

INFORMATION SHEET

Fourier transform properties

Property	Transform Pair/Property
Linearity	$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bV(\omega)$
Time shift	$x(t - c) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega c}$
Time scaling	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a > 0$
Time reversal	$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$
Multiplication by power of t	$t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \quad n = 1, 2, \dots$
Multiplication by complex exponential	$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad \omega_0 \text{ real}$
Multiplication by $\cos(\omega_0 t)$	$x(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)]$
Differentiation in time domain	$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \quad n = 1, 2, \dots$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Convolution in time domain	$x(t) * v(t) \leftrightarrow X(\omega) V(\omega)$
Multiplication in time domain	$x(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * V(\omega)$
Parseval's theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)} V(\omega) d\omega$
Duality	$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

Common Fourier Transform Pairs

$x(t)$	$X(\omega)$
$1 \quad (-\infty < t < \infty)$	$2\pi \delta(\omega)$
$-0.5 + u(t)$	$\frac{1}{j\omega}$
$u(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - c)$	$e^{-j\omega c} \quad (c \text{ any real number})$
$e^{-bt} u(t)$	$\frac{1}{j\omega + b} \quad (b > 0)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (\omega_0 \text{ any real number})$
$p_T(t)$	$\tau \text{sinc} \frac{T\omega}{2}$
$\tau \text{sinc} \frac{Tt}{2}$	$2\pi p_T(\omega)$
$\left(1 - \frac{2 t }{T}\right) p_T(t)$	$\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{T\omega}{4}\right)$
$\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \frac{Tt}{4}$	$2\pi \left(1 - \frac{2 \omega }{T}\right) p_T(\omega)$
$\cos(\omega_0 t + \theta)$	$\pi [e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0) + e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t + \theta)$	$j\pi [e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0) - e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0)]$

Trigonometric identities

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \quad \sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

۱۲

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ داده شده است. مطلوب است تبدیل فوریه سیگنال $X(j\omega)$

$$x(t) = e^{-3t} \cos(10t) u(t) \qquad e^{3t} u(t) \rightarrow \frac{1}{3+j\omega}$$

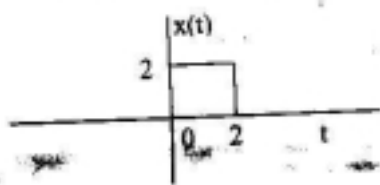
$$x(t) = e^{-3t} u(t) \cdot \frac{1}{2} (e^{j10t} + e^{-j10t})$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3+j(\omega-10)} + \frac{1}{3+j(\omega+10)} \right)$$

۱۳

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - غفرانی

- سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ داده شده است. مطلوب است تبدیل فوریه سیگنال $X(j\omega)$

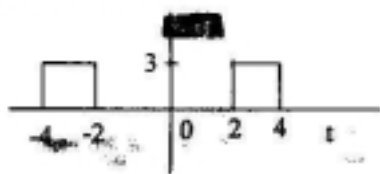


$$x(t) = 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) \rightarrow 2 e^{-j\omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \Rightarrow X(j\omega) = 4 e^{-j\omega} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$



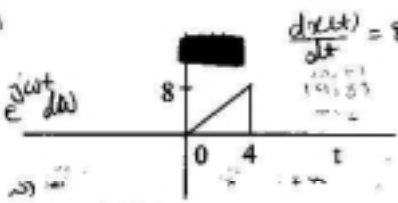
$$x(t) = 3 \operatorname{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) + 3 \operatorname{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \rightarrow e^{-j3\omega} \cdot 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \Rightarrow X(j\omega) = 6 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \cdot (e^{-j3\omega} + e^{j3\omega})$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) \rightarrow e^{j3\omega} \cdot 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) = 12 \cos(3\omega) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$



$$\frac{dg(t)}{dt} = 8$$

$$g(t) = 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) \rightarrow X(j\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \rightarrow 4 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau} \cdot 2\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right) \rightarrow e^{-j2\omega} \cdot 4 \operatorname{sinc}\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)$$

$$g(t) = 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right) \rightarrow G(j\omega) = 8 e^{-j2\omega} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)$$

$$= j\omega X(j\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{8}{j\omega} \cdot e^{-j2\omega} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{2\omega}{\tau}\right)$$

۸۴

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال‌ها و سیستم‌ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - خنای

- سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ داده شده است. مطلوبیت تبدیل فوریه سیگنال $X(j\omega)$

$$x(t) = e^{-t} u(t) \cdot \sin(2\pi t) \quad e^{-t} u(t) \rightarrow \frac{1}{1+j\omega}$$

$$x(t) = e^{-t} u(t) \cdot \frac{1}{2j} \cdot (e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t})$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j} \cdot \left(\frac{1}{1+j(\omega-2\pi)} - \frac{1}{1+j(\omega+2\pi)} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{j4\pi}{1+j2\omega - (\omega^2 - 4\pi^2)} = \frac{2\pi}{(1+4\pi^2 - \omega^2) + j2\omega}$$

$$x(t) = 2e^{-2t} u(t)$$

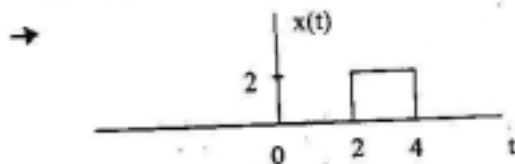
$$X(j\omega) = \frac{2}{2+j\omega}$$

$$x(t) = 5e^{-5t} u(t)$$

$$X(j\omega) = \frac{5}{5+j\omega}$$

$$x(t) = e^{-2t} \cos(4t) u(t) \quad x(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} u(t) \cdot (e^{j4t} + e^{-j4t})$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+j(\omega-4)} + \frac{1}{2+j(\omega+4)} \right)$$



$$x(t) = 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2}\right)$$

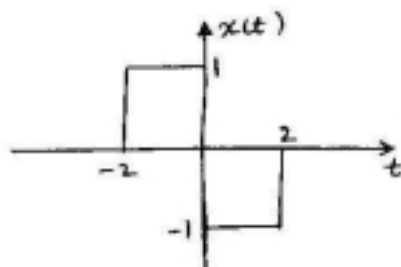
$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \rightarrow e^{j3\omega} \cdot 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$X(j\omega) = 4 e^{j3\omega} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

۱۵

مسائل نمونه فصل چهارم: سیگنال ها و سیستم ها - دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - فخرانی

- سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ داده شده است. مطلوبیت تبدیل فوریه سیگنال $X(j\omega)$ 

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \rightarrow 2 \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

$$X(j\omega) = 2e^{j\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2e^{-j\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= j4 \sin(\omega) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= j4 \sin(\omega) \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega} = j4 \cdot \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

$$-x(t) = e^{-3t} u(t-1)$$

$$x(t) = e^{-3(t-1+1)} u(t-1) = e^{-3} \cdot e^{-3(t-1)} u(t-1)$$

$$e^{-3t} u(t) \rightarrow \frac{1}{3+j\omega}$$

$$X(j\omega) = e^{-3} \cdot e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{3+j\omega} = e^{-j\omega-3} \cdot \frac{1}{3+j\omega}$$

$$-x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

۱۶

مسائل نمونه فصل چهارم سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب فخرانی

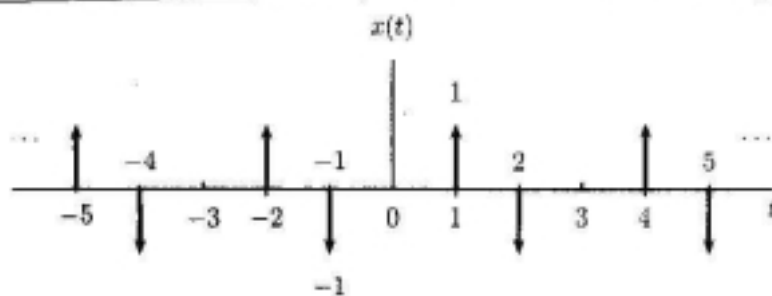
سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ داده شده است. مطلوب تبدیل فوریه سیگنال $X(j\omega)$

$$- x(t) = e^{-|t|} \cos(2t)$$

$$e^{-|t|} \rightarrow \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$e^{-|t|} \cos(2t) = \frac{1}{2} e^{-|t|} e^{j2t} + \frac{1}{2} e^{-|t|} e^{-j2t}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(\omega+2)^2}$$

- $x(t)$ depicted below

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-1-3k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2-3k)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(1+3k)\omega} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(2+3k)\omega}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(1+3k)\omega} - e^{-j(2+3k)\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(\frac{3+6k}{2})\omega} \left(e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega} \right)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(\frac{3}{2}+3k)\omega} \cdot 2j \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

17

مسئله: سیستم سگتال چهارم دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب طراحی

برای تبدیل خورده مرئی. $x(t) = e^{-2|t|}$ برابر است با $\frac{2}{1+\omega^2}$. پس تبدیل خورده مرئی از سگتال های زیر را بر حسب $X(j\omega)$ بدست آورید.

$$x_1(t) = e^{-2|t|}, \quad x_2(t) = e^{-2|t|} \sin(t), \quad x_3(t) = t e^{-2|t|}$$

با استفاده از خاصیت درگانی تبدیل فوریه $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ را نیز بدست آورید.

$$x(t) = e^{-|t|} \Rightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{1-j\omega} e^{(1-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{1+j\omega} e^{-(1+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\rightarrow x_1(t) = e^{-2|t|} = x(2t) \rightarrow \frac{1}{2} X(j\frac{\omega}{2}) \Rightarrow X_1(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+(\frac{\omega}{2})^2} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

$$\rightarrow x_2(t) = e^{-2|t|} \cdot \frac{1}{2j} (e^{jt} - e^{-jt}) \rightarrow \frac{1}{2j} X_1(j(\omega-1)) - X_1(j(\omega+1))$$

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{2j} \left(\frac{4}{4+(\omega-1)^2} - \frac{4}{4+(\omega+1)^2} \right)$$

$$\rightarrow x_3(t) = t e^{-2|t|} \quad e^{-2|t|} \rightarrow \frac{4}{4+\omega^2}$$

$$(-jt) e^{-2|t|} \rightarrow \frac{4(-2\omega)}{(4+\omega^2)^2} \Rightarrow X_3(j\omega) = \frac{-j8\omega}{(4+\omega^2)^2}$$

$$\frac{e^{-|t|}}{1+t^2} \rightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \rightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow G(j\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

- تبدیل فوریه سیگنال $g(t)$ داده شده است.

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2 + 5j\omega + 6} \quad \text{تبدیل فوریه مرتبه}$$

از سیگنال‌های زیر رابطه استاکورید.

$$a) g_1(t) = g(2t) \quad b) g_2(t) = g(3t-6) \quad c) g_3(t) = g(-t)$$

$$d) g_4(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad e) g_5(t) = e^{-j100t} g(t)$$

$$a) g(t) \rightarrow G(j\omega) \Rightarrow g(2t) \rightarrow \frac{1}{2} G(j\frac{\omega}{2})$$

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{2} G(j\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{j\omega/2}{-(\omega/2)^2 + 5j(\omega/2) + 6}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{j4\omega}{-\omega^2 + j10\omega + 24}$$

$$b) g(t) \rightarrow G(j\omega) \quad g(3(t-2)) \rightarrow ?$$

$$g(3t) \rightarrow \frac{1}{3} G(j\frac{\omega}{3})$$

$$g(3(t-2)) \rightarrow \frac{1}{3} e^{-j2\omega} G(j\frac{\omega}{3}) \Rightarrow G_2(j\omega) = \frac{1}{3} e^{-j2\omega} \cdot \frac{j\omega/3}{-(\omega/3)^2 + 5j(\omega/3) + 6}$$

$$G_2(j\omega) = e^{-j2\omega} \cdot \frac{j\omega}{-\omega^2 + j15\omega + 54}$$

$$c) g(t) \rightarrow G(j\omega) \quad g(-t) \rightarrow G(-j\omega) \Rightarrow G_3(j\omega) = \frac{-j\omega}{-\omega^2 - j5\omega + 6}$$

$$= \frac{j\omega}{\omega^2 + j5\omega - 6}$$

$$d) g(t) \rightarrow G(j\omega) \quad \frac{dg(t)}{dt} \rightarrow j\omega G(j\omega)$$

$$G_4(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{-\omega^2 + 5j\omega + 6} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 5j\omega - 6}$$

$$e) g(t) \rightarrow G(j\omega) \quad e^{-j100t} g(t) \rightarrow G(j(\omega+100))$$

$$G_5(j\omega) = \frac{j(\omega+100)}{-(\omega+100)^2 + 5j(\omega+100) + 6}$$

تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ برابر $\frac{4}{4+\omega^2}$ است. تبدیل فوریه مرتبه اول از سیگنال های زیر را بدست آورید.

$$- x_1(t) = x(2t-3) \quad , \quad x(t) \rightarrow \frac{4}{4+\omega^2}$$

$$x(t) = x(2(t-3/2))$$

$$x(2t) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4+(\frac{\omega}{2})^2} \quad x(t-3) \rightarrow e^{-j3\omega} \cdot \frac{4}{4+\omega^2}$$

$$x(2(t-3/2)) \rightarrow \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{2}\omega} \cdot \frac{4}{4+(\frac{\omega}{2})^2} \quad x(2t-3) \rightarrow \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{2}\omega} \cdot \frac{4}{4+(\frac{\omega}{2})^2}$$

$$- x_2(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$$

$$x_2(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) u(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$$

$t-\lambda \geq 0$
 $\lambda \leq t$

$$X_2(j\omega) = X(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

$$= X(j\omega) \cdot \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right)$$

$$X_2(j\omega) = \frac{4}{4+\omega^2} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right)$$

$$X_2(j\omega) = \frac{4}{j\omega(4+\omega^2)} + \pi \delta(\omega)$$