

مسائل نمونه فصل هفتم سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - خنجرانی

- سیگنال

$$x(t) = \sin^2(t) \quad \text{رادر نظر بگیرید}$$

الف) دوره تناوب سیگنال را تعیین کنید. ب) هزایب سری فوریه سیگنال را بدست آورید.

$$T_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad (T = \pi)$$

$$x(t) = \left(\frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{j2} \right)^2 = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t} - 2}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{j2t} + e^{-j2t}) \quad k. \frac{2\pi}{\pi} t$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{4}, \quad a_{-1} = -\frac{1}{4}$$

سیگنال حقیقی و زوج - هزایب سری فوریه صافاً حقیقی و زوج

۲

مسائل نمونه فصل نهم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب شهرانی

(12 marks)

3. Determine whether or not the following signal is periodic. If the signal is periodic, determine its fundamental period (hint: use trig identities and draw the graph)

$$(a) \quad x(t) = \cos^2(t) \quad T = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{1} \right) = \pi$$

$$(b) \quad x(t) = \cos(2\pi t) \cdot u(t) \quad \text{Non-periodic}$$

(4 marks)

سیستم LTI با ورودی $x(t) = \cos 2\pi t + \sin 6\pi t$ را در نظر بگیرید. مطلوبیت خروجی سیستم.

از ادغامی از توابع سینوسی زیر:

$$a) h_1(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t} \quad b) h_2(t) = \frac{(\sin 4\pi t)(\sin 8\pi t)}{\pi t} \quad c) h_3(t) = \frac{(\sin 4\pi t)(\cos 8\pi t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j2\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j} e^{j6\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j6\pi t}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \delta(\omega - 2\pi) + \frac{1}{2} \delta(\omega + 2\pi) + \frac{1}{2j} \delta(\omega - 6\pi) - \frac{1}{2j} \delta(\omega + 6\pi) \right] 2\pi$$

$$= \pi \delta(\omega \pm 2\pi) + \frac{\pi}{j} (\delta(\omega - 6\pi) - \delta(\omega + 6\pi))$$

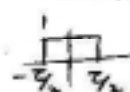
$$\delta(t) \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

$$\cos \omega_0 t \rightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$h_1(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t} = 4 \frac{\sin 4\pi t}{4\pi t} = 4 \text{sinc}(4t)$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow T \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{T}{2}\right)$$



$$f(t) \rightarrow F(\omega)$$

$$F(\omega) \rightarrow 2\pi f(\omega)$$

$$T \text{sinc}\left(\frac{t}{T} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\frac{T}{2\pi} = 4 \Rightarrow T = 8\pi$$

$$4 \text{sinc}(4t) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(-\frac{\omega}{8\pi}\right)$$

$$4 \text{sinc}(4t) \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)$$

$$Y(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right) \cdot \left\{ \pi \delta(\omega \pm 2\pi) + \frac{\pi}{j} (\delta(\omega - 6\pi) - \delta(\omega + 6\pi)) \right\}$$



$$= \pi \delta(\omega \pm 2\pi) \rightarrow y_1(t) = \cos 2\pi t \quad \checkmark$$

$$\frac{T}{2\pi} = 8 \quad T = 16\pi$$

$$16\pi \text{sinc} = 2\pi \text{rect}()$$

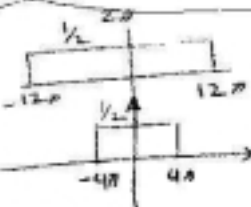
$$h_2(t) = \frac{\sin 4\pi t}{\pi t} \cdot \frac{\sin 8\pi t}{\pi t} = 4 \text{sinc}(4t) \cdot 8 \text{sinc}(8t) = 32 \text{sinc}(4t) \cdot \text{sinc}(8t)$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right) * \text{rect}\left(\frac{\omega}{16\pi}\right)$$

$$h_1(t) \cdot h_2(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} H_1(\omega) * H_2(\omega)$$

$$6 \text{sinc}(12t) \rightarrow \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{24\pi}\right)$$

$$2 \text{sinc}(4t) \rightarrow \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)$$



$$Y(\omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega \pm 2\pi) + \frac{\pi}{2j} (\delta(\omega - 6\pi) - \delta(\omega + 6\pi))$$

$$= \frac{1}{2} \sin 6\pi t \quad \checkmark$$

۴

مسائل نمونه فصل دوم: سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

سه سیستم زمان پیوسته S_1 ، S_2 و S_3 را در نظر بگیرید که پاسخ های آنها به ورودی $x(t)$ به صورت زیر مشخص شده است. برای هر سیستم تعیین کنید که آیا اطلاعاتی داده شده برای نتیجه گیری که سیستم قطعاً LTI است کفایت میکند.

$$S_1: e^{j5t} \rightarrow t e^{j5t}$$

$$S_2: e^{j5t} \rightarrow e^{j5(t-1)}$$

$$S_3: e^{j5t} \rightarrow \cos(5t)$$

$H(j\omega)$ $\xrightarrow{\text{LTI}}$ $e^{j\omega t}$
هر شب در حالت های مختلف اما مستقل از زمان

S_1 ، LTI نیست
 S_2 ، در شرایط بالا صدق میکند، لذا برای LTI بودن آن نمی توان گفت.

$$S_3: \cos(5t) = \frac{e^{j5t} + e^{-j5t}}{2} \quad \text{LTI نیست (زیرا تراجم به وجود آورده)}$$

تعلیم

مسائل نمونه فصل دوم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی

سیستم زمان پیوسته و خطی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ را در دو حالت زیر در نظر بگیرید.

$$x(t) = e^{j2t} \rightarrow \boxed{\text{sys.}} \rightarrow y(t) = e^{j3t}$$

$$x(t) = e^{-j2t} \rightarrow \boxed{\text{sys.}} \rightarrow y(t) = e^{-j3t}$$

الف) با سیستم سیستم به ورودی $x(t) = \cos(2t)$ رابطه اکوردید.ب) با سیستم سیستم به ورودی $x(t) = \cos(2t-1)$ رابطه اکوردید.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x(t) = \cos(2t) &= \frac{1}{2} e^{j2t} + \frac{1}{2} e^{-j2t} = \frac{1}{2} e^{j3t} + \frac{1}{2} e^{-j3t} \\ &= \cos(3t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad x(t) = \cos(2t-1) &= \frac{1}{2} e^{j(2t-1)} + \frac{1}{2} e^{-j(2t-1)} \\ &= \frac{1}{2} e^{-j} \cdot e^{j2t} + \frac{1}{2} e^{j} \cdot e^{-j2t} \\ &= \frac{1}{2} e^{-j} \cdot e^{j3t} + \frac{1}{2} e^{j} \cdot e^{-j3t} = \cos(3t-1) \end{aligned}$$

۶

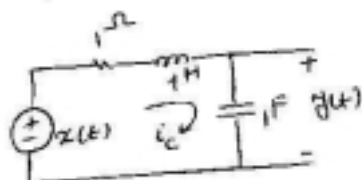
تعلیم
مسائل نمونه فصل دوم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

- سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید. $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ ورودی و خروجی و سیگنال خروجی است.

الف) معادله دیفرانسیلی بر حسب ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ بدست آورید.

ب) اگر ورودی سیستم $x(t) = e^{j\omega t}$ باشد، پاسخ فرکانسی سیستم را تعیین کنید.

ج) اگر ورودی $x(t) = \sin(t)$ باشد، خروجی $y(t)$ را تعیین کنید.



$$i_C + i_L + i_C = x(t)$$

$$i_C = \frac{dv_C}{dt}, \quad v_L = \frac{di_L}{dt} = \frac{di_C}{dt} = \frac{d^2 v_C}{dt^2}, \quad v_C = y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2 e^{j\omega t} H(j\omega) + j\omega e^{j\omega t} H(j\omega) + e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + (j\omega) + 1}$$

$$x(t) = \sin(t) = \frac{1}{2j} e^{j1t} - \frac{1}{2j} e^{-j1t}$$

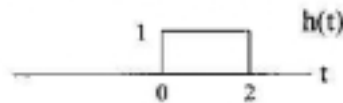
$$y(t) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j1} \cdot e^{j1t} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{-j1} \cdot e^{-j1t}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{j1t} - \frac{1}{2} e^{-j1t} = -\cos(t)$$

نویسنده:
سرکار

مسائل نمونه فصل دوم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی

5. (10 marks) Suppose a LTI system has impulse response



(a) What is the response of the system to the complex signal

$$x_1(t) = e^{j\omega t}$$

for some fixed ω ?

(b) Hence, by writing $\cos(x)$ in terms of complex exponentials, find the response of the system to

$$x_2(t) = \cos(\omega t).$$

Note that in this case the result should be *real valued*, so some simplification may be necessary.

$$H(j\omega) = \int_0^2 e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right|_0^2 = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j2\omega})$$

$$x_1(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y_1(t) = e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j2\omega})$$

$$x_2(t) = \frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2} \Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j2\omega}) + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} \cdot \frac{1}{-j\omega} (1 - e^{-j2\omega})$$

$$y_2(t) = \frac{1}{j2\omega} \cdot e^{-j\omega} e^{j\omega t} (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) - \frac{1}{j2\omega} e^{j\omega} e^{-j\omega t} (e^{-j\omega} - e^{j\omega})$$

$$= \frac{e^{j\omega(t-1)}}{j\omega} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega} + \frac{e^{-j\omega(t-1)}}{j\omega} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$= \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cdot 2 \cos(\omega(t-1)) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cdot \cos(\omega(t-1))$$

مسائل نمونه فصل دوم سیستم‌ها و سیگنال‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی

7. A system with an impulse response

$$h(t) = 3e^{-10t}u(t)$$

is driven by a sinusoidal signal $x(t) = 3\cos(5t)$. Find an expression for the output signal.

(10 marks)

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} 3e^{-10t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{-3}{10+j\omega} e^{-(10+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{3}{10+j\omega}$$

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j5t} + \frac{3}{2} e^{-j5t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} e^{j5t} \frac{3}{10+j5} + \frac{3}{2} e^{-j5t} \frac{3}{10-j5}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{10+j5} e^{j5t} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{10-j5} e^{-j5t}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{11.18 \angle 26.5^\circ} e^{j5t} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{11.18 \angle -26.5^\circ} e^{-j5t}$$

$$= 0.804 \cos(5t - 26.5^\circ)$$

مسئله ۹

مسائل نمونه فصل دوم سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

3.) A signal $x(t)$ has the Fourier series representation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x e^{jk\omega_0 t}$$

for some coefficients c_k^x , where $-\infty < t < \infty$ and $\omega_0 = 2\pi/T$. Find the Fourier coefficients c_k^v for the signal

$$v(t) = x(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

(10 marks)

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \longleftrightarrow b_k = ?$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}(k+1)t} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}(k-1)t} \\ &\quad \quad \quad k+1=K \quad \quad \quad k-1=K \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_{K-1} e^{jK(\frac{2\pi}{T})t} + \frac{1}{2} \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_{K+1} e^{jK(\frac{2\pi}{T})t} \\ &= \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (a_{K+1} + a_{K-1}) e^{jK(\frac{2\pi}{T})t} \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{2} (a_{k+1} + a_{k-1})$$

کلاس ۱۰

مسائل نمونه فصل دوم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب طهرانی

3. (10 marks) The signal

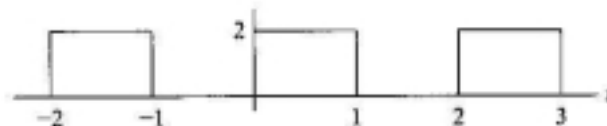


has a Fourier series representation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t}, \quad T=2 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

where

$$c_k = \begin{cases} 1/2 & k=0 \\ \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi/2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Use this information to find a Fourier series expansion for the signal $y(t)$ below:

$$y(t) = 2x(t - \frac{1}{2}) \quad T=2$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t}$$

$$x(t - \frac{1}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi(t - \frac{1}{2})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\pi \frac{1}{2}} \cdot e^{jk\pi t}$$

$$y(t) = 2x(t - \frac{1}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{2c_k e^{-jk\pi \frac{1}{2}}}_{b_k} \cdot e^{jk\pi t}$$

$$b_0 = 2c_0 = 1$$

$$b_k = 2c_k e^{-jk\pi \frac{1}{2}} = \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi/2) \cdot e^{-jk\pi \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{j2} (1 - e^{jk\pi}) = \frac{1}{jk\pi} (1 - (-1)^k)$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k:\text{even}, k \neq 0 \\ \frac{2}{jk\pi}, & k:\text{odd} \end{cases}$$