معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) (Partial differential equation)

تعریف (معادله با مشتقات جزئی) : معادله‌ای که شامل یک یا چند مشتق نسبی از تابعی (مجهول) نسبت به دو یا چند متغیر مستقل باشد ، معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی نامیده می‌شود .

مرتبه‌ی بالاترین مشتق موجود در معادله را مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل می‌نامند .

به این ترتیب ، هر معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌نسبی را می‌توان به صورت

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0$$

نوشت که F تابعی از متغیرهای مستقل x ، y ، ... ، تابع مجهول u و تعدادی متناهی از مشتقات جزئی u (حداقل نسبت به دو متغیر) است .

این معادله‌ی دیفرانسیل جزئی را خطی گوئیم اگر تابع F نسبت به هر یک از u ، u_x ، u_y ، ... ، u_{xx} ، u_{yy} ، ... خطی باشد . به عبارت دیگر ، اگر بتوان این معادله را به صورتی نوشت که یک طرف آن ترکیبی خطی از تابع مجهول و مشتقات جزئی آن با ضرایبی از توابعی از متغیرهای مستقل باشد و طرف دیگر آن فقط تابعی از متغیرهای مستقل . اگر طرف دوم مذکور برابر با صفر باشد ، می‌گوئیم معادله همگن است و در غیر این صورت می‌گوئیم معادله ناهمگن است .

با توجه به مطالب فوق ، صورت کلی یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی دوم خطی از دو متغیر t و x عبارت است از :

$$A(t,x)u_{tt} + B(t,x)u_{tx} + C(t,x)u_{xx} + D(t,x)u_t + E(t,x)u_x + F(t,x)u = G(t,x) .$$

معادلات دیفرانسیل جزئی مهم خطی مشهور و پرکاربرد عبارتند از :

(۱) معادله‌ی موج یک بُعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(۲) معادله‌ی گرمای یک بُعدی
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(۳) معادله‌ی لاپلاس دو بُعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(۴) معادله‌ی پواسون دو بُعدی
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

(۵) معادلهٔ موج دوبُعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

(۶) معادلهٔ لاپلاس سه بُعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

متغیر t در این معادلات، متغیر زمان است و همواره نامنفی.
متغیرهای x و y، z متغیرهای مکان هستند.

قضیهٔ بنیادی (یا اصل برهم نهی):

هرگاه u_1 و u_2 جوابهایی از یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی همگن خطی باشند آنگاه

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

که c_1 و c_2 ثابت هستند نیز جوابی از آن معادله است.

---

* گاهی می توان یک PDE را به عنوان یک ODE حل کرد. به صورت زیر:

مثال: جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $u_{xx} - u = 0$ که $u(x,y)$ تابعی از دو متغیر x و y است را بیابید:

حل: چون مشتقی نسبت به y وجود ندارد می توان این معادله را همانند $u'' - u = 0$ حل کرد.
بنابراین جواب به صورت زیر است

$$u(x,y) = A(y)e^{x} + B(y)e^{-x}$$

که A و B توابعی دلخواه از y هستند.

مثال: جواب معادلهٔ دیفرانسیل $u_{xy} = -u_x$ را حل کنید:

حل: با قرار دادن $u_x = p$ داریم $p_y = -p$.

$$p_y = -p \Rightarrow \frac{p_y}{p} = -1$$

$$\Rightarrow \ln p = -y + c(x)$$

$$\Rightarrow p = c(x)e^{-y} \Longrightarrow u_x = c(x)e^{-y} \xrightarrow{\int dx} u(x,y) = f(x)e^{-y} + g(y)$$

که در آن $f(x) = \int c(x)dx$.

همان طور که مشاهده شد یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی دارای تعداد نامتناهی جواب است، پس برای بدست آوردن جواب یک مسألهٔ فیزیکی به یک سری شرایط تکمیلی نیاز داریم:

شرایط تکمیلی:
- شرایط اولیه: مقدار تابع مجهول و مشتقات آن در لحظهٔ $t=0$ داده شده است.
- شرایط مرزی: مقدار تابع مجهول و مشتقات آن روی مرز مکان داده شده است.

معادلهٔ موج یک بُعدی (تار مرتعش):

تاری به طول L را در نظر بگیرید که بین دو نقطهٔ 0 و L در امتداد محور x کشیده شده است.
در لحظهٔ $t=0$ تار را از حالت سکون خارج و نقطهٔ x را تا نقطهٔ $f(x)$ جابه‌جا و با سرعت $g(x)$ رها می‌کنیم. اگر جابجایی نقطهٔ x از تار را در لحظهٔ t با $u(x,t)$ نشان دهیم، با استفاده از قانون حرکت نیوتن، معادلهٔ حرکت به صورت

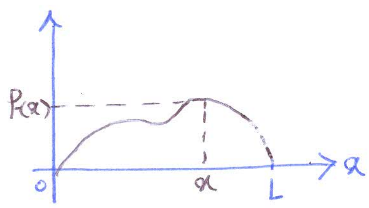
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

به دست می‌آید.

دو انتهای تار همواره ثابت و بر محور x واقع‌اند، یعنی به ازای همهٔ مقادیر $t \geq 0$ می‌توانیم بنویسیم

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u(L,t)=0$$

چون $0<x<L$ است پس 0 و L مرز میدان مکان و شرایط فوق، **شرایط مرزی** مسأله هستند.
در لحظهٔ $t=0$ منحنی تار و سرعت هر نقطه از آن داده شده است یعنی



$$u(x,0)=f(x) \quad , \quad u_t(x,0)=g(x)$$

که همان **شرایط اولیه** مسأله هستند.

حل معادلهٔ موج یک بُعدی با روش تفکیک متغیرها:

جواب معادلهٔ موج را به صورت حاصل‌ضرب دو تابع که هرکدام فقط به یکی از متغیرهای x و t بستگی دارند درنظر می‌گیریم:

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

حال این جواب را در معادلهٔ موج جایگذاری می‌کنیم:

$$F(x)\,G''(t) = c^2 F''(x)\,G(t)$$

$$\Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}$$

چون سمت چپ تابعی از x و سمت راست تابعی از t است
پس تنها حالت برابری وقتی است که دو طرف برابر با مقدار ثابتی باشند.

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \lambda$$

بررسی مقادیر مختلف λ:

$$\text{if } \lambda=0 \Rightarrow F''(x)=0 \Rightarrow F(x)=ax+b$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} \begin{array}{l} F(0)=0 \\ F(L)=0 \end{array} \Rightarrow a=0,\ b=0 \Rightarrow F\equiv 0$$

$$\text{if } \begin{array}{l}\lambda>0 \\ \lambda=k^2\end{array} \Rightarrow F''(x)=\lambda F(x) \Rightarrow F''(x)=k^2F(x) \Rightarrow F(x)=ae^{kx}+be^{-kx}$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} a=b=0 \Rightarrow F\equiv 0$$

$$\text{if } \lambda=-k^2<0 \Rightarrow F''(x)+k^2F(x)=0 \Rightarrow F(x)=a\cos kx+b\sin kx$$

شرایط مرزی $x=0 \Rightarrow u(0,t)=F(0)G(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} G\equiv 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

$$\text{if } F(0)=0 \Rightarrow a\cos(k\times 0)+b\sin(k\times 0)=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

$$F(L)=0 \Rightarrow b\sin(kL)=0 \Rightarrow kL=n\pi \Rightarrow k=\frac{n\pi}{L} \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{G''(t)}{G(t)}=-c^2k^2=-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2$$

$$\Rightarrow G(t)=\alpha\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)+\beta\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

$\lambda_n:=\frac{cn\pi}{L}$ مقدار ویژه nام $\{\lambda_n \mid n\geq 1\}$ طیف

$$F(x)G(t)=\left(\alpha\cos(\lambda_n t)+\beta\sin(\lambda_n t)\right)\times\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=:u_n(x,t)$$

$u_n(x,t)$ تابع ویژه

جواب معادله

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(\lambda_n t)+\beta_n\sin(\lambda_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=g(x)$ شرایط اولیه

$$\Rightarrow u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x)$$

$$\Rightarrow u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n\lambda_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=g(x)$$

$$\Rightarrow \alpha_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

واضح است که α_n ها ضرایب فوریهٔ سینوسی تابع f دربارهٔ $(0,L)$ است.

و β_n ها نیز ضرایب فوریهٔ سینوسی تابع g دربارهٔ $(0,L)$ است.

$$\beta_n=\frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

که $\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$ ،

$$=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

جواب معادلهٔ موج با شرایط اولیه و مرزی داده شده:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\lambda_n t+\beta_n\sin\lambda_n t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ ,\ \lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$$

$$\alpha_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\beta_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

حال مسأله را در حالتی بررسی می‌کنیم که سرعت اولیه $g(x)$ برابر صفر باشد :

بنابراین $\forall n\in N : \beta_n = 0$. پس جواب معادله‌ی موج به صورت زیر در می‌آید

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\lambda_n t \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (*)$$

می‌دانیم که :

$$\cos(\lambda_n t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\lambda_n t+\frac{n\pi}{L}x\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{L}x-\lambda_n t\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{n\pi}{L}(ct+x)+\sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]$$

حال این عبارت را در $(*)$ جایگذاری می‌کنیم :

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{L}(ct+x)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\right]$$

که f^* حد سری فوریه‌ی سینوسی تابع f روی بازه‌ی $(0,L)$ است .
که اگر f تابعی پیوسته باشد به وضوح f^* برابر خود f است .

تمرین : معادله‌ی موج دو بعدی روبرو را با روش تفکیک متغیرها حل کنید :

$u_{tt}-4u_{xx}=0$

$(0\leq x\leq 1)$, $t\geq 0$

شرایط مرزی $u(0,t)=u(1,t)=0$

شرایط اولیه $u_t(x,0)=0$, $u(x,0)=3\sin(2\pi x)$

معادله‌ی حرارت یک بعدی :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حرارت در طول میله ای به طول L

الف) شرایط مرزی $u(0,t)=u(L,t)=0$

شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$

روش تفکیک متغیر برای حل معادله‌ی حرارت یک بعدی :

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

$$\Rightarrow\ u_{xx}=X''(x)T(t)\ ,\ u_t=X(x)T'(t)$$

جایگذاری در معادله :

$$\Rightarrow\ X(x)T'(t)=c^2X''(x)T(t)$$

$$\Rightarrow\ \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{c^2T(t)}=\lambda$$

تساوی فقط زمانی برقرار است که این کسر برابر مقدار ثابت λ باشد .

مشابه معادلهٔ موج، می توان دید که $\lambda \geq 0$ منجر به جواب ثابت صفر می شود.
بنابراین می توان فرض کرد که $\lambda = -k^2$

$$\Rightarrow \quad X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

① $X(x) = a\cos kx + b\sin kx \xrightarrow{x=0} a=0$

$\xrightarrow{x=L} b\sin kL = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \,,\ n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad T'(t) = -c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) \qquad , \qquad \lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = \alpha_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad ②$$

$$\Rightarrow \quad u_n(x,t) = \alpha_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

با توجه به خطی و همگن بودن معادله، این عبارت نیز جوابی از معادله است (اصل برهم نهی)
حال شرایط اولیه را اعمال می کنیم:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

پس α_n ها باید ضرایب فوریهٔ سینوسی تابع f باشند:

$$\Rightarrow \alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

جواب معادلهٔ حرارت یک بعدی با شرایط مرزی و اولیهٔ داده شده:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad , n = 1, 2, \dots$$

ب) فرض کنید دو انتهای میله عایق پوش شده است (شار گرمای که از مقاطع انتهایی می گذرد با مقادیر $\frac{\partial u}{\partial x}$ در همانجا متناسب است.
پس حالا شرایط مرزی معادلهٔ گرما به صورت زیر تغییر می کند:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

$u(x,0) = f(x)$ شرط اولیه

مجدداً روش تفکیک متغیر را به کار می بریم:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$\Rightarrow u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$

$\nearrow T(t) = 0 \Rightarrow T \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ جواب جالبی نیست

$\searrow X'(0) = 0 \xRightarrow{①} X'(0) = -ak\sin(k\times 0) + bk\cos(k\times 0) = 0$

$\hookrightarrow bk = 0 \Rightarrow b = 0$

$$b = 0 \ \&\ ① \Rightarrow X(x) = a\cos kx$$

$u_x(L,t) = X'(L)T(t) = 0$

$\nearrow T(t) = 0 \Rightarrow u \equiv 0$

$\searrow X'(L) = 0 \Rightarrow -ak\sin(kL) = 0$ $\nearrow a = 0 \rightarrow u \equiv 0$ ، $\searrow \sin(kL) = 0$

$$KL = n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$ (a را مساوی ۱ قرار می‌دهیم)

$$T_n(t) = \alpha_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$ مقادیر ویژه $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$

توابع ویژه $$u_n(x,t) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

در این قسمت مقدار ویژهٔ $\lambda_0 = 0$ و تابع ویژهٔ ثابت $u_0 =$ نیز اضافه شده است.

هرگاه دمای اولیه $f(x)$، ثابت باشد، آن‌گاه تابع ثابت u_0 نیز جواب مسأله است.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t} \quad ; \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

شرط اولیه $$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

حال ضرایب α_0 و α_n را برابر ضرایب فوریهٔ کسینوسی تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(0, L)$ می‌گیریم:

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad , \quad \alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n = 1, 2, \dots$$

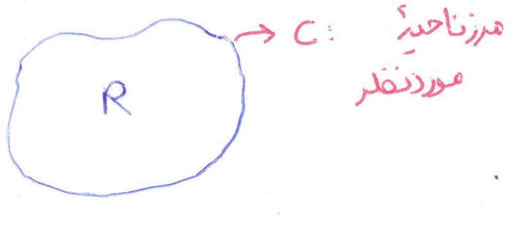
معادله حرارت دوبُعدی در حالت پایدار (مانا):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

اگر جریان گرما پایدار باشد (یعنی مستقل از زمان باشد) آن‌گاه $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. و معادلهٔ حرارت به معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

این معادلهٔ حرارت، توزیع گرما در یک ناحیهٔ R با مرز C واقع در صفحهٔ xy را نمایش می‌دهد.



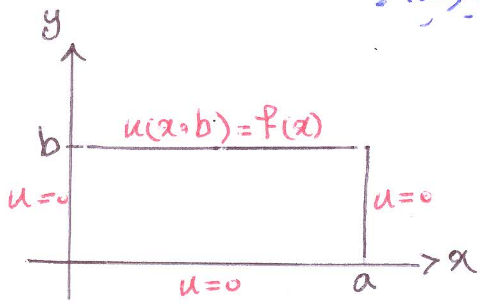
انواع شروط مرزی:

۱) شرط مرزی دیریکله: مقدار u روی مرز C داده شده است.

۲) شرط مرزی نویمن Neumann : مقدار گرادیان u (∇u) روی مرز C داده شده است.

۳) شرط مخلوط: رابین Robin : در قسمتی از مرز مقدار u و در قسمتی دیگر ∇u داده شده است.

* معادلهٔ حرارت مانا (پایدار) روی یک سطح مستطیل با شرایط مرزی دیریکله :



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

فرض می‌کنیم $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$

$$\Rightarrow X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda \Rightarrow \begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 & (1)\\ Y''(y)+\lambda Y(y)=0 & (2)\end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی دیریکلهٔ داده شده، راحت‌تر و بهتر این است که ابتدا معادلهٔ (1) را حل کنیم:

با تجربه‌ای که از حل مسائل قبلی با روش تفکیک متغیر درست آوردیم می‌دانیم که تنها به ازای $\lambda=-k^2<0$ معادلهٔ (1) دارای جواب نابدیهی است.

$$X(x)=a\cos kx+b\sin kx$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} u(0,y)=0 \Rightarrow X(0)=0 \Rightarrow a=0\\ u(a,y)=0 \Rightarrow b\sin ka=0 \Rightarrow k=\frac{n\pi}{a} \quad n\geq 1\end{cases}$$

$$\boxed{X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad n\geq 1}$$

حال به ازای مقادیر ویژهٔ $\lambda_n=\frac{n\pi}{a}$ $n\geq 1$ ، معادلهٔ (2) را حل می‌کنیم:

$$Y''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2Y(y)=0 \Rightarrow Y(y)=\alpha_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+\beta_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

شرایط مرزی $u(x,0)=0 \Rightarrow Y(0)=0 \Rightarrow \alpha_n+\beta_n=0 \Rightarrow Y(y)=\alpha_n\left(e^{\frac{n\pi}{a}y}-e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)$

$$\boxed{Y_n(y)=\alpha_n\left(2\sinh\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

بنابراین تابع ویژهٔ nام به صورت زیر است:

$$u_n(x,y)=\alpha_n^*\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad n\geq 1$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^*\sinh(\lambda_n y)\sin(\lambda_n x)$$

حال آخرین شرط مرزی $u(x,b)=f(x)$ را اعمال می‌کنیم:

$$f(x)=u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^*\sinh(\lambda_n b)\sin(\lambda_n x)$$

اگر تابع f را روی بازهٔ $(0,a)$ گسترش فرد داده و سری فوریهٔ سینوسی آن را بنویسیم آنگاه داریم:

$$\alpha_n^*\sinh(\lambda_n b)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

پس جواب به صورت زیر است:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^* \sinh(\lambda_n y)\sin(\lambda_n x)$$

$$\alpha_n^*=\frac{2}{a\sinh(\lambda_n b)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx \quad n\geq 1 \;. \qquad \lambda_n=\frac{n\pi}{a}$$

حل دالامبر معادلهٔ موج:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

دو متغیر جدید $v=x+ct$ و $w=x-ct$ را تعریف کرده و

پس معادلهٔ موج را برحسب این دو متغیر بازنویسی می‌کنیم:

با مشتق‌گیری زنجیره‌ای، u_{vv} و u_{ww} را محاسبه می‌کنیم.

$$u_x=u_v\cdot\overset{1}{\overline{v_x}}+u_w\overset{1}{\overline{w_x}}=u_v+u_w$$

$$u_{xx}=(u_v+u_w)_x=u_{vv}\underbrace{v_x}_{1}+u_{vw}\underbrace{w_x}_{1}+u_{wv}\underbrace{v_x}_{1}+u_{ww}\underbrace{w_x}_{1}$$

$$u_{xx}=u_{vv}+2u_{vw}+u_{ww} \quad (1)$$

$$u_t=u_v\underbrace{v_t}_{c}+u_w\underbrace{w_t}_{-c}=c(u_v-u_w)$$

$$u_{tt}=c(u_v-u_w)_t=c\left(u_{vv}\overset{c}{\overline{v_t}}+u_{vw}\overset{-c}{\overline{w_t}}-u_{wv}\overset{c}{\overline{v_t}}-u_{ww}\overset{-c}{\overline{w_t}}\right)$$

$$u_{tt}=c^2(u_{vv}-2u_{vw}+u_{ww}) \quad (2)$$

حال معادلهٔ موج را با روابط (1) و (2) بازنویسی می‌کنیم:

$$u_{tt}=c^2u_{xx} \Rightarrow c^2(u_{vv}-2u_{vw}+u_{ww})=c^2(u_{vv}+2u_{vw}+u_{ww})$$

$$\Rightarrow 4u_{vw}=0 \Rightarrow u_{vw}=0$$

$$\xrightarrow{\int dw} u_v=h(v) \xrightarrow{\int dv} u=\underbrace{\int h(v)dv}_{\varphi(v)}+\psi(w)=\varphi(v)+\psi(w)$$

حال مقادیر متغیرهای v و w را جایگزین می‌کنیم

$$u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct) \quad (*)$$

شرایط مرزی $u(0,t)=0 \Rightarrow \varphi(ct)+\psi(-ct)=0 \Rightarrow \varphi(y)=-\psi(-y)$

$$u(L,t)=0 \Rightarrow \varphi(L+ct)+\psi(L-ct)=0$$

$$\varphi(L+ct)-\varphi(ct-L)=0 \Rightarrow \varphi(ct+L)=\varphi(ct-L)$$

که این نتیجه می دهد φ تابعی $2L$ - متناوب است.

شرایط اولیه $\Rightarrow u(x,0)=f(x) \Rightarrow \varphi(x)+\psi(x)=f(x)$ (3)

$$u_t(x,0)=g(x) \Rightarrow c\varphi'(x)-c\psi'(x)=g(x)$$

$$\xRightarrow{\int dx} \varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(y)\,dy+\varphi(x_0)-\psi(x_0) \quad (4)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow \varphi(x)=\frac{1}{2}\Big[f(x)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(y)\,dy+\underbrace{\varphi(x_0)-\psi(x_0)}_{K(x_0)}\Big]$$

$$(3)-(4) \Rightarrow \psi(x)=\frac{1}{2}\Big[f(x)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(y)\,dy-K(x_0)\Big]$$

$$(*) \Rightarrow u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$$
$$=\frac{1}{2}\Big[f(x+ct)+f(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy\Big]$$

روش دالامبر به عنوان مثالی از روش مشخصه ها:

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(u_x,u_y,u,x,y)$$ شبه خطی quasi Linear

$$\Delta=AC-B^2$$

اگر $\Delta<0 \Rightarrow$ معادله از نوع هذلولوی (Hyperbolic) می باشد. (مثل معادلهٔ موج)

اگر $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله از نوع سهموی (parabolic) می باشد. (مثل معادلهٔ حرارت)

اگر $\Delta>0 \Rightarrow$ معادله از نوع بیضوی (Elliptic) می باشد. (مثل معادلهٔ لاپلاس)

براساس نوع معادله می توان معادله را با تغییر متغیر به یک معادلهٔ ساده تر تبدیل کرد.
برای یافتن تغییر متغیر مناسب ابتدا معادلهٔ ODE زیر را باید حل کنیم:

$$Ay'^2-2By'+C=0 \qquad y'=\frac{dy}{dx}$$

فرض کنید جواب های این معادلهٔ ODE به صورت $\varphi(x,y)=k_1$ ، $\psi(x,y)=k_2$ به دست آمده، آن گاه برای تبدیل معادله به فرم نرمال از

تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌کنیم :

نوع معادله	متغیرهای جدید	فرم جدید معادله
هذلولوی	$v = \varphi \,,\ w = \psi$	$u_{vw} = F_1$
سهموی	$v = x \,,\ w = \varphi = \psi$	$u_{ww} = F_2$
بیضوی	$v = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \,,\ w = \frac{1}{2i}(\varphi - \psi)$	$u_{vv} + u_{ww} = F_3$

روش به دست آوردن تغییر متغیرهای حل دالامبر معادلهٔ موج :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad y = ct \Rightarrow u_{tt} = c^2 u_{yy}$$

$$\Rightarrow c^2 (u_{yy} - u_{xx}) = 0 \Rightarrow u_{yy} - u_{xx} = 0$$

معادلهٔ هذلولوی

$$-1 \times (y')^2 + 1 = 0 \Rightarrow y'^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y' - 1)(y' + 1) = 0$$

$$\underbrace{y - x}_{\varphi(x,y)} = k_1 \quad , \quad \underbrace{y + x}_{\psi(x,y)} = k_2$$

$$\Rightarrow v = y - x \quad , \quad w = y + x$$

$$v = ct - x \quad , \quad w = ct + x$$

حل معادلهٔ PDE با شرایط مرزی ناهمگن :

فرض کنید $u(x,t)$ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی ناهمگن باشد به طوری که شرایط مرزی در یکی از چهار حالت زیر باشد :

حالت ①
$$\begin{cases} u(0,t)=p(t) \\ u(L,t)=q(t) \end{cases}$$

حالت ②
$$\begin{cases} u(0,t)=p(t) \\ u_x(L,t)=q(t) \end{cases}$$

حالت ③
$$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u(L,t)=q(t) \end{cases}$$

حالت ④
$$\begin{cases} u_x(0,t)=p(t) \\ u_x(L,t)=q(t) \end{cases}$$

در همهٔ چهار حالت بالا، جواب معادله را به صورت $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ در نظر می‌گیریم که در آن $w(x,t)$ با توجه به شرایط مرزی یکی از ۲ حالت زیر است :

اگر شرایط مرزی یکی از حالات ①، ②، ③ باشد آن‌گاه $w(x,t)=ax+b$.

و اگر شرایط مرزی حالت ④ باشد، آن‌گاه $w(x,t)=ax^2+bx$ خواهد بود .

در همهٔ حالات، معادله را برحسب متغیر جدید v طوری بازنویسی می‌کنیم که به یک معادله با شرایط مرزی همگن تبدیل شود .

مثال : مطلوب است حل مسألهٔ زیر

$$(*)\quad u_t-9u_{xx}=x \ ;\ 0<x<1\ ;\ t>0$$
$$u(x,0)=1-\cos\pi x \qquad 0\leq x\leq 1$$
$$u(0,t)=0$$
$$u(1,t)=2$$

حل :

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \quad ; \quad v(0,t)=0,\quad v(1,t)=0$$

شرایط مرزی مسأله در حالت ① است پس

$$w(x,t)=ax+b$$

با اعمال شرایط مرزی مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم :

$$u(0,t)=0 \Rightarrow 0=u(0,t)=v(0,t)+w(0,t)$$
$$0=\underbrace{v(0,t)}_{0}+a(0)+b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$u(1,t)=2 \Rightarrow 2=u(1,t)=\underbrace{v(1,t)}_{0}+w(1,t)$$
$$2=a(1)+b \Rightarrow \boxed{a=2}$$

بنابراین $\quad w(x,t) = 2x \quad \Leftarrow \quad u(x,t) = v(x,t) + 2x$

$$u_t = v_t \quad , \quad u_{xx} = v_{xx}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله ⊛ داریم :

$$v_t - 9v_{xx} = x$$

$$1 - \cos \pi x = u(x,0) = v(x,0) + 2x$$

$$\Rightarrow v(x,0) = 1 - \cos \pi x - 2x$$

پس مسأله به صورت زیر در آمد که یک مسأله با شرایط مرزی همگن است :

$$(**) \begin{cases} v_t - 9v_{xx} = x & 0<x<1 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = 1 - \cos \pi x - 2x \end{cases}$$

اگر این معادله را در حالت همگن به روش تفکیک متغیرها حل کنیم خواهیم داشت :

$$v(x,t) = F(x)G(t)$$

$$F(x)G'(t) - 9F''(x)G(t) = 0 \Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{9G(t)} = \lambda$$

if $\lambda = -k^2 < 0$

$$F''(x) + k^2 F(x) = 0 \Rightarrow F(x) = \alpha \cos kx + \beta \sin kx$$

$$v(0,t) = F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$v(1,t) = F(1)G(t) = 0 \Rightarrow F(1) = 0 \Rightarrow \beta \sin k = 0 \Rightarrow k = n\pi \quad n = 1,2,\dots$$

$$F_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x) \quad n = 1,2,\dots$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(n\pi x)$$

حالا این جواب بدست آمده را در معادله (**) قرار دهیم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n'(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t)\right) \sin n\pi x = x$$

G_n را طوری انتخاب کنیم که عبارت $G_n'(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t)$ برابر ضریب فوریه سینوسی تابع x در بازه (0,1) باشد.

$$G_n'(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t) = 2\int_0^1 x \sin(n\pi x)\,dx$$

$$G_n'(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t) = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad n=1,2,\dots$$

حالا باید این معادله ODE مرتبه اول ناهمگن خطی با ضرایب ثابت را حل کنیم:

$$G_n(t) = e^{-\int 9n^2\pi^2 dt}\left[\int \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} e^{\int 9n^2\pi^2 dt} dt + \alpha_n\right]$$

$$G_n(t) = \alpha_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}$$

بنابراین:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\alpha_n e^{-9n^2\pi^2 t} + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}\right\}\sin n\pi x$$

حال با توجه به شرط اولیه $v(x,0) = 1-\cos\pi x-2x$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}\right\}\sin(n\pi x) = 1-\cos\pi x-2x$$

و از آن جا، ضرایب α_n را طوری تعیین می‌کنیم که عبارت $\alpha_n + \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}$ ضریب فوریه سینوسی تابع $1-\cos\pi x-2x$ باشد:

$$\alpha_n = \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n} + 2\int_0^1 (1-\cos\pi x-2x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n} + 2\left[\frac{-1}{n\pi}\cos(n\pi x) + \frac{1}{2\pi(n+1)}\cos(n+1)\pi x + \frac{1}{2\pi(n-1)}\cos(n-1)\pi x + \frac{2x}{n\pi}\cos(n\pi x) - \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)\right]_0^1 =$$

$$\alpha_n = \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{n^2-1}\left((-1)^{n+1}-1\right)\right] \qquad n\neq 1$$

$$\alpha_1 = \frac{-2}{9\pi^3} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = \frac{-2}{9\pi^3}$$

بنابراین

$$u(x,t) = 2x - \frac{2}{9\pi^3}e^{-9\pi^2 t}\sin\pi x + \frac{2}{9\pi^3}\sin\pi x +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^n + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{n^2-1}\left((-1)^{n+1}-1\right)\right]\right\}e^{-9n^2\pi^2 t}\sin n\pi x +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{9n^3\pi^3}(-1)^{n+1}\sin n\pi x \;.$$

مثال: مطلوب است حل مسأله‌ی زیر:

$$u_{tt} - 25u_{xx} = x + \frac{25}{2}\pi \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \;,\; t \geqslant 0$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u_t(x,0) = 1 + x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x(0,t) = \frac{\pi}{2} & t \geqslant 0 \\ u_x(1,t) = 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

حل: با توجه به شرایط مرزی ناهمگن حالت ۴ پس جواب معادله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \;,\; \begin{cases} w(x,t) = ax^2 + bx \\ v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + ax^2 + bx$$

با توجه به شرایط مرزی، a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$u_x(x,t) = v_x(x,t) + 2ax + b$$

$$u_x(0,t) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \underbrace{v_x(0,t)}_{0} + 2a\times 0 + b \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

$$u_x(1,t) = 1 \Rightarrow 1 = \underbrace{v_x(1,t)}_{0} + 2a(1) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

فرم جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t) = v(x,t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 + \frac{\pi}{2}x \quad (*)$$

حالا باید مسأله را براساس متغیر v بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} u_{tt} = v_{tt} \\ u_{xx} = v_{xx} + 1 - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$v_{tt} - 25v_{xx} - 25 + \cancel{\frac{25}{2}\pi} = x + \cancel{\frac{25}{2}\pi}$$

$$\boxed{v_{tt} - 25v_{xx} = x + 25}$$

شرایط اولیه

$$u(x,0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 = v(x,0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 + \frac{\pi}{2}x$$

$$\Rightarrow v(x,0) = -\frac{\pi}{2}x$$

$$u_t(x,0)=1+x \overset{(*)}{\Longrightarrow} u_t(x,0)=v_t(x,0) \Longrightarrow v_t(x,0)=1+x$$

پس مسأله به صورت یک مسألهٔ با شرایط مرزی همگن برحسب متغیر v به صورت زیر درآمد:

$$(**)\quad v_{tt}-25v_{xx}=x+25 \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

$$\begin{cases} v(x,0)=\frac{-\pi}{2}x \\ v_t(x,0)=1+x \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(0,t)=0 \\ v_x(1,t)=0 \end{cases}$$

با روش تفکیک متغیرها، مسألهٔ همگن را حل می‌کنیم:

$$v(x,t)=F(x)\,G(t)$$

$$F(x)G''(t)-25F''(x)G(t)=0 \Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{G''(t)}{25\,G(t)}=\lambda$$

if $\lambda=-k^2<0 \Rightarrow F''(x)+k^2F(x)=0$

$$F(x)=\alpha\cos kx+\beta\sin kx$$

شرایط مرزی $v_x(0,t)=F'(0)G(t)=0 \Rightarrow F'(0)=0 \Rightarrow \beta k\overbrace{\cos(k\times 0)}^{1}=0$

$$\Rightarrow \beta=0$$

$$v_x(1,t)=F'(1)G(t)=0 \Rightarrow F'(1)=0 \Rightarrow -\alpha k\sin(k\times 1)=0$$

$$\Rightarrow k=n\pi \quad n=0,1,2,\dots$$

$$F_n(x)=\cos(n\pi x) \quad n=0,1,2,\dots$$

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)F_n(t)=G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos(n\pi x)$$

حال جواب را در معادلهٔ $(**)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$G_0''(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n''(t)\cos(n\pi x)+25\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\,n^2\pi^2\cos(n\pi x)=x+25$$

$$\Rightarrow G_0''(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n''(t)+25n^2\pi^2G_n(t)\right)\cos(n\pi x)=x+25$$

حالا با توجه به سری فوریهٔ کسینوسی تابع $x+25$ در بازهٔ $(0,1)$ داریم:

$$G_0''(t)=\int_0^1(x+25)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+25x\right]_0^1=\frac{1}{2}+25=\frac{51}{2}$$

$$G_0(t)=\frac{51}{4}t^2+a_0t+b_0$$

$$G_n''(t)+25n^2\pi^2 G_n(t)=2\int_0^1 (x+25)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$=2\left[\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_0^1=2\left[\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}-\frac{1}{n^2\pi^2}\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$\Rightarrow\; G_n''(t)+25n^2\pi^2 G_n(t)=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

حال با این معادله ODE مرتبه‌ی دوم ناهمگن با ضرایب ثابت را حل کنیم : (روش ضرایب نامعین)

$$G_n(t)=a_n\sin(5n\pi t)+b_n\cos(5n\pi t)+\frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)$$

$$v(x,t)=\frac{51}{4}t^2+a_0t+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\sin(5n\pi t)+b_n\cos(5n\pi t)+\frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)\right\}\cos(n\pi$$

(***)

حال با استفاده از شرایط اولیه مقادیر b_0 و a_0 و b_n و a_n را محاسبه می‌کنیم :

$$v(x,0)=-\frac{\pi}{2}x$$

$$\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2}x=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n+\frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)\right)\cos(n\pi x)$$

حال با توجه به ضرایب سری فوریه‌ی کسینوسی تابع $-\frac{\pi}{2}x$ روی بازه‌ی $(0,1)$ داریم :

$$b_0=\int_0^1\left(-\frac{\pi}{2}x\right)dx=-\frac{\pi}{4}x^2\Big|_0^1=-\frac{\pi}{4}$$

$$b_n+\frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)=2\int_0^1\left(-\frac{\pi}{2}x\right)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$=-\pi\left[\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow\; b_n=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}-\frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)$$

از رابطه‌ی (***) نسبت t مشتق می‌گیریم و سپس شرط اولیه $v_t(x,0)=1+x$ را اعمال می‌کنیم :

$$v_t(x,t)=\frac{51}{2}t+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{5n\pi a_n\cos(5n\pi t)-5n\pi b_n\sin(5n\pi t)\right\}\cos(n\pi$$

$$t=0\Rightarrow\; 1+x=a_0+5n\pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi x)$$

با توجه به سری فوریه کسینوسی تابع $x+1$ روی بازه $(0,1)$ داریم:

$$a_0 = \int_0^1 (1+x)\,dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$5n\pi a_n = 2\int_0^1 (1+x)\cos(n\pi x)\,dx = \left[\frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{2x}{n\pi}\sin(n\pi x)\right.$$

$$\left. + \frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{5n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right) \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u(x,t) = \frac{51}{4}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{5n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)\sin(5n\pi t) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} - \frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n - 1\right)\right)\cos(5n\pi t) + \frac{2}{25n^4\pi^4}\left((-1)^n - 1\right)\right\}\cos(n\pi x)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 + \frac{\pi}{2}x \,.$$

معادله حرارت روی میله نامتناهی:

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$u(x,0) = f(x)$$

همانند مسأله حرارت در میله متناهی، جواب را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$F(x)G'(t) = c^2 F''(x)G(t) \Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \lambda$$

$$\text{if } \lambda = 0 \Rightarrow G'(t) = 0 \Rightarrow G(t) = K \Rightarrow u(x,t) = K F(x)$$

جواب u بدست آمده، مستقل از زمان است درحالی که درجه حرارت در یک میله با یک حرارت اولیه نمی‌تواند مستقل از زمان باشد بنابراین به ازای $\lambda = 0$ جواب درست آمده مورد قبول نیست.

$$\text{if } \lambda > 0 \,,\quad \lambda = k^2 > 0$$

$$G'(t) - c^2k^2 G(t) = 0 \Rightarrow \frac{G'(t)}{G(t)} = c^2k^2 \Rightarrow T(t) = e^{c^2k^2 t}$$

$$u_k(x,t) = F(x)\,e^{c^2k^2 t}$$

که این جواب نشانگر آن است که با افزایش زمان، درجه حرارت بسیار زیاد می‌شود (حضور یک تابع نمایی صعودی) که از لحاظ فیزیکی غیرممکن است بنابراین این جواب مورد قبول نیست.

if $\lambda = -k^2 < 0$

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = -c^2k^2 \Rightarrow G(t) = e^{-c^2k^2t}$$

$$F(x) = a\cos kx + b\sin kx$$

$$u_k(x,t) = F_k(x)\,G_k(t)$$

$$u_k(x,t) = (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,e^{-k^2c^2t} \qquad k>0$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,e^{-k^2c^2t}\,dk \qquad (*)$$

می‌توان بررسی کرد که به وضوح رابطهٔ $(*)$ به عنوان یک جواب در معادلهٔ حرارت صدق می‌کند.

حال برای محاسبهٔ ضرایب a_k و b_k از شرط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$u(x,0) = f(x)$$

$$(*) \Rightarrow u(x,0) = \int_0^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,dk = f(x)$$

پس به وضوح a_k ضریب انتگرال فوریهٔ کسینوسی تابع f و b_k ضریب انتگرال فوریهٔ سینوسی تابع f می‌باشد.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin kx\,dx$$

مثال: درجه حرارت در یک میله نامتناهی را بیابید درصورتی که

$$u(x,0) = \begin{cases} x & : |x|\leq 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

نکته: رابطهٔ $(*)$ را می‌توان با یک تغییر متغیر ساده‌تر کرد: می‌دانیم

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2}\cos(2bs)\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

تغییر متغیر: $s =$

حل مسأله‌ی حرارت روی میله‌ی نامتناهی به کمک تبدیل فوریه :

فرض کنید $u(x,t)$ دمای یک میله‌ی نامتناهی که به طور کامل عایق پوش شده است در زمان t باشد با شرایط زیر :

$$u(x,0)=f(x) \qquad -\infty<x<+\infty$$

$$\text{if } |x|\to\infty \text{ then } u(x,t)\to 0 \;,\; u_x(x,t)\to 0$$

حل :

$$u_t=c^2u_{xx}$$

نسبت به متغیر x از دو طرف معادله‌ی گرما، تبدیل فوریه می‌گیریم :

تبدیل فوریه‌ی تابع u نسبت به متغیر x را با $\hat{u}=F(u)$ نمایش می‌دهیم :

$$F(u_t)=c^2F(u_{xx})=c^2(-\omega^2)F(u)$$
$$=-c^2\omega^2F(u)=-c^2\omega^2\hat{u}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t=-c^2\omega^2\hat{u}$$ یک ODE مرتبه‌ی اول

$$\hat{u}=\underbrace{K(\omega)}_{\text{تابع بر حسب متغیر } \omega}e^{-c^2\omega^2t}$$

شرط اولیه $t=0 \Rightarrow \hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega)$

$$\hat{u}(\omega,0)=K(\omega)e^{-c^2\omega^2\times 0}=K(\omega)$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega)=K(\omega)}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2t} \qquad (*)$$

برای به دست آوردن جواب معادله‌ی گرما کافی است که از رابطه‌ی $(*)$ تبدیل فوریه معکوس بگیریم :

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2t}e^{ix\omega}\,d\omega \qquad (**)$$

از طرفی می‌دانیم که :

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ix\omega}\,dx$$

با جایگذاری مقدار $\hat{f}(\omega)$ در رابطه‌ی $(**)$ داریم :

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)e^{-iv\omega}\,dv\,e^{-c^2\omega^2t}e^{ix\omega}\,d\omega$$

تغییر ترتیب انتگرال‌گیری :

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-v)}\, e^{-c\omega^2 t}\, d\omega\, dv$$

حال به جای $e^{i\omega(x-v)}$ (طبق فرمول اویلر) مقدار زیر را جایگذاری می‌کنیم:

$$e^{i\omega(x-v)} = \cos\omega(x-v) + i\sin\omega(x-v)$$

و از آن جا که sin تابعی فرد است داریم:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega(x-v)\, e^{-c^2\omega^2 t}\, d\omega\, dv.$$

در محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ معکوس در مسألهٔ فوق می‌توان از کانولوشن نیز استفاده کرد:

به رابطهٔ (*) دقت کنید

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\,\underbrace{\frac{e^{-c^2\omega^2 t}}{\sqrt{2\pi}}}_{\hat{g}(\omega)}$$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{e^{-c^2\omega^2 t}}{\sqrt{2\pi}}$$

بنابراین اگر تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابیم که آن گاه

$$u(x,t) = (f*g)(x)$$

از طرفی می‌دانیم که

$$F(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\omega^2/4a}$$

$$\Rightarrow\quad c^2 t = \frac{1}{4a} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{4c^2 t}$$

$$\Rightarrow\quad F\left(e^{-\frac{1}{4c^2t}x^2}\right) = \sqrt{2c^2t}\, e^{-c^2\omega^2 t} \;\Rightarrow\; g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{2c^2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}$$

$$\Rightarrow\quad u(x,t) = (g*f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)\, g(x-p)\, dp$$

$$= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(p)\, e^{-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}}\, dp$$

حل معادلهٔ PDE با استفاده از تغییر متغیر:

مثال: به کمک تغییر متغیرهای $u=x^2$ و $v=y^2$ مسأله زیر را حل کنید:

$$y^3\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+x^3\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

که در آن مقدار تابع z روی منحنی های $x^2=0$ و $x^2=1$ به ترتیب y^2 و $y^2-\pi$ و روی منحنی های $y^2=0$ و $y^2=\pi$ صفر است.

حل:

$$u=x^2 \,,\quad v=y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{0}=\boxed{2x\frac{\partial z}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial z}{\partial u}\right)=2\frac{\partial z}{\partial u}+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{0}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{\partial z}{\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{0}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{2y}=\boxed{2y\frac{\partial z}{\partial v}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{\partial z}{\partial v}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}$$

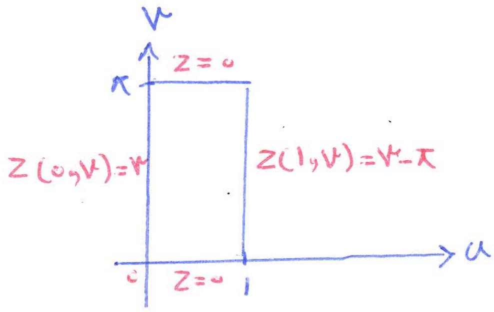
حال این مقادیر را در معادله جایگذاری می کنیم:

$$y^3\left(2x\frac{\partial z}{\partial u}+4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2x\frac{\partial z}{\partial u}\right)+x^3\left(2y\frac{\partial z}{\partial v}+4y^3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2y\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$$

$$\Longrightarrow\quad 4x^3y^3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0 \\ z(0,v)=v \\ z(1,v)=v-\pi\end{cases}\qquad 0\leq u\leq 1\,,\quad 0\leq v\leq \pi \qquad z(u,0)=z(u,\pi)=0$$

که همان طور که مشاهده می کنید این معادله، همان معادلهٔ لاپلاس با شرایط مرزی دیریکله روی مستطیل است.



حال با روش جداسازی متغیرها، مسئله را حل می‌کنیم:

$$Z(u,v) = F(u)\,G(v)$$

$$F''(u)G(v) + F(u)G''(v) = 0$$

$$-\frac{F''(u)}{F(u)} = \frac{G''(v)}{G(v)} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} G''(v) - \lambda G(v) = 0 & (1) \\ F''(u) + \lambda F(u) = 0 & (2) \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی داده شده، بهتر است که ابتدا معادله (1) را حل کنیم:

اینکه مسئله (1) به ازای $\lambda \geq 0$ دارای فقط جواب بدیهی است به خوانندگان واگذار می‌شود.

حال فرض کنید $\lambda = -k^2 < 0$

$$G''(v) + k^2 G(v) = 0$$

$$G(v) = a\cos kv + b\sin kv$$

شرایط مرزی $\quad Z(u,0) = 0 \Rightarrow G(0) = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

$$Z(u,\pi) = 0 \Rightarrow G(\pi) = 0 \Rightarrow b\sin k\pi = 0 \Rightarrow k\pi = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

مقادیر ویژه $\quad \boxed{k=n}$

تابع ویژه $\quad G_n(v) = \sin(nv) \quad n = 1, 2, \dots$

معادله (2) $\quad F''(u) - n^2 F(u) = 0 \Rightarrow F_n(u) = a_n e^{nu} + b_n e^{-nu} \quad n = 1, 2, \dots$

$$Z_n(u,v) = F_n(u)G_n(v) = \sin(nv)\left(a_n e^{nu} + b_n e^{-nu}\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Z(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{nu} + b_n e^{-nu}\right)\sin(nv)$$

شرایط مرزی $\quad Z(0,v) = v \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)\sin(nv) = v$

$$a_n + b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v\sin(nv)\,dv = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n}v\cos(nv) + \frac{1}{n^2}\sin(nv)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}(-1)^n\right] = \boxed{\frac{2}{n}(-1)^{n+1}} \quad (3)$$

شرایط مرزی $\quad Z(1,v) = v - \pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{n} + b_n e^{-n}\right)\sin(nv) = v - \pi$$

$$a_n e^{n} + b_n e^{-n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (v-\pi)\sin(nv)\,dv = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n}\left((-1)^n - 1\right) = \boxed{\frac{-2}{n}} \quad (4)$$

$$③,④ \Rightarrow \begin{cases} a_n + b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \\ a_n e^{n} + b_n e^{-n} = \frac{-2}{n} \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{2}{n}\left(\frac{1-(-1)^n}{1-e^{2n}}\right)$$

$$b_n = \frac{-2}{n}(-1)^n - \frac{2}{n}\left(\frac{1-(-1)^n}{1-e^{2n}}\right)$$

$$a_n e^{nu} + b_n e^{-nu} = \frac{2}{n}\left(\frac{1-(-1)^n}{1-e^{2n}}\right)\underbrace{(e^{nu}-e^{-nu})}_{2\sinh(nu)} - \frac{2}{n}(-1)^n e^{-nu}$$

$$Z(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\left[2\left(\frac{1-(-1)^n}{1-e^{2n}}\right)\sinh(nu) + (-1)^n e^{-nu}\right]\sin(nv)$$

$$\Rightarrow Z(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\left[2\left(\frac{1-(-1)^n}{1-e^{2n}}\right)\sinh(nx) + (-1)^n e^{-nx}\right]\sin(ny).$$

حل معادلهٔ PDE به کمک تبدیل لاپلاس :

مثال : مسأله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le 2\pi \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

حل : با توجه به اینکه $t \geq 0$ بنابراین از دو طرف معادله نسبت به متغیر t لاپلاس می‌گیریم :

$$L(u_{tt}) = s^2 L(u) - s\overbrace{u(x,0)}^{0} - \overbrace{u_t(x,0)}^{0} = c^2 L[u_{xx}]$$

از طرفی چون x و t دو متغیر مستقل از یکدیگر می‌باشند لذا

$$L[u_{xx}] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L[u]$$

$$\Rightarrow s^2 L[u] = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} L[u]$$

حال اگر قرارداد کنیم که $L[u(x,t)]$ را با $V(x,s)$ نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$V_{xx} - \frac{s^2}{c^2} V = 0$$

که یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی است و دارای جواب عمومی زیر می‌باشد :

$$V(x,s)=a(s)e^{\frac{s}{c}x}+b(s)e^{-\frac{s}{c}x} \quad (1)$$

حال از دو طرف شرط مرزی $u(0,t)=f(t)$ تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$V(0,s)=L[u(0,t)]=L[f(t)]=F(s)=\int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t\,dt$$

$$V(0,s)=\frac{1-e^{2\pi s}}{1+s^2}$$

$$(1) \Rightarrow V(0,s)=a(s)+b(s)=\frac{1-e^{-2\pi s}}{1+s^2}$$

و شرط مرزی دوم که $\lim_{x\to\infty} u(x,t)=0$ نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{x\to\infty} V(x,s)=\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}.\lim_{x\to\infty}u(x,t)\,dt=0$$

حال با اعمال این شرط مرزی در رابطه‌ی (1) خواهیم داشت:

$$\boxed{a(s)=0}$$

بنابراین:

$$b(s)=\frac{1-e^{-2\pi s}}{1+s^2}$$

$$V(x,s)=b(s)e^{-\frac{s}{c}x}=\underbrace{\frac{1-e^{-2\pi s}}{1+s^2}}_{F(s)}e^{-\frac{s}{c}x}=F(s)e^{-\frac{s}{c}x}$$

حالا برای محاسبه $u(x,t)$ باید از $V(x,s)$ تبدیل معکوس لاپلاس بگیریم:

$$u(x,t)=H\left(t-\frac{x}{c}\right)f\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\sin\left(t-\frac{x}{c}\right) & ; \frac{x}{c}<t<\frac{x}{c}+2\pi\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

مثال: (حل معادلهٔ موج نامتناهی به کمک تبدیل فوریه)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty \;,\; t \geq 0$$

$u(x,0) = f(x)$

if $|x| \to \infty$ then $u \to 0$, $u_x \to 0$

$u_t(x,0) = 0$

حل: از دو طرف معادلهٔ موج نسبت به متغیر x تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$F(u_{tt}) = c^2 F(u_{xx})$$

$$F(u_{tt}) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \qquad F(u) = \hat{u}(\omega, t)$$

$$F(u_{xx}) = -\omega^2 \hat{u}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -c^2 \omega^2 \hat{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + c^2 \omega^2 \hat{u} = 0$$

معادلهٔ ODE مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega)\cos(c\omega t) + B(\omega)\sin(c\omega t) \quad (1)$$

از دو طرف شرایط اولیه تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$u(x,0) = f(x) \xrightarrow{F} \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$$

$$u_t(x,0) = 0 \xrightarrow{F} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, 0) = 0$$

و حالا شرایط بدست آمده را روی (1) اعمال می‌کنیم:

$$\hat{u}(\omega, 0) = A(\omega)\underbrace{\cos(0)}_{1} + B(\omega)\underbrace{\sin(0)}_{0} = \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{A(\omega) = \hat{f}(\omega)}$$

$$\hat{u}_t(\omega, 0) = -c\omega A(\omega)\underbrace{\sin(0)}_{0} + c\omega B(\omega)\underbrace{\cos(0)}_{1} = 0$$

$$\Rightarrow c\omega B(\omega) = 0 \Rightarrow \boxed{B(\omega) = 0}$$

$$\boxed{\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)} \quad (2)$$

حال کافی است از دو طرف رابطه تبدیل معکوس فوریه بگیریم ولی قبل از آن:

عبارت $\cos(c\omega t) = \frac{1}{2}(e^{ic\omega t} + e^{-ic\omega t})$ را در رابطهٔ (2) قرار می‌دهیم:

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega)e^{ic\omega t} + \hat{f}(\omega)e^{-ic\omega t}\right]$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$F(f(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(p)e^{-i\omega(a+p)}\,dp$$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} x-a = p \Rightarrow x = a+p \\ dx = dp \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iwa} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-iwp} dp = e^{-iwa} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-iwp} dp}_{\hat{f}(\omega)} = e^{-iwa} \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow F(f(x-a)) = e^{-iwa} \hat{f}(\omega)$$

حال با استفاده از این رابطه می‌توان مقدار $u(x,t)$ را محاسبه کرد:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{F^{-1}(\hat{f}(\omega) e^{ic\omega t})}_{a=-ct} + \underbrace{F^{-1}(\hat{f}(\omega) e^{-ic\omega t})}_{a=ct}\Big]$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[f(x+ct) + f(x-ct)\Big]$$

مثال: (حل معادله گرمای نیمه متناهی به کمک تبدیل فوریه)

فرض کنید میله از مبدأ صفر تا بی‌نهایت روی محور xها قرار گرفته است

$u_t = c^2 u_{xx}$ $\quad 0 \leqslant x < +\infty \ , \ t \geqslant 0$

$u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = 0 \rightarrow$ به این شرط مرزی توجه شود

حل: با توجه به شرط مرزی داده شده و با توجه به نیمه متناهی بودن میله، از تبدیل فوریه سینوسی استفاده می‌کنیم: (نسبت به متغیر x، تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم)

$$F_s(u(x,t)) = \hat{u}_s(\omega,t)$$

$$F_s(u_t) = \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} \ , \quad F_s(u_{xx}) = -\omega^2 F_s(u) = -\omega^2 \hat{u}_s$$

$$\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} = -c^2\omega^2 \hat{u}_s$$

معادله ODE مرتبه اول با ضرایب ثابت با متغیر t

$$\hat{u}_s(\omega,t) = K(\omega) e^{-c^2\omega^2 t} \quad ①$$

از شرط اولیه تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم:

$$u(x,0) = f(x) \xRightarrow{F_s} \hat{u}_s(\omega,0) = \hat{f}_s(\omega)$$

و حال شرط اولیه را در معادله ① اعمال می‌کنیم:

$$\hat{u}_s(\omega,0) = K(\omega) = \hat{f}_s(\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_s(\omega,t) = \hat{f}_s(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}$$

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(p)\sin(\omega p)\,dp \qquad (۲)$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\omega)\, e^{-c^2\omega^2 t}\sin(\omega x)\,d\omega \qquad (۳)$$

با جایگذاری (۲) در (۳) داریم :

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(p)\sin(\omega p)\, e^{-c^2\omega^2 t}\sin(\omega x)\,dp\,d\omega .$$

نکتهٔ مهم : اگر در معادله گرمای نیمه متناهی به جای شرط مرزی $u(0,t)$ ، شرط مرزی $u_x(0,t)$ را داشته باشیم آن‌گاه از تبدیل فوریهٔ کسینوسی استفاده می‌کنیم :

همچنین برای معادلاتی از تبدیل فوریهٔ سینوسی یا کسینوسی استفاده می‌کنیم که مشتقات مرتبهٔ زوج تابع u نسبت به x در معادله ظاهر شده باشد.

یادآوری :

$$F_c[f''(x)] = -\omega^2 F_c[f(x)] - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

$$F_s[f''(x)] = -\omega^2 F_s[f(x)] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$$