ریاضیات مهندسی :

بخش های اصلی
- آنالیز فوریه (سری فوریه - انتگرال فوریه - تبدیلات فوریه)
- حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE)
- توابع مختلط

کتاب های مرجع :

۱) ریاضیات مهندسی پیشرفته (جلد دوم) نویسنده : اروین کرویت سیگ
نشر دانشگاهی ترجمه : حسن فرمان - سیامک کاظمی

۲) ریاضیات مهندسی نویسنده : محمدرضا پورنکی ، محمود حصارکی - مرتضی فتوحی
انتشارات فاطمی

۳) ریاضیات مهندسی نویسنده : دکتر عبدالله شیدفر

۴) ریاضیات مهندسی مؤلف : دکتر منگردیچ تومانیان

فصل اول : آنالیز فوریه

تابع متناوب :

تعریف : تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را متناوب گوییم اگر:

$$\exists p>0 \quad : \quad f(x+p)=f(x) \quad \forall x$$

عدد p را دورهٔ تناوب تابع f می نامند.

معروف ترین توابع متناوب عبارتند از $\sin x$ ، $\cos x$ ، $tg x$ ، ...

با تعریف بالا، تابع ثابت $f(x)=c$ نیز یک تابع متناوب است که هر عدد مثبت p می تواند دورهٔ تناوب آن باشد.

نکته : اگر p دورهٔ تناوب تابع f باشد $\Leftarrow$ به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، kp نیز دورهٔ تناوب تابع f است.

نکته : اگر توابع $f_1, f_2, \dots, f_k$ توابعی با دورهٔ تناوب p باشند آن گاه

$$\forall a_i \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \quad \text{متناوب-}p$$

(به عبارت دیگر، هر ترکیب خطی از این توابع نیز، دارای دورهٔ تناوب p است)

تعمیم : اگر $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ توابعی p-متناوب باشند آن گاه

$$\forall a_i \in \mathbb{R} \quad g := \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$$

در صورت تعریف p-متناوب است.

و اگر g در نقطه x تعریف شده باشد آن گاه :

$$g(x)=g(x+p)$$

دورهٔ تناوب اصلی : اگر تابع متناوب f دارای کوچکترین دورهٔ تناوب ، مثلاً $p>0$ باشد این دورهٔ تناوب را دورهٔ تناوب اصلی یا بنیادی (fundamental) می نامند.

مثلاً توابع $\sin x$ و $\cos x$ دارای دورهٔ تناوب اصلی 2π هستند.

و توابع $\sin 2x$ و $\cos 2x$ دارای دورهٔ تناوب اصلی π می باشند.

تابع ثابت ، تابعی متناوب بدون دورهٔ تناوب اصلی است.

تمرین: نشان دهید که همهٔ توابع حقیقی متناوب با دورهٔ تناوب p، تشکیل یک فضای برداری می دهند.

سری فوریه:

همهٔ توابع 2π-متناوب تشکیل یک فضای برداری می دهند. از طرفی توابع مثلثاتی

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \ldots$$

همگی 2π-متناوب هستند.

سری زیر

$$a_0 + a_1\cos x + \quad \sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

درصورت همگرایی، مجموع آن تابعی با دورهٔ تناوب 2π است.

حال قصد داریم شرایطی بیابیم که بتوان هر تابع f 2π-متناوب را به صورت سری فوق نمایش داد.

فرمول های اویلر:

فرض می کنیم $f(x)$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π باشد که بتوان آن را به وسیلهٔ سری مثلثاتی زیر نمایش داد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (1)$$

یعنی فرض کنیم این سری همگراست و مجموع آن تابع $f(x)$ است. با چنین مفروضاتی می خواهیم ضرایب a_n و b_n سری (1) را محاسبه کنیم:

الف) تعیین جمله ثابت a_0: از دو طرف رابطهٔ (1) در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ انتگرال گیری می کنیم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\Big]dx$$

اگر انتگرال گیری جمله به جمله از سری مجاز باشد (سری باید همگرای یکنواخت باشد) داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx} + b_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = ۲\pi a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

تعیین a_n ضرایب کسینوسی : دو طرف رابطهٔ (۱) را در $\cos mx$ ضرب می‌کنیم (m عدد صحیح مثبت) و از $-\pi$ تا π انتگرال می‌گیریم :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx\right]$$

$$(*) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{۲}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{۲}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx = \pi$$

$$(**) \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{\sin nx}_{\text{فرد}}\ \underbrace{\cos mx}_{\text{زوج}}}^{\text{فرد}}\,dx = \frac{1}{۲}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{۲}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\,dx = 0$$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\cancel{\frac{1}{۲}\left[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{n \neq m} + \underbrace{\pi}_{n=m}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \pi a_m$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

تعیین b_n ضرایب سینوسی : دو طرف رابطهٔ (۱) را در $\sin mx$ ضرب می‌کنیم و پس از $-\pi$ تا π انتگرال می‌گیریم :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = a_0 \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{\cos nx}_{\text{زوج}}\ \underbrace{\sin mx}_{\text{فرد}}}^{\text{فرد}}\,dx} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \pi b_m$$

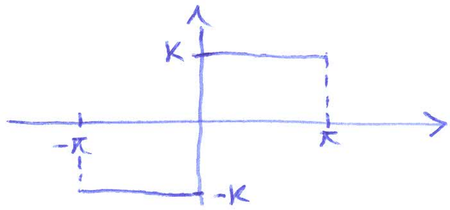
$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx}$$

مثال : ضرایب فوریه تابع متناوب f را بیابید :

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad , \quad f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

حل : از فرمول های اویلر برای بدست آوردن ضرایب فوریه استفاده می کنیم :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -k \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} k \cos nx \, dx$$

$$= \frac{-k}{\pi} \times \frac{1}{n} \sin nx \Big]_{-\pi}^{0} + \frac{k}{\pi} \times \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -k \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} k \sin nx \, dx$$

$$= \frac{+k}{n\pi} \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{k}{n\pi} \cos nx \Big|_{0}^{\pi} = \frac{+k}{n\pi}\left[1 - (-1)^n - (-1)^n + 1\right]$$

$$= \frac{2k}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ \dfrac{4k}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases}$$

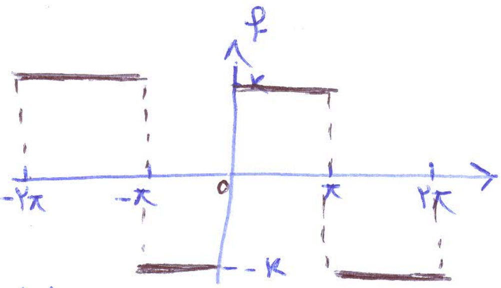
پس b_n ها عبارتند از : $b_1=\frac{4k}{\pi}$ ، $b_2=0$ ، $b_3=\frac{4k}{3\pi}$ ، $b_4=0$ ، $b_5=\frac{4k}{5\pi}$ ، $\dots$

سری فوریهٔ $f(x)$ به صورت زیر است :

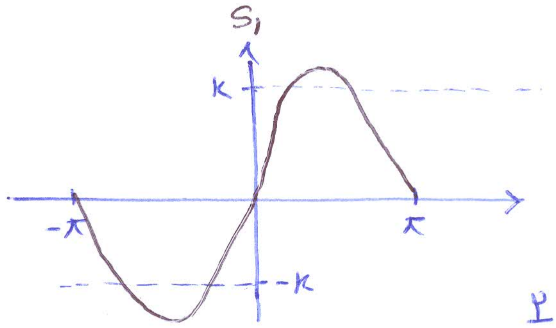
$$f(x)=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)$$

دنبالهٔ مجموع های جزئی سری فوریهٔ فوق را در نظر بگیرید :

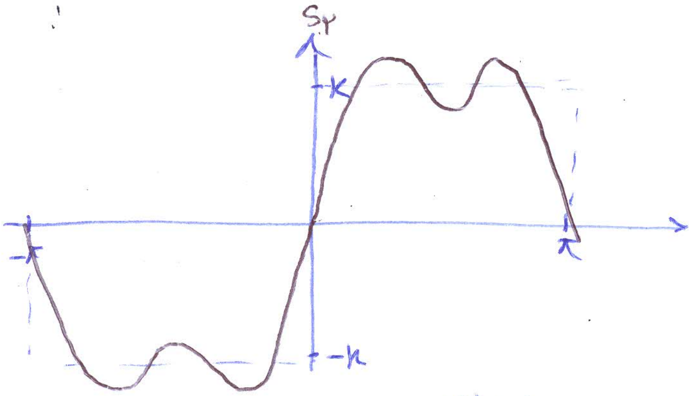
$$S_1=\frac{4k}{\pi}\sin x \quad , \quad S_2=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\right) \quad , \quad \dots$$



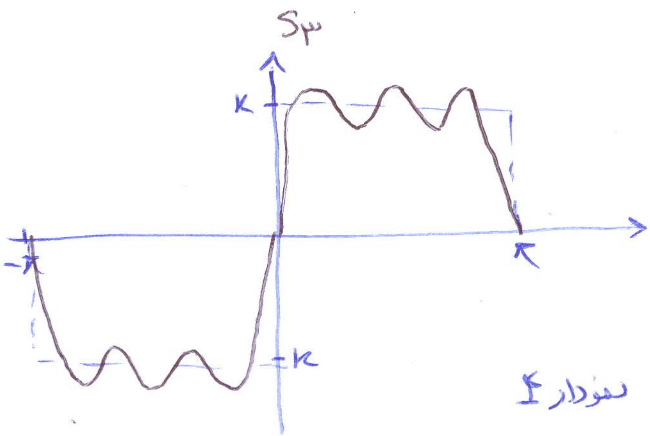
نمودار 1



نمودار 2



نمودار 3



نمودار 4

با توجه به نمودارها کاملاً واضح است که دنبالهٔ مجموع های جزئی سری فوریهٔ فوق به تابع f همگراست.
و در نقاط ناپیوستگی تابع f یعنی $x=0$ ، $x=\pi$ و $x=-\pi$ همهٔ مجموع های جزئی دارای مقدار یکسان صفر (میانگین حسابی k و -k) می باشند.

نکته : در این مثال با قرار دادن $x=\frac{\pi}{2}$ داریم :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=k=\frac{4k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

تعامد دستگاه مثلثاتی :

مجموعه توابع مثلثاتی $1 , \cos x , \sin x , \cos 2x , \sin 2x , \dots , \cos nx , \sin nx , \dots$

روی بازه‌ی $[-\pi , \pi]$ متعامد هستند. به این معنی که انتگرال حاصل ضرب هر دو عضو متمایز از این مجموعه توابع روی بازه‌ی $[-\pi , \pi]$ صفر است. به عبارت دیگر :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad \text{اگر } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad \text{اگر } m \neq n$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0$$

که این مطلب در بدست آوردن فرمول های اویلر ثابت شد.

نکته : یادآوری از ریاضی عمومی : فضای $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید : $A, B \in \mathbb{R}^n$

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) , \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$\underset{\text{متعامد}}{A \perp b} \Leftrightarrow \underset{\text{ضرب داخلی}}{A \cdot B} = 0 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

حال فضای برداری تمامی توابع حقیقی با دوره‌ی تناوب 2π را در نظر بگیرید و فرض کنید f و g دو تابع از این فضا باشند :

$$\underset{\text{متعامد}}{f \perp g} \Leftrightarrow \underset{\text{ضرب داخلی}}{\langle f, g \rangle} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx = 0$$

(یادآوری) همین طور فرض کنید $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ یک پایه‌ی متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشد آن گاه هر بردار دلخواه مانند $v \in \mathbb{R}^n$ را می توان به صورت ترکیب خطی $\{A_k\}$ ها نوشت و ضرایب ترکیب خطی از رابطه‌ی زیر بدست می آید :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{(v \cdot A_i)}{|A_i|^2} A_i$$

حال همین مطلب را برای هر تابع 2π-متناوب f در فضای برداری همهٔ توابع 2π-متناوب تعمیم می دهیم:

در این فضا مجموعهٔ متعامد $\{\sin nx, \cos mx \mid n\geq 1, m\geq 0\}$ را داریم

و می خواهیم هر تابع دلخواه f را به صورت ترکیب خطی از عناصر این مجموعه بنویسیم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

از فرمول اویلر داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle = \|1\|^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{\langle f, \cos nx\rangle}{\langle \cos nx, \cos nx\rangle} \qquad \forall n\geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{\langle f, \sin nx\rangle}{\langle \sin nx, \sin nx\rangle} \qquad \forall n\geq 1$$

(تذکر: نرم تابع f به صورت رادیکال حاصل ضرب داخلی تابع f در خودش تعریف می شود)

حال با دانستن روابط بالا می توان فرمول های اویلر را مجدداً اثبات کرد:

اثبات مجدد: داریم که:

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

دو طرف رابطهٔ (۱) را در تابع ثابت 1 ضرب داخلی می کنیم:

$$\langle f(x), 1\rangle = a_0\langle 1,1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cancel{\langle \cos nx, 1\rangle} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancel{\langle \sin nx, 1\rangle}$$

(به این نکته توجه شود که ضرب داخلی خاصیت خطی دارد)

$$\langle f(x), 1\rangle = a_0\langle 1,1\rangle \Rightarrow a_0 = \frac{\langle f(x), 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}$$

حال دو طرف رابطهٔ (۱) را در تابع $\cos mx$ ضرب داخلی می کنیم:

$$\langle f(x), \cos mx\rangle = a_0\cancel{\langle 1, \cos mx\rangle} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos nx, \cos mx\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancel{\langle \sin nx, \cos mx\rangle}$$

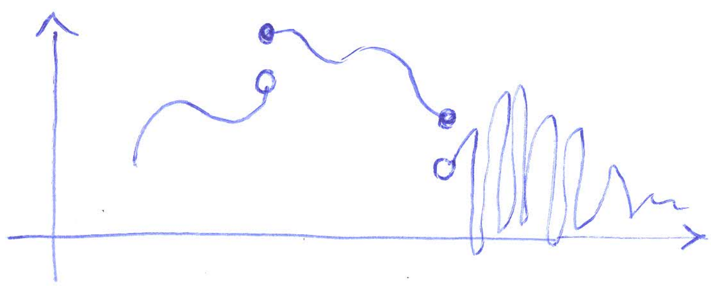
$$\Rightarrow a_m = \frac{\langle f(x), \cos mx\rangle}{\langle \cos mx, \cos mx\rangle}$$

و ادامهٔ اثبات به طور مشابه انجام می شود.

قضیه (نمایش سری فوریه):

اگر تابع متناوب f ، تابعی 2π-متناوب و مقطعه قطعه پیوسته در $[-\pi, \pi]$ باشد و کراندار و
درهر نقطه از این بازه مشتق چپ و راست بپذیرد Max و Min متناهی داشته ~~تابع~~ موجود باشد. آن گاه سری فوریهٔ تابع
$f(x)$ ، درنقاط پیوستگی تابع به خود تابع همگراست و درنقاط ناپیوستگی به میانگین
حد چپ و راست میل می کند.

نکته: تابع $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ را مقطعه قطعه پیوسته گوییم هرگاه متناهی نقطهٔ
$a \leq c_1 < c_2 \cdots < c_k \leq b$ وجود داشته باشد که تابع در بازه های (c_i, c_{i+1}) پیوسته باشد.



توابع با دورهٔ تناوب دلخواه $2L$:

قصد داریم سری فوریهٔ تابع f با دورهٔ تناوب $2L$ را بدست آوریم:

$$f(x) = f(x+2L) \quad \forall x$$

$$g(y) := f\left(y \times \frac{L}{\pi}\right)$$

$$g(y+2\pi) = f\left((y+2\pi)\times\frac{L}{\pi}\right) = f\left(y\times\frac{L}{\pi} + 2L\right) \overset{f\ \text{متناوب-}2L}{=} f\left(y\times\frac{L}{\pi}\right) \overset{g\ \text{تعریف}}{=} g(y)$$

$$\forall y: \quad g(y+2\pi) = g(y) \qquad \text{تابعی } 2\pi\text{-متناوب } g$$

ازآن جایی که g با یک تغییر متغیر خطی از f بدست می آید لذا همهٔ خصوصیات خوب f را به ارث می برد.

بنابراین اگر f پیوستهٔ قطعه ای و درهر نقطه دارای مشتق چپ و راست باشد g نیز دارای همین خصوصیات است. پس تابع 2π- متناوب g طبق قضیهٔ فوق دارای نمایش سری فوریه به صورت زیر است:

$$(*) \quad g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos ny + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin ny = f\left(y\times\frac{L}{\pi}\right)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy$$

فرمول های اویلر

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos ny\,dy \quad , \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin ny\,dy$$

$$y := \frac{\pi}{L}x$$

با جایگزاری $\frac{\pi}{L}x$ به جای y در رابطه (*) خواهیم داشت:

$$f(x) = g\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{cases} y=\pi \Rightarrow x=L \\ y=-\pi \Rightarrow x=-L \end{cases} \qquad y := \frac{\pi}{L}x \Rightarrow dy = \frac{\pi}{L}dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} g\left(\frac{\pi}{L}x\right)\times\frac{\pi}{L}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} g\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\times\frac{\pi}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} g\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\times\frac{\pi}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

قضیه نمایش با سری فوریه برای تابع $2L$-متناوب:

فرض کنید f تابعی $2L$- متناوب و قطعه به قطعه پیوسته در $[-L,L]$ باشد و هم چنین فرض کنید مشتق چپ و راست تابع در همه نقاط $[-L,L]$ وجود داشته باشد. آنگاه سری فوریه تابع در نقاط پیوستگی به خود تابع و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست میل می کنند و سری فوریه یک تابع $2L$- متناوب به صورت زیر است

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

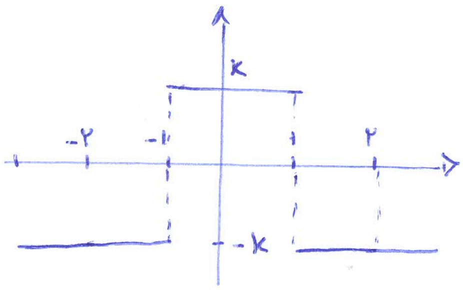
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

مثال :

$$\forall x:\ f(x+\overset{2L}{\overset{\uparrow}{4}})=f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}-k & -2<x<-1\\ k & -1<x<1\\ -k & 1<x<2\end{cases}$$

سری فوریه تابع f را بدست آورید :



حل : این تابع زوج است .

$$L=2 \Rightarrow 2L=4$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1}-k\,dx+\int_{-1}^{1}k\,dx+\int_{1}^{2}-k\,dx\right]=0$$

$$n\geq 1\ ;\quad a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)}_{\text{زوج}}dx=\int_{0}^{2}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$=\int_{0}^{1}k\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx-\int_{1}^{2}k\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$=k\,\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_{0}^{1}-k\,\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{1}^{2}$$

$$\text{زوج}\ n \Rightarrow a_n=0$$

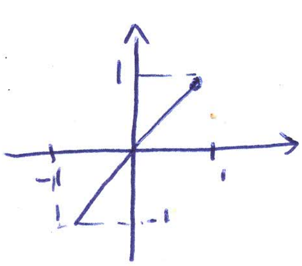
$$\text{فرد}\ n=2m+1 \Rightarrow a_{2m+1}=\frac{2k}{(2m+1)\pi}\left((-1)^m-0-\left[0-(-1)^m\right]\right)=\frac{4k}{(2m+1)\pi}(-1)^m$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx=0$$

$$f(x)=\frac{4k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{\cos\frac{3\pi}{2}x}{3}+\frac{\cos\frac{5\pi}{2}x}{5}-\frac{\cos\frac{7\pi}{2}x}{7}+\cdots\right)$$

تمرین : تابع زیر داده شده است

$$f(x)=x \qquad -1<x<1$$



سری فوریه این تابع را به عنوان یک تابع ۲-متناوب بدست آورید :

جواب: $f(x)=\frac{2}{\pi}\left[\sin\pi x-\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 3\pi x}{3}-\cdots\right]$

قضیه پارسوال :

فرض کنید f تابعی حقیقی و متناوب با دوره تناوب $2L$ باشد. اگر f در بازه $[-L,L]$ قطعه به قطعه پیوسته باشد و a_0 و a_n ، b_n $(n=1,2,\dots)$ ضرایب فوریه تابع f باشند آن گاه اتحاد زیر برقرار است :

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx$$

اثبات : سری فوریه تابع f به صورت زیر است :

$$(*)\quad f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx\ ,\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\quad n=1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\quad n=1,2,\dots$$

دو طرف رابطه $(*)$ را در $f(x)$ ضرب کرده از $-L$ تا L انتگرال می گیریم :

$$\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx=a_0\underbrace{\int_{-L}^{L}f(x)\,dx}_{2a_0L}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}_{La_n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\underbrace{\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}_{Lb_n}.$$

$$\Rightarrow\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx=L\left(2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)$$

$$\Rightarrow 2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx.$$

تمرین : برای تابع 2π-متناوب f با ضابطه زیر ، برقراری اتحاد پارسوال را بررسی کنید (حصاری)

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x<\pi\end{cases}$$

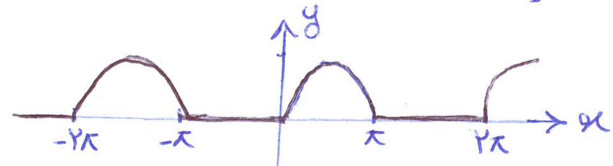
و سپس مجموع سری های زیر را محاسبه کنید :

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots=?$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=?$$

مثال : فرض کنید f تابعی حقیقی و متناوب با دوره تناوب 2π باشد

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi<x<0 \\ \sin x & 0<x<\pi \end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{-1}{2\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}(1+1)=\boxed{\frac{1}{\pi}}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx$$

$$\Rightarrow\quad a_n=\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi} & n=1 \text{ اگر} \\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right)\Big|_0^{\pi} & n=2,3,\dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad a_n=\begin{cases} 0 & n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^n+1}{n+1}-\frac{(-1)^n+1}{n-1}\right) & n=2,3,\dots \end{cases}\qquad a_n=\begin{cases} 0 & n=1,3,5,\dots \\ -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-1}\right) & n=2,4,\dots \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin(nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n-1)x-\cos(n+1)x)dx$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right) & n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\right)\Big|_0^{\pi} & n=2,3,\dots \end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases} \frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & n=2,3,\dots \end{cases}$$

درنتیجه سری فوریه تابع f برابر است با

$$f(x)=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}+\frac{1}{2}\sin x\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

به ازای $x=0$ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

همچنین اتحاد پارسوال ایجاب می‌کند که

$$2\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-1}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx$$

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

قضیه: (مجموع تابع‌ها)

ضرایب فوریهٔ مجموع f_1+f_2 برابر با مجموع‌های ضرایب فوریهٔ متناظر f_1 و f_2 هستند.

ضرایب فوریهٔ cf برابر با c ضرب در ضرایب فوریهٔ متناظر f است.

مثال: سری فوریهٔ تابع زیر را بیابید:

$$f(x+2\pi)=f(x) \quad , \quad f(x)=x+\pi \quad \forall x: -\pi<x<\pi$$

حل: می‌توانیم بنویسیم

$$f=f_1+f_2 \quad s.t.\quad f_1=x \;,\; f_2=\pi$$

ضرایب فوریهٔ f_2، به جز اولی (جملهٔ ثابت) که π است، همگی صفرند.

از طرفی تابع f_1 که تابعی فرد است دارای یک سری فوریهٔ سینوسی است (پس جملهٔ ثابت سری فوریهٔ f_1 صفر است)

اگر a_0، a_n، b_n ضرایب سری فوریهٔ f باشند طبق قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود:

$$a_0=\pi \quad , \quad a_n=0 \quad \forall n=1,2,\dots$$

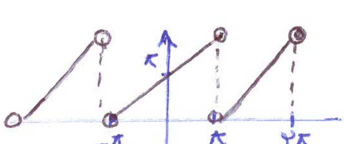
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x}_{f_1(x)}\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx$$

استدلال سری جزء به جز

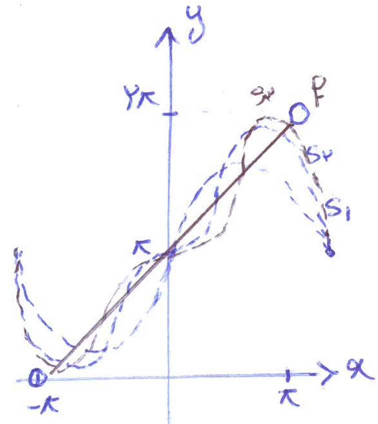
$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=-\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$$b_1=2 \;,\; b_2=-1 \;,\; b_3=\frac{2}{3} \;,\; b_4=\frac{-2}{4} \;,\dots$$

$$f(x)=\pi+2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\dots\right)$$



f (موج دندانه اره‌ای)



دنبالهٔ مجموع‌های جزئی سری فوریه

سری فوریه برای تابع زوج و فرد :

تابع زوج : اگر تابع $f(x)$ تابعی زوج باشد یعنی $\left(f(-x)=f(x)\right)$ به عبارت دیگر نمودار تابع نسبت به محور y ها متقارن باشد آن گاه تابع $f(x)$ سری فوریه کسینوسی دارد یعنی :

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx=\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{زوج}}}^{\text{زوج}}dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin}_{\text{فرد}}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}^{\text{فرد}}dx=0$$

$$\Rightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Rightarrow$$ سری فوریهٔ کسینوسی

تابع فرد : اگر تابع $f(x)$ تابعی فرد باشد، یعنی $\left(f(-x)=-f(x)\right)$ و نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد آن گاه تابع f دارای سری فوریهٔ سینوسی است یعنی :

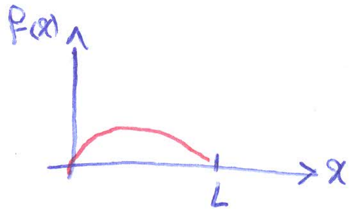
$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx=0\ ,\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{زوج}}}^{\text{فرد}}dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\underbrace{\sin}_{\text{فرد}}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}^{\text{زوج}}dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Rightarrow$$ سری فوریهٔ سینوسی

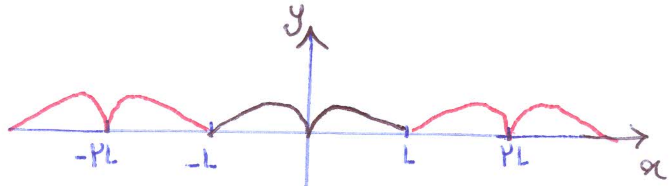
بسط نیم دامنه‌ای (توسعهٔ تناوبی زوج و فرد) :

فرض کنید در کاربرد عملی، نیاز داریم که تابع f ای را که فقط در بازه‌ای مثل $0\leq x\leq L$ تعریف شده و داده شده است را به صورت سری فوریه نمایش دهیم



گسترش زوج تابع :

اگر تقارن تابع $f(x)$ را در بازهٔ $(L$ و $0)$ نسبت به محور y ها در نظر بگیریم در این صورت تابع را گسترش زوج داده ایم و بنابراین $f(x)$ سری فوریهٔ کسینوسی دارد.



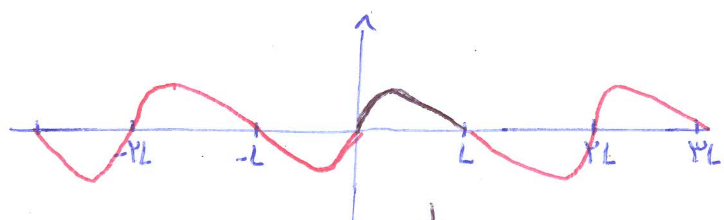
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

$$b_n=0 \quad , \quad a_0=\frac{2}{2L}\int_0^L f(x)\,dx \quad , \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\Rightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

گسترش فرد تابع :

اگر تقارن تابع $f(x)$ را در بازهٔ $(L$ و $0)$ نسبت به مبدا مختصات در نظر بگیریم و به این ترتیب یک تابع $2L$ متناوب فرد بسازیم، در این صورت تابع را گسترش فرد داده ایم و بنابراین تابع f سری فوریهٔ سینوسی دارد.



$$h(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ -f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

$$a_n=0 \quad , \quad a_0=0 \quad , \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

مثال : به کمک سری فوریهٔ کسینوسی تابع $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ در بازهٔ $(0<x<\pi)$ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ را محاسبه کنید :

حل : گسترش زوج تابع f را در نظر می گیریم

$b_n=0$,

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}\right]=\boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos n\pi$

$$=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)+\cos\left(\frac{x}{2}-nx\right)\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+n}\sin\left(\frac{x}{2}+nx\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\frac{1}{2}-n}\sin\left(\frac{x}{2}-nx\right)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+n}(-1)^n+\frac{1}{\frac{1}{2}-n}(-1)^n\right]$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)=\cos n\pi$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}-n^2}\right)$$

سری فوریهٔ تابع f :

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \times \frac{\cos nx}{\frac{1}{4}-n^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(nx)$$

تابع f در نقطهٔ $x=\pi$ پیوسته است بنابراین

$$f(\pi) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(n\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\times(-1)^n = 0 \Rightarrow \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$$

سری فوریهٔ مختلط :

در این بخش نشان می‌دهیم که سری فوریه

$$(1)\quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

را می‌توان به صورت مختلط نوشت. ابتدا روابط زیر که به فرمول اویلر معروف هستند را داریم :

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx \quad (2)$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx \quad (3)$$

روابط (۲) و (۳) را با هم جمع کرده و بر ۲ تقسیم می‌کنیم :

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \quad (4)$$

و همچنین داریم :

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \quad (5)$$

بنابراین با جایگذاری (۴) و (۵) در فرمول (۱) داریم :

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx = \frac{1}{2}a_n(e^{inx}+e^{-inx}) + \frac{1}{2i}b_n(e^{inx}-e^{-inx})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{c_n}e^{inx} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n+ib_n)}_{k_n}e^{-inx}$$

قرار می‌دهیم $c_0 =: a_0$ و $c_n =: \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ ، $k_n =: \frac{1}{2}(a_n+ib_n)$

پس داریم :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx .$$

$$k_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx .$$

وسرانجام با قراردادن $k_n = c_{-n}$ دو فرمول بالا را به صورت زیر ترکیب می کنیم :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

نمایش بالا را سری فوریه مختلط تابع $f(x)$ می نامند .

واگر f تابعی $2L$ - متناوب باشد آن گاه سری فوریه مختلط f به صورت زیر است :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x} \quad , \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\frac{\pi}{L}x}\,dx$$

مثال : سری فوریه مختلط $f(x) = e^x$ را اگر $-\pi < x < \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ تعیین کنید
واز روی آن سری فوریه معمولی را بیابید :

حل :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \sin n\pi = 0$$

$$e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cdot e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-in}e^{x-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-in}(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n$$

$$, \quad e^{\pi} - e^{-\pi} = 2\sinh\pi \quad , \quad \frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{(1-in)(1+in)} = \frac{1+in}{1+n^2}$$

$$\Rightarrow e^{x} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}e^{inx} \qquad -\pi < x < \pi$$

سری فوریه مختلط

بدست آوردن سری فوریه معمولی به عنوان تمرین به عهده دانشجو می باشد .

مثال: نشان دهید که ضرایب فوریهٔ مختلط یک تابع فرد، موهومی محض و یک تابع زوج، حقیقی می‌باشد.

حل: فرض کنید $f(x)$ تابعی فرد باشد:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\underbrace{\cos nx}_{\text{زوج}}}^{\text{فرد}}\,dx-\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\underbrace{\sin nx}_{\text{فرد}}}^{\text{زوج}}\,dx=0-\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\Rightarrow\quad C_n=-\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$ $\Leftarrow$ لذا ضرایب فوریهٔ مختلط، موهومی محض است

اگر $f(x)$ تابع زوج باشد:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos nx}_{\text{زوج}}}^{\text{زوج}}\,dx-\cancel{\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin nx}_{\text{فرد}}}^{\text{فرد}}\,dx}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

بنابراین ضرایب فوریهٔ مختلط یک تابع زوج، حقیقی است.

مشتق‌گیری از سری فوریه:

در حالت کلی برای محاسبهٔ سری فوریهٔ مشتق تابع f نمی‌توان از مشتق جمله به جملهٔ سری فوریهٔ تابع f استفاده کرد.

به عنوان مثال: سری فوریهٔ تابع $2L$-متناوب $f(x)=x$ به صورت زیر است

$$f(x)=\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

ولی اگر از جمله به جملهٔ این سری فوریه مشتق بگیریم سری حاصل برابر است با:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

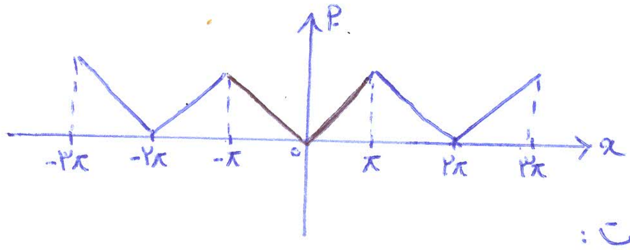
این سری به ازای همهٔ مقادیر x واگراست و بنابراین نمی‌تواند سری فوریهٔ f' باشد.

قضیه: فرض کنید تابع حقیقی و متناوب f با دورهٔ تناوب $T=2L$ در بازهٔ $[-L,L]$ پیوسته است و $f(-L)=f(L)$. اگر f' و f'' در این بازه قطعه به قطعه پیوسته باشند سری فوریهٔ f' از مشتق‌گیری جمله به جملهٔ سری فوریهٔ f به دست می‌آید و به ازای هر x، این سری در نقطهٔ x به $\frac{1}{2}(f'(x^+)+f'(x^-))$ همگراست.

به ویژه اگر f' در x پیوسته باشد، سری فوریهٔ f' در نقطهٔ x به $f'(x)$ همگراست.

مثال : فرض کنید f یک تابع حقیقی و 2π - متناوب با ضابطهٔ زیر باشد :

$f(x)=|x| \qquad [-\pi,\pi]$



سری فوریهٔ f برابر است با

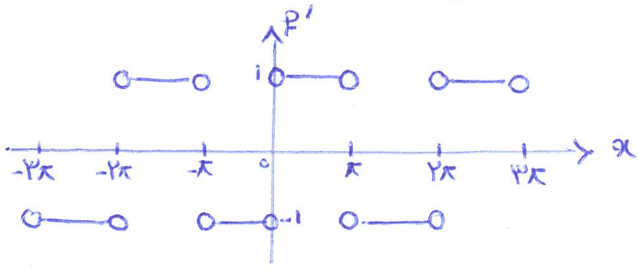
$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

بنابر قضیهٔ فوریه ، این سری به ازای هر x به $f(x)$ همگراست :

$$\forall x:\quad \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=|x|$$

مشتق f ، یعنی f' تابعی است 2π - متناوب که در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ با ضابطهٔ زیر تعریف شده است

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$



شرایط قضیهٔ فوق برای تابع f برقرار است پس سری فوریهٔ f' از مشتق گیری جمله به جمله سری فوریهٔ f به دست می آید . بنابراین سری فوریهٔ f' برابر است با

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$$

این سری به ازای هر x که $x\neq 0,\pm\pi,\pm2\pi,\dots$ به $f'(x)$ همگراست.

و به ازای $x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\dots$ به صفر همگراست.

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

انتگرال گیری از سری فوریه :

قضیه : فرض کنید تابع حقیقی و $2L$ - متناوب f ، تابعی قطعه به قطعه پیوسته در بازهٔ $[-L,L]$ باشد . اگر

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

سری فوریهٔ f باشد آن گاه به ازای هر a و هر x ،

$$\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x\frac{a_0}{2}\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L}+b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right)dt\right).$$

مثال (میان ترم دانشگاه شریف ۹۶) :

فرض کنید f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $T=2\pi$ است که روی بازهٔ $[-\pi,\pi)$ با ضابطهٔ زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}x+\pi & -\pi<x<0\\ \pi/2 & x=-\pi,0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

الف) سری فوریهٔ تابع f را به دست آورید :

ب) با استفاده از قسمت الف) برای هر $0 \leqslant x \leqslant \pi$، حاصل سری های زیر را به دست آورید :

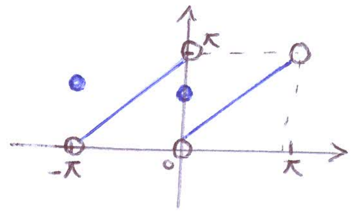
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}$$

ج) با استفاده از قسمت ب) حاصل سری زیر را به دست آورید :

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$

حل :

الف)



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2}x^2+\pi x\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\pi^2+\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2\right) = \frac{\pi^2}{2\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx}_{\text{فرد}} + \int_{-\pi}^{0}\pi\cos nx\,dx\right] = \int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} = \boxed{0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx}_{\text{زوج}} + \int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[2\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx - \frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{2x}{n}\cos nx + \frac{2}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{0}^{\pi} - \frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}(-1)^n\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n}\right] = \frac{-1}{n}\left((-1)^n+1\right)$$

$$\Rightarrow \quad b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ فرد} \\ -\dfrac{2}{n} & n \text{ زوج} \end{cases} \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sin 2nx \quad (*)$$

ب) به ازای $0 \leqslant x \leqslant \pi$، از دو طرف رابطهٔ $(*)$ انتگرال می گیریم :

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{0}^{x}\sin 2nt\,dt$$

$$\int_{0}^{x} t\,dt = \frac{\pi}{2}x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{2n}\cos 2nt\right]_{0}^{x}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{6}}$$

$$\Rightarrow x^2=\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}-\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}=x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{6} \quad (**)$$

قبل از اینکه به اثبات رابطه‌ی دوم بپردازیم ، با استفاده از اتحاد پارسوال ثابت می‌کنیم :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

سمت چپ اتحاد را محاسبه می‌کنیم :

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)^2dx+\int_{0}^{\pi}x^2dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x^2+2\pi x+\pi^2)dx+\int_{0}^{\pi}x^2dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{3}x^3+\pi x^2+\pi^2x\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\pi^3-\pi^3+\pi^3+\frac{1}{3}\pi^3\right]=\boxed{\frac{2}{3}\pi^2}$$

سمت راست اتحاد را محاسبه می‌کنیم :

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{2n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

دو طرف را مساوی قرار می‌دهیم :

$$\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2}{3}\pi^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

به ازای $0\le x\le\pi$ ، از دو طرف رابطه‌ی $(**)$ انتگرال می‌گیریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^x\cos 2nt\,dt=\int_0^x\left(t^2-\pi t+\frac{\pi^2}{6}\right)dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{2n}\sin 2nt\right]_0^x=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{\pi}{2}t^2+\frac{\pi^2}{6}t\right]_0^x$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^3}=\frac{x^3}{3}-\frac{\pi}{2}x^2+\frac{\pi^2}{6}x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^3}=\frac{2}{3}x^3-\pi x^2+\frac{\pi^2}{3}x \quad (***)$$

ج) در رابطه‌ی $(***)$ به جای x ، $\frac{\pi}{4}$ قرار می‌دهیم :

$$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi^3}{64}-\pi\times\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi^2}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{5}{96}\pi^3$$

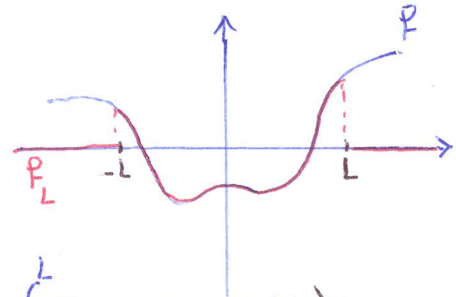
$$\boxed{\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\cdots=\frac{5}{96}\pi^3}$$

انتگرال فوریه :

اگر تابع f ، تابعی غیرمتناوب باشد که روی کل $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد ، این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان برای تابع f نمایش سری فوریه در نظر گرفت ؟

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحدید تابع f روی بازهٔ $[-L,L]$ را در نظر می‌گیریم :

$$f_L := f\times 1_{[-L,L]} \qquad 1_{[-L,L]}=\begin{cases}1 & -L\le x\le L\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$



$$f_L(x)=a_{0,L}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n,L}\cos\frac{n\pi}{L}x+b_{n,L}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

در بازهٔ $[-L,L]$

$$\omega_n=:\frac{n\pi}{L}$$

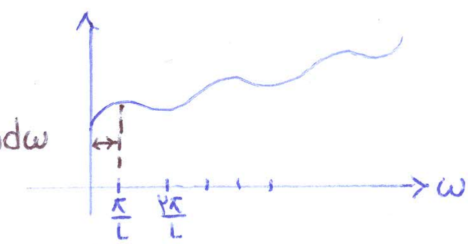
$$f_L(x)=a_{0,L}+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\omega_n x\int_{-L}^{L}f(x)\cos\omega_n t\,dt+\sin\omega_n x\int_{-L}^{L}f(x)\sin\omega_n t\,dt\right)$$

$$\Delta\omega=:\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{L}\ \Rightarrow\ \frac{1}{L}=\frac{\Delta\omega}{\pi}$$

$$\Rightarrow f_L(x)=a_{0,L}+\frac{\Delta\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\omega_n x\int_{-L}^{L}f(x)\cos\omega_n t\,dt+\sin\omega_n x\int_{-L}^{L}f(x)\sin\omega_n t\,dt\right)$$

اگر x را ثابت در نظر بگیریم عبارت درون $\sum$ تابعی از ω_n است .

$$f_L(x)=a_{0,L}+\frac{\Delta\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}g_{L,x}(\omega_n)$$



$$\Delta\omega=\frac{\pi}{L}$$

$$f(x)\xleftarrow[L\to\infty]{} f_L(x)=\cancel{a_{0,L}}^{\,\to 0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta\omega}{\pi}g_{L,x}(\omega_n)\to\int_0^{\infty}g_x(\omega)\,d\omega$$

$$g_{L,x}\xrightarrow{L\to\infty}g_x$$

اگر L به سمت بی‌نهایت برود ، فرض کنید

بنابراین انتظار داریم اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<\infty$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,.\,f(t)\,dt\ ,\qquad B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega t\,.\,f(t)\,dt$$

قضیهٔ انتگرال فوریه:

فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که

۱- روی هر بازهٔ متناهی قطعه قطعه پیوسته باشد.

۲- مشتق چپ و راست در هر نقطه موجود باشد.

۳- f به طور مطلق انتگرال پذیر باشد. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<\infty$

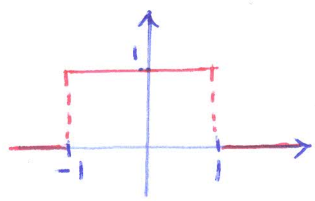
آن گاه انتگرال فوریه در نقاط پیوستگی به مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست همگراست.

$$f(x)=\int_0^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\big)d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt\ ,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

مثال: فرض کنید:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$



انتگرال فوریهٔ f را حساب کنید:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\omega x\,dx=0$$

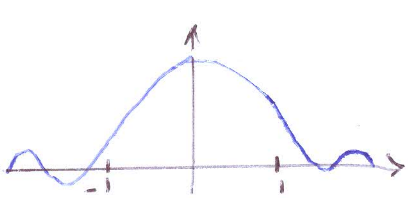
$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$$

$x=\pm1$ نقاط ناپیوستگی f

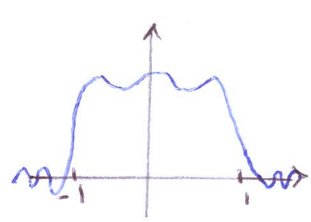
$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega x\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 1/2 & |x|=1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$x=0\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

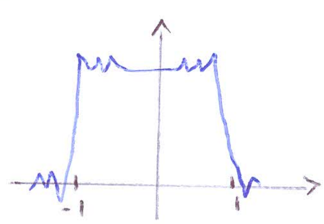
در شکل های زیر نمودار توابع $\int_0^a\frac{\cos\omega x\cdot\sin\omega}{\omega}d\omega$ نمایش داده شده است.



$a=8$



$a=16$



$a=32$

انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی :

۱) اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد آن‌گاه : $B(\omega)=0$ و

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega x\, f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\omega x\, f(x)\,dx$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega .$$

۲) اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد آن‌گاه :

$$A(\omega)=0\ ,\ B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\omega x\, f(x)\,dx$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega .$$

مثال : انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع f با ضابطه‌ی

$$f:\mathbb{R}^{+}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=e^{-kx}\qquad k>0$$

را حساب کنید :

حل : انتگرال فوریه کسینوسی :

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-kx}\cos\omega x\,dx$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم :

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\left[e^{-kx}\frac{\sin\omega x}{\omega}+\frac{k}{\omega}\int e^{-kx}\sin\omega x\,dx\right]_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k}{\omega}\left[\frac{-\cos\omega x}{\omega}e^{-kx}-\frac{k}{\omega}\underbrace{\int e^{-kx}\cos\omega x\,dx}_{\frac{\pi}{2}A(\omega)}\right]_{0}^{\infty}$$

بازگشتی

$$\Rightarrow\ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k}{\omega^2}-\frac{k^2}{\omega^2}A(\omega)$$

$$\Rightarrow\ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k}{\omega^2+k^2}$$

$$\boxed{f(x)=e^{-kx}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{k}{\omega^2+k^2}\cos\omega x\,d\omega}\ (1)\qquad x>0,\ k>0$$

انتگرال فوریه سینوسی :

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-kt}\sin\omega t\,dt$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء

$$B(\omega)=\frac{2\omega}{\pi(k^2+\omega^2)}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{f(x)=e^{-kx}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+k^2}\sin\omega x\,d\omega}\ (2)$$

(انتگرال‌های لاپلاس)

$(1),(2)$

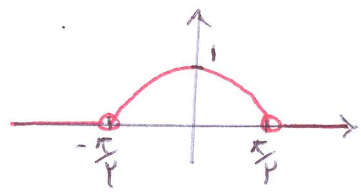
$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\omega^2+k^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2k}e^{-kx}\ ,\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\omega^2+k^2}=\frac{\pi}{2}e^{-kx}\qquad x>,k>0$$

مثال (میان‌ترم علم و صنعت - نیمسال اول ۹۸-۹۷)

انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ را بیابید و به کمک آن مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}\,dx$$

حل:



$$f(x)=\begin{cases}\cos x & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

تابع f، تابعی زوج است بنابراین دارای انتگرال فوریه کسینوسی است.

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin\omega x}_{\text{فرد}}\,dx=0$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos\omega x}_{\text{زوج}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos\omega x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\cos(\omega+1)x+\cos(\omega-1)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\omega+1}\sin(\omega+1)x+\frac{1}{\omega-1}\sin(\omega-1)x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\omega+1}\underbrace{\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}_{\cos\frac{\pi}{2}\omega}+\frac{1}{\omega-1}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{2}\right)}_{-\cos\frac{\pi}{2}\omega}\right]$$

$$\Rightarrow\ A(\omega)=\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\omega\left[\frac{1}{\omega+1}-\frac{1}{\omega-1}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi}{2}\omega$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi}{2}\omega.\cos\omega x\,d\omega$$

$$\Rightarrow\ \int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi}{2}\omega\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\text{if } x=0\ \Rightarrow\ \int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi}{2}\omega\,d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی :

* برای تابع زوج $f(x)$ ، انتگرال فوریه کسینوسی تابع f را به صورت زیر داریم :

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega \quad ; \quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx$$

حال تبدیل فوریه کسینوسی f را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\hat{f}_{c}(\omega)=:\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,A(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx \quad (1)$$

$c \to \cos$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega . \quad (2)$$

هشدار : در (۱) نسبت به x انتگرال می گیریم و در (۲) نسبت به ω .

فرمول (۱) تابع جدید $\hat{f}_c(\omega)$ را از $f(x)$ بدست می دهد که $\hat{f}_c(\omega)$ تبدیل کسینوسی فوریه $f(x)$ نامیده می شود .

فرمول (۲) ، $f(x)$ را با استفاده از $\hat{f}_c(\omega)$ به ما پس می دهد که $f(x)$ تبدیل کسینوسی فوریه وارون $\hat{f}_c(\omega)$ خوانده می شود .

* برای تابع فرد $f(x)$ ، انتگرال فوریه سینوسی تابع f را به صورت زیر داریم :

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad ; \quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx$$

حال تبدیل فوریه سینوسی f را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\hat{f}_{s}(\omega)=:\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,B(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx \quad (3)$$

$s \to \sin$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega \quad (4)$$

سایر نمادهای این تبدیلات به صورت زیر است :

$$\mathcal{F}_c(f)=\hat{f}_c \quad , \quad \mathcal{F}_s(f)=\hat{f}_s$$

و $\mathcal{F}_c^{-1}$ و $\mathcal{F}_s^{-1}$ به ترتیب وارون های $\mathcal{F}_c$ و $\mathcal{F}_s$ می باشد .

ویژگی های تبدیل فوریهٔ سینوسی و کسینوسی :

۱) F_c ، F_s تبدیل های خطی هستند .

برای a و b ثابت و به شرط تعریف سمت راست .

$$F_c(af+bg) = aF_c(f) + bF(g)$$

$$F_s(af+bg) = aF_s(f) + bF_s(g)$$

۲) اگر علاوه بر شرایط تعریف انتگرال فوریه ، $f'(x)$ نیز در هر بازهٔ متناهی قطعه به قطعه پیوسته باشد و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ آنگاه :

الف) $F_c[f'(x)] = \omega F_s[f(x)] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$

ب) $F_s[f'(x)] = -\omega F_c[f(x)]$

اثبات : الف)

$$F_c[f'(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x)\cos\omega x\, dx$$

با انتگرال گیری جزء به جزء :

$$\begin{cases} u = \cos\omega x \Rightarrow du = -\omega\sin\omega x\, dx \\ dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\cos\omega x \Big|_0^\infty + \omega\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + \omega F_s[f(x)] .$$

ب)

$$F_s[f'(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x)\sin\omega x\, dx$$

$$\begin{cases} u = \sin\omega x \Rightarrow du = \omega\cos\omega x\, dx \\ dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\sin\omega x \Big|_0^\infty - \omega\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx\right]$$

$$= -\omega F_c[f(x)]$$

اگر در رابطهٔ الف) به جای f ، f' را قرار دهیم خواهیم داشت :

و پس با جایگذاری ب) :

$$F_c[f''(x)] = \omega F_s[f'(x)] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

$$\Rightarrow F_c[f''(x)] = -\omega^2 F_c[f(x)] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

و همین طور :

$$F_s[f''(x)] = -\omega^2 F_s[f(x)] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega f(0)$$

مثال : تبدیلات فوریهٔ سینوسی و کسینوسی تابع زیر را به دست آورید :

$$f(x) = \begin{cases} k & 0<x<a \\ 0 & a<x \end{cases}$$

حل :

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a k\cos\omega x\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k \left(\frac{\sin a\omega}{\omega}\right)$$

$$\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\int_0^\infty \sin\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\left(\frac{1-\cos a\omega}{\omega}\right)$$

دقت شود که به ازای تابع ثابت $f(x)=k \quad 0<x<\infty$ این تبدیل‌ها وجود ندارند.

مثال: تبدیل فوریه کسینوسی تابع نمایی $f(x)=e^{-x} \quad x\geq 0$ را کاسبه کنید:

حل:

$$F_c(e^{-x})=?$$

$$F_c(e^{-x})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\omega}e^{-x}\sin\omega x-\frac{1}{\omega^2}e^{-x}\cos\omega x\right]_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x$$

$$\Rightarrow F_c(e^{-x})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\omega^2+1}$$

مثال: تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-kx}$ ($k>0$ ثابت) را حساب کنید:

حل:

$$f''(x)=k^2 f(x)$$

از دو طرف تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم:

$$F_c(f''(x))=k^2 F_c(f(x))$$

$$\Rightarrow -\omega^2F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)=k^2F_c(f)$$

$$\Rightarrow (k^2+\omega^2)F_c(f)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underbrace{f'(0)}_{-k}\Rightarrow F_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{k^2+\omega^2}$$

تبدیل فوریه:

انتگرال فوریه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t)\cos\omega t\cos\omega x+f(t)\sin\omega t\sin\omega x)\,dt\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos\omega t\cos\omega x+\sin\omega t\sin\omega x]\,dt\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f(t)\cos(\omega t-\omega x)}_{\text{تابعی زوج از }\omega}\,dt\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\omega t-\omega x)\,dt\,d\omega \quad (*)$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{f(t)\sin(\omega x-\omega t)}_{\text{تابعی فرد از }\omega}\,dt\,d\omega=0 \quad (**) \qquad i=\sqrt{-1}$$

$$(*)+(**)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left[\cos(\omega x-\omega t)+i\sin(\omega x-\omega t)\right]dt\,d\omega=f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\,d\omega$$ فرم مختلط انتگرال فوریه

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)}_{\hat{f}(\omega)}e^{i\omega x}d\omega$$

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \Leftarrow F(f)\Leftarrow f$$ تبدیل فوریهٔ

اگر f به طور مطلق انتگرال پذیر باشد و در هر بازهٔ متناهی قطعه قطعه پیوسته باشد و در هر نقطه مشتق چپ و راست داشته باشد آن گاه تبدیل فوریهٔ f که به صورت بالا تعریف شده است وجود دارد و

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=F^{-1}(\hat{f})\Longleftarrow$$ تبدیل فوریهٔ معکوس

را هم تبدیل فوریهٔ معکوس $\hat{f}(\omega)$ می نامیم.

مثال: تبدیل فوریهٔ تابع f را محاسبه کنید: (single pulse)

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}1\times e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}=\frac{-1}{i\omega\sqrt{2\pi}}\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,i\omega}\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

* برای مشاهدهٔ جدول تبدیلات فوریهٔ بعضی توابع به صفحات ۶۳-۶۴-۶۵ کتاب مراجعه شود.

ویژگی های تبدیل فوریه:

۱) خطی بودن: اگر f و g دو تابع باشند که $F(f)$ و $F(g)$ وجود داشته باشد آنگاه به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$

$$F(af+bg)=aF(f)+bF(g).$$

۲) تبدیل فوریهٔ مشتق تابع f: اگر علاوه بر شرایط تعریف $F(f)$، f' به طور مطلق انتگرال پذیر باشد و $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ آنگاه

$$F(f')=i\omega F(f)$$

اثبات به عنوان تمرین :

$$F(f'') = -\omega^2 F(f)$$

۳) پیچش (کانوولوشن) (Convolution) :

تعریف : $\Longleftarrow$

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt = (g*f)(x) .$$

ویژگی ۳ تبدیل فوریه :

$$F(f*g) = \sqrt{2\pi}\, F(f)\, F(g) .$$

اثبات :

$$F(f*g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, e^{-i\omega x}\, dt\, dx$$

تعویض ترتیب انتگرال گیری

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, e^{-i\omega x}\, dx\, dt$$

حال با تغییر متغیر $u = x - t$ داریم :

$$x = u + t \quad , \quad du = dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(u)\, e^{-i\omega(u+t)}\, du\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{-i\omega u}\, du$$

$$= \sqrt{2\pi}\; F(f) . F(g) . \square$$

تمرین : (انتقال) نشان دهید اگر $f(x)$ دارای تبدیل فوریه باشد آنگاه $f(x-a)$ دارای تبدیل فوریه بوده و

$$F(f(x-a)) = e^{-i\omega a} F(f(x))$$

تمرین : (انتقال روی محور ω) نشان دهید اگر $\hat{f}(\omega)$ تبدیل فوریهٔ $f(x)$ باشد، آنگاه $\hat{f}(\omega-a)$ تبدیل فوریه $e^{iax} f(x)$ می باشد.