

## مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب خفرانی

۴۱. - معادله تفاضلی ارتباطی دهنده ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  سیستم LTI نشان است داده شده است.

مطلوب است پاسخ فرکانسی  $H(j\Omega)$  و پاسخ ضرب  $h[n]$  سیستم

$$a) \quad y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n] - \frac{3}{4}x[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{3 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

$$H(j\Omega) = \frac{3(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})}$$

$$= \frac{\frac{6}{3}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{3/2}{3/2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = 1$$

$$h[n] = 2(-\frac{1}{4})^n u[n] + (\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$b) \quad y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \frac{1 - 2e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - 2 \frac{e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$h[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n] - 2(-\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]$$

ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  سیستم LTI زمان گسسته داده شده است. پاسخ فرکانسی سیستم و پاسخ ضربی سیستم را بدست آورید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad , \quad y[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{j\Omega}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}}}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{j\Omega}} = \frac{1}{4} + \frac{1 - \frac{1}{4} e^{j\Omega} - \frac{1}{4} e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{j\Omega}}$$

$$H(\Omega) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} e^{j\Omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{j\Omega}}$$

$$h[n] = \frac{5}{4} \delta[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad \checkmark$$

۴۳

مسائل نمونه فصل چهارم: سیستم‌ها و سیستم‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - خراسان

درودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  سیستم  $LTI$  و زمان گسسته داده شده است. مطلوبیت پاسخ فرکانسی سیستم.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\Omega}} - e^{j\Omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\Omega}}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\Omega}}}$$

$$H(j\Omega) = \frac{1 - e^{j\Omega}}{1} \Rightarrow h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

۴۴

مسائل نمونه فصل چهارم: سیستم‌ها و سیستم‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - خراسانی

درودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  سیستم LTI زیر نسبت داده شده است. مطلوب است پاسخ فرکانسی  
سیستم.

$$x[n] = 2 + \cos(\pi n) - \sin(\frac{\pi}{2}n) + 2\cos(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4})$$

$$y[n] = 4 - 2\sin(\pi n) + 2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

$$x[n] = 2 + \frac{1}{2}e^{j\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n} - \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\frac{\pi}{4}n}e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$y[n] = 4 - \frac{1}{2j}e^{j\pi n} + \frac{1}{2j}e^{-j\pi n} + e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \Rightarrow y[n] = H(j\Omega_0) \cdot e^{j\Omega_0 n}$$

$$\Omega_0 = 0 \Rightarrow H(j0) = 2$$

$$\Omega_0 = \pi \Rightarrow H(j\pi) = \frac{1}{j} \quad , \quad \Omega_0 = -\pi \Rightarrow H(j\pi) = \frac{1}{j}$$

$$\Omega_0 = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow H(j\pm \frac{\pi}{2}) = 0$$

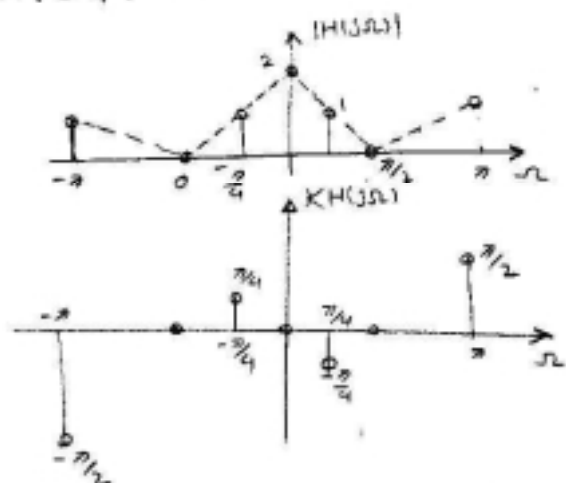
$$\Omega_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow H(j\frac{\pi}{4}) = e^{j\frac{\pi}{4}} \quad , \quad \Omega_0 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow H(j-\frac{\pi}{4}) = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Omega = 0 \quad |H(j\Omega)| = 2, \quad \angle H(j\Omega) = 0$$

$$\Omega = \pm \frac{\pi}{4} \quad |H(j\Omega)| = 1 \quad \angle H(j\Omega) = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\Omega = \pm \frac{\pi}{2} \quad |H(j\Omega)| = 0$$

$$\Omega = \pm \pi \quad |H(j\Omega)| = 1, \quad \angle H(j\Omega) = \pm \frac{\pi}{2}$$



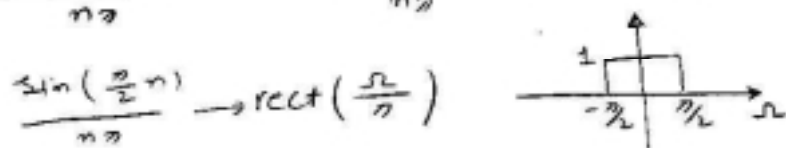
- توجه: چون تحریف (درودی) تنها در چند فرکانس (در اینجا  $\Omega = 0, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi$ ) صورت گرفته است، لذا رفتار سیستم (پاسخ فرکانسی) را نیز فقط برای این فرکانس‌ها می‌توان گفت که عبور داده است.

درودی سیستم  $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{3\pi}{4}n)$  است. برای هر یک از سیستم‌های LTI با پاسخ فرکانس داده شده، مطلوبیت خروجی سیستم.

$$x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{3\pi}{4}n) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{3\pi}{4}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{3\pi}{4}n}$$

$$X(j\Omega) = \pi(\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + \delta(\Omega + \frac{\pi}{4})) + \frac{\pi}{2j}(\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{3\pi}{4}))$$

$$- h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \quad \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{2})$$

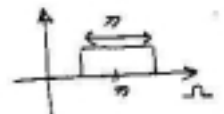


$$Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega) = \pi(\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}))$$

$$y[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$$

$$- h[n] = (-1)^n \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \quad h[n] = e^{j\pi n} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{2}) \quad e^{j\pi n} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega - \pi}{2})$$

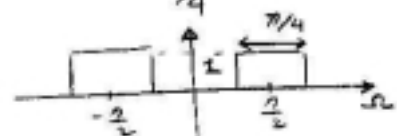


$$Y(j\Omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow y[n] = \frac{1}{2j}e^{j\frac{3\pi}{4}n}$$

$$- h[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n) \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{8}n)}{n\pi} \quad \frac{\sin(\frac{\pi}{8}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\pi/4})$$

$$h[n] = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}) \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{8}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{\Omega - \pi/2}{\pi/4}) + \frac{1}{2}\text{rect}(\frac{\Omega + \pi/2}{\pi/4})$$

$$Y(j\Omega) = 0 \Rightarrow y[n] = 0$$



سیگنالی در زمان گسسته داده شده است.

$$x[n] = 2 + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

خروجی را به ازای ۳ شرطی از دسترسیم زیر که با تغییراتی که آنها داده شده است، تعیین کنید.

a)  $H(j\Omega) = e^{-j\Omega} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$       b)  $H(j\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(1 - \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)$

$$x[n] = 2 + e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n}$$

a)  $H(j\Omega) = e^{-j\Omega} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$

$$\begin{aligned} y[n] &= 2 + e^{-j\frac{\pi}{8}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}n} \\ &\quad + e^{j\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n} \end{aligned}$$

$$= 2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}n - \frac{\pi}{6}\right) \quad \checkmark$$

b)  $H(j\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(1 - \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)$

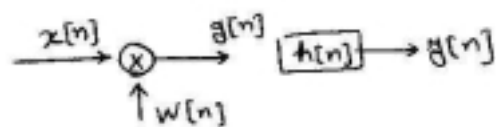
$$\begin{aligned} y[n] &= 0 + e^{-j\frac{\pi}{8}} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}n} \\ &\quad + e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n} \end{aligned}$$

$$y[n] = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{8}\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right) \quad \checkmark$$

۴۷

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - خراسانی

سیستم LTI، زمان گسسته با پاسخ مرتبه  $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$  را در نظر بگیرید.



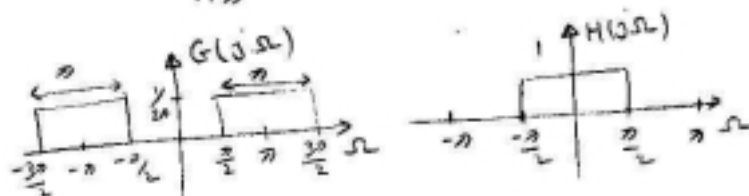
بازداد و در دستمای  $x[n]$ ،  $w[n]$  داده شده، مطلوبیت  $G(j\Omega)$  و  $y[n]$

$$- x[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}, \quad w[n] = (-1)^n$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2}\right), \quad (-1)^n = e^{j\pi n} \rightarrow \delta(\Omega - \pi)$$

$$\begin{aligned} g[n] = x[n] \cdot w[n] &\Rightarrow G(j\Omega) = 2\pi \cdot X(j\Omega) \otimes W(j\Omega) \\ &= 2\pi \cdot \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \otimes \delta(\Omega - \pi) \\ &= 2\pi \cdot \text{rect}\left(\frac{\Omega - \pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

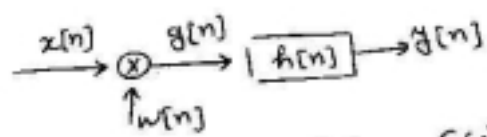


$$Y(j\Omega) = 2\pi \left( \delta\left(\Omega \pm \frac{\pi}{2}\right) \right) \Rightarrow y[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$



۴۸

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب خفرانی

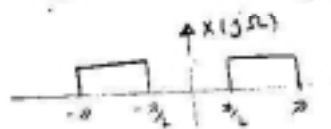
سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ مجزیه  $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$  را در نظر بگیرید.به ازاء ورودی  $x[n]$  و  $w[n]$  داده شده، مطلوب است  $G(j\Omega)$  و  $y[n]$ 

$$x[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}, \quad w[n] = (-1)^n$$

$$X(j\Omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$W(j\Omega) = \delta(\Omega + \pi)$$

$$W(j\Omega) = \delta(\Omega - \pi)$$



$$G(j\Omega) = X(j\Omega) \oplus W(j\Omega)$$

$$G(j\Omega) = 2\pi \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

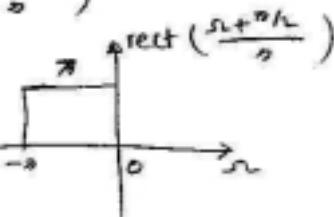
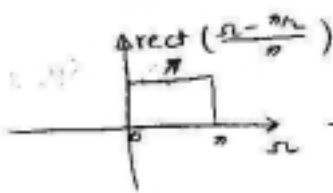
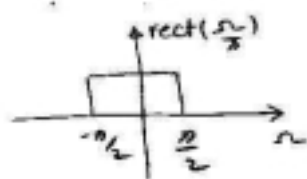
$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega) = 2\pi \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \Rightarrow y[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$$



c)  $x[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$  مسائل نمونه فصل چهارم سیستم‌های دیجیتال و سیستم‌های آنالوگ - واحد تئوری سیگنال  
 $X(j\Omega) = \text{rect}(\frac{\Omega}{2})$   $w[\Omega] = \pi\delta(\Omega - \frac{\pi}{2}) + \pi\delta(\Omega + \frac{\pi}{2})$

6.6.2)  $X(j\Omega) \otimes w[\Omega] = \pi \text{rect}(\frac{\Omega - \pi/2}{2}) + \pi \text{rect}(\frac{\Omega + \pi/2}{2})$



$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow H(j\Omega) = \text{rect}(\frac{\Omega}{2})$

$\Rightarrow Y(j\Omega) = \text{rect}(\frac{\Omega}{2}) \cdot \pi \text{rect}(\frac{\Omega - \pi/2}{2}) + \text{rect}(\frac{\Omega}{2}) \cdot \pi \text{rect}(\frac{\Omega + \pi/2}{2})$



$\Rightarrow Y(j\Omega) = \pi \text{rect}(\frac{\Omega}{2}) \Rightarrow y[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}$

d)  $x[n] = 1 + \sin(\frac{\pi}{8}n) + 2\cos(\frac{3\pi}{4}n)$ ,  $w[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n) \rightarrow \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$   
 $\Rightarrow 1 + \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{8}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{8}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n}$   
 $W(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - \frac{\pi}{2}) + \pi\delta(\Omega + \frac{\pi}{2})$   
 $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \frac{\pi}{j}\delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{\pi}{j}\delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) + 2\pi\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4}) + 2\pi\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4})$

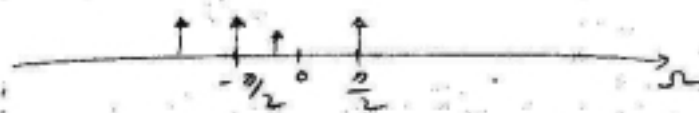
$Y(j\Omega) = X(j\Omega) * W(j\Omega) = 2\pi W(j\Omega) + \frac{\pi}{j}W(j\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{\pi}{j}W(j\Omega + \frac{\pi}{8}) +$   
 $2\pi W(j\Omega - \frac{3\pi}{4}) + 2\pi W(j\Omega + \frac{3\pi}{4})$

$= 2\pi (\pi\delta(\Omega - \frac{\pi}{2}) + \pi\delta(\Omega + \frac{\pi}{2})) + \frac{\pi}{j}(\pi\delta(\Omega - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}) + \pi\delta(\Omega - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}))$

$+ \frac{\pi}{j}(\pi\delta(\Omega + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}) + \pi\delta(\Omega + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}))$

$+ 2\pi(\pi\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + \pi\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}))$

$+ 2\pi(\pi\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + \pi\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}))$



$y[n] = 2\pi(\cos(\frac{\pi}{2}n)) + \pi(\sin(\frac{\pi}{8}n - \frac{\pi}{2})) + 2\pi\cos(\frac{3\pi}{4}n - \frac{\pi}{2})$

۵۰

مسائل نمونه فصل چهارم سیستم‌های سیگنال‌ها و سیستم‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب

سیستم LTI و قطبی توهمیت شده با معادله تفاضلی زیر در نظر بگیرید. پاسخ هر دو سیستم معکوس و معادله تفاضلی که آن را مشخص و بکشد، تعیین کنید.

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

$$\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = H(j\Omega) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}$$

$$H_{\pm}(j\Omega) \cdot H(j\Omega) = 1 \Rightarrow H_{\pm}(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = H_{\pm}(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \Rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] \quad \text{بسته‌فکری}$$

$$H_{\pm}(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \Rightarrow h_{\pm}[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

$$\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = H(j\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$H_{\pm}(j\Omega) \cdot H(j\Omega) = 1 \Rightarrow H_{\pm}(j\Omega) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}$$

$$H_{\pm}(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} \Rightarrow y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$H_{\pm}(j\Omega) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} \Rightarrow h_{\pm}[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$