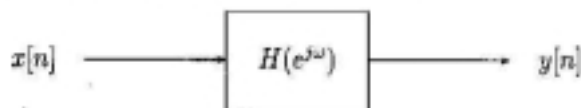
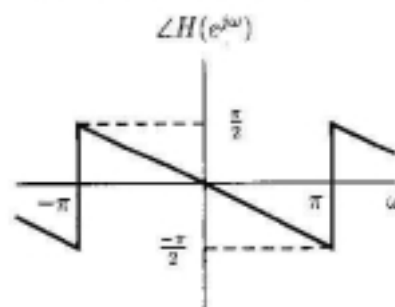
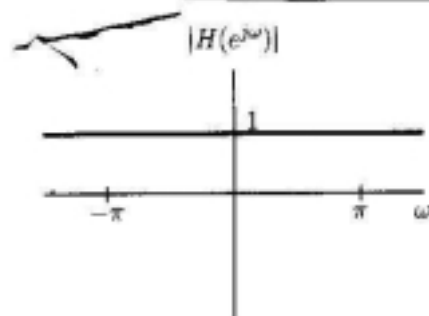
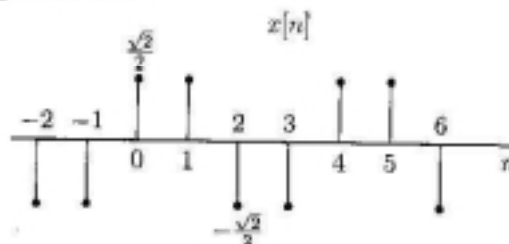


۵۱

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال‌ها و سیستم‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب فشرانی

سیستم LTI زمان گسسته با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ و پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ را در نظر بگیرید.در صورتیکه $x[n] = \cos(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})$ باشد که در زیر دنباله ورودی نمایش داده شده است.خروجی $y[n]$ را بدست آورید. اندازه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم در زیر ترسیم شده است.

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - 2\pi n - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

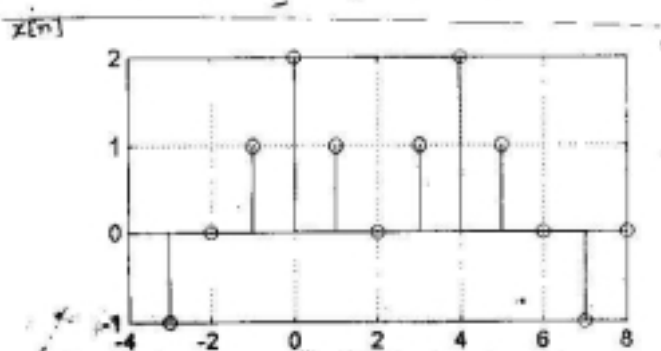
$$y[n] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

$$y[n] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

$$y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

۵۲

مسائل نمونه فصل چهارم: سیستم‌ها و سیستم‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - خفرانی
 شریک است: $X(j\Omega)$ تبدیل فوریته از $x[n]$ به $X(j\Omega)$ است.



بدون محاسبه $X(j\Omega)$ هر دو از خواسته‌ها را در برآورد تغییر کنید.

a) $X(j0)$ $X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(j0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 6$

b) $X(j\pi)$ $X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = 2$

c) $\text{Arg}(X(j\Omega))$ $x_1[n] = x[n+2] \rightarrow X_1(j\Omega)$ حقیقی و زوج
 $\angle X_1(j\Omega) = 0$

$$x[n] \rightarrow X(j\Omega)$$

$$x[n+2] \rightarrow e^{j2\Omega} X(j\Omega) = X_1(j\Omega) \Rightarrow 2\Omega + \angle X(j\Omega) = \angle X_1(j\Omega) = 0$$

$$\Rightarrow \angle X(j\Omega) = -2\Omega$$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) d\Omega$ $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) d\Omega \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) d\Omega = 2\pi x[0] = 4\pi$$

ن) سیمانی را بدست آورید و ترکیب کنید که تبدیل فوریته آن $X(-j\Omega)$ است.

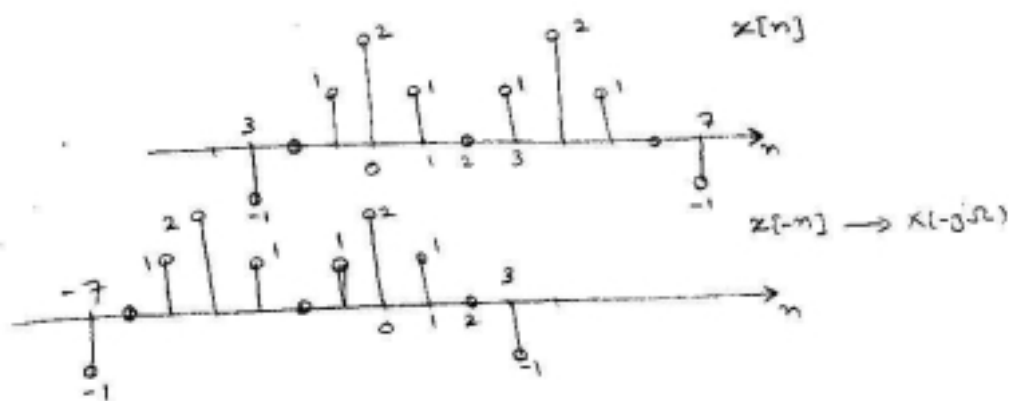
$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad X(-j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right)^*$$

$$X(-j\Omega) = X^*(j\Omega) \quad \begin{cases} x[n] \rightarrow X(j\Omega) \\ x[-n] \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right)^* \\ \hspace{15em} = X^*(j\Omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[-n] \rightarrow X^*(j\Omega) = X(-j\Omega)$$

۵۳

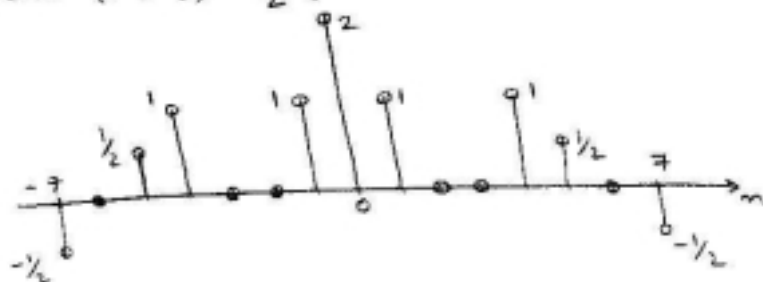
مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - فغانی



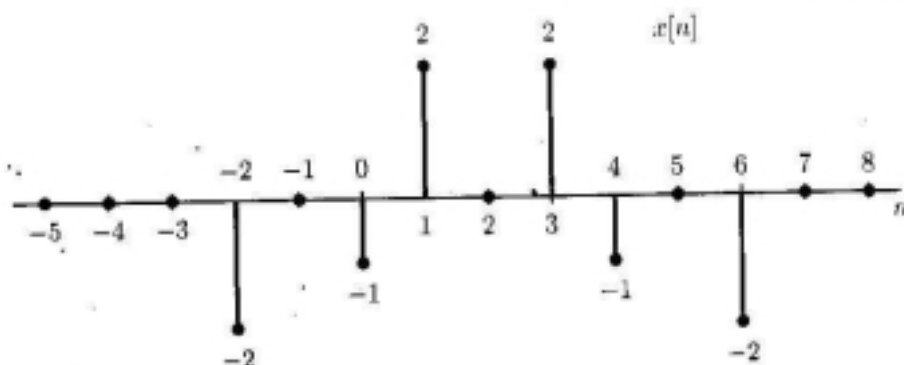
د) سیمانی را بدست آورید که تبدیل فوریه آن $\text{Real}(X(j\Omega))$ است.

$$\begin{aligned} x[n] &\rightarrow X(j\Omega) \\ x[-n] &\rightarrow X^*(j\Omega) \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \rightarrow \frac{1}{2}(X(j\Omega) + X^*(j\Omega))$$

$$\Rightarrow \text{Even}(x[n]) = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \rightarrow \text{Real}(X(j\Omega)) = \frac{1}{2}(X(j\Omega) + X^*(j\Omega))$$



مخرج کنید $X(j\Omega)$ تبدیل فوریه (تغییر زمان) گسسته $x[n]$ باشد.



مخرج بدون محاسب $X(j\Omega)$ هر یک از خواسته های زیر را تعیین کنید.

(a) $X(j0)$ $X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n}$ $X(j0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = -2$

ب) مقدار α را بگونه ای تعیین کنید که $X(j\Omega) e^{j\alpha n}$ حقیقی باشد.

$x_1[n] = x[n+2] \Rightarrow X_1(j\Omega)$ حقیقی

$x[n] \rightarrow X(j\Omega)$

$x[n+2] \rightarrow e^{j2\Omega} X(j\Omega) = X_1(j\Omega) \Rightarrow \alpha = 2$

ج) $\int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) d\Omega$ $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$
 $x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) d\Omega \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) d\Omega = -2\pi$

د) $X(j\pi)$ $X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n}$

$X(j\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = -2 - 1 - 2 - 2 - 1 - 2 = -10$

۵۵

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال‌ها و سیستم‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی
(۳) نمایشی را به یک آفریننده تبدیل فوریه آن $\text{Real}(X(j\Omega))$ است.

$$x[n] \rightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n}$$

$$x[-n] \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} \right)^* = X^*(j\Omega)$$

$$x[n] \rightarrow X(j\Omega)$$

$$x[-n] \rightarrow X^*(j\Omega)$$

$$\frac{x[n] + x[-n]}{2} \rightarrow \frac{X(j\Omega) + X^*(j\Omega)}{2} = \text{Real}(X(j\Omega))$$

$$x_{\text{even}}[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$



$$9) \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

(۳)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega = 2\pi (18) = 36\pi$$

$$10) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega} \right|^2 d\Omega$$

$$x[n] \rightarrow X(j\Omega)$$

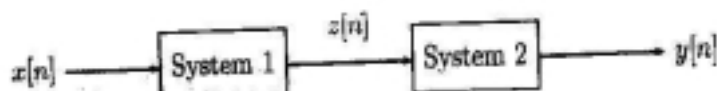
$$(-jn)x[n] \rightarrow \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |-jn x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega} \right|^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega} \right|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nx[n]|^2$$

$$= 2\pi (16 + 4 + 36 + 16 + 144) = 432\pi$$

مسائل نمونه فصل چهارم سیستم‌های سیگنال‌ها و سیستم‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب خفرائی
سیستم زیر را که حاصل سری شدن دو سیستم LTII است را در نظر بگیرید.



تابع ضرب سیستم LTII اول داده شده است، $h_1[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ ، سیستم ۲ نیز LTII است و می‌دانیم که ورودی سیستم ۲، $z[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$ باشد، خروجی کل سیستم $y[n] = 10\delta[n] - \delta[n-1]$ است. معلوم است.

الف) تابع فرکانسی کل سیستم $H(\omega)$ (ب) معادله تفاضلی ارتباط دهنده ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$
ج) تابع ضرب سیستم $h[n]$

$$h_1[n] = (\frac{1}{4})^n u[n] \Rightarrow H_1(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\omega}}$$

$$z[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \Rightarrow Z(\omega) = 1 + \frac{1}{2}e^{j\omega} \Rightarrow H_2(\omega) = \frac{Y(\omega)}{Z(\omega)}$$

$$y[n] = 10\delta[n] - \delta[n-1] \Rightarrow Y(\omega) = 10 - e^{j\omega} \Rightarrow H_2(\omega) = \frac{10 - e^{j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\omega}} \cdot \frac{10 - e^{j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = 10x[n] - x[n-1]$$

$$H(\omega) = \frac{10 - e^{j\omega}}{(1 - \frac{1}{4}e^{j\omega})(1 + \frac{1}{2}e^{j\omega})} = \frac{\frac{6}{3} = 2}{1 - \frac{1}{4}e^{j\omega}} + \frac{\frac{12}{3/2} = 8}{1 + \frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$h[n] = 2(\frac{1}{4})^n u[n] + 8(\frac{1}{2})^n u[n]$$

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی
سیستم LTI زمان گسسته با تابع فرکانس $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n-1]$ را در نظر بگیرید. مطلوب است

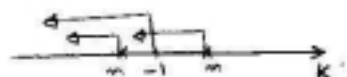
خروجی $y[n]$ ورودی $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ باشد.

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^n u[-n-1] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2})^n \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{-n} \cdot e^{j\Omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2e^{j\Omega})^n$$

حدود سری هندسی شود، نمی توان از تبدیل فوریه خروجی را محاسبه کرد بنابراین از کانولوشن استفاده می کنیم

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^k u[-k-1] \cdot (\frac{1}{4})^{n-k} u[n-k]$$



$$\begin{cases} n < -1 & * = \sum_{k=-\infty}^n (\frac{1}{2})^k \cdot (\frac{1}{4})^{n-k} \\ n \geq -1 & * = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{4})^{n-k} \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^n (\frac{1}{2})^k \cdot (\frac{1}{2})^{2n-2k} = (\frac{1}{2})^{2n} \sum_{k=-\infty}^n (\frac{1}{2})^{-k} = (\frac{1}{2})^{2n} \sum_{k=-\infty}^n (2)^k, & n < -1 \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2})^k \cdot (\frac{1}{2})^{2n-2k} = (\frac{1}{2})^{2n} \sum_{k=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2})^{-k} = (\frac{1}{2})^{2n} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2)^k, & n \geq -1 \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{2n} \cdot 2^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, & n < -1 \\ (\frac{1}{2})^{2n} \cdot 2^{-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}, & n \geq -1 \end{cases} \Rightarrow y[n] = \begin{cases} 2(\frac{1}{2})^n, & n < -1 \\ (\frac{1}{2})^{2n}, & n \geq -1 \end{cases}$$

۵۸

معدله دیفرانسیل معمولی چهارم درجه و همبسته ها
 دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب
 گروه مهندسی برق - دانشکده مهندسی
 محسنی
 مملویت جامع تهران

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-1] - 0.5x[n-2]$$

$$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1] - 0.5\delta[n-2]$$

$$H(j\Omega) = 1 + 0.5e^{-j\Omega} - 0.5e^{-j2\Omega}$$

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + 0.5y[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 0.5h[n-1]$$

$$h[0] = 1$$

$$h[1] = 1 + \frac{1}{2}h[0] = \frac{3}{2}$$

$$h[2] = \frac{1}{2}h[1] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$h[3] = \frac{1}{2}h[2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$h[k] = \frac{1}{2}h[k-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 3\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$h[n] = \delta[n] + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

$$h[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\delta[n]$$

۵۹

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب طرانی

فیلتر دیجیتال با تابع تبدیل (پایخ فرکانسی) $H(j\Omega) = (1 + 2\cos(2\Omega))e^{-j2\Omega}$ را در نظر

بگیریم. پایخ فیلتر، ورودی $x[n]$ ، به ورودی $y[n]$ تبدیل می شود. بدست آوریم.

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{1}{2}n\right) = e^{j\frac{1}{2}n} + e^{-j\frac{1}{2}n}$$

$$y[n] = (1 + 2\cos(1))e^{-j1} \cdot e^{j\frac{1}{2}n} + (1 + 2\cos(-1))e^{j1} \cdot e^{-j\frac{1}{2}n}$$

$$y[n] = 2(1 + 2\cos(1)) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}n - 1\right)$$

۶.

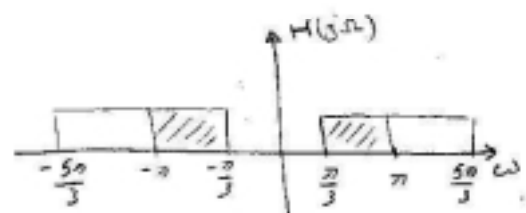
مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب
پایان هر یک از مسائل زیر را در بازه $[-\pi, \pi]$ نوع منتر را تعیین کنید.

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}n)}{n\pi} \cdot e^{-j\pi n}$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\pi}\right)$$

$$\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{4\pi/3}\right)$$

$$\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}n)}{n\pi} \cdot e^{-j\pi n} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega + \pi}{4\pi/3}\right)$$



$$e^{j\pi n} \cdot e^{-j\pi n} \Rightarrow \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}n)}{n\pi} \cdot e^{j\pi n} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega - \pi}{4\pi/3}\right)$$

نوع منتر HP