambda(n)}{(kn)^s} = \sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ d|n}} \frac{\chi(n)\Lambda(d)}{n^s} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(n)\ln(n)}{n^s} = -L'(s,\chi)$.

   Итак, получили $L(s,\chi) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = -L'(s,\chi)$.

   Если s_0 – ноль порядка $k \in \mathbb{N}$, то порядок нуля левой части будет больше или равен 0, т.к. мы умножаем на некую аналитическую функцию. Но порядок нуля правой части равен $k-1$. Противоречие.

   Осталось показать, почему $L(s,\chi) \not\equiv 0$: $\left|\sum\limits_{n=2}^{\infty}\right| \leqslant \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{\alpha^\sigma} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\sigma}$ – первый множитель стремится к 0, второй множитель ограничен некой константой C $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$.

   Второе слагаемое по модулю стремится к 0 при $\sigma \to \infty$. Следовательно, $L(s,\chi) \neq 0$ для некоторого s.

$\square$

Лемма 2.7. *При* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *выполнено*

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Поскольку функция $\frac{\chi(p)}{p^s}$ вполне мультипликативна, то по лемме 1.9 все следует. □

Следствие 7.

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p|m}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Доказательство. Подставим $\chi = \chi_0$. χ – характер по модулю $m \Rightarrow \chi(p) = 0 \Leftrightarrow p|m$. $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, однако это представление верно только при $\mathrm{Re}(s) > 1$. Равенство везде следует из аналитичности L-функции, ζ-функции и $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$. □

Замечание. *Обобщенная гипотеза Римана звучит, что с некоторой оговоркой все нули L-функции Дирихле лежат на* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Следствие 8. *В* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *у* $L(s,\chi_0)$ *ровно один полюс в* $s = 1$ *порядка* 1 *с вычетом* $\frac{\varphi(m)}{m}$, *и в* $\{\mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$ *функция* $L(s,\chi_0)$ *аналитична.*

Доказательство. Вспомним, что $\varphi(m) = m\prod_{p|m}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. У $\zeta(s)$ вычет в 1 равен 1, и функция $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ аналитична в 1. □

Лемма 2.8. *Если* $\chi \neq \chi_0$, *то* $L(s,\chi)$ *аналитична при* $\mathrm{Re}(s) > 0$ **(то есть полюс пропадает!).**

Доказательство. Применим преобразование Абеля к $a_n = \chi(n), g(x) = \frac{1}{x^s}$. Тогда $A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n = \sum_{n\leqslant x}\chi(n)$, и используя следствие 6 $|A(x)| \leqslant \varphi(m)$.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(s)}{n^s} = A(N)\frac{1}{N^s} + s\int_1^N \frac{A(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Так как $|A(N)| \leqslant \varphi(m)$, то первое слагаемое стремится к 0 при $N \to \infty$ и $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Рассмотрим $\int_1^N \frac{A(x)}{x^{1+s}} = \sum_{n-1}^{N-1} \varphi_n(s)$, где $\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \frac{A(x)}{x^{1+s}}$ – аналитическая в $\mathbb{C}$[5]

Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s)$ задает аналитическую функцию в $\mathrm{Re}(s) > 0$. При $\mathrm{Re}(s) > \delta > 0$

$$|\varphi_n(s)| \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\varphi(m)}{x^{1+\sigma}}dx \leqslant \frac{\varphi(m)}{n^{2+\sigma}} < \frac{\varphi(m)}{n^{2+\delta}} \text{ – общий член сходящегося ряда} \Rightarrow$$

[5] Упражнение!

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно при $\mathrm{Re}(s) > \delta \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса ряд сходится к аналитической функции.
Тогда в предыдущем равенстве

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n^s} = A(N)\frac{1}{N^s} + s\int_1^N \frac{A(x)}{x^{1+s}}dx$$

первое слагаемое стремится к 0, а второе сходится к аналитической функции, значит и вся сумма стремится к аналитической функции. □

Лемма 2.9. *При* $\chi \neq \chi_0$ *выполнено* $L(1,\chi) \neq 0$.

Доказательство.
Случай 1: $\chi^2 \neq \chi_0$. По лемме 1.15 из I части

$$|(1-r)^3(1-re^{i\varphi})^4(1-re^{2i\varphi})| \leqslant 1 \text{ при } 0 < r < 1.$$

Положим $r = \dfrac{1}{p^\sigma}, e^{i\varphi} = \chi(p)$ для каждого простого p.
Тогда при $\sigma > 1$:

$$|L^3(\sigma,\chi_0)L^4(\sigma,\chi)L(\sigma,\chi^2)| = \prod_p \left|\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^\sigma}\right)^3\left(1-\frac{\chi(p)}{p^\sigma}\right)^4\left(1-\frac{\chi^2(p)}{p^\sigma}\right)\right|^{-1} \geqslant 1.$$

Поскольку $\chi^2 \neq \chi_0$, то у $L(\sigma,\chi^2)$ в 1 есть значение. Предположим, что $L(1,\chi) = 0$. Тогда $L(\sigma,\chi) = O(\sigma-1)$ при $\sigma \to 1+0$.
При этом $L(\sigma,\chi_0) = O(\dfrac{1}{\sigma-1})$ при $\sigma \to 1+0$ – полюс порядка 1.
$L(\sigma,\chi^2) = O(1)$, т.к. $\chi^2 \neq \chi_0$. Отсюда $|L^3(\sigma,\chi_0)L^4(\sigma,\chi)L(\sigma,\chi^2)| = O(\dfrac{1}{(\sigma-1)^3}(\sigma-1)^4 \cdot 1) = O(\sigma-1)$ при $\sigma \to 1+0$, т.е. $\to 0$, что противоречит неравенству выше.
Случай 2: $\chi^2 = \chi_0$.
Заметим, что если рассуждать похожим образом, то мы получим $O(1)$, и ничего не выйдет.
Пусть $L(1,\chi) = 0$. Рассмотрим $F(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$. Первая функция дает в точке 1 имеет полюс порядка 1, а вторая в точке 1 дает ноль порядка 1, значит она аналитична при $\mathrm{Re}(s) > 1$. Докажем, что

1) ряд $F(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$ сходится абсолютно при $\mathrm{Re}(s) > 1$, причем $F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n)^k a_n}{n^s}$,
2) $a_n \geqslant 0$,
3) $a_{r^2} \geqslant 1, \forall r \in \mathbb{N}$,
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$ расходится при $s = \dfrac{1}{2}$.

Пункт 1):
Надо доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n^s}$ сходится при $\mathrm{Re}(s) > 1$. При $\mathrm{Re}(s) > 1+\delta, \delta > 0$ выполнено $\dfrac{a_n}{n^s} \leqslant \dfrac{|a_n|}{n^\sigma} <$

$\dfrac{|a_n|}{n^{1+\delta}}$ – общий член сходящегося ряда. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^s}$ сходится равномерно. Но тогда по Теореме 1.7 Вейерштрасса этот ряд задаёт аналитическую функцию, причём его можно почленно дифференцировать.
Пункт 2)**:**

$$a_n=\sum_{d|n}\chi(d)=\prod_{j=1}^{r}\sum_{\beta_j=0}^{a_j}\chi(p_j)^{\beta_j}=\prod_{j=1}^{r}a_{n_j},$$

$$\text{где } a_{n_j}=1+\chi(p_j)+\dots+\chi(p_j)^{\alpha_j}=\begin{cases}1, & \chi(p_j)=0,\\ \frac{1-\chi(p_j)^{1+\alpha_j}}{1-\chi(p_j)}, & \chi(p_j)\neq 0,1,\\ 1+\alpha_j, & \chi(p_j)=1.\end{cases}$$

То есть

$$a_{n_j}=\begin{cases}1+\alpha_j, & \chi(p_j)=1,\\ 1, & \chi(p_j)=0 \text{ или } \chi(p_j)=-1,\ a_j\,\vdots\,2,\\ 0, & \chi(p_j)=-1,\ \alpha_j\ \not\vdots\,2.\end{cases}$$

Из того, что $a_{n_j}\geqslant 0$, следует $a_n\geqslant 0$.
Пункт 3)**:** Очевидно из 2).
Пункт 4)**:** Следует из 2) и 3).
$F(s)$ аналитична в $\mathrm{Re}(s)>0$, поэтому в круге $|s-2|<2$ на вещественной прямой выполняется

$$F(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(k)}(2)}{k!}(\sigma-2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma-2)^k}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(\ln n)^k a_n}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2-\sigma)^k}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k a_n}{n^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\ln n)^k(2-\sigma)^k}{k!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}n^{2-\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}.$$

В частности, при $\sigma=\dfrac{1}{2}:\ F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\frac{1}{2}}}$. Но мы доказали, что он расходится. Противоречие. □

Доказательство. (теоремы Дирихле). При $\mathrm{Re}(s)>1\ \ -\dfrac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}$.

Пусть далее $s=\sigma\in\mathbb{R}$, $s>1$. $\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n=p^k,\ k\geqslant 1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$ Тогда

$$-\frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)}=\sum_{p}\frac{\ln p\chi(p)}{p^s}+\sum_{p}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln p\cdot\chi\left(p^k\right)}{p^{ks}}$$

(первое слагаемое для $n=p$, второе – для $n=p^k$). Покажем, что второе слагаемое ограничено константой, не зависящей от s при $s>1$:

$$\left|\sum_{p}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln p\cdot\chi\left(p^k\right)}{p^{ks}}\right|\leqslant\sum_{p}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln p}{p^{ks}}=\sum_{p}\ln p\frac{1/p^2}{1-1/p}\leqslant 2\sum_{p}\frac{\ln p}{p^2}<2\sum_{n}\frac{\ln n}{n^2}<\infty.$$

Итак, для любого характера χ по модулю m:

$$\sum_{p}\frac{\chi(p)\ln p}{p^s}=-\frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)}+O(1).\qquad(*)$$

Поскольку $(l, m) = 1$, то $\exists v \in \mathbb{Z}: \ vl \equiv 1 \pmod m$ (т.е. обратный). Домножим $(*)$ на $\chi(v)$ и просуммируем по всем характерам:

$$\sum_p \frac{\ln p}{p^s} \sum_\chi \chi(pv) = -\sum_\chi \chi(v) \frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} + O(1),$$

$$\sum_\chi \chi(pv) = \begin{cases} 0, & pv \not\equiv 1 \pmod m, \\ \varphi(m), & pv \equiv \pmod m. \end{cases}$$

Но $pv \equiv 1 \pmod m$, следовательно, $p \equiv l \pmod m$ т.к. $pl \equiv 1 \pmod m$. Значит,

$$\sum_{p \equiv l \pmod m} \frac{\ln p}{p^s} = -\frac{1}{\varphi(m)} \sum_\chi \chi(v) \frac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} + O(1).$$

Перейдём к пределу при $s \to 1+$. Если $p \equiv l \pmod m$ конечное количество, то слева предел конечен. Докажем, что правая часть стремится к бесконечности (т.е в левой части бесконечное число слагаемых):

При $\chi \neq \chi_0$ $\dfrac{L'(s,\,\chi)}{L(s,\,\chi)} = O(1)$ при $s \to 1+$.

При $\chi = \chi_0$ $L(s,\,\chi) = \dfrac{f(s)}{s-1}$, где $f(s)$ аналитична в 1 и $f(1) \neq 0$.

Значит,

$$\frac{L'(s,\,\chi_0)}{L(s,\,\chi_0)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{f'(s)}{f(s)} = -\frac{1}{s-1} + O(1) \xrightarrow{\text{при } s \to 1+} \infty.$$

То есть мы показали, что правая часть стремится к бесконечности при $s \to 1+$. Следовательно,

$$\sum_{p \equiv l \pmod m} \frac{\ln p}{p^s} = \frac{1}{\varphi(m)(s-1)} + O(1).$$

$\square$

Из последнего равенства можно, в частности, получить, что $\displaystyle\sum_p \frac{\ln p}{p^s} = \frac{1}{s-1} + O(1)$.

3 Диофантовы приближения

3.1 Основные сведения

Пусть $\theta \in \mathbb{R}$. Насколько маленькой можно сделать разность $|\theta - \frac{p}{q}|$ так, чтобы $|\theta - \frac{p}{q}| < f(a)$ (p и q – не простые).
Характеристика θ: насколько хорошо она приближается $\frac{p}{q}$. Мы знаем, что существуют нерациональные числа ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \dots$). Легко доказать, что корни многочленов с целыми коэффициентами (алгебраические числа) не будут рациональными. Например, у многочлена $x^2 - x - 1 = 0$ корень $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а у него корни имею вид $\frac{\text{делитель } -1}{\text{делитель} 1} \in \{\pm 1\}$ – ± 1 оба не корни.
А вдруг все числа алгебраические? Нет, алгебраических чисел счётное количество. Это доказал Лиувилль через теорию приближений: он показал, что алгебраические числа не могут приближаться "слишком хорошо". Т.е. для алгебраических чисел не найдётся такой f, для которой будет бесконечно много решений.

Утверждение 3.1. Если $\theta = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$, то $\forall \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ такая, что $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1/b}{q}$.

Доказательство. $\left|\dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q}\right| = \dfrac{|aq - bp|}{bq} \geqslant \dfrac{1}{bq}$, т.к. $|aq - bp| \in \mathbb{Z} \neq 0$. □

Теорема 3.1 (Дирихле о приближении)**.**
Пусть $\theta \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\exists \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qT}$, $1 \leqslant q \leqslant T$.

Доказательство.
Хотим: $|q\theta - p| < \dfrac{1}{T}$. Можно считать, что $\theta \in [0,\,1)$, потом просто прибавить целую часть.
Рассмотрим числа $\{n\theta\},\ n = 0, 1, \ldots, T$. Разобьём отрезок $[0,\,1]$ на полуинтервалы $\left[\dfrac{k}{T},\, \dfrac{k+1}{T}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, T-1$ (т.е на T равных). По принципу Дирихле $\exists n_1, n_2 :\ (n_1 - n_2)\,\theta - ([n_1\theta] - [n_2\theta]) < \dfrac{1}{T}$.
Остаётся положить $q = n_1 - n_2$, $p = [n_1\theta] - [n_2\theta]$; $q \geqslant 1$, $q \leqslant T$ (т.е. n_1, $n_2 \leqslant T$). □

Следствие 9. *Если $\theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, то неравенство $|\theta - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{q^2}$ имеет бесконечно много решений в $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. От противного: пусть $\dfrac{p_1}{q_1}, \ldots, \dfrac{p_k}{q_k}$ – все решения $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$. Положим $\delta = \min\limits_i \left|\theta - \dfrac{p_i}{q_i}\right| > 0$, $T = \lceil \dfrac{1}{\delta} \rceil$ (любое $T > \dfrac{1}{\delta}$). По теореме 3.1 Дирихле $\exists \dfrac{p}{q},\ q \leqslant T :\ \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qT} \leqslant \dfrac{1}{q^2}$. Т.е. $\dfrac{p}{q}$ должно быть среди $\dfrac{p_i}{q_i}$. Но $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qT} < \dfrac{\delta}{q} \leqslant \delta$, т.е. оно ближе, чем наименьшее δ. Противоречие. □

Мера иррациональности числа $\theta = \sup\limits_s :\ \{\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^s}$ имеет бесконечно много решений $\dfrac{p}{q}\}$.

В качестве $\dfrac{p}{q}$ можно брать подходящие дроби в разложении θ в цепную дробь.

Определение 3.1.1. Иррациональное число θ называется *плохо приближаемым*, если $\exists C = C(\theta) > 0$ такое, что $\forall \frac{p}{q}$ выполняется $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{C}{q^2}$.

Известно (существует такая теорема), что число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда неполные частные при разложении в цепную дробь ограничены. Например, для квадратичной иррациональности неполные частные периодичны [6], а значит и ограничены, т.е. квадратичные иррациональности плохо приближаемы.
Отныне и далее мы будем подразумевать, что θ – вещественное число, а α – комплексное.

Определение 3.1.2. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется *алгебраическим, если существует ненулевой многочлен $f(x)$ с рациональными (или целыми) коэффициентами такой, что $f(\alpha) = 0$. Такой многочлен $f(x)$ называется аннулирующим многочленом для числа α.*

Определение 3.1.3. *Степенью алгебраического числа* $\deg\alpha$ называется минимальная степень аннулирующего многочлена.

Теорема 3.2 (Лиувилля). *Пусть θ – вещественное алгебраическое число степени d. Тогда $\exists C = C(\theta) > 0$ такое, что для любого $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ справедливо $\left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{C}{q^d}$, или, другими словами, $\mu(\theta) \leqslant d$.*

Доказательство. Случай $d = 1$ уже доказан в первом утверждении в разделе.
Пусть далее $\theta \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим многочлен $f(x)$ степени d с целыми коэффициентами такой, что $f(\theta) = 0$.

[6]Теорема Лагранжа с 1-го курса

Заметим, что для любого $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ выполнено $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Действительно, так как иначе бы многочлен $\frac{f(x)}{x-\frac{p}{q}}$ был бы аннулирующим многочленом для α степени $d-1$.

Поскольку $f(x)$ с целыми коэффициентами, то $q^d f\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left|q^d f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant 1 \Rightarrow \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^d}$.

Если $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1$, то для любого $\frac{p}{q}$ $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^d}$.

Пусть теперь $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < 1$, т.е. $\frac{p}{q} \in [\theta - 1, \theta + 1]$. Тогда

$$\frac{1}{q^d} \leqslant \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\theta)\right| = \left|\left(\frac{p}{q} - \theta\right) f'(\xi)\right| \leqslant M \cdot \left|\theta - \frac{p}{q}\right|, \text{ где } M = \max_{[\theta-1,\theta+1]} |f'(x)|.$$

Таким образом, $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^d}$, и искомое $C = \min(1, \frac{1}{M})$. □

Определение 3.1.4. Если $\theta \in \mathbb{R}$таково, что $\forall n \in \mathbb{N}$ неравенство $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$ имеет бесконечное количество решений в $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то число θ называется *луивиллевым* (= число Луивилля). Числа, не являющиеся луивиллевыми, называются *диофантовыми.*

Предложение 3.3. *Луивиллевы числа трансцендентны.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть θ алгебраическое. Тогда для него верна теорема Луивилля, а именно

$$\exists C > 0 : \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ выполнено } \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}.$$

Тогда при $n \geqslant d$ из неравенства $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$ следует, что $q \leqslant \frac{1}{C}$.

Кроме того, $|q\theta - p| \leqslant 1 \Rightarrow |p| \leqslant 1 + q|\theta| < 1 + \frac{|\theta|}{C}$.
То есть числа q и p ограничены, значит и количество решений. Противоречие. □

Пример 3.1. Число $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$ – луивиллево.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $N \geqslant m$. Обозначим через $\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n!}}$. Тогда $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2^{(N+1)!}} = \frac{2}{q^{N+1}} \leqslant \frac{1}{q^N} \leqslant \frac{1}{q^m}$.

Таким образом, неравенство $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^m}$ имеет бесконечное число решений. □

Кругозора ради добавим, что существует следующая очень сложная

Теорема 3.4 (Туэ-Зигеля-Рота)**.** *Пусть θ – иррациональное алгебраическое число. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ такое, что $\exists C = C(\theta, \varepsilon)$, что для любых $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ справедливо*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^{2+\varepsilon}} = \frac{2}{q^{N+1}} \leqslant \frac{1}{q^N} \leqslant \frac{1}{q^m}.$$

Таким образом, неравенство $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^m}$ *имеет бесконечное количество решений.*

3.2 Иррациональность e и π

Теорема 3.5. $e \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство. Вспомним, что $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Пусть $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Тогда $q!e \in \mathbb{N}$. Несложно видеть, что

$$\mathbb{N} \ni \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^k} \leqslant 1.$$

Получаем противоречие. □

Теорема 3.6. $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство. Пусть $\pi = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Положим $f_n(x) = q^n \dfrac{x^n(\pi - x)^n}{n!} = \dfrac{x^n(q - px)^n}{n!} = \dfrac{q(x)}{n!}$, где $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Рассмотрим $I_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \sin(x) dx$, $I_n \geqslant 0$.

Положим $F_n(x) = f_n(x) - f''_n(x) + f_n^{(4)}(x) + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$.

Поскольку $f_n(x) = f_n(\pi - x)$, то $f_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(\pi - x)$ для чётных k. Из этого мы видим, что $F_n(x) = F_n(\pi - x)$.

Заметим, что $(F'_n(x) \sin x - F_n(x) \cos x)' = f_n(x) \sin x$.

$I_n = (F'_n(x) \sin x - F_n(x) \cos x)_0^{\pi} = F_n(0) + F_n(\pi)$.

$$|f(x) \sin x| \leqslant \frac{b^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{n!} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$$I_n = 2F_n(0) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Итак, последовательность $\{I_n\}$ положительна, целочисленна, и стремится к нулю, в чём и заключается противоречие. □

3.3 Трансцендентность числа e

Теорема 3.7. *Число e трансцендентно.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $\exists a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z} : \ \sum\limits_{k=0}^{m} a_k e^k = 0$, где не все $a_k = 0$.
Считаем, что $(a_0, \ldots, a_m) = 1$. Ортогональным дополнением к $(a_0, \ldots, a_m)$ является полуплоскость Π, проходящая через $\big(1, e, e^2, \ldots, e^m\big)$. При этом в гиперплоскости можно выбрать базис из целочисленных векторов.
Разбиваем все точки $\mathbb{Z}^{m+1}$ на параллельные слои $\mathbb{Z}^m$ (любое $b \in \mathbb{Z}^{m+1}$ лежит в слое с номером $\langle a, b\rangle$). Расстояние между слоями одинаковое и (при условии, что $(a_0, \ldots, a_m) = 1$) оно равно $\Delta = \dfrac{1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2}}$. Построим последовательность $\mathcal{B}^{(n)} \in \mathbb{Z}^{m+1}$ такую, что

1) расстояние от $\mathcal{B}^{(n)}$ до $\langle\big(1, e, e^2, \ldots, e^m\big)\rangle$ меньше Δ,

2) точка $\mathcal{B}^{(n)}$ не лежит в Π.

Напомним, что $\displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!$ Тогда можно брать $\displaystyle\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx$ для многочленов f.
Положим $f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}(x-1)^n \ldots (x-m)^n}{(n-1)!}$. Возьмём $\mathcal{B}_k^{(n)} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x+k) e^{-x} dx, \ k = 0, \ldots, m.$
Покажем, что $\mathcal{B}_0^{(n)} e^k - \mathcal{B}_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$:
При $k = 0$ это просто 0. Пусть $k \neq 0$: $\left|\mathcal{B}_0^{(n)} e^k - \mathcal{B}_k^{(n)}\right| = \left| e^k \displaystyle\int_0^\infty f_n(x) e^{-x} dx - \int_0^\infty f_n(x+k) e^{-x} dx \right| =$
$e^k \left| \displaystyle\int_0^\infty f_n(x) e^{-x} dx - \int_k^\infty f_n(y) e^{-y} dy \right| = e^k \left| \int_0^k f_n(x) e^{-x} dx \right| \leqslant e^m m \dfrac{m^{n+nm-1}}{(n-1)!} = \dfrac{e^m m^{m(n+1)}}{(n-1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$
То есть $\mathcal{B}_0^{(n)} \big(1, e, e^2, \ldots, e^m\big)^T - \mathcal{B}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Следовательно, последовательность точек $\mathcal{B}^{(n)}$ стремится к прямой $\langle\big(1, e, e^2, \ldots, e^m\big)\rangle$ и, начиная с некоторого n, расстояние станет меньше Δ.
Покажем теперь, что $\mathcal{B}_k^{(n)} \in \mathbb{Z}$, где $k = 0, \ldots, m$:
При $k = 0$:
$\mathcal{B}_0^{(n)} = \dfrac{1}{(n-1)!} \sum\limits_k \Big[\text{коэффициент в } x^{n-1}(x-1)^n \ldots (x-m)^n \text{ при } x^k\Big] \cdot \displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-x} dx =$
$= \dfrac{1}{(n-1)!} \left((-1)^{mn} m!^n (n-1)! + A_n n! + \cdots + A_N N!\right) \equiv (-1)^{mn} m!^n \mod n.$
При $k \geqslant 1$:
$\mathcal{B}_k^{(n)} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x+k) e^{-x} dx = \sum_j \left[\text{коэффициент в } \frac{(x+k)^{n-1}(x+k-1)^n \ldots x^n \ldots}{(n-1)!} \text{ при } x^j\right] \cdot j! =$
$\dfrac{1}{(n-1)!} \left(C_n n! + C_{n+1}(n+1)! + \cdots + C_N N!\right) \equiv 0 \mod n.$
Покажем, наконец, что для бесконечно многих n $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k \mathcal{B}_k^{(n)} \neq 0$ (то есть, что $\mathcal{B}^{(n)} \notin \Pi$):

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{B}_k^{(n)} \equiv a_0 (-1)^{mn} m!^n \pmod n.$$

Тогда при $(n, \ a_0 m!) = 1$, где $a_0 m!$ – некоторое фиксированное число, ряд будет не равен нулю. $\square$

4 Алгебраические и трансцендентные числа

4.1 Основные сведения

Множество алгебраических чисел будем обозначать $\mathbb{A}$.
Пусть $f(x) \in \mathbb{Q}[x], , f(\alpha) = 0, \deg f = \deg \alpha$. Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Следовательно, если $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $g(\alpha) = 0$, $\deg g = \deg \alpha (= \deg f)$, то НОД$(f(x), g(x)) = h(x) \in \mathbb{Q}[x]$, при этом $h(\alpha) = 0 = \deg h = \deg f$, то есть, если $h|f$, $h|g, \deg h = \deg f = \deg f$ то они три все пропорциональны.

Определение 4.1.1. Унитарный многочлен $p_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$ называется *минимальным многочленом* α, если $p_\alpha(\alpha) = 0$ и $\deg p_\alpha = \deg \alpha$.

Оказывается, что $\mathbb{A}$ – алгебраически замкнутое поле, т.е. корень многочлена с алгебраическими коэффициентами тоже будет алгебраическим числом.
Для доказательства нам сначала понадобятся несколько лемм.

Теорема 4.1 (О симметрических многочленах)**.**
Пусть R – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля.
Пусть $f(x_1, \ldots, x_m) \in R[x_1, \ldots, x_m]$ – симметрический многочлен.
Тогда $\exists g(x_1, \ldots x_m) \in R[x_1, \ldots, x_m] : \ f(x_1, \ldots, x_m) = g(s_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, s_m(x_1, \ldots, x_m))$, где $s_k(x_1, \ldots, x_m)$ – k-ый симметрический многочлен.

Лемма 4.2. *Пусть $f(x, y) \in R[x, y]$. Тогда $\exists g(x, y_1, \ldots, y_m) \in R[x, y_1, \ldots, y_m] : \ f(x, y_1) \cdot \ldots \cdot f(x, y_m) = g(x, s_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, s_m(y_1, \ldots, y_m))$.*

Доказательство. $f(x, y_1) \cdot \ldots \cdot f(x, y_m) \in R[x][y_1, \ldots, y_m]$, т.е. он симметричный по $y_1, \ldots, y_m$ над $R[x]$. По Теореме 4.1 существует искомый многочлен g, причём g – многочлен от $(x, y_1, \ldots, y_m$ над R. □

Лемма 4.3. *Пусть $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\deg \alpha = n$, $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни $p_\alpha(x)$*[7]*. Тогда $F(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} f(x, \alpha_k) \in \mathbb{Q}[x]$.*

Доказательство. Применим Лемму 4.2:

$$\prod_{k=1}^{n} f(x, \alpha_k) = g(s_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, s_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

По теореме Виета все $s_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ выражаются через коэффициенты многочлена p_α и, следовательно, $s_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}$. □

Теорема 4.4. $\mathbb{A}$ *– поле.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$. Хотим проверить что $\{\alpha @ \beta | @ \in \{+, -, /, \cdot\}\}$.
Сложение:
Рассмотрим $F_1(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} p_\alpha(x - \beta_k)$, где $\beta_1 = \beta$, $\beta_2, \ldots, \beta_m$ – корни $p_\beta(x)$. Тогда по Лемме 4.3: $F_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$. При этом $F_1(\alpha + \beta) = \cdots p_\alpha(\alpha) \cdots = 0$.
Вычитание:

[7] Они попарно различны как корни любого неприводимого многочлена $f(x)$. Иначе бы у $f'(x)$ и $f(x)$ был этот корень общим, но $\deg(f') < \deg(f)$ – противоречие с неприводимостью.

Если β – алгебраическое, то алгебраическим будет и $-\beta$. Тогда $\alpha-\beta$ – тоже алгебраическое. Ну или так: $F_2(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} p_\alpha(x+\beta) \in \mathbb{Q}[x]$, $F_2(\alpha-\beta) = 0$.

Деление:

$F_3(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} p_\alpha(x\beta_k) \in \mathbb{Q}[x]$, $F_3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = 0$.

Умножение:

$F_4(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} \beta_k^m p_\alpha\left(\dfrac{x}{\beta_k}\right) \in \mathbb{Q}[x]$, $F_4(\alpha\beta) = 0$. □

4.2 Целые алгебраические числа

Определение 4.2.1. Алгебраическое число α называется *целым алгебраическим*, если $p_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Множество всех целых алгебраических чисел обозначим через $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$.

Пример 4.1.

- Пусть $\alpha \in \mathbb{Q}$. Тогда $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$
- $a, b, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b\sqrt{d}\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$

Определение 4.2.2. Многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ называется *примитивным*, если $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) = 1$.

Лемма 4.5 (Гаусса)**.** *Произведение примитивных многочленов примитивно.*

Доказательство. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0, g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_1 x + b_0$.
А также рассмотрим $h(x) = f(x)g(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \ldots + c_1 x + c_0$.
Пусть существует простое p такое, что $p|c_k, \forall 0 \leqslant k \leqslant m+n$.

Пусть $r = \min k | a_k \vdots p, s = \min k | b_k \vdots p$.
Тогда $c_{r+s} = \sum\limits_{i+j=r+s} a_i b_j \equiv a_r b_s \not\equiv 0 \mod p$, т.е. $p \nmid c_{r+s}$. Получаем противоречие. □

Теорема 4.6. *Если существует унитальный многочлен $f(x) \neq 0 \in \mathbb{Z}[x] : f(\alpha) = 0$, то $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$.*

Доказательство. $p_\alpha(x)|f(x)$ в $\mathbb{Q}[x]$, т.е. $\exists g(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(x) = g(x)p_\alpha(x)$.
Покажем, что $g(x), p_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Пусть A, B – НОК знаменателей коэффициентов $g(x)$ и $p_\alpha(x)$ соответственно. Тогда $Ag(x)$ и $Bp_\alpha(x)$ – примитивные многочлены.
$ABf(x) = Ag(x)Bp_\alpha(x)$ – примитивный многочлен по лемме 4.5 Гаусса. Тогда $AB = 1 \Rightarrow A = B = 1$. □

Лемма 4.7. *Пусть $f(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$. Пусть $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – сопряженные к $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$. Тогда $F(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x, \alpha_i) \in \mathbb{Z}[x]$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.3. □

Теорема 4.8. $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ *– кольцо.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$. Пусть $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – сопряженные к α, $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_m$ – сопряженные к β. Тогда, по Лемме 4.7:

$$F_1(x) = \prod_{i=1}^{m} p_\alpha(x - \beta_i) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$F_2(x) = \prod_{i=1}^{m} p_\alpha(x + \beta_i) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$F_3(x) = \prod_{i=1}^{m} \beta_i^{\deg p_\alpha} p_\alpha(x/\beta_i) \in \mathbb{Z}[x].$$

Тогда все три многочлена унитарны и $F_1(\alpha + \beta) = F_2(\alpha - \beta) = F_3(\alpha\beta) = 0$. Применив Теорему 4.6, получаем условие теоремы. □

Задача 4.1. $\forall \alpha \in \mathbb{A}\ \exists d \in \mathbb{Z}$ *такое, что* $d\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$.

4.3 Конечные расширения $\mathbb{Q}$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – произвольные алгебраические числа.

Определение 4.3.1. $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{\dfrac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \mid |f, g \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n], g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0\}$ – *расширение* $\mathbb{Q}$, порожденное $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Задача 4.2. *Доказать, что* $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *– минимальное по включению поле, содержащее и* $\mathbb{Q}$, *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Лемма 4.9. *Пусть* $E = \mathbb{Q}(\theta)$, $\deg(\theta) = n$. *Тогда любой элемент* $\alpha \in E$ *однозначно представим в виде* $\alpha = c_0 + c_1\theta + \ldots + c_{n-1}\theta^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{Q}$.

Доказательство.

Докажем существование: рассмотрим $\alpha = \dfrac{f(\theta)}{g(\theta)} \in E$. Заметим, что поскольку $g(\theta) \neq 0$, то $(p_\theta(x), g(x)) = 1$, т.е. $\exists u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x] :\ u(x)p_\theta(x) + v(x)g(x) = 1$.
Тогда $u(\theta)p_\theta(\theta) + v(\theta)g(\theta) = 1$. Отсюда $\dfrac{1}{g(\theta)} = v(\theta)$ и, стало быть, $\alpha = f(\theta)v(\theta)$.
Положим $h(x) = f(x)v(x)$. Поделим $h(x)$ с остатков на $p_\theta(x) : h(x) = q(x)p_\theta(x) + r(x), \deg r(x) < \deg \theta$.
Тогда $\alpha = h(\theta) = r(\theta)$, $\deg r(x) < n$, $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$.
Докажем единственность: пусть $\alpha = c_0 + c_1\theta + \ldots + c_{n-1}\theta^{n-1} = d_0 + d_1\theta + d_{n-1}\theta^{n-1}$. Тогда

$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)\theta + \ldots + (c_{n-1} - d_{n-1})\theta^{n-1} = 0$ – обнуляющий многочлен θ степени не более $\deg(\theta - 1)$.

Следовательно, по определению $\deg(\theta)$: $\forall i :\ c_i = d_i$. □

Таким образом, $\mathbb{Q}(\theta)$ – линейное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности n с базисом $1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$.

Теорема 4.10 (О примитивном элементе). *Пусть* $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *Тогда* $\exists \theta \in E : E = \mathbb{Q}(\theta)$.

Определение 4.3.2. Такое θ называется *примитивным элементом* E (над $\mathbb{Q}$).

Следствие 10. *Любое конечное расширение* $\mathbb{Q}$ *является конечномерным пространством над* $\mathbb{Q}$.

Определение 4.3.3. Размерность E как линейного пространства над $\mathbb{Q}$ называется *степенью расширения*. Обозначается $[E \colon \mathbb{Q}]$.

Обозначим $\mathbb{Z}_E = E \cap \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.

Доказательство. (теоремы 4.10)
Достаточно доказать для двух чисел: $E = \mathbb{Q}(\xi, \eta)$.
Пусть $\xi_1 = \xi, \xi_2, \ldots, \xi_m$ – сопряженное к ξ, $\eta_1 = \eta, \eta_2, \ldots, \eta_l$ – сопряженное к η. Возьмём $c \in \mathbb{Q}$: все числа $\xi_i + c\eta_j$ попарно различны. Положим $\theta = \xi + c\eta$, утверждается, что θ – искомое. Обозначим $K = \mathbb{Q}(\theta)$, тогда $\mathbb{Q} \subset K \subset E$ – расширение полей. Покажем, что $\xi, \eta \in K$ – отсюда будет следовать, что $E \subset K$, т.е. $E = K$.
Рассмотрим $p_\xi(x)$, $p_\eta(x)$, пусть $f(x) = p_\xi(\theta - cx)$, где $\theta \in K$, $c \in \mathbb{Q}$, $p_\xi \in \mathbb{Q}[x]$. Тогда $f(x) \in K[x]$. Заметим, что

$$f(\eta) = p_\xi(\theta - c\eta) = p_\xi(\xi) = 0, \text{ т.е. } \eta \text{ – корень } f(x).$$

Так как f и p_η оба имеют коэффициенты из K, то рассмотрим $d(x) = \text{НОД}(f(x), p_\eta(x))$. Ясно, что $d(\eta) = 0 \;\Rightarrow\; (x - \eta) | d(x)$; $p_\eta(x)$ имеет корни $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$. Поэтому, $d \subset \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l\}$.
Пусть $d(\eta_i) = 0$. Так как $d|f$, то $f(\eta_i) = 0$, но $f(\eta_i) = p_\xi(\theta - c\eta_i)$. То есть, $\theta - c\eta_i = \xi_j$ для некоторого j (корни p_ξ), но $\theta = \xi_j + c\eta_i$ только когда $i = j = 1$. Следовательно, η – единственный корень $d(x)$. Так как d делит p_η, и у p_η нет кратных корней, то $d(x) = x - \eta$. Но $d(x) \in K[x] \;\Rightarrow\; \eta \in K$. Тогда $\xi = \theta - c\eta \in K$, ведь $\theta \in K$ (по определению K), $c \in \mathbb{Q}$, $\eta \in K$. □

Теорема 4.11.
Поле $\mathbb{A}$ *алгебраически замкнуто. То есть, если* $f(x) \in \mathbb{A}[x]$, *то* $\exists \beta \in \mathbb{A} : \; f(\beta) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{A}[x]$. Так как $\mathbb{A}$ – поле, то не теряя общности можно считать, что $\alpha_n = 1$. Рассмотрим $E = \mathbb{Q}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\right)$. По теореме 4.10 о примитивном элементе: $E = \mathbb{Q}(\theta)$ для некоторого θ, $\deg(\theta) = m$. Тогда $\alpha_i = r_i(\theta)$, где $r_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg(r_i) \leqslant m - 1$. То есть

$$f(x) = x^n + r_{n-1}(\theta) x^{n-1} + \cdots + r_1(\theta) x + r_0(\theta).$$

Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ – все сопряжены к θ. Рассмотрим

$$F(x) = \prod_{j=1}^{m} \left[x^n + r_{n-1}(\theta_j) x^{n-1} + \cdots + r_1(\theta_j) + r_0(\theta_j)\right],$$

заметим, что $f(x, y) = x^n + r_{n-1}(y) x^{n-1} + \cdots + r_1(y) + r_0(y) \in \mathbb{Q}[x, y]$. По лемме 4.3: $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$, при этом $f(x) | F(x)$ в $\mathbb{C}[x]$. Следовательно, все корни $f(x)$ лежат в $\mathbb{A}$. □

4.4 Нормальные расширения

Определение 4.4.1. Пусть E – конечное расширение поля $\mathbb{Q}$. Отображение $\sigma\colon E \to \mathbb{C}$ называется *вложением*, если это инъективный гомоморфизм полей.

Теорема 4.12. *Если $[E\colon \mathbb{Q}] = n$, то существует ровно n различных вложений E в $\mathbb{C}$. При этом, если $E = \mathbb{Q}(\theta)$ и $\theta_1, \ldots, \theta_m$ – все сопряжены к θ, то отображение $\sigma\colon E \to \mathbb{C}$ $(\alpha{\cdot}r(\theta) \mapsto r(\theta_i),$ где $r(x) \in \mathbb{Q}[x])$ является вложением E в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Покажем, что любое $\alpha \in E$ при вложении переходит в какое-то своё сопряжённое:
Пусть σ – вложение. Тогда $0 \neq \sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1)\sigma(1) \ \Rightarrow \sigma(1) = 1$.
Тогда $\sigma(k) = \sigma(1+1+\cdots+1) = \sigma(1)+\sigma(1)+\cdots+\sigma(1) = k$, $\sigma(-1)+\sigma(1) = \sigma(0) = 0 \ \Rightarrow \ \sigma(-1) = -1$.
Значит, $\forall k \in \mathbb{Z}\ \sigma(k) = k$.
Далее, $\forall k \in \mathbb{N}\ \sigma(k)\sigma\left(\frac{1}{k}\right) = \sigma(1) = 1$, откуда $\forall k \in \mathbb{Q}\ \sigma(k) = k$. Стало быть, если $f \in \mathbb{Q}[x]$, то $\forall \alpha \in E\ \sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha))$. В частности, $p_\alpha(\sigma(\alpha)) = \sigma(p_\alpha(\alpha)) = \sigma(0) = 0 \ \Rightarrow \ \sigma(\alpha)$ – сопряжённое к α.
Возьмём $\alpha = \theta$, тогда $\sigma\colon \theta \mapsto \theta_i$, где i зависит от σ. И тогда $\forall r(x) \in \mathbb{Q}[x]:\ \sigma(r(\theta)) = r(\sigma(\theta)) = r(\theta_i)$.
Пусть $\sigma_i\colon E \to \mathbb{C}$ $(\alpha = r(\theta) \mapsto r(\theta_i))$. Почему это вложение?
Пусть $\alpha, \beta \in E$, $\alpha = r(\theta)$, $\beta = s(\theta)$, $r(x), s(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg(r) \leqslant n-1$, $\deg(s) \leqslant n-1$.
$\alpha + \beta = (r+s)(\theta)$, $\alpha \cdot \beta = u(\theta)$, где $u(x)$ – остаток от деления $r(x)s(x)$ на $p_\theta(x)$. Аналогично, $r(\theta_i)s(\theta_i) = u(\theta_i)$.
Тогда

$$\sigma_i(\alpha) + \sigma_i(\beta) = r(\theta_i) + s(\theta_i) = (r+s)(\theta_i) = \theta_i((r+s)(\theta)) = \sigma_i(\alpha+\beta).$$

$$\sigma_i(\alpha)\sigma_i(\beta) = r(\theta_i)s(\theta_i) = u(\theta_i) = \sigma_i(u(\theta)) = \sigma_i(r(\theta)s(\theta)) = \sigma_i(\alpha\beta).$$

Если $\sigma_i(\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \neq 0$, то $1 = \sigma_i(1 = \sigma_i(\alpha)\sigma_i(\alpha^{-1}) = 0$. Противоречие. □

Теорема 4.13. *Пусть $[E\colon \mathbb{Q}] = n$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ – все вложения E в $\mathbb{C}$, $\alpha \in E$, $\deg(\alpha) = d$. Тогда $d|n$ и множество $\{\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_n(\alpha)\}$ состоит из всех сопряжений к α, каждое из которых повторяется $\dfrac{n}{d}$ раз.*

Доказательство. $\alpha = r(\theta)$, $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg(r) \leqslant n-1$. Рассмотрим $F(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - \sigma_i)(\alpha)$. Тогда $F(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - r(\theta_i))$ и по лемме 4.3 $F(x) \in \mathbb{Q}[x] \ \Rightarrow \ p_\alpha(x)|F(x)$. Пусть k максимальное такое, что $p_\alpha^k(x)|F(x)$. Рассмотрим $\dfrac{F(x)}{p_\alpha^k(x)} = g(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Если у g есть корни (если $g \not\equiv const$), то его корни – какие-то сопряжённые с α. Следовательно, $p_\alpha(x)|g(x)$ – противоречие с максимальностью k. Значит, $g(x) = 1$, $F(x) = p_\alpha^k(x)$, $n = kd$. □

Следствие 11. *$\sigma(\alpha) = \alpha$ при всех вложениях E в $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Очевидно.
$(\Rightarrow)$ Из теоремы 4.13. □

Определение 4.4.2. Если для любого вложения σ расширения E справедливо $\sigma(E) = E$, то E называется *нормальным*.

Лемма 4.14. *Пусть E – конечное расширение $\mathbb{Q}$, σ – вложение E в C. Пусть $\sigma(E) \subset E$. Тогда $\sigma(E) = E$.*

Доказательство. E – конечномерное линейное пространство над $\mathbb{Q}$, $\sigma : E \to E$ – линейное отображение с нулевым ядром. Следовательно, $\dim \sigma(E) = \dim E$ и $\sigma(E) = E$. $\square$

Пример 4.2.

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ – нормально;
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ – не нормально.

Теорема 4.15. *Пусть $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и пусть все сопряженные ко всем α_i лежат в E. Тогда E – нормально.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in E$. Тогда $\alpha = \frac{f(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}{g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}$, $f, g \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$.
Если σ – вложение E в $\mathbb{C}$, то $\sigma(\alpha) = \frac{f(\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_m))}{g(\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_m))} \in E$.
Таким образом, $\sigma(E) \subset E$. Применяя лемму 4.14 получаем, что $\sigma(E) = E$, т.е. E нормально. $\square$

Если E нормально, то все вложения E в $\mathbb{C}$ – автоморфизмы E. Можно брать их композиции, существует обратный элемент. Получается группа автоморфизмов E, называемой *группой Галуа*.

Пример 4.3. Группа Галуа $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Пусть E – конечное расширение $\mathbb{Q}$, $[E : \mathbb{Q}] = n$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ – все вложения E в $\mathbb{C}$.

Определение 4.4.3. Для каждого $\alpha \in E$ *нормой относительно* E называется величина
$N(\alpha) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$.

Пример 4.4. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}):\ N(\alpha + \beta\sqrt{2}) = (\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha - \beta\sqrt{2}) = \alpha^2 - 2\beta^2$.

Теорема 4.16.

1. *Если $\alpha \in E$ и $p_\alpha(x) = x^d + \ldots + a_1 x + a_0$, то $N(\alpha) = (-1)^n a_0^{\frac{n}{d}}$.*
2. *Если $\alpha \in E$, то $N(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}_E = \mathbb{Z}_{\mathbb{A}} \cap E$, то $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.*
3. *$N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.*
4. *$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, $N(\frac{\alpha}{\beta}) = \frac{N(\alpha)}{N(\beta)}$.*

Доказательство.

1. Следует из теоремы 4.13 и теоремы Виета.
2. Следует из первого пункта.
3. Следует из определения вложения.
4. Следует из определения вложения.

$\square$

4.5 Трансцендентность π

Теорема 4.17 (Линдемана-Вейерштрасса). *Пусть $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ – различные алгебраические числа. Тогда $e^{\alpha_0}, \dots, e^{\alpha_m}$ линейно независимы (ЛНЗ) над $\mathbb{A}$.*

Теорема 4.18 (Об экспоненциальной линейной форме). *Пусть $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{A}, a_0, \dots, a_m \in \mathbb{A}$. Пусть $A(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^{\alpha_k x} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha_k^l}{l!} \right) x^l \in \mathbb{Q}[[x]] \setminus \{0\}$. Тогда $A(1) \neq 0$.*

Теорема 4.19. *4.18 $\Rightarrow$ 4.17.*

Доказательство. Нужно показать, что $A(1) \neq 0$. Тогда мы применим 4.18 и получим, что $\forall a_0, \dots, a_m$ $A(1) \neq 0$, т.е. линейная комбинация $e^{\alpha_0}, \dots, e^{\alpha_m}$ не 0, и утверждение теоремы выполнено.
Можно считать, что все $a_0, \dots, a_m \neq 0$.
Тогда $A(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^{\alpha_k x} \neq 0$, т.к. вронскиан W

$$W(e^{\alpha_0 x, \dots, \alpha_m x}) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_0 x} & e^{\alpha_1 x} & \dots & e^{\alpha_m x} \\ \alpha_0 e^{\alpha_0 x} & \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \dots & \alpha_m e^{\alpha_m x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^m e^{\alpha_0 x} & \alpha_1^m e^{\alpha_1 x} & \dots & \alpha_m^m e^{\alpha_m x} \end{vmatrix} = \exp\left(\left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \right) x \right) V(\alpha_0, \dots, \alpha_m) \neq 0,$$

где $V(x_1, \dots, x_m)$ является Вандермондом для чисел $x_1, \dots, x_m$.
Почему $A(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$? Рассмотрим нормальное расширение E поле $\mathbb{Q}$, содержащее $a_0, \dots, a_m, \alpha_0, \dots, \alpha_m$. (Например, можно взять все сопряженные к ним и добавить к $\mathbb{Q}$, по теореме 4.15 будет нормальное расширение).
Пусть $[E : \mathbb{Q}] = \eta, \sigma_1, \dots, \sigma_\eta$ – все автоморфизмы E над $\mathbb{Q}$. Тогда $A(x) = E[[x]]$.
Определим $\sigma_1, \dots, \sigma_\eta$ на $E[[x]]$ так:

$$\sigma_i : \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l x^l \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_i(\gamma_l) x^l$$

$$\sigma_i(A(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_i(a_k) \frac{\sigma_i(\alpha_k)^l}{l!} \right) x^l = \sum_{k=0}^{m} \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k) x} = A_i(x)$$

Поскольку $A(x) \neq 0$, то $A_i(x) \neq 0$.
Рассмотрим $B(x) = \prod_{i=1}^{\eta} A_i(x) \in E[[x]], B(x) \not\equiv 0$.
Заметим, что

$$\sigma_i(B(x)) = \sigma_i \left(\prod_{i=1}^{\eta} A_i(x) \right) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma(A_i(x)) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma_i(\sigma_j(x)) = \prod_{i=1}^{\eta} \sigma_j(A_i(x)) = B(x) \Rightarrow B(x) \in \mathbb{Q}[[x]].$$

$$B(x) = \prod_{i=1}^{\eta} \sum_{k=0}^{n} \sigma_i(a_k) e^{\sigma_i(\alpha_k) x} = \sum_{l=0}^{L} b_l e^{\beta_l x}.$$

По Теореме 4.18 $B(1) \neq 0$. Тогда $B(1) = \prod_{j=1}^{\eta} A_j(1) \neq 0 \Rightarrow \forall j \; A_j(1) \neq 0$. А для тождественного σ_j имеем $A_j(x) = A(x)$ получаем, что $A(1) \neq 0$. □

Лемма 4.20. *Пусть* $b_0,\dots,b_m,\beta_0,\dots,\beta_m\in\mathbb{C}$, *пусть* $\sum\limits_{k=0}^{m} b_k e^{\beta_k}=0$. *Рассмотрим многочлен* $f(x)=f_n(x)=(x-\beta_0)^n(x-\beta_1)^{n+1}\dots(x-\beta_m)^{n+1}$, *пусть* $g(x)=\frac{1}{n!}\sum\limits_{l\geqslant n} f^{(n)}(x)$ *(с некоторого l они все станут равны нулю). Тогда*

$$\left|\sum_{k=0}^{m} b_k g(\beta_k)\right|\leqslant\frac{c^{n+1}}{n!},\quad \text{где } c=c(b_0,\dots,b_m,\beta_0,\dots,\beta_m) \text{ – не зависит от } n.$$

Доказательство. Положим $F(x)=\sum\limits_{l\geqslant 0} f^{(l)}(x)$. Нужно доказать, что $\left|\sum\limits_{k=0}^{m} b_k F(\beta_k)\right|\leqslant c^{n+1}$. Заметим, что $F(0)e^{\beta_k}-F(\beta_k)=e^{\beta_k}\int_0^{\beta_k} e^{-z}f(z)dz$ (по частям).
Домножим на b_k и просуммируем по k от 0 до m:
$F(0)\sum\limits_{k=0}^{m} b_k e^{\beta_k}-\sum\limits_{k=0}^{m} b_k F(\beta_k)=\sum\limits_{k=0}^{m}\left[b_k\int_0^{\beta_k} e^{\beta_k-z}f(z)dz\right]$ – хотим оценить модуль правой части.

$$\left|\sum_{k=0}^{m}\left[b_k\int_0^{\beta_k} e^{\beta_k-z}f(z)dz\right]\right|\leqslant\sum_{k=0}^{m}|b_k|e^r\cdot(2r)^{(m+1)(n+1)}\leqslant c^{n+1},\ \text{где } r=\max_{0\leqslant k\leqslant m}|\beta_k|$$

$$\text{для } c=(2r)^{m+1}e^r\cdot\max\left(1,\ \sum_{k=0}^{m}|b_k|\right).$$

□

Доказательство. (теоремы об экспоненциальной линейной форме (Т.Э.Л.Ф.)).
Пусть E – нормальное расширение поля $\mathbb{Q}$, содержащее $a_0,\dots,a_m,\alpha_0,\dots,\alpha_m$, $[E\colon\mathbb{Q}]=\nu$, $\sigma_1,\dots,\sigma_\nu$ – все автоморфизмы E над $\mathbb{Q}$ (аналогично доказательству теоремы 4.19 о Т.Э.Л.Ф. $\Rightarrow$ Т.Л.–В.). Можно считать, что $a_0,\dots,a_m\in\mathbb{Z}_A$ ($\in\mathbb{Z}_E$), так как существует $\tilde d\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ такое, что все $\tilde d a_0,\ \tilde d a_1,\dots,\tilde d a_m\in\mathbb{Z}_A$. От замены то, что дано, и то. что требуется доказать, не поменяется.
Пусть $d\in\mathbb{N}$ – такое, что $d\alpha_0,\ d\alpha_1,\dots,d\alpha_m\in\mathbb{Z}_E$. Предположим противное: пусть $A(1)=0$. Тогда продлеваем наши автоморфизмы $\sigma_1,\dots,\sigma_\nu$ на $E[[x]]$ как в доказательстве теоремы о Т.Э.Л.Ф $\Rightarrow$ Т.Л.–В. То есть можно рассматривать $(\sigma_iA)(x)$.

Так как $A(x)\in\mathbb{Q}[[x]]$, то $(\sigma_iA)(x)=A(x)$ $\forall i=1,2,\dots,\nu$. Следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{m}\sigma_i(a_k)e^{\sigma_i(\alpha_k)x}=(\sigma_iA)(x)=A(x)$, т.е.

$$\sum_{k=0}^{m}\sigma_i(a_k)e^{\sigma_i(\alpha_k)}=A(1)=0,\quad i=1,2,\dots,\nu.$$

Положим $f(x)=f_n(x)=(x-\alpha_0)^n(x-\alpha_1)^{n+1}\dots(x-\alpha_m)^{n+1}$, $g(x)=g_n(x)=\frac{1}{n!}\sum\limits_{l\geqslant n} f^{(l)}(x)$. Положим $I=I_n=d^{m(n+1)}\sum\limits_{k=0}^{m} a_k g(\alpha_k)$. Покажем, что $I\in\mathbb{Z}_E$:
$I=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k\sum\limits_{l\geqslant n} d^{m(n+1)}\frac{1}{n!}f^{(l)}(\alpha_k)=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k\cdot$ (целое алгебраическое число), т.к. $d^{m(n+1)}f(x)=d^{-n}h(dx)$, где $h(t)=(t-d\alpha_0)^n(t-d\alpha_1)^{n+1}\dots(t-d\alpha_m)^{n+1}$ (т.е. $h(t)\in\mathbb{Z}_E$). Следовательно, $d^{m(n+1)}\frac{1}{l!}f^{(l)}(\alpha_k)=$

$d^{-n+l}\frac{1}{l!}h^{(l)}(d\alpha_k) \in \mathbb{Z}_E$ при $l \leqslant n$. Далее,

$I = d^{m(n+1)}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha_0) + (n+1)\sum_{k=0}^{m}\sum_{l\geqslant n+1} a_k\frac{l!}{(n+1)!}d^{m(n+1)}\frac{1}{l!}f^{(l)}(\alpha_k) = a_0\prod_{k=1}^{m}(d\alpha_0 - d\alpha_k)^{n+1} + (n+1)J,$

где $J \in \mathbb{Z}_E$.

Следовательно, $I \in \mathbb{Z}_E$, причём $I \neq 0$, если $\left(n+1,\, N\left(a_0\prod_{k=1}^{m}(d\alpha_0 - d\alpha_k)\right)\right) = 1$.

Таких n бесконечно много: $n+1$ – простое, $\to \infty$. Но тогда и $\sigma_i(I) \in \mathbb{Z}_E$ и $\sigma_i(I) \neq 0$ при "хороших"n.

Но $\sigma_i(I) = d^{m(n+1)}\sum_{k=0}^{m}\sigma_i(a_k)g_i(\sigma_i(\alpha_k))$, где $f_i(x) = (\sigma_i f)(x) = (x - \sigma_i(\alpha_0))^n(x - \sigma_i(\alpha_1))^{n+1}\dots(x - \sigma_i(\alpha_m))^{n+1}$, $g_i(x) = (\sigma_i g)(x) = \frac{1}{n!}\sum_{l\geqslant n} f_i^{(l)}(x)$. Применим Лемму 4.20 для $b_k = \sigma_i(a_k)$, $\beta_i = \sigma_i(\alpha_k)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Получим

$$|\sigma_i(I)| \leqslant d^{m(n+1)}\frac{c_i^{n+1}}{n!} \leqslant \frac{c^{n+1}}{n!},\ \text{ где } c = d^m\max_i(c_i).$$

Итак, все $\sigma_i(I) \in \mathbb{Z}_E$, $\sigma_i(I) \neq 0$ при "хороших"n, $\sigma_i(I) \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, $N(I) = \prod_{i=1}^{\nu}\sigma_i(I) \to 0$ при $n \to \infty$ и $N(I) \neq 0$ при "хороших"n. Но $N(I) \in \mathbb{Z}$! Противоречие. □

Следствие 12 (из теоремы Л.–В.)**.** *Если $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\{0\}$, то $e^\alpha \notin \mathbb{A}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \alpha$. По теореме Л.–В. $e^{\alpha_0} = 1$ и $e^{\alpha_1} = e^\alpha$ линейно независимы над $\mathbb{A}$. □

Следствие 13. *Число π – трансцендентно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = i\pi$. По теореме Л.–В. $e^{\alpha_0} = 1$, $e^{\alpha_1} = -1$ линейно независимы над $\mathbb{A}$, но они линейно зависимы. Противоречие. □

Следствие 14. *Если $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\{1\}$, то $\ln(\alpha) \notin \mathbb{A}$.*

Следствие 15. *Если $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\{0\}$, то $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\mathrm{tg}(\alpha) \notin \mathbb{A}$.*

Доказательство. $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}e^{i\alpha} - \frac{1}{2i}e^{-i\alpha}$. $i\alpha \neq -i\alpha$ и принадлежит $\mathbb{A}$ $\Rightarrow$ для $0, i\alpha, -i\alpha$ по теореме Л.–В. 1, $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$ ЛНЗ, а если бы $\sin(\alpha) \in \mathbb{A}$, то это было бы ЛЗ. □

Следствие 16. *Если $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{A}$ ЛНЗ над $\mathbb{Q}$, то $e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_k}$ – алгебраически независимы над $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{A}[x_1, \dots, x_k]$. Тогда $f(e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_k}) =$
$= \sum_{(n_1,\dots,n_k)} a_{n_1\dots n_k}e^{n_1\beta_1+\dots+n_k\beta_k}$ $=: \alpha_{n_1\dots n_k}$ – все попарно различны, т.к. $\beta_1, \dots, \beta_k$ ЛНЗ над $\mathbb{Q}$. По теореме Л.–В. $e^{n_1\beta_1+\dots+n_k\beta_k}$ ЛНЗ над $\mathbb{A}$, следовательно, вся сумма не обращается в ноль. □