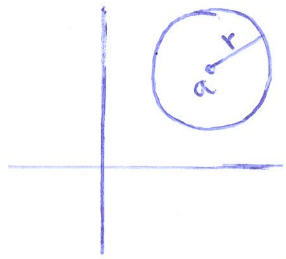
آنالیز مختلط :

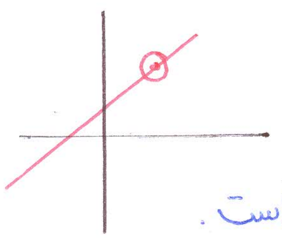
توابع مختلط : مفاهیم مربوط به مجموعه ها در صفحهٔ مختلط :



نقاط روی دایره به شعاع r حول a در معادلهٔ $|z-a|=r$ صدق می کنند. نقاط درون دایره از معادلهٔ $|z-a|<r$ بدست می آیند.
این نقاط را گوی باز به شعاع r حول a گوییم و با $B_r(a)$ نمایش می دهیم.
همچنین نقاطی که در نامساوی $|z-a|\leq r$ صدق می کنند را یک گوی بسته به شعاع r حول a گوییم.
هر گوی باز به شعاع مثبت حول a را یک همسایگی a گوییم.

تعریف (مجموعهٔ باز) : مجموعهٔ S در صفحهٔ مختلط را باز گوییم، هرگاه به ازای هر نقطهٔ a از S، S شامل یک همسایگی a باشد.

مثال :

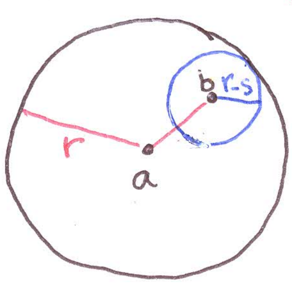


خط یک مجموعهٔ باز نیست. گوی باز به شعاع r حول یک نقطه مجموعهٔ باز است.
زیرا اگر نقطهٔ b را در گوی باز به شعاع r حول a در نظر بگیریم آنگاه $|b-a|<r$ است.
بنابراین نقاط گوی باز به شعاع $r-|b-a|>0$ حول b نیز در گوی باز به شعاع r قرار می گیرد.
(بخاطر نامساوی مثلث)

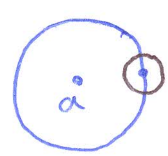
فرض کنید $b\in B_r(a)$ ، $|b-a|=s$ که $s<r$. ادعا می کنیم نقاط $B_{r-s}(b)$ در $B_r(a)$ قرار دارند. زیرا اگر $z\in B_{r-s}(b)$.

$$|z-a|\leq \underbrace{|z-b|}_{<r-s}+\underbrace{|b-a|}_{s}<r-s+s=r \Rightarrow z\in B_r(a)$$

مثال :



گوی بسته به شعاع r حول a که با $\overline{B_r(a)}$ نمایش می دهیم باز نیست.



تعریف (مجموعهٔ بسته) : مجموعهٔ S را بسته گوییم هرگاه مکمل آن باز باشد.

مثال : گوی بسته و خط مثال هایی از یک مجموعهٔ بسته هستند.

نکته : هر زیرمجموعهٔ صفحهٔ مختلط، لزوماً باز یا بسته نیست.

تعریف (مرز مجموعه) : نقاطی هستند که هر همسایگی آنها هم حوزِ مجموعه و هم مکمل مجموعه را قطع کند.

مثال: مرز یک خط عبارت است از خود خط. مرز $B_r(a)$ و $\overline{B_r(a)}$ عبارت است از دایره ای به شعاع r حول a.

تابع مختلط: f را یک تابع مختلط گوییم هرگاه f تابعی از $S \subseteq \mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ باشد.

$$f(z) = w \quad , \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$$f(x+iy) = u + iv$$

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

که u و v توابعی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ هستند.

مثال: تابع $f(z)=z^2$ تابعی تعریف شده در سراسر صفحهٔ مختلط است.

$$f(z) = z^2$$

$$f(x+iy) = (x^2-y^2) + i(2xy)$$

مثال: $f(z) = |z| + \bar{z}$

$$f(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2} + x - iy$$

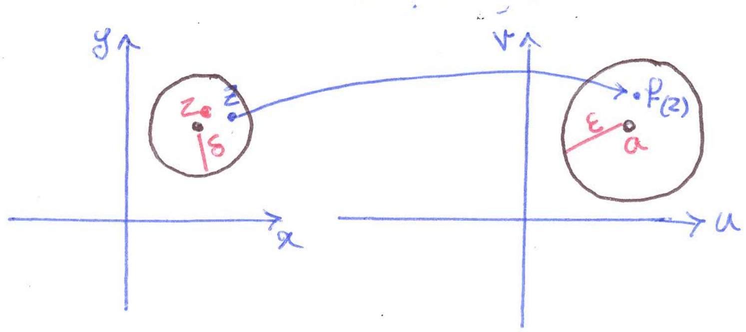
نکته: یک تابع می تواند چند مقداری باشد. مثلاً $f(z)=z^{\frac{1}{n}}$ $(n>1)$ یک تابع نیست.

تعریف (حد یک تابع مختلط):

اگر تابع f در یک همسایگی z_0 (به جز احتمالاً در خود z_0) تعریف شده باشد گوییم:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a$$

اگر برای نقاط به اندازهٔ کافی نزدیک به z_0، مقدار $f(z)$ نزدیک a باشد.



به طور دقیق:

$$\forall \varepsilon>0 \;,\; \exists \delta>0 \;\; \forall \;\; 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-a|<\varepsilon$$

تعریف (پیوستگی یک تابع مختلط):

تابع f را در z_0 پیوسته گوییم هرگاه f در یک همسایگی z_0 تعریف شده باشد و داشته باشیم:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

تعریف معادل پیوستگی : f در یک همسایگی z_0 تعریف شده باشد و به ازای هر دنباله $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ که $|z_n - z_0| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ داشته باشیم $|f(z_n)-f(z_0)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

دنبالهٔ z_n می تواند در هر امتدادی به z_0 میل کند.

تعریف (مشتق پذیری تابع مختلط) :

تابع f که در یک همسایگی z_0 تعریف شده است را در z_0 مشتق پذیر گوییم هرگاه حد زیر موجود باشد

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = l$$

در این شرایط l را مشتق f در z_0 گوییم و با $f'(z_0)$ نمایش می دهیم.

تابع f را روی مجموعهٔ باز U مشتق پذیر گوییم هرگاه در تمام نقاط U مشتق پذیر باشد.

نکته : مشتق پذیری و مقدار مشتق معادل وجود و مقدار حد زیر است :

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

مثال : تابع $f(z)=z^2$ مشتق پذیر است زیرا :

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z_0+\Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{z_0^2+\Delta z^2+2z_0\Delta z - z_0^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \Delta z + 2z_0 = 2z_0$$

به طور کلی z^n مشتق پذیر است و مشتق آن nz^{n-1} است.

مثال :

تابع $f(z)=\bar{z}$ مشتق پذیر نیست.

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\overline{z_0+\Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\bar{z}_0+\overline{\Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$ وجود ندارد

هم چنین می توان نشان داد

$f(z)=|z|^2$ و $f(z)=|z|$ نیز مشتق پذیر نیستند.

تعریف (تابع تحلیلی) : تابع f را روی مجموعهٔ باز U تحلیلی گوییم هرگاه تابع f روی U مشتق پذیر باشد.

مثال : تابع $f(z)=|z|^2$ در نقطهٔ $z_0=0$ مشتق پذیر است ولی تحلیلی نیست.

نکته : تمام چندجمله ای ها تحلیلی هستند، هم چنین تمام توابع گویا یعنی توابع $\frac{p(x)}{q(x)}$ که p و q دو

چندجمله‌ای نسبت به هم اول هستند نیز در تمام نقاط صفحه به جز در ریشه‌های q تحلیلی هستند.
(اگر تعداد متناهی نقطه را از صفحهٔ مختلط حذف کنیم مجموعهٔ حاصل یک مجموعهٔ باز است)

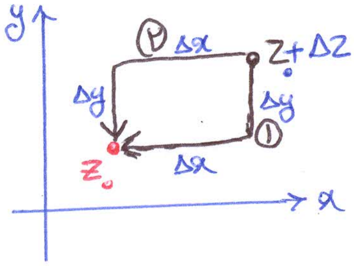
روابط کوشی - ریمان :

فرض کنید f در یک همسایگی نقطهٔ z_0 تعریف شده و پیوسته باشد و در نقطهٔ z_0 مشتق‌پذیر باشد

$$z_0 = x_0 + iy_0 \quad , \quad f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

بنا به تعریف حد در صفحهٔ مختلط، می‌توان Δz را از هر مسیر دلخواهی واقع در یک همسایگی z_0 به سمت صفر میل داد.
بنابراین دو مسیر مختلف ① و ② را انتخاب می‌کنیم و باید نتایج یکسانی بدست آوریم.



$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) + i\,v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \left(u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)\right)}{\Delta x + i\Delta y}$$

با انتخاب مسیر ① اول $\Delta y \to 0$ و سپس $\Delta x \to 0$. بعد از صفر شدن Δy داریم که $\Delta z = \Delta x$ بنابراین

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) + i\,v(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) - i\,v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$= u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0)$$

با انتخاب مسیر ② اول $\Delta x \to 0$ و سپس $\Delta y \to 0$. بعد از صفر شدن Δx، داریم $\Delta z = i\Delta y$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) + i\,v(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) - v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

بنابراین داریم : روابط کوشی - ریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$

وجود و پیوستگی مشتقات جزئی و صدق کردن آنها در روابط کوشی - ریمان معادل وجود مشتق است .

مثال : تابع $f(z) = z^2$ را درنظر بگیرید :

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x,y) = 2xy$$

$$u_x = 2x \quad , \quad u_y = -2y \quad , \quad v_x = 2y \quad , \quad v_y = 2x$$

همان طور که مشاهده می کنید توابع u و v در هر نقطهٔ دلخواه z دارای مشتق جزئی پیوسته هستند و در روابط کوشی - ریمان نیز صدق می کنند . بنابراین تابع f در هر نقطهٔ دلخواه z مشتق پذیر است □

مثال : تابع $f(z) = |z|^2$ را درنظر بگیرید :

$$f(x+iy) = (x+iy)\overline{(x+iy)} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2)$$

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \quad v(x,y) = 0$$

مشاهده می شود که مشتقات جزئی u و v در هر نقطهٔ دلخواه موجود و پیوسته اند

$$u_x = 2x \quad , \quad u_y = 2y \quad , \quad v_x = 0 \quad , \quad v_y = 0$$

با توجه به روابط کوشی - ریمان داریم : $2x = 0 \quad , \quad 2y = 0$

فقط در نقطهٔ $z_0 = (0,0)$ روابط کوشی - ریمان برقرار است

بنابراین تابع f فقط در نقطه $z = 0$ دارای مشتق است □

مثال : نشان دهید هرگاه $f(z)$ در دامنهٔ D تحلیلی و در D ، $|f(z)| = K =$ ثابت باشد آن گاه $f(z)$ در D ثابت است .

حل : $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$|f(z)| = \sqrt{u^2+v^2} = K$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 = K^2$$

نسبت به x مشتق گیری $\quad 2uu_x + 2vv_x = 0 \Rightarrow uu_x + vv_x = 0 \quad (1)$

مشتق گیری نسبت به y $\quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \Rightarrow uu_y + vv_y = 0 \quad (2)$

چون f در هر نقطهٔ D تحلیلی است پس در هر نقطهٔ D در روابط کوشی - ریمان صدق می کند

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

حال روابط کوشی-ریمان را در ① و ② جایگذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} uu_x - vu_y = 0 \\ uu_y + vu_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (u^2+v^2)u_x = 0 \quad , \quad (u^2+v^2)u_y = 0$$

اگر $u^2+v^2=0 \Leftarrow k=0$ ، $u=v=0$ بنابراین $f=0$.

اگر $k\neq 0$ یعنی $u^2+v^2\neq 0 \Leftarrow u_x = u_y = 0$

همین طور به طور مشابه بدست می‌آوریم $v_x = v_y = 0 \Leftarrow u$ و v توابع ثابت هستند.

نکته: روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad , \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

قضیه: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنهٔ D تحلیلی باشد، آن‌گاه u و v در D در معادلات لاپلاس

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

صدق کرده و دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در D می‌باشند.

اثبات) به عنوان تمرین به عهدهٔ دانشجو. راهنمایی: از روابط کوشی ریمان نسبت به x و y مشتق می‌گیریم.

تعریف (تابع همساز):

تابع $u(x,y)$ را همساز گوییم هرگاه تابعی پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باشد و در معادلات لاپلاس به فرم $u_{xx}+u_{yy}=0$ صدق کند.

نکته: قسمت‌های حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی، توابع همساز می‌باشند.

تعریف (مزدوج همساز):

فرض کنید $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ باشد. اگر $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد آن‌گاه v را مزدوج همساز u می‌نامیم.

مثال: نشان دهید که $u=x^2-y^2-y$ در تمام صفحهٔ مختلط همساز است و تابع همساز مزدوج v را بیابید:

حل:

$$u_{xx} = 2 \quad , \quad u_{yy} = -2 \Rightarrow \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

تابع u به ازای همهٔ نقاط صفحهٔ مختلط در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند.

از معادلات کوشی-ریمان برای محاسبهٔ v استفاده می‌کنیم:

$$u_x = 2x \quad , \quad u_y = -2y-1$$

$$v_y = 2x \quad , \quad v_x = 2y+1$$

$$v_y = 2x \xrightarrow{\int dy} v = 2xy + h(x)$$

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow v_x = 2y + \frac{dh}{dx} = 2y+1 \Rightarrow \frac{dh}{dx} = 1 \to h(x) = c \quad \Big\} \Rightarrow v = 2xy + x + c$$

عدد حقیقی ثابت

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) = z^2 + iz + ic$$

تمرین: نشان دهید که تابع حقیقی $u(x,y) = e^x \cos y + x^2 - y^2$ یک تابع همساز است و سپس همساز مزدوج آن را بیابید و $f(z) = u + iv$ را برحسب z بنویسید.

چند نمونه از توابع مختلط خاص و مقدماتی:

تابع مختلط $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

بنابراین

$$f(z) = e^z = u(x,y) + i v(x,y)$$

که

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

$$v(x,y) = e^x \sin y$$

تابع مختلط نمایی که به صورت بالا تعریف کردیم دارای خواص زیر است:

۱) اگر $z = x \in \mathbb{R}$، آن‌گاه رفتار e^z مانند رفتار تابع حقیقی e^x است.

۲) e^z تابعی تام است یعنی به ازای همهٔ مقادیر صفحهٔ مختلط، تحلیلی است.

۳)

$$(e^z)' = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

$$\Rightarrow (e^z)' = e^z$$

۴) اگر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ آن‌گاه

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

۵) به ازای $z = x + iy$:

$$|e^z| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y} = e^x$$

$$\Rightarrow |e^z| = e^x$$

$$\arg e^z = \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x \sin y}{e^x \cos y}\right) = y + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

۶) تابع e^z تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi i$ است یعنی

$$e^{z + 2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

۷) تابع e^z در هیچ نقطه‌ای صفر نیست. $e^z \neq 0$

۷ $\quad |e^z| = e^x > 0$

۸) نگاشت e^z نقاط روی محور موهومی را روی دایره‌ی واحد می‌نگارد:

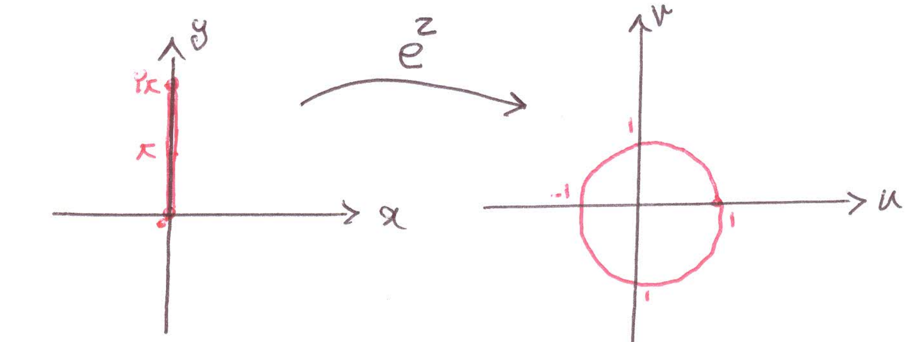
if $z=i\theta$

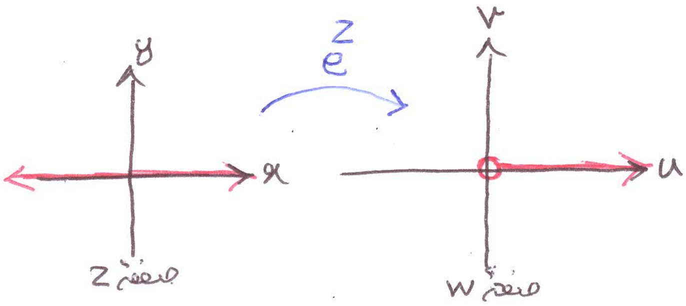
پس به وضوح تابع e^z، تابعی یک به یک نیست.

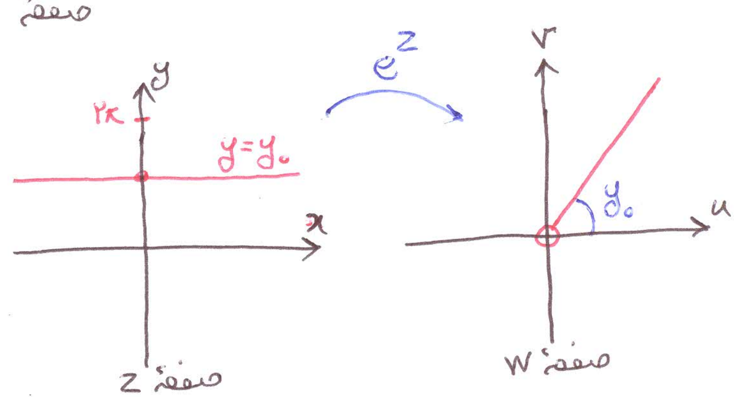
$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\Rightarrow |e^{i\theta}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

$$e^0=1,\quad e^{i\frac{\pi}{2}}=i,\quad e^{i\pi}=-1,\quad e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i,\quad e^{2\pi i}=1$$







اگر $y_0\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه خط $y=y_0$ توسط نگاشت e^z به یک نیم خط که با جهت مثبت محور u زاویه‌ی y_0 می‌سازد نگاشته می‌شود

$$z=x+iy_0$$

$$e^z=e^{x+iy_0}=\underbrace{e^x\cos y_0}_{u}+i\underbrace{e^x\sin y_0}_{v}\Rightarrow v=u\tan y_0$$

اگر $y_0=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$

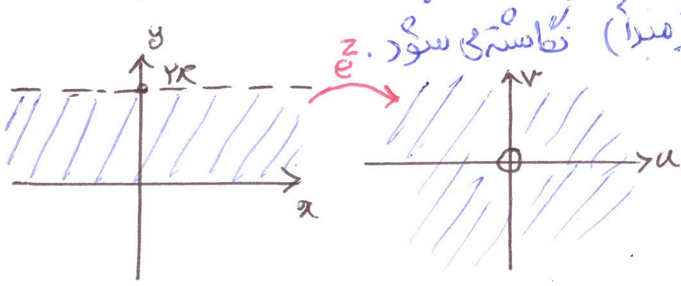
$$y_0=\frac{\pi}{2}\Rightarrow e^z=i\underbrace{e^x}_{v},\ u=0$$

جهت مثبت محور v ها

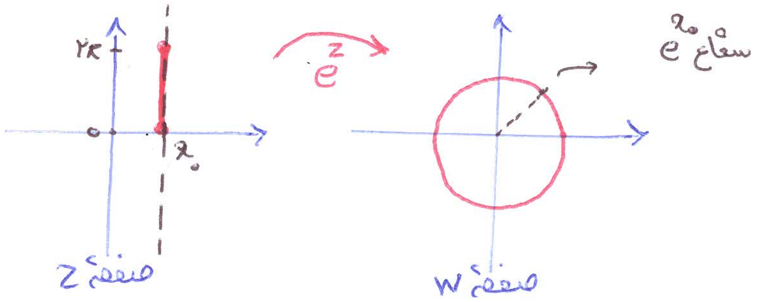
$$y_0=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow e^z=-ie^x\Rightarrow v=-e^x$$

نیمه‌ی منفی محور v ها

بنابراین قسمتی از صفحه z که در نوار $\{(x,y)\mid z=x+yi,\ 0<y<2\pi\}$ قرار دارد توسط نگاشت e^z به کل صفحه w (به جز مبدا) نگاشته می‌شود.



همچنین هر خط $x = x_0$ توسط نگاشت e^z به یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع e^{x_0} نگاشته می‌شود.



توابع مثلثاتی و هذلولوی:

می‌دانیم اگر $x \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی باشد:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \quad , \quad \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

توابع مثلثاتی مختلط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\cos z =: \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z =: \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

۱) از آن جا که تابع e^z یک تابع تام است لذا توابع $\sin z$ و $\cos z$ نیز توابعی تام می‌باشند.
(iz و e^z هر دو توابعی تام هستند و e^{iz} که ترکیب این دو تابع است تام می‌شود)

۲) مشتق توابع $\cos$ و $\sin$ نیز در روابط شناخته شده این توابع صدق می‌کند

$$(\cos z)' = -\sin z \quad , \quad (\sin z)' = \cos z$$

تعریف:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad , \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z}$$

توابع هذلولوی:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$(\sinh z)' = \cosh z \quad , \quad (\cosh z)' = \sinh z$$

قسمت حقیقی و مختلط توابع مثلثاتی:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \underbrace{\cos(iy)}_{\cosh y} - \sin x \underbrace{\sin(iy)}_{i \sinh y}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \underbrace{\cos(iy)}_{\cosh y} + \cos x \underbrace{\sin(iy)}_{i\sinh y}$$

$$\Rightarrow \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

مثال: معادلهٔ روبرو را حل کنید: $\cos z = ۴$

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} = ۴ \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = ۸ \xrightarrow{\times e^{iz}} e^{۲iz} - ۸e^{iz} + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow e^{iz} = \frac{۸ \pm \sqrt{۶۴-۴}}{۲} = ۴ \pm \sqrt{۱۵} \Rightarrow e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = ۴ \pm \sqrt{۱۵}$$

$$\Rightarrow e^{-y}(\cos x + i \sin x) = ۴ \pm \sqrt{۱۵} \Rightarrow e^{-y}\sin x = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰$$

$$x = k\pi$$

$$e^{-y}\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} = ۴ \pm \sqrt{۱۵} \xrightarrow{k\ \text{زوج}} y = -\ln(۴ \pm \sqrt{۱۵})$$

$$\Rightarrow z = ۲k\pi - i\ln(۴ \pm \sqrt{۱۵})$$ جواب های معادله

نکته: همانند توابع مثلثاتی حقیقی، توابع مثلثاتی مختلط نیز ۲π-متناوب هستند.
توابع هذلولوی مختلط نیز $۲\pi i$ متناوب هستند.

صفرهای توابع $\sin z$ و $\cos z$:

$$\sin z = ۰ \Rightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i} = ۰ \Rightarrow e^{۲iz} = ۱$$

$$e^{۲i(x+iy)} = e^{۲xi-۲y} = e^{-۲y}(\cos ۲x + i \sin ۲x) = ۱$$

$$\Rightarrow e^{-۲y}\cos ۲x = ۱$$

$$\underbrace{e^{-۲y}}_{\neq ۰}\sin ۲x = ۰ \Rightarrow x = k\frac{\pi}{۲}$$

$$e^{-۲y}\cos(۲\times k\tfrac{\pi}{۲}) = ۱ \Rightarrow e^{-۲y}(-1)^k = ۱ \xrightarrow{k\ \text{زوج}} e^{-۲y} = ۱ \Rightarrow y = ۰$$

بنابراین جواب ها به صورت $k = ۰, \pm۱, \dots$ $z = ۲k\pi$ می باشد.

حالا صفرهای تابع $\cos z$ را به دست می آوریم:

$$\cos z = ۰ \Rightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow e^{۲iz} = -۱ \Rightarrow e^{-۲y}(\cos ۲x + i \sin ۲x) = -۱$$

$$\begin{cases} e^{-2y}\cos 2x = -1 \Rightarrow e^{-2y}(-1)^k = -1 \xRightarrow{k \text{ فرد}} y = 0 \\ e^{-2y}\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \end{cases}$$

بنابراین جواب ها به صورت $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \ldots$ می باشد.

نکته: توابع مختلط $\sin z$ و $\cos z$ توابعی بی کران هستند.

بررسی ویژگی های تصویری تابع $\sin$ و $\cos$:

ابتدا تابع $\cos z$ را بررسی می کنیم:

از آن جا که $\cos z$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است پس کافی است تابع را فقط در یک دوره تناوب $-\pi < x \leq \pi$ بررسی کنیم:

می خواهیم ببینیم خط $x = a$ که $0 < a < \pi$ و $a \neq \frac{\pi}{2}$ است توسط نگاشت $\cos z$ به چه چیزی نگاشته می شود.

$$z = a + iy$$

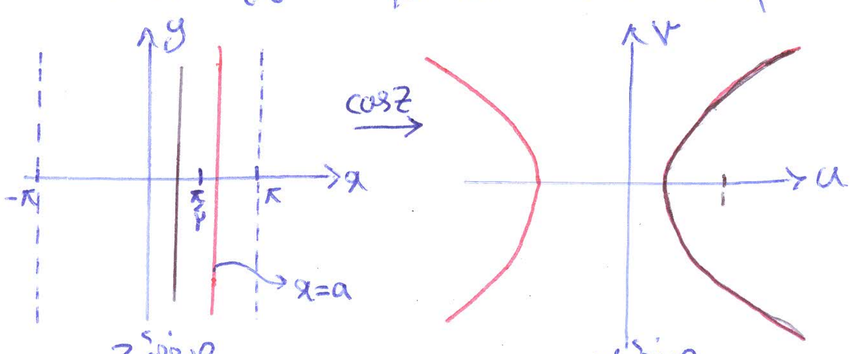
$$w = \cos z = \cos(a+iy) = \cos(a)\cosh y - i\sin(a)\sinh y$$

$$w = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u = \cos(a)\cosh y \\ v = -\sin(a)\sinh y \end{cases}$$

اگر $a \neq \frac{\pi}{2}, \pi, 0$ باشد آن گاه $\sin(a) \neq 0$ و $\cos(a) \neq 0$ است پس داریم:

$$\frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{(-\sin a)^2} = 1$$

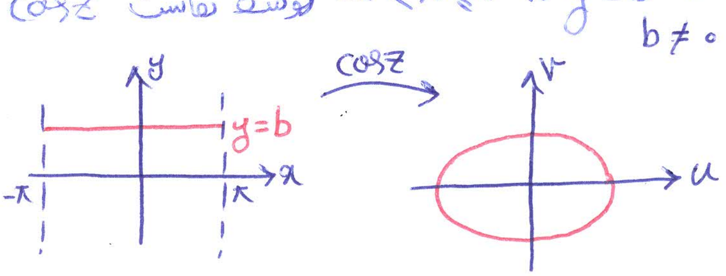
بنابراین نگاشت $\cos z$، خط $x = a$ را به یک نیمه هذلولی می نگارد. هرگاه $0 < a < \frac{\pi}{2}$ باشد، نیمه هذلولی در نیم صفحه راست و هرگاه $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ باشد نیمه هذلولی در نیم صفحه چپ قرار دارد.



اگر $a = \frac{\pi}{2}$ باشد آن گاه نگاشت $\cos z$، خط $x = \frac{\pi}{2}$ را به محور v می نگارد.

از طرف دیگر خط $y = b$ که $b \neq 0$، $-\pi < x \leq \pi$ توسط نگاشت $\cos z$ به یک بیضی نگاشته می شود.

$$\frac{u^2}{(\cosh b)^2} + \frac{v^2}{(-\sinh b)^2} = 1$$



تابع لگاریتم :

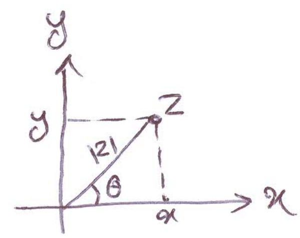
می‌خواهیم تابع $\ln z$ را به صورت وارون تابع e^z تعریف کنیم یعنی به ازای هر $z\neq 0$ ، $w=\ln z$ از رابطه‌ی $e^w=z$ بدست آید.

$$e^w=z=x+iy$$

$$w=u+iv \Rightarrow e^{u+iv}=x+iy \Rightarrow \begin{cases} x=e^u\cos v \\ y=e^u\sin v \end{cases}$$

$$e^{2u}(\underbrace{\cos^2 v+\sin^2 v}_{1})=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow u=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\ln(|z|)$$



$$x=e^u\cos v \Rightarrow \cos v=\frac{x}{e^u}=\frac{x}{|z|}$$

$$y=e^u\sin v \Rightarrow \sin v=\frac{y}{e^u}=\frac{y}{|z|}$$

$$\Rightarrow v=\arg z$$

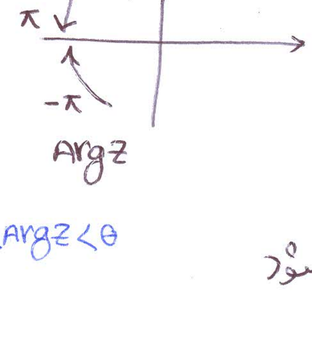
$$\ln z=\ln(|z|)+i\arg z$$

شاخه‌ی اصلی Ln : $\mathrm{Ln}(z)=\ln(|z|)+i\,\mathrm{Arg}\,z$

که $-\pi<\mathrm{Arg}(z)\le\pi$

نکته : $\mathrm{Ln}(z)$ تابعی تام نیست. ($\mathrm{Ln}(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است)

حتی اگر از $z=0$ نیز بگذریم باز $\mathrm{Ln}\,z$ تابعی مشتق‌پذیر در $\mathbb{C}-\{0\}$ نیست زیرا $\mathrm{Arg}(z)$ روی قسمت منفی محور حقیقی ناپیوسته است.



$\mathrm{Ln}\,z$ تابعی مشتق‌پذیر روی $\mathbb{C}-\{\mathbb{R}\le 0\}$ می‌باشد.

توان‌های عمومی :

$-2\pi+\theta<\mathrm{Arg}z<\theta$

توان‌های عمومی عدد مختلط $z=x+iy$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$z^c=e^{c\ln z} \quad (c \text{ مختلط و } z\neq 0)$$

نکته: $\ln z = \mathrm{Ln}\, z \pm 2\pi n i \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

قسمت های حقیقی $\ln z$ و $\mathrm{Ln}\, z$ یکسان هستند ولی قسمت های موهومی آنها به اندازهٔ مضارب 2π تفاوت دارند.

اگر z حقیقی و مثبت باشد $\Leftarrow$ $\mathrm{Arg}\, z = 0$ و $\mathrm{Ln}\, z$ با لگاریتم طبیعی حقیقی یکی می‌شود.

اگر z حقیقی و منفی باشد $\Leftarrow$ $\mathrm{Arg}\, z = \pi$ $\Leftarrow$

$$\mathrm{Ln}\, z = \underbrace{\ln}_{\text{لگاریتم طبیعی}} |z| + \pi i$$

درحالی که می دانیم تابع لگاریتم طبیعی برای اعداد حقیقی منفی تعریف نشده است.

نکته: روابطی که برای تابع لگاریتم طبیعی برقرار بود برای تابع لگاریتم مختلط نیز برقرار است (نه لزوماً برای شاخهٔ اصلی لگاریتم):

1) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

2) $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$

به این صورت که هر مقدار از یک طرف با یکی از مقادیر سمت دیگر برابر است.

(هر دو طرف رابطه دارای تعداد نامتناهی مقدار هستند)

مثال: رابطهٔ (1) در بالا را برای شاخهٔ اصلی لگاریتم $\mathrm{Ln}\, z$ و مقادیر $z_1 = z_2 = -1$ تحقیق کنید:

$$z_1 = -1 \xrightarrow{\text{قطبی}} z_1 = e^{i\pi}, \quad |z_1| = 1, \quad \mathrm{Arg}(z_1) = \pi$$

$$z_2 = -1 \Rightarrow z_2 = e^{i\pi}, \quad |z_2| = 1, \quad \mathrm{Arg}(z_2) = \pi$$

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) \overset{?}{=} \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$$

$$\mathrm{Ln}(z_1) = \ln|z_1| + i\,\mathrm{Arg}(z_1) = i\pi$$

$$\mathrm{Ln}(z_2) = i\pi$$

$$z_1 z_2 = (-1)(-1) = 1 \xrightarrow{\text{قطبی}} z_1 z_2 = 1 e^{0i} = 1 \longrightarrow |z_1 z_2| = 1, \ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = 0$$

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\,\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \ln(1) + i \times 0 = 0$$

$$0 = \mathrm{Ln}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2) = 2\pi i$$

نکته: می دانیم اگر r عددی حقیقی باشد آن گاه $e^{\ln r} = r$، حال بررسی می کنیم که آیا برای عدد مختلط z (که $z \neq 0$) نیز رابطهٔ مشابهی برقرار است:

$$\text{if } z = re^{i\theta} \Rightarrow \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{\ln z} = e^{\ln r + i(\theta + 2k\pi)} = e^{\ln r}\Big(\underbrace{\cos(\theta + 2k\pi)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\sin(\theta + 2k\pi)}_{\sin\theta}\Big) = e^{\ln r + i\theta} = re^{i\theta} = z$$

نکته: می دانیم اگر r عددی حقیقی باشد آنگاه $\ln e^r = r$. حال بررسی می کنیم که آیا برای عدد مختلط z نیز رابطه مشابه ای داریم:

$$z = x+iy$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow |e^z| = e^x \,,\quad \operatorname{Arg}(e^z) = y$$

$$\arg(e^z) = y \pm 2n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\ln e^z = \ln|e^z| + i\arg(e^z) = \ln e^x + i(y \pm 2n\pi)$$

$$= \underbrace{x+iy}_{z} \pm 2n\pi i = z \pm 2n\pi i$$

$$\Rightarrow \ln e^z = z \pm 2n\pi i$$

نکته: $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ (به شرطی که z عدد حقیقی منفی و صفر نباشد).

اثبات: می دانیم که اگر $f(z) = u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

$$\ln z = \underbrace{\ln|z|}_{u} + i\underbrace{\arg(z)}_{v}$$

$$u = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$v = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2n\pi$$

$$u_x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+y^2} \times 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$(\ln z)' = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}\,.$$

توانهای عمومی:

توانهای عمومی عدد مختلط $z = x+iy$ با فرمول زیر تعریف می شود

$$z^c =: e^{c\ln z}$$

(c عدد مختلط و $z \neq 0$)

چون $\ln z$ چند مقداری است پس z^c در حالت کلی چند مقداری خواهد بود.

مقدار خاص $e^{c\operatorname{Ln} z}$ را مقدار اصلی z^c می نامند.

به عنوان مثال قبلاً دیده ایم که اگر $c = \frac{1}{n}$ (n عدد طبیعی) آنگاه $z^{\frac{1}{n}}$، n مقدار خواهد بود.

مثال: مقدار i^i را محاسبه کنید:

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

برای این مثال، همهٔ مقادیر به دست آمده حقیقی هستند و $e^{-\frac{\pi}{2}}$ مقدار اصلی است.

مثال:

$$(1+i)^{2-i} = e^{(2-i)\ln(1+i)} = e^{(2-i)(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i \pm 2n\pi i)}$$

$$= e^{2\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi}\left(\underbrace{\cos(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\pm 4n\pi)}_{-\sin(-\ln\sqrt{2})} + i\,\underbrace{\sin(-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}\pm 4n\pi)}_{\cos(-\ln\sqrt{2})}\right)$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi}\left(\sin(\tfrac{1}{2}\ln 2) + i\cos(\tfrac{1}{2}\ln 2)\right)$$

نگاشت $w = az+b$:

اگر $a=1$ باشد نگاشت $w=z+b$ یک انتقال است. (b عددی مختلط است)

اگر $b=0$ باشد نگاشت $w=az$ را در نظر بگیرید (a عددی مختلط است)

اگر $|a|=1$ و $a=e^{i\theta}$ آنگاه این نگاشت هر نقطه از صفحه را به اندازهٔ زاویهٔ θ دوران می‌دهد. اگر $|a|>1$ باشد آنگاه نگاشت $w=az$ هر نقطه را با ضریب $|a|$ منبسط و سپس به اندازهٔ θ دوران می‌دهد.

اگر $|a|<1$، نگاشت $w=az$ هر نقطه را با ضریب $|a|$ منقبض می‌کند و سپس به اندازهٔ θ دوران می‌دهد.

بنابراین نگاشت $w=az+b$ ترکیبی از دوران، انبساط (یا انقباض) و سپس انتقال است.

مثال: تصویر ناحیهٔ $D=\{(r,\theta) \mid 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$ را تحت نگاشت $w=(1+i)z+2i$ بیابید:

حل:

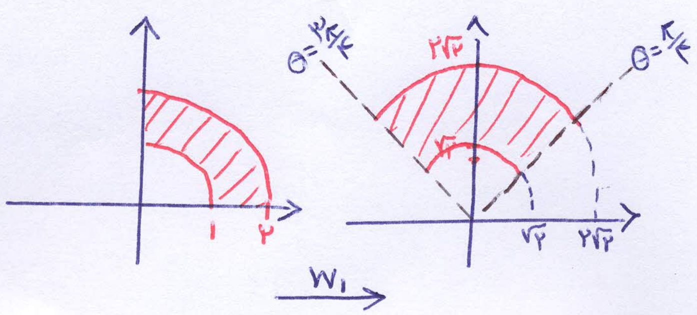
$$w = \underbrace{(1+i)z}_{\text{دوران}} + \underbrace{2i}_{\text{انتقال}}$$

$a = 1+i \Rightarrow a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad z\in D \Rightarrow 1\le r\le 2$

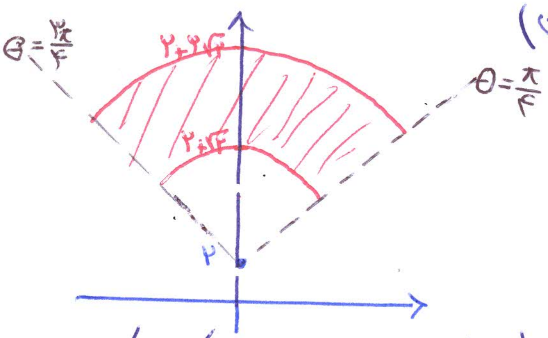
$$\sqrt{2} \le \sqrt{2}r \le 2\sqrt{2}$$

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0+\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$$

$$w_1 = (1+i)z$$



و حالا انتقال به اندازه‌ی $2i$ (به اندازه‌ی دو واحد در جهت مثبت محور موهومی)



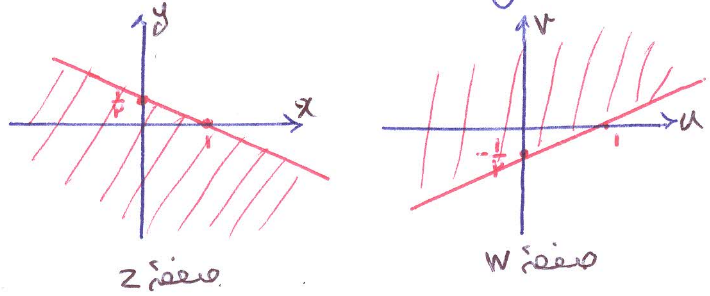
نگاشت مزدوج : $w=\bar{z}$

این نگاشت با ضابطه‌ی $w=\bar{z}=x-iy$ هر نقطه از صفحه‌ی مختلط را نسبت به محور حقیقی منعکس می‌کند.

مثال: تصویر ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\mid x+2y\leq 1\}$ را تحت نگاشت $w=\bar{z}$ بیابید:

حل:

$$w=\bar{z}=x-iy \Rightarrow \begin{array}{l} u=x \\ v=-y \end{array} \qquad x+2y\leq 1 \Rightarrow u-2v\leq 1$$



نگاشت توانی : $w=z^n$

$$f(z)=z^n=:e^{n\ln z}$$

نکته: تابع توانی $f(z)=z^n$ که به صورت تعریف می‌شود که یک تابع یک مقداری است

$$\text{if } z=re^{i\theta} \Rightarrow w=z^n=(re^{i\theta})^n=r^n e^{in\theta}$$

$$\Rightarrow |w|=r^n, \quad Arg(w)=n\theta$$

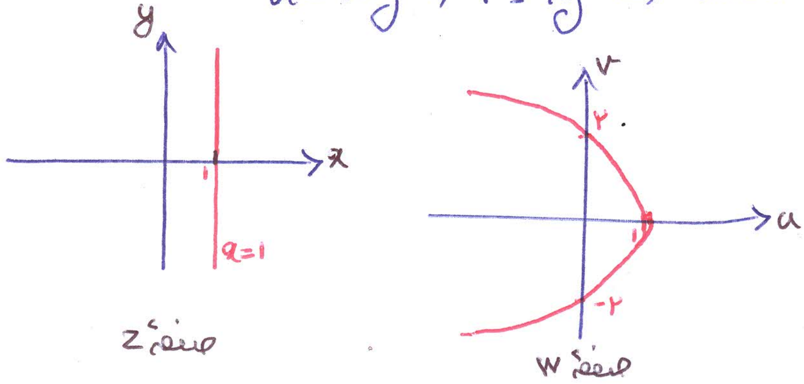
این نگاشت فاصله‌ی هر نقطه از مبدأ را به توان n می‌رساند و زاویه‌ای که آن نقطه با جهت مثبت محور حقیقی دارد را n برابر می‌کند.

مثال: خط $x=1$ توسط نگاشت $w=z^2$ به چه چیزی نگاشته می‌شود:

حل: نقاط روی خط $x=1$ دارای نمایش مختلط $z=1+iy$ می‌باشند:

$$w=z^2=(1+iy)^2=(1-y^2)+2yi$$

$$u=1-y^2, \quad v=2y \Rightarrow u=1-\frac{v^2}{4}$$ سهمی افقی



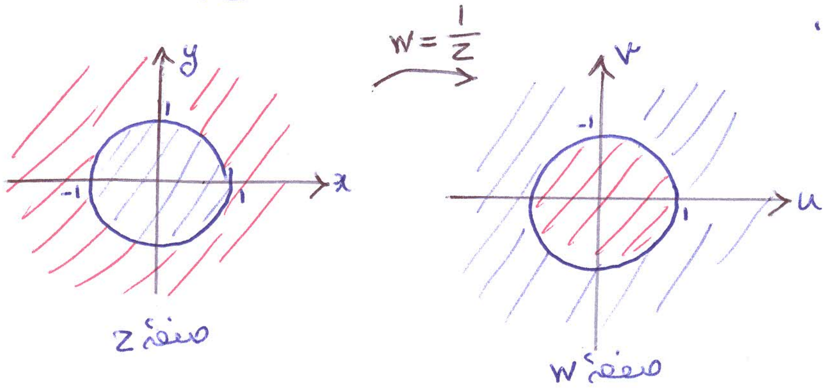
نگاشت معکوس : $w = \frac{1}{z}$

این نگاشت دایرهٔ واحد را به دایرهٔ واحدی نگارد و نقاط خارج دایرهٔ واحد را به درون دایرهٔ واحد ، نقاط درون دایرهٔ واحد را به خارج دایرهٔ واحدی نگارد .

$z = re^{i\theta}$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

قدر مطلق هر عدد را معکوس می کند (تجانس) و آرگومان هر نقطه را قرینه می کند .



نگاشت $w = \frac{1}{z}$

۱) دایره ای در صفحهٔ z که از مبدأ نمی گذرد را به دایره ای در صفحهٔ w می نگارد که از مبدأ نمی گذرد .

۲) دایره ای در صفحهٔ z که از مبدأ می گذرد را به خطی در صفحهٔ w می نگارد که از مبدأ نمی گذرد .

۳) خطی در صفحهٔ z که از مبدأ عبور نمی کند را به دایره ای در صفحهٔ w می نگارد که از مبدأ می گذرد .

۴) خطی در صفحهٔ z که از مبدأ عبور می کند را به خطی در صفحهٔ w می نگارد که از مبدأ می گذرد.

نگاشت موبیوس : $w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc\neq 0)$.

که a, b, c, d اعداد مختلط ثابتی هستند .

اگر $c=0$ باشد آنگاه طبق شرط $ad\neq 0$ ، نگاشت موبیوس به نگاشت خطی غیر ثابت $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ تبدیل می شود .

اگر $a=d=0$ و $b=c=1$ آنگاه نگاشت معکوس $w = \frac{1}{z}$ را داریم .

با فرض اینکه $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ ، در حالت کلی داریم :

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

بنابراین تبدیل خطی موبیوس ترکیبی از نگاشت های زیر است :

$$w_1 = cz+d \ , \ w_2 = \frac{1}{w_1} \ , \ w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot w_2$$

مثال : تصویر ناحیه‌ی $y \geq 2$ را تحت نگاشت $w = \frac{-2}{z-i}$ بیابید :

حل :

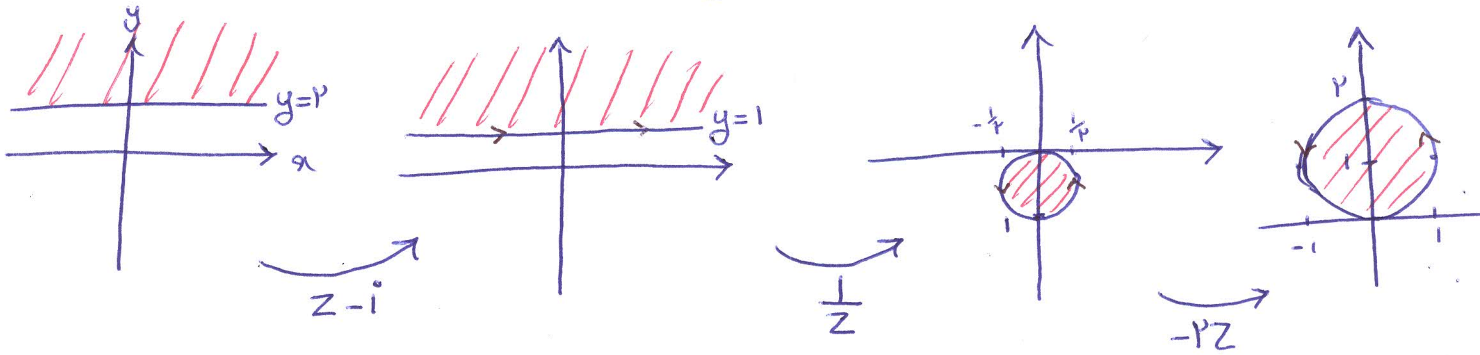
انتقال $\quad w_1 = z - i$

معکوس $\quad w_2 = \frac{-2}{w_1}$

$D = \{ z = x+iy \mid y \geq 2 \}$ این نقاط توسط نگاشت $w_1 = z - i$ به مجموعه‌ی

$D' = \{ z = x+iy \mid y \geq 1 \}$ نگاشته می‌شود یعنی نقاط در جهت منفی محور y ها به اندازه‌ی یک واحد جابجا می‌شوند.

حالا ببینیم مجموعه‌ی D' توسط نگاشت $w = \frac{-2}{z}$ به چه چیزی نگاشته می‌شود.



قضیه سه نقطه و سه تصویر :

فرض کنید سه نقطه‌ی متمایز z_3 ، z_2 ، z_1 در صفحه‌ی مختلط وسعت یافته Z و سه نقطه‌ی متمایز w_3 ، w_2 ، w_1 در صفحه‌ی مختلط وسعت یافته W داده شده باشند. در این صورت نگاشت موبیوس منحصربفردی مانند T وجود دارد که

$$T(z_1) = w_1 \;,\; T(z_2) = w_2 \;,\; T(z_3) = w_3$$

و نگاشت منحصربفرد $T(z) = w$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود :

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

(اگر یکی از نقاط نقطه‌ی ∞ باشد، نسبت (و تفاضلی) که شامل این نقطه هستند باید برابر 1 فرض شود)

مثال : نگاشت موبیوسی بیابید که نقاط 0 و ∞ و i را به نقاط -1 ، $+1$ ، 0 بنگارد.

$z_1 \; z_2 \; z_3$ ، $w_1 \; w_2 \; w_3$

حل :

$$\frac{w - 0}{w + 1} \cdot \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = \frac{z - i}{z - 0} \cdot \underbrace{\frac{\infty - 0}{\infty - i}}_{1} \Rightarrow \frac{2w}{w+1} = \frac{z - i}{z}$$

$$2wz = (w+1)(z-i) \Rightarrow w(2z - z + i) = z - i \Rightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$$

مثال: نگاشتی موبیوس را بیابید به طوری که $z_1=-1$ ، $z_2=0$ ، $z_3=1$ را به ترتیب به روی $w_1=-1$ ، $w_2=-i$ ، $w_3=1$ بنگارد.

حل:

$$\frac{w+1}{w-1}\cdot\frac{-i-1}{-i+1}=\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{0-1}{0+1}\Rightarrow w=\frac{z-i}{-iz+1}$$

این نگاشت محور xها را روی دایرهٔ واحد می‌نگارد.

$$z=x+i\times 0\Rightarrow w=\frac{x-i}{-ix+1}\times\frac{1+xi}{1+xi}=\frac{2x+i(x^2-1)}{1+x^2}$$

$$u=\frac{2x}{1+x^2}\quad,\quad v=\frac{x^2-1}{1+x^2}$$

$$|w|^2=u^2+v^2=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)^2=\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{(1+x^2)^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}=$$

$$\Rightarrow |w|=1$$

نقطهٔ $z=i$ به $w=0$ می‌رود بنابراین نقاط بالای محور حقیقی (نیم صفحهٔ بالایی $y>0$) به داخل دایرهٔ واحد نگاشته می‌شود و نقاط نیم صفحهٔ پایینی ($y<0$) به خارج دایرهٔ واحد برده می‌شود.

تعریف (نگاشت همدیس):

نگاشت همدیس، نگاشتی است که اندازه و جهت زوایای بین منحنی‌ها تحت این نگاشت بدون تغییر باقی می‌ماند.

قضیه (نگاشت همدیس):

اگر تابع f در نقطهٔ z_0 تحلیلی باشد آن‌گاه نگاشت $w=f(z)$ در نقطهٔ z_0 همدیس است اگر $f'(z_0)\neq 0$.

(نگاشت f در نقطهٔ z_0 همدیس است به این معنی است که هر زاویه با رأس z_0 را بدون آنکه اندازه یا جهت آن را عوض کند به صفحهٔ w منتقل می‌کند.)

نکته: نگاشت‌های $w=z+b$ ، $w=az+b$ روی کل صفحهٔ مختلط همدیس هستند.

نگاشت $w=z^2$ در کل صفحه به جز $z=0$ که مشتق تابع در آن صفر است همدیس می‌باشد.

نگاشت $w=e^z$ همه جا همدیس است.

نگاشت $w=\sin z$ در نقاط $z=\pm\frac{\pi}{2}$ همدیس نیست.

نگاشت موبیوس $w=\frac{az+b}{cz+d}$ روی کل صفحه به جز $z=\frac{-d}{c}$ همدیس است.

تمرین: همدیسی را برای نگاشت‌های $\bar{z}$ ، $\cos z$ ، $\tan z$ ، $\sinh z$ ، $\cosh z$ ، $\ln z$ ، $\frac{1}{z}$ بررسی کنید.

انتگرال گیری از توابع مختلط :

تعریف (خم یا منحنی در صفحه‌ی مختلط) :

منظور از خم یا منحنی C در صفحه‌ی مختلط تابعی $[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$: با ضابطه‌ی

$$z(t)=x(t)+iy(t) \qquad a\leq t\leq b$$

می‌باشد.

حال فرض کنید $w=f(z)$ تابعی پیوسته باشد که روی منحنی C تعریف شده باشد.

فاصله‌ی $a\leq t\leq b$ را به n زیربازه تقسیم می‌کنیم : $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$

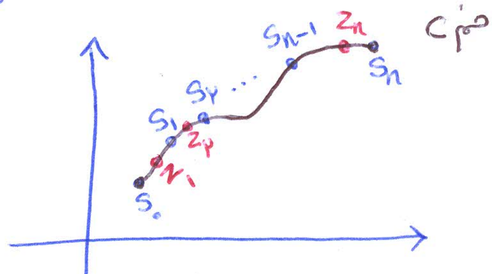
حال $s_0=z(t_0)$ ، $s_1=z(t_1)$ ، ... ، $s_n=z(t_n)$

به وضوح این نقاط روی خم C قرار دارند و خم C را به n قطعه تقسیم می‌کنند :

حال نقطه‌ی z_i را روی قسمتی از خم که بین s_{i-1} و s_i قرار دارد انتخاب کنید :

$z_1, z_2, \dots, z_n$

$$\Delta z_k =: z_k - z_{k-1}$$



صفحه مختلط

آنگاه حد زیر در صورت وجود، انتگرال تابع $f(z)$ روی خم C نامیده می‌شود و با نماد $\int_C f(z)dz$ نمایش داده می‌شود :

$$\int_C f(z)dz=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k$$

با فرض اینکه $f(z)=u+iv$ و $f(z_k)=u_k+iv_k$ ، $\Delta z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k$ داریم :

$$\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k=\lim_{\max \Delta x_k,\Delta y_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u_k+iv_k)(\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\lim\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k)+i(v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k)$$

بنابراین :

$$=\int_C u\,dx-\int_C v\,dy+i\int_C v\,dx+i\int_C u\,dy$$

$$dx = x'dt \quad , \quad dy = y'dt$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_a^b u x' dt - \int_a^b v y' dt + i\int_a^b v x' dt + i\int_a^b u y' dt$$

$$= \int_a^b (u+iv)(x'+iy')dt = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt \,.$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt \quad *$$

استفاده از فرمول * برای محاسبهٔ انتگرال مختلط یکی از روش های انتگرال گیری است که به پرمایش معروف است .

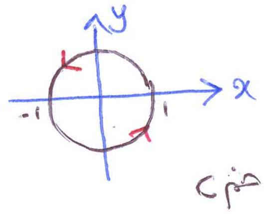
مثال : انتگرال تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ روی دایرهٔ واحد را محاسبه کنید :

حل : چون تابع $\frac{1}{z}$ روی این مسیر پیوسته است لذا می‌توانیم از روش پرمایش استفاده کنیم :

چون خم C بسته است (یعنی نقطهٔ ابتدا و انتهای مسیر یکسان است) از نماد $\oint_C f(z)dz$ استفاده می‌کنیم . جهت خم در محاسبهٔ انتگرال دارای اهمیت بسیار زیادی است . در اینجا جهت پیمایش خم در جهت مثلثاتی می‌باشد .

دایرهٔ واحد را می‌توان به صورت پارامتری زیر نمایش داد :

$$z(t) = \cos t + i\sin t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$



$$z'(t) = -\sin t + i\cos t$$

$$f(z(t)) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{\cos t + i\sin t}$$

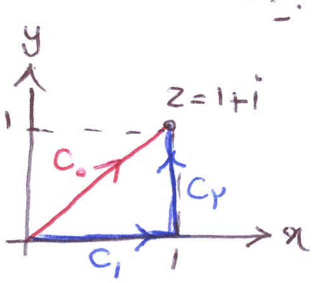
$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i\sin t}(-\sin t + i\cos t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i\cos t}{\cos t + i\sin t} \times \frac{\cos t - i\sin t}{\cos t - i\sin t} dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = i(2\pi - 0) = \boxed{2\pi i}$$

مثال : انتگرال تابع $f(z)=\operatorname{Re} z$ از 0 تا $1+i$ را برای مسیرهای زیر بیابید :

الف) در طول مسیر C_0

ب) در طول مسیر C که از مسیرهای C_1 و C_2 تشکیل شده است .



حل : الف) مسیر C_0 را به صورت زیر نمایش می‌دهیم: $z(t)=t+it \quad 0\leqslant t\leqslant 1$

$$f(z(t)) = Re(z(t)) = t \quad , \quad z'(t) = 1+i$$

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_0} Re(z)dz = \int_0^1 t(1+i)dt = (1+i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}(1+i)}$$

ب)

$$C_1 : \; z(t)=t \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

روی مسیر C_1 $\quad f(z(t)) = Re(z(t)) = t \quad , \quad z'(t)=1$

$$C_2 : \; z(t) = 1+it \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

روی مسیر C_2 $\quad f(z(t)) = Re(z(t)) = 1 \quad , \quad z'(t) = i$

$$\int_C Re(z)dz = \int_{C_1} Re(z)dz + \int_{C_2} Re(z)dz = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 i\,dt = \boxed{\frac{1}{2}+i}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید مقدار انتگرال از روی دو مسیر مختلف، یکسان نیست.
(به این نکته توجه کنید که در این مثال تابع f غیرتحلیلی است)

خواص انتگرال مختلط:

۱- خطی بودن: f_1 و f_2 دو تابع مختلط پیوسته و k_1 و k_2 اعداد مختلط ثابت

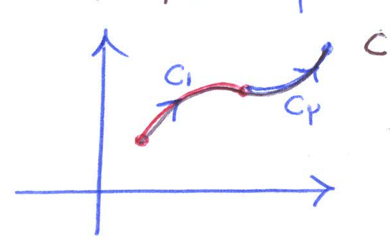
$$\int_C (k_1f_1+k_2f_2)(z)dz = k_1\int_C f_1(z)dz + k_2\int_C f_2(z)dz$$

۲- پیمایش وارون: فرض کنید z_0 و z_1 نقاط ابتدایی و انتهایی خم باشند:
اگر جهت انتگرال‌گیری (جهت پیمایش خم) را عوض کنیم، مقدار انتگرال در یک منفی ضرب می‌شود:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = -\int_{z_1}^{z_0} f(z)dz$$

۳- افراز خم: اگر خم C به دو قسمت C_1 و C_2 تجزیه شود، آن‌گاه داریم:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$



نکته بسیار مهم: انتگرال روی خط مختلط نه فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر، بلکه عموماً به خود مسیر و جهت مسیر نیز وابسته است.

تعریف (ناحیه همبند ساده):
مجموعه D را همبند ساده گوییم هرگاه هر خم بسته ساده (یعنی خم بسته ای که خودش را قطع نکند) کاملاً درون D قرار بگیرد.

روش دوم انتگرال گیری: (انتگرال گیری نامعین توابع تحلیلی):

قضیه: هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه تابع تحلیلی ای مانند $F(z)$ وجود دارد به طوری که

$$\forall z\in D : \quad F'(z)=f(z)$$

بنابراین به ازای هر مسیر در D که دو نقطه z_0 و z_1 از D را به هم وصل می کند داریم:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1)-F(z_0)$$

«انتگرال تابع تحلیلی تنها به نقاط ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و مستقل از مسیر است»

«همبند ساده بودن دامنه در قضیه فوق ضروری است»

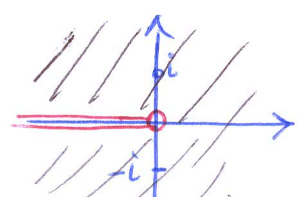
مثال:

$$1)\ \int_0^{1+i} z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$2)\ \int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\,dz = \sin z\Big|_{-\pi i}^{\pi i} = 2\sin(\pi i) = 2\left(\sin(0)\cosh(\pi)+i\cos(0)\sinh(\pi)\right) = 2i\sinh(\pi)$$

$$3)\ \int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{z/2}\,dz = 2e^{z/2}\Big|_{8+\pi i}^{8-3\pi i} = 2\left(e^{4-\frac{3\pi}{2}i}-e^{4+\frac{\pi}{2}i}\right)=0$$

$$4)\ \int_{-i}^{i}\frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z\Big|_{-i}^{i} = \operatorname{Ln}(i)-\operatorname{Ln}(-i) = \frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{2}i = \pi i$$



نامساوی ML (کرانی برای قدر مطلق انتگرال ها):

فرض کنید تابع مختلط f به ازای تمام نقاط z روی خم C کراندار باشد یعنی

$$\forall z\in C : \quad |f(z)|\leq M \qquad (M\geq 0)$$

آنگاه

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML$$

که L طول خم C است.

قضیهٔ کوشی - گورسا :

هرگاه $f(z)$ بر ناحیهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، آن‌گاه به ازای هر مسیر بستهٔ سادهٔ C واقع در D

$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

مثال : برای هر مسیر بستهٔ C داریم :

$$\oint_C e^z\,dz=0 \quad , \quad \oint_C \cos z\,dz=0 \quad , \quad \oint_C z^n\,dz=0 \quad n=0,1,2,\dots$$

مثال : فرض کنید C دایرهٔ واحد باشد :

$$\oint_C \sec z\,dz=0 \quad , \quad \oint_C \frac{dz}{z^2+4}=0$$

تابع $\sec z=\frac{1}{\cos z}$ در نقاط $z=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$ تحلیلی نیست اما همهٔ این نقاط خارج دایرهٔ واحد قرار دارند.

تابع $\frac{1}{z^2+4}$ در نقاط $z=\pm 2i$ تحلیلی نیست امّا هر دو این نقاط خارج دایرهٔ واحد قرار دارند.

مثال : فرض کنید C دایرهٔ واحد و جهت مثلثاتی روی دایرهٔ واحد مسیر انتگرال‌گیری باشد.

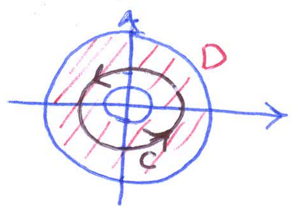
$$\oint_C \bar{z}\,dz=2\pi i$$

چون $\bar{z}$ تابعی غیرتحلیلی است.

مثال : فرض کنید $D=\{z : \frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}\}$ باشد تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ روی ناحیهٔ همبند D تحلیلی است اما

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz=2\pi i$$

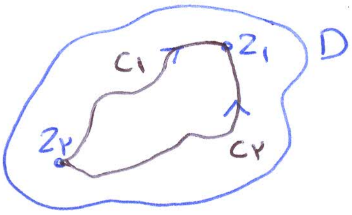
که C دایرهٔ واحد و در جهت مثلثاتی است.

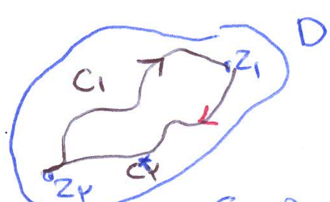


دلیل برقرار نبودن قضیهٔ کوشی - گورسا، این است که ناحیهٔ D، همبند ساده نیست.

استقلال از مسیر :

هرگاه $f(z)$ در دامنهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، آن‌گاه انتگرال $f(z)$ مستقل از مسیر در D است.





حل : در اینجا $C_1 \cup C_2^*$ یک خم بسته است.

$$\oint_{C_1\cup C_2^*} f(z)\,dz=0$$

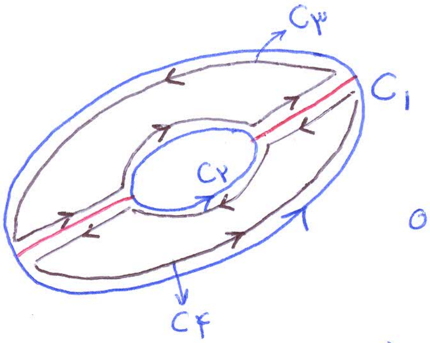
$$\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2^*} f(z)\,dz=0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz-\int_{C_2} f(z)\,dz=0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z)=\int_{C_2} f(z)$$

قضیهٔ کوشی برای نواحی همبند چندگانه :

اگر C_1 و C_2 دو خم بستهٔ ساده باشند که C_2 درون C_1 قرار دارد و تابع f در یک ناحیهٔ باز D که شامل خم‌های C_1 و C_2 و ناحیهٔ بین C_1 و C_2 است تحلیلی باشد (ناحیهٔ درون C_2 لزوماً متعلق به D نمی‌باشد) آن‌گاه

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

(با فرض اینکه C_1 و C_2 در یک جهت پیمایش شده باشند)

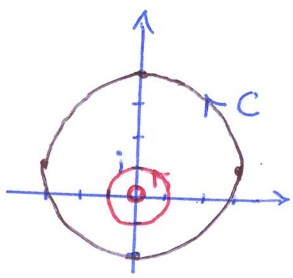


$$\oint_{C_3} f(z)=0 \quad , \quad \oint_{C_4} f(z)dz=0$$

$$0=\oint_{C_3} f(z)dz+\oint_{C_4} f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)-\oint_{C_2} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz$$

مثال : انتگرال تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ را روی منحنی C که $|z-i|=3$ و در جهت مثلثاتی است را محاسبه کنید :



حل : می‌دانیم تابع $\frac{1}{z}$ روی کل صفحهٔ مختلط به جز نقطهٔ $z=0$ تحلیلی است اگر C^* را دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ در نظر بگیریم آن‌گاه طبق قضیهٔ بالا

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = \oint_{C^*}\frac{1}{z}dz = 2\pi i$$

قضیه (فرمول انتگرال کوشی) :

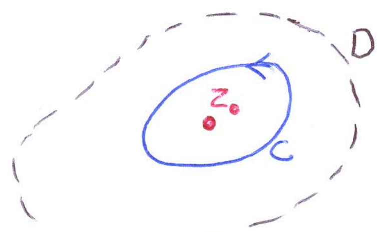
فرض کنید $f(z)$ در یک ناحیهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد و $z_0\in D$ باشد آن‌گاه به ازای هر مسیر بستهٔ سادهٔ C واقع در D که z_0 در درون آن قرار دارد داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

که انتگرال‌گیری روی C در جهت مثلثاتی است.

به عبارت دیگر

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$



$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz$$

مثال ۱) اگر C خمی باشد که شامل نقطهٔ $z_0=2$ نیست آن گاه طبق قضیهٔ کوشی ـ گورسا مقدار این انتگرال صفر است.

اما اگر C خم بسته‌ای باشد که شامل نقطهٔ $z_0=2$ است با توجه به تحلیلی بودن تابع e^z روی کل صفحهٔ مختلط و طبق فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz = 2\pi i\, e^2$$

مثال ۲) فرض کنید C خم بسته‌ای شامل نقطهٔ $z_0=\frac{i}{2}$ است

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2z-i}\,dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3-3}{z-\frac{i}{2}}\,dz = 2\pi i\left[\frac{1}{2}z^3-3\right]_{z_0=\frac{i}{2}} = 2\pi i\left(\frac{1}{2}\times\frac{i^3}{8}-3\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}-6\pi i$$

مثال ۳) انتگرال زیر را در جهت عکس عقربه‌های ساعت روی هر یک از چهار دایرهٔ زیر محاسبه کنید:

$$\oint \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz$$

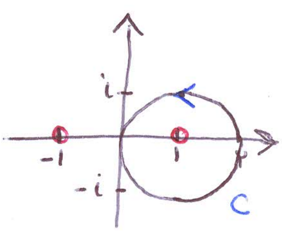
الف) $|z-1|=1$ ب) $|z-\frac{1}{2}|=1$

ج) $|z+1-\frac{i}{2}|=1$ د) $|z-i|=1$

حل:

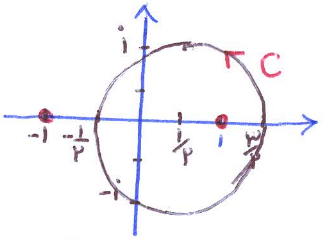
$$f(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}=\frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)}$$

الف) در این حالت خم C شامل تنها نقطهٔ $z_0=1$ است پس تابع $g(z)=\frac{z^2+1}{z+1}$ روی و داخل خم C تحلیلی است پس طبق قضیهٔ انتگرال فرمول کوشی داریم:



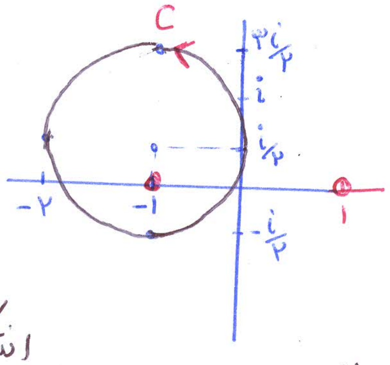
$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz = \oint_C \frac{g(z)}{z-1} = 2\pi i\, g(1) = 2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z+1}\right]_{z=1} = 2\pi i\left(\frac{2}{2}\right) = \boxed{2\pi i}$$

ب) در این حالت هم کاملاً مشابه حالت الف می‌باشد



$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz = \oint_C \frac{g(z)}{z-1} = 2\pi i\, g(1) = \boxed{2\pi i}$$

ج) در این حالت خم C فقط شامل نقطهٔ $z_0=-1$ است



$$f(z)=\frac{z^2+1}{z-1}\times\frac{1}{z+1}\quad,\quad h(z)=\frac{z^2+1}{z-1}$$

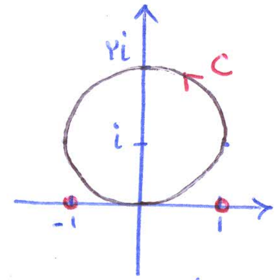
تابع $h(z)$ روی خم C و درون آن تحلیلی است پس طبق قضیهٔ فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz = \oint_C \frac{h(z)}{z+1} = 2\pi i\, h(-1) = 2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z-1}\right]_{z=-1} = 2\pi i\left(\frac{2}{-2}\right) = \boxed{-2\pi i}$$

د)

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz = 0$$

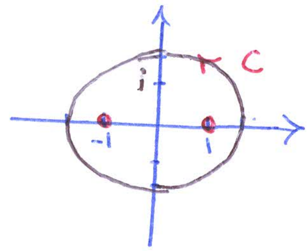
طبق قضیهٔ کوشی-گورسا



مثال ۴) انتگرال تابع $g(z)=(z^2-1)^{-1}\tan z$ روی دایرهٔ $C: |z|=\frac{3}{2}$ (در جهت مثلثاتی) را حساب کنید:

حل: تابع $\tan z$ در تمام صفحه به جز نقاط $\pm\frac{\pi}{2}$، $\pm\frac{3\pi}{2}$، ... تحلیلی است. خوشبختانه هیچ کدام از این نقاط داخل خم بستهٔ C قرار ندارند.

$$g(z)=\frac{\tan z}{z^2-1}=\frac{\tan z}{(z-1)(z+1)}$$



از طرفی هر دوی نقاط $z=1$ و $z=-1$ درون خم C قرار دارند پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2-1}\,dz=\frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{\tan z}{z-1}\,dz-\oint_C \frac{\tan z}{z+1}\,dz\right]=\frac{2\pi i}{2}\left[\tan(1)-\tan(-1)\right]$$

$$=\pi i\left[2\tan(1)\right]=\boxed{2\pi i\tan(1)}$$

قضیه (مشتقات تابع تحلیلی):

اگر $f(z)$ در یک ناحیهٔ D تحلیلی باشد، آن‌گاه f در D از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است و همهٔ این مشتقات نیز در D تحلیلی‌اند.

مقادیر این مشتقات در یک نقطهٔ $z_0 \in D$ از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad n=1,2,3,\dots$$

که C هر خم بستهٔ سادهٔ دلخواهی واقع در D است که z_0 را در بر می‌گیرد و منفی C در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

مثال ۵) C یک خم بسته ساده که شامل نقطه πi می‌باشد (خم در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود)

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-\pi i)^2} dz = 2\pi i (\cos z)'\Big|_{z=\pi i} = -2\pi i \sin(\pi i) = 2\pi \sinh(\pi)$$

$$\sin(\pi i) = \sin(0)\cosh(\pi) + i\cos(0)\sinh(\pi) = i\sinh(\pi)$$

مثال ۶) C یک خم بسته ساده که شامل نقطه $-i$ می‌باشد (خم در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود)

$$\oint_C \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3} dz = \pi i (z^4-3z^2+6)''\Big|_{z=-i} = \pi i (12z^2-6)_{z=-i} = \pi i(-18) = \boxed{-18\pi i}$$

قضیه مُرِرا (Morera) : (عکس قضیه کوشی - گورسا)

هرگاه $f(z)$ در دامنه همبند ساده D پیوسته باشد و برای هر مسیر بسته در D داشته باشیم

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

آن‌گاه $f(z)$ در D تحلیلی است.

نامساوی کوشی :

قضیه (مشتقات تابع تحلیلی) را درنظر بگیرید. فرض کنید C دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r باشد و روی C داشته باشیم $|f(z)| \leqslant M$ آن‌گاه با بکارگیری نامساوی ML، خواهیم داشت :

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} \underbrace{2\pi r}_{\text{محیط دایره}}$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!\,M}{r^n}$$ نامساوی کوشی

قضیه لیوویل :

اگر قدرمطلق تابع تام $f(z)$ به ازای همه z ها، کراندار باشد، آن‌گاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

اثبات :

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| < K$$

آن‌گاه طبق نامساوی کوشی داریم : $|f'(z_0)| \leqslant \frac{K}{r}$ و چون $f(z)$ تام است لذا می‌توان r را به هراندازه دلخواه بزرگ اختیار کرد $\Leftarrow f'(z_0) = 0$. چون z_0 دلخواه است پس به ازای هر z داریم $f'(z) = 0 \Leftarrow f$ تابع ثابت است.

سری تیلور :

قضیه‌ی تیلور : فرض کنید $f(z)$ در یک دامنه‌ی D تحلیلی و z_0 نقطه‌ی دلخواهی واقع در D باشد. آن‌گاه یک سری توانی منحصر بفرد حول نقطه‌ی z_0 وجود دارد به صورت زیر

$$(*)\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad ; \quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

که این این سری (موسوم به سری تیلور) در بزرگترین قرص بازی که مرکز آن z_0 است و در D واقع است معتبر بوده و به تابع f همگراست.

(C یک مسیر ساده‌ی بسته که شامل z_0 است و درون D واقع است و جهت آن پادساعتگرد می باشد) .

نکته : اگر $z_0=0$ باشد آن‌گاه سری $(*)$ را سری مک لورن می نامند.

سری تیلور برخی توابع مهم :

۱) تابع نمایی e^z

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \qquad z\in\mathbb{C}$$

۲) توابع مثلثاتی

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

اثباتی برای فرمول اویلر :
$$=\cos y+i\sin y$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots \qquad z\in\mathbb{C}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots \qquad z\in\mathbb{C}$$

۳) توابع هذلولوی

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$$

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

تعریف (نقطهٔ تکین) :

نقطهٔ تکین تابع f ، نقطه‌ای مانند z_0 است که تابع f در آن مشتق پذیر نیست ولی هر همسایگی از نقطهٔ z_0 شامل نقاطی می‌باشد که تابع f در آنها مشتق پذیر است.

مثال : برای تابع $f(z)=\frac{1}{1-z}$ ، نقطهٔ $z=1$ یک نقطهٔ تکین است.

برای تابع $f(z)=\tan z$ دارای نقاط تکین $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots$ می‌باشد.

تابع $f(z)=\bar{z}$ هیچ نقطهٔ تکینی ندارد.

برای تابع $f(z)=\ln z$ ، همهٔ نقاط نیم محور منفی حقیقی ، نقاط تکین هستند.

سری تیلور چند تابع خاص :

۴) تابع $\frac{1}{1-z}$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\cdots \qquad |z|<1$$

۵) تابع $\ln(1+z)$

$$\ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots \qquad |z|<1$$

سری لوران :

درکاربردها لازم است که تابع $f(z)$ را حول نقاطی که در آنها تحلیلی نیست اما در آنها تکین است بسط داد. قضیهٔ تیلور را درچنین مواردی نمی‌توان به کاربرد. دراینجا سری جدیدی که به سری لوران معروف است برای ما کارگشا است.

سری لوران شامل توانهای صحیح مثبت و منفی برحسب $z-z_0$ است که به وسیلهٔ آن می‌توان یک تابع دادهٔ شدهٔ $f(z)$ را در یک طوق (به مرکز z_0) که $f(z)$ در آن تحلیلی است، نمایش داد. $f(z)$ می‌تواند نقاط تکینی درخارج حلقه و نیز در داخل حفره داشته باشد.

قضیهٔ لوران :

اگر $f(z)$ بردو دایرهٔ هم مرکز C_1 و C_2 (به مرکز z_0) و درطوق بین آنها تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان با سری لوران

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

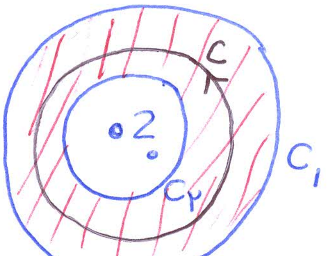
$$= a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots$$

که از توانهای نامنفی و جزء اصلی (توانهای منفی) تشکیل شده است نمایش داد.

ضرایب این سری لوران را از انتگرال های

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\,dz^* \quad , \quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C (z^*-z_0)^{n-1} f(z^*)\,dz^*$$

به دست می آیند. (C یک مسیر ساده بسته درون طوق است که دایره C_2 را در بر می گیرد - جهت پادساعتگرد).



مثال: سری لوران تابع $f(z)=z^{-5}\sin z$ به مرکز صفر را بیابید:

حل: سری مک لورن تابع $\sin z$ را استفاده می کنیم:

$$z^{-5}\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^5}\times\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!}=$$

$$\frac{1}{z^4}-\frac{1}{6z^2}+\frac{1}{120}-\frac{1}{7!}z^2+\dots \qquad |z|>0$$

در اینجا طوق همگرایی سراسر صفحه مختلط به جز مبدأ مختصات است.

مثال: سری لوران تابع $f(z)=z^2e^{1/z}$ به مرکز صفر را بیابید:

حل: می دانیم

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{} e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\times\frac{1}{n!}$$

$$z^2e^{1/z}=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\dots\right)=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!\,z}+\dots$$

$$|z|>0$$

مثال: تابع $f(z)=\frac{1}{1-z}$ را الف) برحسب توانهای نامنفی z بسط دهید:

ب) برحسب توانهای منفی z بسط دهید:

حل:

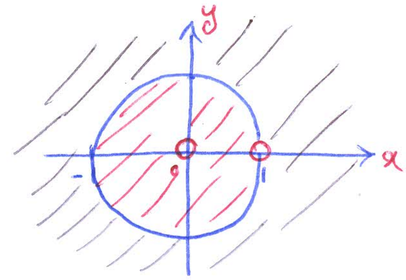
الف) $$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\dots \qquad |z|<1$$

ب) $$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z(\frac{1}{z}-1)}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots$$

$$|z|>1$$

مثال : بسط های لوران در طوق های متحدالمرکز متفاوت :

بسط های لوران $\frac{1}{z^3-z^4}$ به مرکز صفر را بیابید :



$$\frac{1}{z^3-z^4}=\frac{1}{z^3(1-z)}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\cdots \quad 0<|z|<1$$

$$\frac{1}{z^3-z^4}=\frac{1}{z^4(\frac{1}{z}-1)}=\frac{-1}{z^4(1-\frac{1}{z})}=\frac{-1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

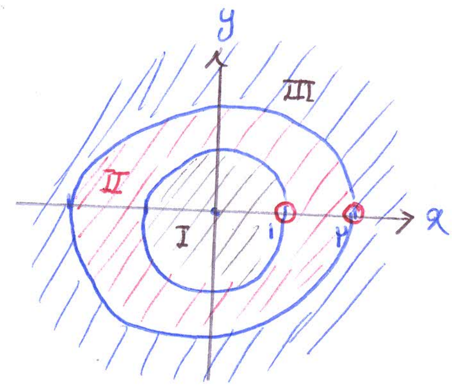
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+4}}=-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}-\cdots \quad |z|>1$$

مثال : استفاده از کسرهای جزئی

سری های تیلور و لوران $f(z)=\frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ به مرکز صفر را بیابید :

حل :

$$f(z)=\frac{-2z+3}{z^2-3z+2}=\frac{-2z+3}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}$$



$$A(z-2)+B(z-1)=-2z+3$$

$$z=1\Rightarrow -A=1\Rightarrow \boxed{A=-1} \qquad z=2\Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$f(z)=\frac{-1}{z-1}-\frac{1}{z-2}$$

سری تیلور حول نقطهٔ صفر برای تابع $-\frac{1}{z-1}$:

① $$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad |z|<1$$

سری لوران حول نقطهٔ صفر برای تابع $-\frac{1}{z-1}$:

② $$-\frac{1}{z-1}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=\frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \qquad |z|>1$$

سری تیلور حول نقطهٔ صفر برای تابع $-\frac{1}{z-2}$:

③ $$-\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad \left|\frac{z}{2}\right|<1\Rightarrow |z|<2$$

سری لوران حول نقطهٔ صفر برای تابع $-\frac{1}{z-2}$

④ $$-\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{z(1-\frac{2}{z})}=\frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad \left|\frac{2}{z}\right|<1\Rightarrow |z|>2$$

اگر از ① و ③ استفاده کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

و اشتراک طوق‌ها برابر است با:

$$=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}z+\frac{9}{8}z^2+\cdots \qquad |z|<1$$

سری تیلور تابع f $\leftarrow$

اگر از ② و ③ استفاده کنیم:

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\cdots$$

$$\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

طوق همگرایی $1<|z|<2$

اگر از ② و ④ استفاده کنیم:

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}-(1+2^n)\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$=-\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}-\frac{5}{z^3}-\cdots \qquad |z|>2$$

دسته‌بندی تکین‌ها و صفرها:

نقطهٔ تکین تنها: نقطهٔ تکین $z=z_0$ را یک نقطهٔ تکین تنهای تابع $f(z)$ می‌نامیم اگر z_0 دارای همسایگی باشد که هیچ نقطهٔ تکین دیگری در این همسایگی نباشد.

مثال: نقاط $\pm\frac{\pi}{2}$ ، $\pm\frac{3\pi}{2}$ ، .... نقاط تکین تنهای تابع $\tan z$ هستند.

$z=0$ نقطهٔ تکین غیرتنهای تابع $f(z)=\tan(\frac{1}{z})$ است. چرا؟

(نقاط تکین تنهای $f(z)$ در $z=z_0$ را می‌توان با سری لوران

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

که در سراسر یک همسایگی نقطهٔ تکین z_0 یعنی

$$0<|z-z_0|<R$$

برقرار است دسته‌بندی کرد.)

قطب: اگر قسمت اصلی سری لوران نقطهٔ تکین z_0 دارای تعداد متناهی جمله باشد آن‌گاه z_0 را یک قطب تابع f می‌نامند.

و اگر قسمت اصلی سری لوران به صورت زیر باشد

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

قطب z_0 را یک قطب مرتبهٔ m ام نامیم.

قطب ساده: قطب‌های مرتبهٔ اول را قطب ساده نیز می‌نامند.

تکین اساسی تنها: اگر قسمت اصلی سری لوران حول یک نقطهٔ تکین تنها، دارای تعداد نامتناهی جمله

باشد آن گاه z_0 را نقطهٔ تکین اساسی تنها می نامند.

تکین → تنها، غیرتنها
تنها → قطب، اساسی

مثال:

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots \qquad |z|>0$$

$z=0$ تکین اساسی

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{2n+1}}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots \qquad |z|>0$$

$z=0$ تکین اساسی

$$\frac{\cos z^2}{z^5}=\frac{1}{z^5}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{4!}z^3-\cdots \qquad |z|>0$$

$z=0$ قطب مرتبهٔ پنجم

$$f(z)=\frac{1}{z^3-z^4}$$

$$\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\cdots \qquad 0<|z|<1$$

$$-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}-\frac{1}{z^6}-\cdots \qquad |z|>1$$

$z=0$ قطب مرتبهٔ سوم

صفر تابع تحلیلی: فرض کنید z_0 نقطهٔ تحلیلی تابع f باشد، z_0 را صفر تابع f می نامیم اگر $f(z_0)=0$.

z_0 را صفر مرتبهٔ nام تابع f می نامیم اگر

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0$$
$$f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

صفر ساده: صفر مرتبهٔ اول را صفر ساده نیز می نامند. یعنی

$$f(z_0)=0 \quad , \quad f'(z_0)\neq 0$$

نکته: صفرهای یک تابع تحلیلی تنها باشند، یعنی هر یک از آنها یک همسایگی دارند که شامل صفرهای دیگری از $f(z)$ نیست.

انتگرال گیری به روش مانده ها:

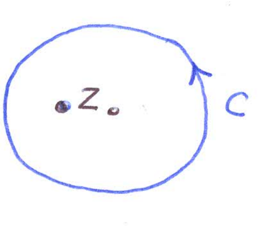
تعریف مانده: اگر تابع $f(z)$ روی خم بستهٔ C و درون آن تحلیلی باشد به جز در نقطه z_0 که یک نقطهٔ تکین تنها تابع f است آن گاه $f(z)$ دارای سری لورانی به صورت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

می باشد که درون طوق $0<|z|<R$ معتبر است.

می دانیم که b_1 ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ از فرمول زیر بدست می آید

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$



$$\Rightarrow \oint_C f(z)\,dz=2\pi i\, b_1$$

ضریب b_1 را مانده‌ی تابع $f(z)$ در z_0 می‌نامند و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهند:

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

قضیه‌ی مانده‌ها:

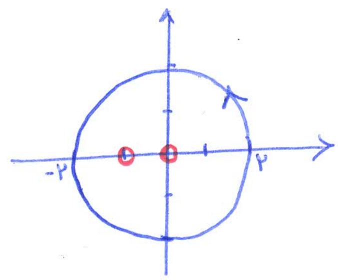
هرگاه $f(z)$ بر مرز ساده و بسته‌ی C تحلیلی و در درون آن به جز نقاط $z_1, z_2, \dots, z_n$ تحلیلی باشد آن‌گاه

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z+1)}\,dz = ?$$

حل:



$$I = \oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^2+1}{z(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^2+1}{z(z+1)} \right)$$

برای محاسبه‌ی مانده‌ی تابع f در نقطه‌ی $z=0$، بسط لوران تابع f را حول صفر می‌نویسیم:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{z^2+1}{z+1}}_{g(z)} = \frac{1}{z}\left[g(0) + g'(0)z + \frac{g''(0)}{2!}z^2 + \cdots \right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = g(0) = \left.\frac{z^2+1}{z+1}\right|_{z=0} = 1$$

محاسبه‌ی مانده‌ی تابع f در نقطه‌ی $z=-1$:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} \cdot \underbrace{\frac{z^2+1}{z}}_{h(z)} = \frac{1}{z+1}\left[h(-1) + h'(-1)(z+1) + \cdots \right]$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = h(-1) = \left.\frac{z^2+1}{z}\right|_{z=-1} = -2$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i (1-2) = \boxed{-2\pi i}$$

محاسبه‌ی مقادیر مانده‌ها:

اگر z_0 قطب ساده‌ی تابع $f(z)$ باشد آن‌گاه:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

اگر z_0 قطب مرتبه‌ی دوم تابع $f(z)$ باشد آن‌گاه:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z) \right]$$

اگر $z_۰$ قطب مرتبهٔ m ام تابع $f(z)$ باشد آن‌گاه:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_۰} f(z)=\lim_{z\to z_۰}\frac{۱}{(m-۱)!}\frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}\left[(z-z_۰)^m f(z)\right]$$

مثال: مانده‌های تابع $f(z)=\dfrac{z^۲+۱}{z^۲+۴}$ را بیابید:

حل: این تابع دارای دو قطب سادهٔ $z=\pm ۲i$ می‌باشد:

$$\operatorname*{Res}_{z=۲i} f(z)=\lim_{z\to ۲i}(z-۲i)f(z)=\lim_{z\to ۲i}(z-۲i)\frac{z^۲+۱}{z^۲+۴}=\lim_{z\to ۲i}\frac{z^۲+۱}{z+۲i}=\frac{-۳}{۴i}=\boxed{\frac{۳}{۴}i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-۲i} f(z)=\lim_{z\to -۲i}(z+۲i)f(z)=\lim_{z\to -۲i}\frac{z^۲+۱}{z-۲i}=\frac{-۳}{-۴i}=\boxed{-\frac{۳}{۴}i}$$

نکته: اگر $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ که $p(z)$ و $q(z)$ توابعی تحلیلی در $z_۰$ هستند و $p(z_۰)\neq ۰$ و $z_۰$ یک صفر سادهٔ $q(z)$ باشد (یعنی $q(z_۰)=۰$ ولی $q'(z_۰)\neq ۰$) بنابراین $z_۰$ قطب سادهٔ تابع f است داریم:

$$q(z)=\underset{۰}{q(z_۰)}+q'(z_۰)(z-z_۰)+\frac{q''(z_۰)}{۲!}(z-z_۰)^۲+\cdots$$ بسط تیلور تابع q حول $z_۰$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_۰} f(z)=\lim_{z\to z_۰}(z-z_۰)\frac{p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to z_۰}\frac{(z-z_۰)p(z)}{(z-z_۰)\left(q'(z_۰)+\frac{q''(z_۰)}{۲!}(z-z_۰)+\cdots\right)}$$

$$=\frac{p(z_۰)}{q'(z_۰)}$$

مثال: مثال قبل را با استفاده از نکتهٔ بالا حل کنید:

$$\operatorname*{Res}_{z=۲i}\frac{z^۲+۱}{z^۲+۴}=\frac{(۲i)^۲+۱}{۲(۲i)}=\frac{-۴+۱}{۴i}=\frac{-۳}{۴i}=\frac{۳}{۴}i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-۲i}\frac{z^۲+۱}{z^۲+۴}=\frac{(-۲i)^۲+۱}{۲(-۲i)}=\frac{-۳}{-۴i}=-\frac{۳}{۴}i$$

مثال: انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\oint_{|z|=۲} z e^{\frac{۱}{z-۱}}\,dz=?$$

حل: $z=۱$ تکین اساسی تابع $f(z)=ze^{\frac{۱}{z-۱}}$ است

$$e^{\frac{۱}{z-۱}}=۱+\frac{۱}{z-۱}+\frac{۱}{۲!(z-۱)^۲}+\cdots \qquad ۰<|z-۱|<\infty$$

$$ze^{\frac{۱}{z-۱}}=((z-۱)+۱)e^{\frac{۱}{z-۱}}=(z-۱)+۱+\frac{۱}{۲!(z-۱)}+\cdots+۱+\frac{۱}{z-۱}+\frac{۱}{۲!(z-۱)^۲}+\cdots$$

$$\underset{z=1}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2!} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \oint_{|z|=2} z e^{\frac{1}{z-1}} dz = \frac{3}{2} \times 2\pi i = 3\pi i$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \oint_{|z|=1} \Big(\underbrace{\frac{1}{z(e^z-1)}}_{I_1} + \underbrace{z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right)}_{I_2} + \underbrace{(3z-1)^2 \sin z}_{I_3} \Big) dz$$

حل:

$$I_1 = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z(e^z-1)} dz$$

قرار می‌دهیم $f(z) = z(e^z-1)$ به وضوح $z=0$ یک صفر مرتبهٔ دوم تابع f است از آن جا که

$$f(0)=0 \,,\quad f'(0)=0 \,,\quad f''(0) \neq 0$$

پس $z=0$ یک قطب مرتبهٔ دو برای تابع $\frac{1}{z(e^z-1)}$ است.

$$I_1 \overset{2\pi i}{=} \underset{z=0}{\text{Res}} \frac{1}{z(e^z-1)}$$

$$I_1 = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{1}{z(e^z-1)}\right] = \lim_{z\to 0} 2\pi i \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{e^z-1}\right] \overset{\text{دوبار } H}{=} -\frac{1}{2} \times 2\pi i = -\pi i$$

$$I_2 \overset{2\pi i}{=} \oint_{|z|=1} z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

$z=0$ تنها نقطهٔ تکین این تابع است.

$$z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = z^3\left(1 + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{4!\, z^4} + \frac{1}{6!\, z^6} + \cdots\right) \qquad |z|>0$$

$$= z^3 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!\, z} + \frac{1}{6!\, z^3} + \cdots$$

$$I_2 \overset{2\pi i}{=} \underset{z=0}{\text{Res}}\, z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4!} \times 2\pi i = \frac{\pi i}{12}$$

$$I_3 = \oint_{|z|=1} (3z-1)^2 \sin z \, dz = 0$$

این تابع، یک تابع تام است پس طبق قضیه کوشی - گورسا انتگرال آن روی هر خم بسته برابر صفر است.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\pi i + \frac{\pi}{12} i + 0$$

محاسبهٔ انتگرال‌های حقیقی به کمک انتگرال‌های مختلط :

انتگرال توابعی گویا از $\cos\theta$ و $\sin\theta$:

$$I=\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$$

فرض کنید F تابعی گویای حقیقی از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ باشد .

قرار دهید : $z=e^{i\theta}$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

با جایگذاری این مقادیر، تابع F تبدیل به یک تابع گویا برحسب z می‌شود که آن را با $f(z)$ نمایش می‌دهیم

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz}$$

که C دایرهٔ واحد $|z|=1$ می‌باشد و جهت پیمایش آن پادساعتگرد است .

مثال : نشان دهید که :

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}=2\pi$$

حل : $z=e^{i\theta}$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\times\frac{dz}{iz}=\frac{2}{i}\oint_C\frac{dz}{-z^2+2\sqrt{2}z-1}=\frac{-2}{i}\oint\frac{dz}{(z^2-2\sqrt{2}z+1)}$$

$z_1=1+\sqrt{2}$ خارج دایرهٔ واحد

$z_2=-1+\sqrt{2}$ داخل دایرهٔ واحد

$$=\frac{-2}{i}\oint_C\frac{dz}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}$$

z_2 یک قطب سادهٔ این تابع است بنابراین

$$I=2\pi i\times\frac{-2}{i}\operatorname{Res}_{z=\sqrt{2}-1}\frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}$$

$$=2\pi i\times\frac{-2}{i}\lim_{z\to\sqrt{2}-1}(z-\sqrt{2}+1)\times\frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}=\frac{-2}{i}\times\frac{1}{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}\times 2\pi i$$

$$=\frac{-2}{\cancel{i}}\times\frac{1}{-2}\times 2\pi\cancel{i}=2\pi$$

انتگرال ناسره توابع گویا :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

فرض کنید $f(x)$ یک تابع گویای حقیقی باشد که مخرج آن ریشه حقیقی ندارد و درجه مخرج حداقل دو درجه بیشتر از درجه صورت است.

حال $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ را درنظر بگیرید نقاط تکین تابع $f(z)$ را تعیین کنید و فقط نقاط تکینی که درنیم صفحه فوقانی صفحه مختلط قرار گرفته‌اند را مدنظر قرار دهید :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res} f(z)$$

z_k ها نقاط تکین تابع f هستند که درنیم صفحه فوقانی قرار دارند.

مثال : مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

حل :

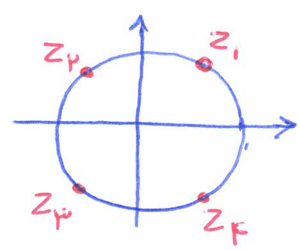
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$f(z)=\frac{1}{1+z^4}$$

تابع f دارای چهار قطب در نقاط زیر می‌باشد

$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i}\ ,\quad z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}\ ,\quad z_3=e^{-\frac{3\pi}{4}i}\ ,\quad z_4=e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

فقط دو قطب z_1 و z_2 درنیم صفحه فوقانی قرار دارند.



$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(z^4+1)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

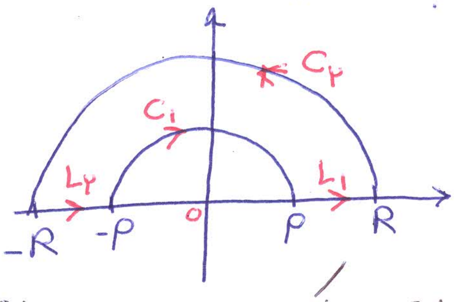
$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(z^4+1)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi}{4}i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-\frac{3\pi}{4}i}+e^{-\frac{9\pi}{4}i}\right) = \frac{\pi i}{2}\times(-\sqrt{2}i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

مثال : به کمک انتگرال های مختلط حاصل انتگرال زیر را بدست آورید :

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+4)^2}\,dx$$



حل : با توجه به اینکه در مسیر بسته فوق، بخشی از مسیر روی قسمت منفی محور حقیقی قرار گرفته (مسیر L_2) باید شاخه ای از تابع $\ln x$ را در نظر بگیریم که روی این بخش از مسیر هم تعریف شده و تحلیلی باشد.

لذا شاخه ای از تابع $\ln z$ را انتخاب می کنیم که

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

این شاخه از $\ln z$ روی مبدأ و نیمه منفی محور موهومی تحلیلی نیست.

اگر R و ρ را طوری انتخاب کنیم که $\rho<2<R$ باشد

$$f(z)=\frac{\ln z}{(z^2+4)^2}$$

آن گاه نقطه تکین $z=2i$ داخل مسیر بسته قرار می گیرد.

طبق قضیه مانده ها داریم :

$z=2i$ قطب مرتبه دوم تابع f است.

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[(z-2i)^2 \times \frac{\ln z}{(z^2+4)^2}\right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{\ln z}{(z+2i)^2}\right] = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{\frac{(z+2i)^2}{z} - 2(z+2i)\ln z}{(z+2i)^4}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{\frac{(z+2i)}{z} - 2\ln z}{(z+2i)^3} = 2\pi i \left(\frac{2-2(\ln 2+\frac{\pi}{2}i)}{-64i}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1-\ln 2}{32}i + \frac{\pi}{64}\right) = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) + \frac{\pi^2}{32}i$$

از طرف دیگر :

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) + \frac{\pi^2}{32}i - \int_{C_2} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz \quad (1)$$

معادله پارامتری خط L_1 : $z = r \quad \rho \le r \le R$

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_\rho^R \frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\,dr$$

معادلهٔ پارامتری خط $-L_2$ (جهت پیمایش L_2 را برعکس می‌کنیم):

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = -\int_{-L_2} f(z)\,dz = -\int_{\rho}^{R} \frac{\ln r + i\pi}{(r^2+4)^2}(-dr) \qquad z = re^{i\pi} = -r \qquad \rho < r < R$$

$$\Rightarrow \int_{L_2} f(z)\,dz = \int_{\rho}^{R} \frac{\ln r + i\pi}{(r^2+4)^2}\,dr$$

بنابراین از ① نتیجه می‌شود

$$2\int_{\rho}^{R} \frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\,dr + i\pi\int_{\rho}^{R} \frac{dr}{(r^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) + \frac{\pi^2}{32}i - \int_{C_2} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz \qquad ②$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی دو طرف رابطهٔ ② داریم:

$$2\int_{\rho}^{R} \frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\,dr = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) - \operatorname{Re}\int_{C_2} f(z)\,dz - \operatorname{Re}\int_{C_1} f(z)\,dz \qquad ③$$

اگر ثابت کنیم که

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{Re}\int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \quad ④ \quad , \quad \lim_{\rho\to 0} \operatorname{Re}\int_{C_1} f(z)\,dz = 0 \quad ⑤$$

آن‌گاه خواهیم داشت که:

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln r}{(r^2+4)^2}\,dr = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1)$$

و مسأله حل می‌شود.

ابتدا رابطهٔ ④ را ثابت می‌کنیم: اگر $\rho < 1$ درنظر بگیریم داریم:

نقاط روی خم C_1: θ بین ۰ و π $\qquad z = \rho e^{i\theta}$

تعریف تابع مختلط Ln

$$|\ln z| = |\ln(\rho e^{i\theta})| = |\ln\rho + i\theta| \leqslant |\ln\rho| + |i\theta| \leqslant -\ln\rho + \pi$$

و

$$|z^2+4| \geqslant \big||z|^2 - 4\big| = 4 - \rho^2$$

بنابراین:

$$\left|\operatorname{Re}\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \leqslant \left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \overset{\text{نامساوی ML}}{\leqslant} \frac{-\ln\rho + \pi}{(4-\rho^2)^2} \times \underbrace{\pi\rho}_{\text{طول خم } C_1} = \pi\,\frac{\rho\pi - \rho\ln\rho}{(4-\rho^2)^2}$$

اگر دو طرف رابطهٔ بالا $\rho \to 0$، عبارت سمت راست به صفر میل می‌کند.

بنابراین حد رابطهٔ ④ اثبات شد.

حال رابطهٔ ⑤ را اثبات می کنیم :

نقاط روی خم C_2 : $0 \leq \theta \leq \pi$ ، $z = Re^{i\theta}$

$$|\operatorname{Ln} z| = |\ln R + i\theta| \leq |\ln R| + |i\theta| \leq \ln R + \pi$$

$$|z^2+4| \geq \big|\,|z|^2-4\,\big| = |R^2-4| \underset{\substack{\downarrow \\ R>2 \text{ می دانیم}}}{=} R^2-4$$

$$\left|\operatorname{Re}\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{نامساوی } ML}}{\leq} \frac{\ln R+\pi}{(R^2-4)^2} \times \overset{\substack{\text{طول خم } C_2 \\ \uparrow}}{\pi R} = \pi\,\frac{\frac{\ln R}{R}+\frac{\pi}{R}}{\left(R-\frac{4}{R}\right)^2}$$

اگر دو طرف رابطهٔ بالا $R \to \infty$ ، عبارت سمت راست به سمت صفر میل می کند پس حد رابطهٔ ⑤ نیز اثبات شد ◻

انتگرال های فوریه : (انتگرال های ناسرهٔ شامل sin و cos)

می خواهیم به کمک نظریهٔ ماندهها ، انتگرال های ناسرهٔ حقیقی زیر را محاسبه کنیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx$$

که a عدد ثابت مثبتی است و $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

که $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله ای هستند که نسبت به هم اول می باشند و همچنین $q(x)$ هیچ صفر حقیقی ندارد . این روش از رابطهٔ زیر الهام گرفته شده است :

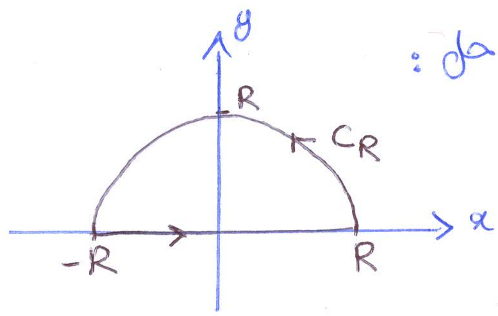
$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx = \int_{-R}^{R} f(x)\cos ax\,dx + i\int_{-R}^{R} f(x)\sin ax\,dx$$

روش را با یک مثال توضیح می دهیم :

مثال : نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{2\pi}{e^3}$$

حل :



چون تابع زیر انتگرال تابعی زوج است لذا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$

تابع $f(z)e^{i3z}$ در همهٔ نقاط روی و بالای محور xها به جز نقطهٔ $z=i$ تحلیلی است (فرض کنیم $R>1$ باشد)

C_R نیم دایرهٔ نشان داده شده در شکل است

$$\oint_C f(z)e^{i3z}\,dz=\int_{-R}^{R} f(x)e^{i3x}\,dx+\int_{C_R} f(z)e^{i3z}\,dz \qquad (1)$$

از طرف دیگر چون $z=i$ تنها تکین درون خم بستهٔ C است لذا طبق قضیهٔ مانده داریم:

$$\oint_C f(z)e^{i3z}\,dz=2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)e^{i3z} \qquad (2)$$

$$f(z)e^{i3z}=\frac{e^{i3z}}{(z^2+1)^2}=\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

به وضوح $z=i$ یک قطب مرتبهٔ ۲ است.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)e^{i3z}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{3ie^{i3z}(z+i)^2-2(z+i)e^{i3z}}{(z+i)^4}\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{(3iz-5)e^{i3z}}{(z+i)^3}\right]=\frac{(-8)e^{-3}}{-8i}=\boxed{\frac{1}{ie^3}}$$

بنابراین رابطهٔ (۲) برابر است با

$$\oint_C f(z)e^{i3z}\,dz=2\pi i\times\frac{1}{ie^3}=\frac{2\pi}{e^3}$$

مقدار بدست آمده را در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{2\pi}{e^3}=\int_{-R}^{R} f(x)e^{i3x}\,dx+\int_{C_R} f(z)e^{i3z}\,dz \qquad (3)$$

قسمت های حقیقی طرفین (۳) را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{2\pi}{e^3}=\int_{-R}^{R} f(x)\cos 3x\,dx+\operatorname{Re}\int_{C_R} f(z)e^{i3z}\,dz \qquad (4)$$

اگر z نقطه‌ای روی نیم دایرهٔ C_R باشد:

$$z=Re^{i\theta} \qquad 0\leq\theta\leq\pi$$

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right|\leq\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

$$|z^2+1|\geq|z|^2-1=R^2-1$$

از آن جا که

و هم چنین به ازای z های روی C_R داریم :

$$|e^{i3z}| = |e^{i3(x+iy)}| = |e^{-3y} \times e^{i3x}|$$

$$= e^{-3y} |e^{i3x}| = e^{-3y} |\cos 3x + i \sin 3x| = e^{-3y} \sqrt{\cos^2 3x + \sin^2 3x} = e^{-3y}$$

از طرفی وقتی z روی C_R باشد همواره $y \geqslant 0$

بنابراین $e^{-3y} \leqslant 1 \Leftarrow$

$$|e^{i3z}| = e^{-3y} \leqslant 1$$

درنتیجه :

$$\left| Re \int_{C_R} f(z) e^{i3z} dz \right| \leqslant \left| \int_{C_R} f(z) e^{i3z} dz \right| \underbrace{\leqslant}_{\text{نامساوی ML}} \frac{1}{(R^2-1)^2} \times \underbrace{\pi R}_{C_R \text{ طول خم}}$$

اگر در دو طرف نامساوی فوق $R \to \infty$ آنگاه به وضوح

$$Re \int_{C_R} f(z) e^{i3z} dz \longrightarrow 0$$

حال اگر در رابطه‌ی ④ R را به سمت ∞ میل دهیم خواهیم داشت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 3x \, dx = \frac{2\pi}{e^3}$$