حل معادله موج به روش دالامبر:

دو گونه معادلات دیفرانسیل را به روش فوق حل نمود. معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0<x<L,\ t>0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$$

فرض کنید: $\begin{cases} z = x+ct \\ v = x-ct \end{cases}$ در این صورت داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = c\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial v}\right)$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(u_{zz} - 2u_{vz} + u_{vv})$$

$$u_{xx} = u_{zz} + 2u_{vz} + u_{vv}$$

$$\Rightarrow u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{zv} = 0 \Rightarrow u_{zv} = 0$$

بنابراین این معادله دارای جوابی به فرم $u = \phi(v) + \psi(z)$ است (جواب عمومی)

$$u(x,0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \phi_v \cdot v_t + \psi_z \cdot z_t\Big|_{t=0} = c(\psi_x - \phi_x) = g(x)$$

بنابراین:

$$\phi(x) - \psi(x) = G(x) + k, \quad G(x) = \frac{1}{c}\int g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ \varphi(x) - \psi(x) = G(x) + k \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + G(x)) + \frac{1}{2}k \\ \psi(x) = \frac{1}{2}(f(x) - G(x) - k) \end{cases}$$

$$\therefore u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2}\{G(x+ct) - G(x-ct)\}$$

$$u(0,t) = \frac{1}{2}(f(ct) + f(-ct)) + \frac{1}{2}\{G(ct) - G(ct)\} = 0$$

با توجه به وجود جواب تنها برای مسئله فوق می‌توان برای f و G در معادله خطی به طور مشابه فرض کرد که:

$$f(-ct) = -f(ct) \quad , \quad G(-ct) = G(ct)$$

$$u(L,t) = \frac{1}{2}\{f(L+ct) + f(L-ct)\} + \frac{1}{2}\{G(L+ct) - G(L-ct)\}$$

حال فرض کنید:

$$f(L+ct) + f(L-ct) = 0$$

با فرض $ct = L + \alpha$ داریم:

$$f(2L+\alpha) = -f(-\alpha) = f(\alpha)$$

و همینطور:

$$G(2L+\alpha) = G(\alpha)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\{f^*(x+ct) + f^*(x-ct)\} + \frac{1}{2}\{G^*(x+ct) - G^*(x-ct)\}$$

که در آن f^* گسترش فرد $f(x)$ و $G^*(x)$ گسترش زوج $G(x)$، $0 < x < L$ است.

Ex)
$$u_{tt} = 4u_{xx}$$
$$u(x,0) = x \ , \ u_t(x,0) = 4x + 6x^2$$
$$u(0,t) = 0 \ , \ u(17,t) = 0 \qquad , \ u(5,19) = ?$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f^*(x+2t) + f^*(x-2t)\} + \frac{1}{2}\{G^*(x+2t) - G^*(x-2t)\}$$

که در آن f^* گسترش فرد $f(x) = x \ , \ 0 < x < 17$ و G^* گسترش زوج

$$G = \frac{1}{2}\int (4x + 6x^2)\,dx = x^2 + x^3$$

است.

$$u(5,19) = \frac{1}{2}\{f^*(43) + f^*(-33)\} + \frac{1}{2}\{G^*(43) - G^*(-33)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{f^*(34+9) - f^*(34-1)\} + \frac{1}{2}\{G^*(34+9) - G^*(34-1)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{f^*(9) - f^*(-1)\} + \frac{1}{2}\{G^*(9) - G^*(-1)\}$$

$$= \frac{1}{2}(f(9) + f(1)) + \frac{1}{2}(G(9) - G(1))$$

$$= \frac{1}{2}(9+1) + \frac{1}{2}(81 + 729 - 1 - 1) = 409$$

مسئله گرما :

صورت کلی معادله خطی گرمای یکبعدی را می توان به فرم زیر در نظر گرفت :

$$
\begin{aligned}
&u_t - c^2 u_{xx} = F(x,t) \quad , \quad 0<x<l \\
&u(x,0) = f(x) \quad , \quad t>0 \\
&u(0,t) = p(t) \qquad\qquad (*) \\
&u(l,t) = q(t)
\end{aligned}
$$

برای حل این مسئله ، مانند مسئله موج ، ابتدا شرایط مرزی را صفر می کنیم :

$$u = v + w$$

$$w = \frac{q(t) - p(t)}{l} x + p(t)$$

با جایگذاری در معادله $(*)$ داریم :

$$
\begin{aligned}
&v_t - c^2 v_{xx} = F_1(x,t) \quad , \quad 0<x<l \\
&v(x,0) = f_1(x) \qquad 0 \le x \le l \; , \; t>0 \\
&u(0,t) = 0 \\
&u(l,t) = 0
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
\begin{cases}
F_1 = F - \dfrac{q' - p'}{l} x - p' \\
f_1 = f - \dfrac{q(0) - p(0)}{l} x - p(0)
\end{cases}
$$

با توجه به شرایط مرزی ، همگنی و نیز ثابت ، فرم جواب را به صورت زیر معرفی می کنیم :

$$v(x,t) = \sum_{n\ge1} C_n(t) \sin\frac{n\pi}{l} x$$

$u_t - u_{xx} = x^2 + t \qquad 0 < x < l = 1 \quad , t > 0$

$u(x,0) = 2x \qquad 0 \le x \le 1$

$u(0,t) = t \quad , \quad u(1,t) = 2t + 1$

$w(x,t) = (1+t)x + t \longrightarrow u = v + w$

$\therefore \quad v_t - v_{xx} = x^2 - x + t - 1$

$v(x,0) = x \quad , \qquad 0 \le x \le 1$

$v(0,t) = v(1,t) = 0$

let: $v(x,t) = \sum_{n \ge 1} G_n(t) \sin n\pi x$

$\Rightarrow v_t - v_{xx} = \sum_{n \ge 1} (\dot{G}_n + n^2\pi^2 G_n) \sin n\pi x = x^2 - x + t - 1$

$\Rightarrow \dot{G}_n + n^2\pi^2 G_n = 2\int_0^1 (x^2 - x + t - 1) \sin n\pi x \, dx = c_1 t + c_2$

که در آن:

$c_1 = \frac{2}{n\pi}(1 + (-1)^{n+1}) \quad , \quad c_2 = \left(\frac{4}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n\pi}\right)((-1)^n - 1)$

$\Rightarrow G_n(t) = a_n e^{-n^2\pi^2 t} + G_n^*(t)$

که در آن:

$G_n^*(t) = \frac{c_1 t}{1 + n^2\pi^2} + \frac{c_2}{n^2\pi^2}$

$\Rightarrow v(x,t) = \sum \left(a_n e^{-n^2\pi^2 t} + \frac{c_1 t}{1 + n^2\pi^2} + \frac{c_2}{n^2\pi^2}\right) \sin n\pi x$

$v(x,0) = 0 \Rightarrow \sum \left(a_n + \frac{c_2}{n^2\pi^2}\right) \sin n\pi x = x$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-C_2}{n^2\pi^2} + 2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} - \frac{C_2}{n^2\pi^2}$$

Ex) $u_t - u_{xx} = 2x^2t \quad , 0<x<1$

$u(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x \quad , 0\le x\le 1$

$u(0,t) = 1 \quad , u_x(1,t) = \frac{3\pi}{2}$

با فرض $\quad u(x,t) = v(x,t) + \frac{3\pi}{2}x + 1$

$\Rightarrow \quad v_t - v_{xx} = 2x^2t \quad , 0<x<1$

$v(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1 \quad , 0\le x\le 1$

$v(0,t) = 0 \quad , v_x(1,t) = 0$

حال با فرض

$$v(x,t) = \sum_{n\ge 1} c_n(t)\sin \underbrace{(2n-1)\frac{\pi}{2}}_{k_n} x$$

$$\Rightarrow \sum_{n\ge 1}(c_n' + k_n c_n)\sin k_n x = 2x^2t$$

$$\Rightarrow c_n' + k_n^2 c_n = 2\int_0^1 2x^2t\sin k_n x\,dx = \frac{8}{k_n^3}(k_n\sin k_n - 1)\,t\alpha$$

با تبین جواب خصوصی $c = at + b$، داریم:

$$c_n(t) = a_n e^{-k_n^2 t} + \frac{\alpha}{k_n^4}(t - k_n^2)$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n\geq 0} \left(a_n e^{-k_n^2 t} + \frac{\alpha}{k_n^4}(t - k_n^2) \right) \sin k_n x$$

$$\Rightarrow v(x,0) = \sum_{n\geq 0} \left(a_n - \frac{\alpha}{k_n^2} \right) \sin k_n x = \cos \frac{3\pi}{2} x - \frac{3\pi}{2} x - 1$$

$$\Rightarrow a_n - \frac{\alpha}{k_n^2} = 2\int_0^1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} x - \frac{3\pi}{2} x - 1\right) \sin k_n x \, dx = \dots$$

تذکر: شرایط مرزی مختلف و توابع پایه‌ای متناظر برای حل مسئله:

1) $\begin{cases} u(0,t) = p(t) \\ u(L,t) = q(t) \end{cases} \longrightarrow w = \frac{q-p}{L}x + p \,, \quad v = \sum C_n(t) \underbrace{\sin \frac{n\pi}{L} x}_{\phi_n}$

2) $\begin{cases} u_x(0,t) = p \\ u_x(L,t) = q \end{cases} \longrightarrow w = \frac{q-p}{2L}x^2 + px \rightarrow \phi_n = \cos \frac{n\pi}{L} x$

3) $\begin{cases} u_x(0,t) = p \\ u(L,t) = q \end{cases} \longrightarrow w = px + (q - pL) \rightarrow \phi_n = \cos \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{n\pi}{L} x$

4) $\begin{cases} u(0,t) = p \\ u_x(L,t) = q \end{cases} \longrightarrow w = qx + p \longrightarrow \phi_n = \sin \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{n\pi}{L} x$

معادله لاپلاس و پواسون :

Ex) $u_{xx}+u_{yy}=x-y \quad 0<x<\pi \ , \ 0<y<\pi$

$u(x,0)=0 \ , \quad u(x,\pi)=x^2 \qquad 0\le x\le\pi$

$u(0,y)=2y \ , \quad u(\pi,y)=0 \qquad 0\le y\le\pi$

$$u(x,y)=v(x,y)+\frac{x^2}{\pi}y$$

$$\Rightarrow v_{xx}+v_{yy}=x-\left(1+\frac{2}{\pi}\right)y \ , \quad 0<x<\pi \ , \ 0<y<\pi$$

$v(x,0)=0 \ , \quad v(x,\pi)=0 \qquad 0\le x\le\pi$

$v(0,y)=2y \ , \quad v(\pi,y)=-\pi y \qquad 0\le y\le\pi$

$$\Rightarrow v(x,t)=\sum_{n\ge1} C_n(x)\sin ny$$

$$\Rightarrow \sum_{n\ge1}(\ddot{C}_n-n^2C_n)\sin ny=x-(1+2/\pi)y$$

$$\ddot{C}_n-n^2C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(x-(1+2/\pi)y\right)\sin ny\,dy$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right)x+2/n(1+2/\pi)(-1)^n$$

$$\Rightarrow a_n(x) = a_n \operatorname{ch} nx + b_n \operatorname{sh} nx + \underbrace{\frac{2}{n^3\pi}((-1)^n - 1)x + \frac{2}{n^3}(1+\tfrac{2}{\pi})(-1)^{n+1}}_{g(x)}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \sum_{n\geq 1} (a_n \operatorname{ch} nx + b_n \operatorname{sh} nx + g(x)) \sin ny$$

$$v(0,y) = \sum (a_n + \frac{2}{n^3}(1+\frac{2}{\pi})(-1)^{n+1}) \sin ny = 2y$$

$$\Rightarrow a_n + \frac{2}{n^3}(1+\frac{2}{\pi})(-1)^{n+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^\pi y \sin ny \, dy = \frac{4}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{n^3}(1+\frac{2}{\pi})(-1)^n + \frac{4}{n}(-1)^{n+1}$$

$$v(\pi,y) = \sum_{n\geq 1} \left(a_n \operatorname{ch} n\pi + b_n \operatorname{sh} n\pi + \frac{2}{n^3}((-1)^3 - 1) + \frac{2}{n^3}(1+\tfrac{2}{\pi})(-1)^{n+1}\right) \sin ny$$

$$= -\pi y$$

$$\Rightarrow a_n \operatorname{ch} n\pi + b_n \operatorname{sh} n\pi + \frac{2}{\pi^3}((-1)^n - 1) + \frac{2}{n^3}(1+\frac{2}{\pi})(-1)^{n+1} =$$

$$-2\int_0^\pi y \sin ny \, dy = \frac{2\pi}{n}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = ? \\ b_n = ? \end{cases}$$

استفاده از تبدیل فوریه برای حل معادلات با مشتقات جزئی :

به کمک تبدیل فوریه متناهی می‌توان بسیاری از معادلات با مشتقات جزئی را با داشتن شرایط اولیه و مرزی حل نمود.

تبدیل فوریه سینوسی متناهی تابع $f(x)$ که در بازه متناهی مانند $[0,\pi]$ تعریف می‌شود برای n های صحیح به این صورت تعریف می‌شود:

$$F_s\{f\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = f_s(n) \;;\; n=1,2,3,\ldots$$

(تبدیل سینوسی)

و معکوس آن را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin nx$$

به همین ترتیب

$$F_c\{f\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = f_c(n) ; n=0,1,2,\ldots$$

(تبدیل کسینوسی)

و معکوس آن عبارتست از:

$$f(x) = \frac{1}{2} f_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos nx$$

هرگاه f, f', f'' توابعی پیوسته در بازه $[0,\pi]$ باشند آنگاه داریم (حکم):

$$F_s(f'') = \frac{2n}{\pi}\left[f(0) - (-1)^n f(\pi)\right] - n^2 F_s\{f\}$$

$$F_c\{f''\} = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n f'(\pi) - f'(0)\right] - n^2 F_c\{f\}$$

ex)

به کمک تبدیل فوریه مسئله زیر را حل کنید

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 1 \qquad 0 < x < \pi \quad , t > 0$$

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_t(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(\pi,t) = 0$$

با اعمال تبدیل فوریه به طرفین معادله داریم واز تبدیل سینوسی استفاده میکنیم:

$$F_s(u_{tt}) - c^2 F_s(u_{xx}) = F_s(\underbrace{G(x,t)}_{1})$$

$$F_s(u_{tt}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_{tt}\, \sin nx\,dx = \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,t)\sin nx\,dx\right] = \frac{d^2 v(n,t)}{dt^2}$$

که در آن $v(n,t)$ تبدیل سینوسی متناظر $u(x,t)$ است.

$$F_s(u_{xx}) = \frac{2n}{\pi}\left[u(0,t) - (-1)^n u(\pi,t)\right] - n^2 v(n,t) = -n^2 v(n,t)$$

حال اگر $F_s\{1\}$ را حساب کنیم داریم: $\quad F_s\{1\} = \frac{2}{\pi n}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dt^2} + n^2 c^2 v = \frac{2}{n\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow v(n,t) = A\cos nct + B\sin nct + \frac{2}{nc^2n^3}\left[1+(-1)^{n+1}\right] \quad (*)$$

$$F_s\{u(x,0)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,0)\sin nx\,dx = v(n,0) = 0 \qquad (1)$$

$$F_s\{u_t(x,0)\} = \frac{d}{dt}v(n,0) = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{(*),(1),(2)}{\Longrightarrow} B = 0 \text{ and } A = \frac{2}{nc^2n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Rightarrow V(n,t) = \frac{2}{\pi c^2 n^3}\left(1+(-1)^{n+1}\right)(1-\cos nct)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi c^2}\sum \frac{\left(1+(-1)^{n+1}\right)}{n^3}(1-\cos nct)\sin nx \quad \blacksquare$$

Ex) $u_t = u_{xx} + u \qquad 0<x<\pi,\ t>0$

$u(x,0) = x \qquad 0\le x\le \pi$

$u_x(0,t) = 0 \quad , u_x(\pi,t) = \frac{\pi}{2}$

با توجه به شرایط مرزی، از تبدیل فوریه کسینوسی بهره می‌گیریم:

let: $F_c\{u(x,t)\} = V(n,t)$

$$F_c\{u_{xx}\} = \frac{2}{\pi}\left\{(-1)^n u_x(\pi,t) - u_x(0,t)\right\} - n^2 V(n,t) = (-1)^n - n^2 V(n,t)$$

$$V_t(n,t) + n^2 V(n,t) - V(n,t) = V_t(n,t) + (n^2-1)V(n,t) = (-1)^n$$

$$V(n,0) = F_c\{u(x,0)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Rightarrow V(n,t) = a_n e^{-(n^2-1)t} + \frac{(-1)^n}{n^2-1}, \quad n\neq 1$$

اما داریم:

$$V(n,0) = a_n + \frac{(-1)}{n^2-1} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right), \quad n\neq 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{(-1)^n}{1-n^2}$$