وبرای $n=0$

$$V(0,0)=a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$$

وبرای $n=1$ داریم:

$$\dot{V}(1,t)=-1,$$

$$\Rightarrow V(1,t)=-t+c \xrightarrow{V(1,0)=\frac{4}{\pi}} c=-\frac{4}{\pi}$$

$$\therefore u(x,t)=\frac{\pi}{2}-\left(t+\frac{4}{\pi}\right)\cos x+\sum_{n\geq 2}\left\{\left(\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)+\frac{(-1)^n}{1-n^2}\right)\times e^{-(n^2-1)t}+\frac{(-1)^n}{n^2-1}\right\}\cos nx.$$

گسترش به نواحی نامتناهی:

برای حل مسائلی که دامنه x به صورت $0<x<\infty$ یا $-\infty<x<+\infty$ باشد می‌توان از تبدیلات فوریه نامتناهی و یا تبدیل لاپلاس استفاده کرد.

Ex) $u_t=u_{xx}$

$$u(x,0)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}\qquad u(0,t)=0.$$

اگر فرض کنیم $V(w,t)$ تبدیل فوریه نامتناهی سینوسی u باشد داریم:

$$V(w,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u(x,t)\sin wx\,dx$$

حال با استفاده از خواص تبدیل فوریه سینوسی داریم :

$$\dot{V}(w,t) + w^2 V(w,t) = 0 \qquad (*)$$

$$V(w,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} x \sin wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{w}\left(-\pi\cos w\pi + \frac{1}{w}\sin w\pi\right)$$

از طرفی از $(*)$ داریم :

$$V(w,t) = a(w)\, e^{-w^2 t}$$

$$\Rightarrow V(w,0) = a(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{w}\left(-\pi\cos w\pi + \frac{1}{w}\sin w\pi\right)$$

$$\Rightarrow V(w,t) = a(w).\,e^{-wt}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = F_s^{-1}\{V(w,t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} V(w,t)\sin wx\,dw$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{w}\left(-\pi\cos w\pi + \frac{1}{w}\sin w\pi\right)\sin wx\,dw$$

روش دوم : حل به کمک انتگرال فوریه :

به جای ثابت فرض به دنبال جواب هستیم

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} C_2(w,t)\sin wx\,dw$$

و می‌دهیم

$$u_t - u_{xx} = \int_0^{\infty}\left(\dot{C}_2 + w C_2\right)\sin wx\,dw = 0$$

$$\Rightarrow \dot{C}_1 + \omega^2 C_1 = 0 \longrightarrow C_1(\omega,t) = a(\omega) e^{-\omega t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^\infty a(\omega) e^{-\omega^2 t} \sin\omega x \, dx$$

$$u(x,0) = \int_0^\infty a(\omega) \sin\omega x \, dx = \begin{cases} x, & 0<x<\pi \\ 0, & x>\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin\omega x \, dx = \frac{2}{\pi\omega}\left(-\pi\cos\omega\pi + \frac{1}{\omega}\sin\omega\pi\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}\left(-\pi\cos\omega\pi + \frac{1}{\omega}\sin\omega\pi\right)\sin\omega x \, d\omega .$$

(a) $u_{tt} = u_{xx}$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0$$

حل به کمک انتگرال فوریه:

let $u(x,t) = \int_0^\infty C_1(\omega,t) \cos\omega x \, d\omega$

$$\Rightarrow u_{tt} - u_{xx} = \int_0^\infty (\ddot{C}_1(\omega,t) + \omega^2 C_1(\omega,t)) \cos\omega x \, d\omega = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{C}_1 + \omega^2 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^\infty (a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t)\cos\omega x \, d\omega$$

$$u(x,0) = \int_0^\infty a(\omega)\cos\omega x \, d\omega = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos wx\, dx = \frac{2\sin w}{\pi w}$$

$$u_t(x,0) = \int_0^\infty w\, b(w) \cos wx\, dw = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w} \cos wt \cos wx\, dw .$$

روش دوم: حل با کمک تبدیل فوریه:

let $F_c\{u(x,t)\} = V(w,t)$

$$\Rightarrow \ddot{V} + c^2 V = 0 \quad , \begin{cases} V(w,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \cos wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin w}{w} \\ V_t(w,0) = 0 \end{cases}$$

$$V(w,t) = a(w)\cos wt + b(w)\sin wt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin w}{w}\cos wt$$

$$\Rightarrow u(x,t) = F_c^{-1}\{V(w,t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty V(w,t)\cos wx\, dw$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\cos wt \cos wx\, dw \quad \blacksquare$$

(x) $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad -\infty < x < +\infty, \; -\infty < y < +\infty$ به کمک تبدیل فوریه حل کنید

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases} , \quad u_y(x,0) = 0$$

با فرض $V(\omega,y) = F_x\{u(x,y)\}$ داریم:

$$F_x\{u(x,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

و با توجه به اینکه $F_x\{u_{xx}\} = -\omega^2 V(\omega,y)$ داریم:

$$V''(\omega,y) - \omega^2 V(\omega,y) = 0$$

$$V(\omega,0) = F_x\{u(x,0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$V_y(\omega,0) = 0 \Longrightarrow V(\omega,y) = a(\omega)\,ch\,\omega y + b(\omega)\,sh\,\omega y$$

$$b(\omega) = 0 \quad , \quad V(\omega,0) = a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

بنابراین:

$$V(\omega,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,ch\,\omega y$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = F_x^{-1}\{V(\omega,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega,y)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, ch\,\omega y\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

Ex) $u_t - u_{xx} = \begin{cases} 2 , & 0 < x < \pi \\ 1 , & x > \pi \end{cases}$

$u(x,0) = \begin{cases} 2x-1 , & 0 < x < 1 \\ -1 , & x > 1 \end{cases}$

$u(0,t) = t-1 \quad \longrightarrow$ (راهنمایی: شرط مرزی را صفر کرده و تبدیل فوریه سینوسی بگیرید!)