

سیارچه ایب
جایگاه دایره

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی

- رابطه بین سیگنال زمین پیوسته $x_1(t)$ و سیگنال $r(t)$ داده شده است

$$x_1(t) = \begin{cases} r(t) & , 1 \leq t \leq 5 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$

سیگنال $r(t)$ متناوب با دوره تناوب $T=4$ و فرایندی فوریه a_k است.

فرایندی فوریه a_k را بر حسب $X_1(j\omega)$ بیان کنید.

$$r(t) = r(t+4) \Rightarrow a_k = \frac{1}{T} \int_T r(t) e^{jk(\frac{T}{4})t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{4} \int_1^5 r(t) e^{jk(\frac{2}{4})t} dt$$

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_1^5 r(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$a_k = \int_1^5 r(t) \cdot \frac{1}{4} e^{-j(k \cdot \frac{2}{4})t} dt \Rightarrow a_k = \frac{1}{4} X_1(j\omega) \Big|_{\omega = k \cdot \frac{2}{4}}$$

فصل چهارم

۲

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی
سیستم LTI با پاسخ همزیم $h(t) = 2 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \cos(4\pi t)$ را در نظر بگیرید.

فرونی $y(t)$ را به ازاء ورودیهای داده شده بدست آورید.

$$x_1(t) = 1 + \cos(\pi t) + \sin(4\pi t) \quad , \quad x_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m)$$

$$h(t) = 2 \text{sinc}(t) \cdot \cos(4\pi t)$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2}\right)$$

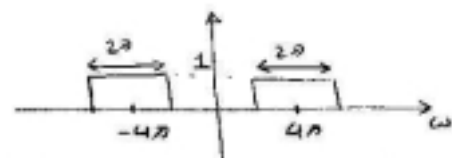
$$\tau \text{sinc}\left(\frac{t}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2}\right) \rightarrow 2\tau \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\tau = 2\pi \Rightarrow 2\pi \text{sinc}(t) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\text{sinc}(t) \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$h(t) = \text{sinc}(t) \cdot (e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t})$$

$$H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega-4\pi}{2\pi}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega+4\pi}{2\pi}\right)$$



$$\rightarrow x_1(t) = 1 + \cos(\pi t) + \sin(4\pi t) = 1 + \frac{1}{2} e^{j\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi t} + \frac{1}{2j} e^{j4\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j4\pi t}$$

$$X_1(j\omega) = 2\pi \delta(\omega) + \pi \delta(\omega-\pi) + \pi \delta(\omega+\pi) + \frac{2\pi}{2j} \delta(\omega-4\pi) - \frac{2\pi}{2j} \delta(\omega+4\pi)$$

$$Y_1(j\omega) = \frac{1}{2j} \delta(\omega-4\pi) - \frac{1}{2j} \delta(\omega+4\pi)$$

$$y_1(t) = \sin(4\pi t)$$

$$\rightarrow x_2(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m) \Rightarrow X_2(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\omega} \quad \text{از اینجاست - جواب می آید؟}$$

$$x_2(t) = x_2(t+T), \quad T=1, \quad a_k = \frac{1}{1}, \quad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \times e^{jk\left(\frac{2\pi}{1}\right)t}$$

$$X_2(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k2\pi) = 2\pi (\dots + \delta(\omega-4\pi) + \delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega) + \delta(\omega+2\pi) + \delta(\omega+4\pi) + \dots)$$

$$Y_2(j\omega) = 2\pi (\delta(\omega-4\pi) + \delta(\omega+4\pi))$$

$$y_2(t) = e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t} \Rightarrow y_2(t) = 2\cos(4\pi t)$$

۳

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب طرانی

سیستم زمان پیوسته و LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل $y'(t) + 2y(t) = x(t)$ را در نظر

بگیرید. الف) پاسخ فرکانسی یا تابع تبدیل سیستم را بدست آورید. ب) پاسخ هرز سیستم را بدست آورید.

ج) پاسخ سیستم - خروجی $y(t)$ را به ازاء ورودی $x(t) = e^{-t} u(t)$ تعیین کنید.

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{2+j\omega} \quad H(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$$

$$h(t) = e^{-2t} u(t)$$

$$x(t) = e^{-t} u(t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)} \cdot \frac{1}{(1+j\omega)}$$

$$Y(j\omega) = \frac{-1}{2+j\omega} + \frac{1}{1+j\omega}$$

$$y(t) = e^{-t} u(t) - e^{-2t} u(t)$$

مسائل نمونه فصل چهارم سیستم‌ها و سیگنال‌ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب طرانی
 - معادله‌های ارتباط دهنده ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ سیستم LTI زمان پیوسته داده شده است.
 مطلوب است پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ و پاسخ ضرب $h(t)$ سیستم

a) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} \Rightarrow h(t) = e^{-3t} u(t)$$

b) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = -x'(t)$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{-(j\omega)}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6} = \frac{-(j\omega)}{(j\omega+3)(j\omega+2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{-1}}{j\omega+3} + \frac{\frac{2}{1}}{j\omega+2}$$

$$\Rightarrow h(t) = -3e^{-3t} u(t) + 2e^{-2t} u(t)$$

c) $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = x'(t) + 2x(t)$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2+j\omega}{(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 12}$$

$$H(j\omega) = \frac{(2+j\omega)}{(4+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{2}{4+j\omega} + \frac{-1}{3+j\omega}$$

$$h(t) = 2e^{-4t} u(t) - e^{-3t} u(t)$$

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب طهرانی

با این فرکانسی سیستم LTI و زمان گسسته $H(j\Omega)$ داده شده است. معادله تفاضلی ارتباط دهنده ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را بدست آورید.

$$a) H(j\Omega) = \frac{1 + e^{j\Omega}}{3 + e^{j2\Omega}}$$

$$\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{1 + e^{j\Omega}}{3 + e^{j2\Omega}} \Rightarrow 3y[n] + y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

$$b) H(j\Omega) = 1 + \frac{e^{j\Omega}}{(1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega})(1 + \frac{1}{4}e^{j\Omega})}$$

$$H(j\Omega) = 1 + \frac{e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{j\Omega} - \frac{1}{8}e^{j2\Omega}}$$

$$= \frac{1 + \frac{3}{4}e^{j\Omega} - \frac{1}{8}e^{j2\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{j\Omega} - \frac{1}{8}e^{j2\Omega}} = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$$

$$\Rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + \frac{3}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

6

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

- پاسخ فرکانسی سیستم LTI و زمان پیوسته $H(j\omega)$ داده شده است. معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده

ورودی سیستم $x(t)$ و خروجی سیستم $y(t)$ را بدست آورید.

$$a) H(j\omega) = \frac{2 + 3j\omega - 3(j\omega)^2}{1 + j2\omega}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2 + 3(j\omega) - 3(j\omega)^2}{1 + 2(j\omega)}$$

$$2y'(t) + y(t) = 2x(t) + 3x'(t) - 3x''(t)$$

$$b) H(j\omega) = \frac{1 - j\omega}{-\omega^2 - 4}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1 - j\omega}{(j\omega)^2 - 4} \Rightarrow y''(t) - 4y(t) = x(t) - x'(t)$$

$$c) H(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1 + j\omega}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} \Rightarrow y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

- پاسخ فریب سیستم LTI از میان سیگنال داده شده، معادله دینامیک را به شکل ارتباط دهنده ورودی سیستم $x(t)$ و خروجی سیستم $y(t)$ را بدست آورید.

$$a) \quad h(t) = \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{a}t} \cdot u(t) \rightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1}{a}} = \frac{1}{1 + ja\omega}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + ja\omega} = H(j\omega)$$

$$\Rightarrow y(t) + a y'(t) = x(t)$$

$$b) \quad h(t) = 2e^{-2t} u(t) - 2te^{-2t} u(t) \quad \begin{aligned} e^{-2t} u(t) &\rightarrow \frac{1}{2 + j\omega} \\ (-jt) e^{-2t} u(t) &\rightarrow \frac{-j}{(2 + j\omega)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{2}{2 + j\omega} - \frac{2}{(2 + j\omega)^2} \\ &= \frac{2(2 + j\omega - 1)}{(2 + j\omega)^2} = \frac{2(1 + j\omega)}{(4 + 4(j\omega) + (j\omega)^2)} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \end{aligned}$$

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 2x'(t) + 2x(t)$$

۷

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی

- پاسخ فریب سیستم LTI زمان گسسته داده شده است ، معادله تفاضلی ارتباط داده شده ورودی سیستم $x[n]$ و خروجی سیستم $y[n]$ را بدست آورید .

$$a) h[n] = \alpha^n u[n] \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad H(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{j\Omega n}$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{j\Omega})^n \quad | \alpha e^{j\Omega} | < 1 = \frac{1}{1 - \alpha e^{j\Omega}}$$

$$\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{1}{1 - \alpha e^{j\Omega}} \Rightarrow y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$$

$$b) h[n] = \delta[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

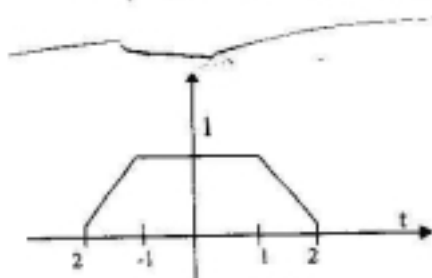
$$H(j\Omega) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{j\Omega}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4} e^{j2\Omega} + 2 + e^{j\Omega} + 1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}}{(1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega})(1 + \frac{1}{2} e^{j\Omega})}$$

$$H(j\Omega) = \frac{4 + \frac{1}{2} e^{j\Omega} - \frac{1}{4} e^{j2\Omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{j2\Omega}} = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$$

$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-2] = 4x[n] + \frac{1}{2} x[n-1] - \frac{1}{4} x[n-2]$$

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - طهرانی
تابع $x(t)$ مطابق شکل رسم داده شده است. مطلوب است $\int_{-\infty}^{\infty} \omega x(\omega) d\omega$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) d\omega = 0$$

مبنای مشتق $x(t)$ در $t=0$ خد بخود برابر می آید.

9

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

- سیگنال های زمان پیوسته $x_1(t)$ و $x_2(t)$ داده شده اند.الف) $x_2(t)$ را بر حسب $x_1(t)$ بیان کنید.ب) با توجه به رابطه زیرت آگمه در قسمت الف)، $x_2(t)$ را بر حسب $x_1(t)$ بیان کنید.

$$x_2(t) = \frac{3}{2} x_1(2t+1)$$

$$x_1(t) \rightarrow X_1(\omega)$$

$$x_1(t+1) \rightarrow e^{j\omega} \cdot X_1(\omega)$$

$$x_1(2t+1) \rightarrow \frac{1}{2} e^{j\frac{\omega}{2}} \cdot X_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} x_1(2t+1) \rightarrow X_2(\omega) = \frac{3}{4} e^{j\frac{\omega}{2}} \cdot X_1\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

۱۰.

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب غفرانی
 - از رابطه بارشال مسئله لغیه تا انرژی سیگنال $x(t) = 2 \text{sinc}(3t)$ را بدست آورید.
 چند درصد از انرژی کل سیگنال در بازه $3\pi < \omega < 3\pi$ قرار گرفته است.

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow T \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{T}{2}\right)$$

$$T \text{sinc}\left(\frac{t}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$T = 6\pi \Rightarrow 6\pi \text{sinc}(3t) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{6\pi}\right)$$

$$x(t) = 2 \text{sinc}(3t) \rightarrow \frac{2}{3} \text{rect}\left(\frac{\omega}{6\pi}\right) = X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-3\pi}^{3\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \times \frac{4}{9} \times 6\pi = \frac{4}{3}$$

کل انرژی

سیگنال در فرکانس قطعه مجزیه 3π اما مقدار دارد بنابراین کل انرژی سیگنال نیز در این محدوده قرار گرفته است.