

۳۴

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال‌ها و سیستم‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی

تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را بدست آورید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2] + n \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] \rightarrow e^{-j2\Omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}}$$

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \Rightarrow x_1(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\Omega n}$$

$$X_1(j\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{j\Omega}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{-j\Omega}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{3} e^{j\Omega}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}}$$

$$X_1(j\Omega) = \frac{\frac{1}{3} e^{j\Omega} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{3}(2\cos(\Omega)) + \frac{1}{9}} = \frac{8/9}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos(\Omega)} = \frac{8}{10 - 6\cos(\Omega)}$$

$$x_1[n] \rightarrow x_1(j\Omega)$$

$$(-jn)x_1[n] \rightarrow \frac{dx_1(j\Omega)}{d\Omega} = \frac{-48\sin(\Omega)}{(10 - 6\cos(\Omega))^2}$$

$$\Rightarrow X(j\Omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-j2\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} - j \frac{48\sin(\Omega)}{(10 - 6\cos(\Omega))^2}$$

۳۵

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی
- تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ را بدست آورید.

$$x[n] = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{3}{4} e^{-j\Omega}\right)^n$$

$$X(j\Omega) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\Omega}}$$

$$x[n] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\Omega n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 e^{-j\Omega n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - e^{-j\Omega 4}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

$$x[n] = [1, -2, 1]$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^2 x[n] e^{-j\Omega n} = 1 - 2e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}$$

$$= e^{-j\Omega} (e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}) - 2e^{-j\Omega}$$

$$= (2\cos(\Omega) - 2) e^{-j\Omega}$$

$$X(j\Omega) = 2(\cos(\Omega) - 1) e^{-j\Omega}$$

$$x[n] = \begin{cases} 2^n & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^9 2^n \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^9 (2e^{-j\Omega})^n = \frac{1 - (2e^{-j\Omega})^{10}}{1 - 2e^{-j\Omega}} = \frac{1 - 2^{10} e^{-j10\Omega}}{1 - 2e^{-j\Omega}}$$

۳۶

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

تبدیل فوریه لپتال زمان لیست $x[n]$ را بدست آورید.

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}, \quad M \in \mathbb{Z}^+, \quad M: \text{even}$$

$$R(j\Omega) = \sum_{n=0}^M 1 \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega(M+1)}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

$$= \frac{e^{-j\Omega \left(\frac{M+1}{2}\right)}}{e^{-j\Omega \frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{M+1}{2} \cdot \Omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \Omega\right)}$$

$$R(j\Omega) = e^{-j\Omega \frac{M}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{M+1}{2} \Omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \Omega\right)}$$

حل دنیاله $w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \cos(\frac{2\pi}{M} n)), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. M متغیر صحیح مثبت و

البتة زوج است. بیان کنید $w(j\Omega)$ را به $R(j\Omega)$

آیا M صحیح مثبت و زوج می‌توان پیدا کرد که به ازای آن $w(j\Omega)$ حقیقی باشد. اگر درست است مثبت بودن M را تعیین کنید، در صورت منفي بودن علت را بیان کنید.

تبدیل فوریه سیگنال داده شده است. مطلوبیت $x[n]$

$$X(j\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}e^{j\Omega}} = e^{-j\Omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}e^{j\Omega}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}e^{j\Omega}}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \frac{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega})} \\ &= \frac{\frac{1/3}{3/2} = \frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{7/3}{3} = \frac{7}{9}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} = \frac{2/9}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{7/9}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

$$x[n] = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{7}{9} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$X(j\Omega) = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 e^{-j6\Omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}} - \left(\frac{1}{3}\right)^6 e^{-j6\Omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-6} u[n-6] \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n-6]) \end{aligned}$$

تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته داده شده است. مطلوب است $x[n]$

$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1 & , |\Omega| \leq W \\ 0 & , W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W 1 \times e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \Big|_{-W}^W = \frac{1}{n\pi} \sin(Wn) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{n\pi} \leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2W}\right)$$

چون رابطه دیرکت آکسید می‌باشد پس $x[0]$ را بطور جداگانه می‌یابیم.

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W d\Omega = \frac{W}{\pi}$$

$$X(j\Omega) = 2\cos(2\Omega)$$

$$\textcircled{1} \quad X(j\Omega) = e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega} \Rightarrow x[n] = \delta[n+2] + \delta[n-2]$$

$$\textcircled{2} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(2\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{j(n+2)\Omega} + e^{j(n-2)\Omega}) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{j(n+2)} e^{j(n+2)\Omega} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{j(n-2)} e^{j(n-2)\Omega} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{j(n+2)} [e^{j(n+2)\pi} - e^{-j(n+2)\pi}] + \frac{1}{j(n-2)} [e^{j(n-2)\pi} - e^{-j(n-2)\pi}] \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{j(n+2)} \left[\frac{e^{jn\pi} \cdot e^{j2\pi}}{(-1)^n} - \frac{e^{-jn\pi} \cdot e^{-j2\pi}}{(-1)^n} \right] + \frac{1}{j(n-2)} \left[\frac{e^{jn\pi} \cdot e^{-j2\pi}}{(-1)^n} - \frac{e^{-jn\pi} \cdot e^{j2\pi}}{(-1)^n} \right] \right)$$

ملاحظه شود که داخل کروشه به ازاء طریقه مقادیر n برابر می‌باشد بجز $n = \pm 2$ که چون مخرج مهم است باستی محاسبه کرده

$$n = +2 \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{j4\Omega} + 1) d\Omega = 1$$

$$n = -2 \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{j4\Omega}) d\Omega = 1$$

پس همان جواب حاصل از روش $\textcircled{1}$ است

سوال چهارم

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی
نیم یی دوره سیگنال ها و سیستم ها داده شده است. مطلوب است $x[n]$

$$X(j\Omega) = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad |\Omega| \leq \pi$$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}) + \frac{1}{2}(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}})$$

$$\delta[n] \rightarrow 1 \quad \delta[n-n_0] \rightarrow e^{-jn_0\Omega} \quad , n_0 \in \mathbb{Z}$$

اما بجای که در $X(j\Omega)$ داده شده $n_0 = \pm \frac{1}{2}$ است و عدد صحیح نیست، لذا نمی توان از خواص برای تقسیم $x[n]$ استفاده کرد.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}} + e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\frac{1}{2}+n)\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(n+\frac{1}{2})} e^{j(n+\frac{1}{2})\Omega} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{j2\pi(n+\frac{1}{2})} \cdot (e^{j\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\pi} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}})$$

$$= \frac{(-1)^n (j + j)}{j2\pi(n+\frac{1}{2})} = \frac{(-1)^n}{\pi(n+\frac{1}{2})} \Rightarrow x[n] = \frac{(-1)^n}{\pi(n+\frac{1}{2})}$$

$$X(j\Omega) = 4e^{j4\Omega} - e^{j\Omega} + 6 + 8e^{j3\Omega} - 16e^{j11\Omega}$$

$$x[n] = 4\delta[n+4] - \delta[n+1] + 6\delta[n] + 8\delta[n-3] - 16\delta[n-11]$$

۴۰

مسائل نمونه فصل چهارم سیستم‌ها و سیگنال‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - فغانی

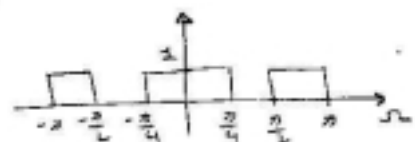
تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته داده شده است. مطلوب است $x[n]$

$$X(j\Omega) = \frac{1 + 3e^{-j3\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})e^{-j\Omega}} + 3e^{-j3\Omega} \frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})e^{-j\Omega}}$$

$$x[n] = (-\frac{1}{4})^n u[n] + 3(-\frac{1}{4})^{n-3} u[n-3]$$

$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2} < |\Omega| \leq \pi \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\Omega| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{j\Omega n} d\Omega + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{j\Omega n} d\Omega + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{j\Omega n} d\Omega \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} + \frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} \left(e^{-jn\pi/2} - e^{-jn\pi} + 2j \sin n\frac{\pi}{4} + e^{jn\pi} - e^{jn\pi/2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} \left(2j \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) - 2j \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right)$$

$$x[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n) - \sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$$