حل مسائل مقدار اولیه - کرانه‌ای (Boundary value problems):

۱- معادلهٔ موج:

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \le x \le l$$

$$u(0,t) = p(t) \qquad t \ge 0$$

$$u(l,t) = q(t)$$

صورت کلی معادلهٔ موج در فضای یکبعدی به صورت معادلهٔ فوق است که شرایط اضافه شده به آن شرایط اولیه و کرانه‌ای موج را نشان می‌دهند (مثال: نخ مرتعش).

ابتدا فرض کنید می‌خواهیم معادله زیر را با شرایط خاص زیر حل کنیم:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad (I)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(l,t) = 0$$

الف) روش تفکیک متغیرها:

می‌توان ثابت کرد که تحت شرایط خاص، مسئله فوق دارای جواب یکتاست. با این فرض

بدنبال یک جواب خصوصی از معادله هستیم که در شرایط اولیه و مرزی آن صدق کند. برای این منظور جواب معادله اینها را به صورت زیر فرض می کنیم:

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

حال این جواب می بایست در معادله صدق کند:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Rightarrow F\ddot{G} = c^2 F'' G$$

$$\Rightarrow \frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G}$$

طرف اول تابعی صرفاً برحسب t و طرف چپ تابعی صرفاً برحسب x است و چون x و t مستقل هستند پس ضرورتاً می بایست داشته باشیم:

$$\frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'' - kF = 0 \\ \ddot{G} - c^2 k G = 0 \end{cases}$$

حال شرایط را اعمال می کنیم:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow F(0)\,G(t) = 0 \Rightarrow G(t) \neq 0,\ F(0) = 0 \quad (1)$$

$$(G(t) = 0 \times)$$

$$u(l,t) = 0 \Rightarrow F(l)\,G(t) = 0 \Rightarrow G(t) \neq 0,\ F(l) = 0 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} F'' - kF = 0 \\ F(0) = F(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow F = ?$$

باید حوزه مقادیر k را مشخص کنیم.

$1)\ k=0 \Longrightarrow F''=0 \Longrightarrow F(x)=ax+b$

اما با توجه به شرایط (1)، (2)، $\quad F(x)\equiv 0 \ , X \quad (u\equiv 0)$

$2)\ k=\mu^2>0\ :$

$$F''-\mu^2F=0 \Rightarrow F(x)=a\,ch\mu x+b\,sh\mu x$$

اما با توجه به شرط $F(0)=0$ داریم: $a=0$. بنابراین: $\quad F=b\,sh\mu x$

اما

$$F(l)=0 \Longrightarrow \underset{l,\mu\neq 0}{b\,sh\,l\mu=0} \Longrightarrow b=0 \Longrightarrow F\equiv 0\ X.$$

بنابراین، جواب‌های نابدیهی را می‌توانند معین کنیم:

$k=-\mu^2<0$

در این صورت داریم:

$$\begin{cases} F''+\mu^2F=0 \\ F(l)=F(0)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F=b\sin\mu x+a\cos\mu x$$

با اعمال کردن شرایط:

$$a=0,\ \mu=\frac{n\pi}{l} \quad (\sin\mu l=0 \Longrightarrow \mu=\frac{n\pi}{l})$$

پس معادله دارای بی‌شمار جواب به فرم زیر می‌باشد:

$$F_n(x)=b\sin\frac{n\pi}{l}x$$

پس با فرض $k = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ در معادله $\ddot{G} - kc^2G = 0$ داریم:

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0$$

$$\lambda_n = -\frac{n\pi}{l}c$$

$$\Rightarrow G_n(t) = A\cos\lambda_n t + B\sin\lambda_n t$$

$$\Rightarrow u_n(x,t) = F_n(x)\,G_n(t) = (a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

که در آن $(a_n = Ab,\ b_n = Bb)$

چون به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، u_n جوابی از معادله است، پس:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1}(a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

اما از روی شرایط اولیه مانده می‌توان یک فرمول صریح برای a_n و b_n بدست آورد.

برای این کار، کافیست سری فوریه سینوسی توابع $g(x)$ و $f(x)$ را در بازه $0<x<l$ بدست آوریم:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n'\sin\frac{n\pi}{l}x = u(x,0) = \sum_{n\geq 1} a_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

پس:

$$a_n = a_n' = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

از طرفی

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x = u_t(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n\lambda_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

Ex) $u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0<x<L,\ t>0$

$u(x,0) = f(x),\quad u_t(x,0)=0 \qquad , f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x, & 0\le x\le L/2 \\ \frac{2k}{L}(L-x), & \frac{L}{2}<x\le L \end{cases}$

$u(0,t)=0 \quad , \quad u(L,t)=0$

که در آن $c^2 = \frac{T}{\rho}$ ، T نیروی کشش و ρ چگالی نخ و f انحراف اولیه است.

$$G_n(t) = a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t + G_n^*(t)$$

که در آن G_n^* جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مربوط به t است. (در این مثال $G_n^* = 0$).

$$\Rightarrow G_n(t)F_n(x) = u_n(x,t) \longrightarrow u(x,t) = \sum_{n\ge1}(a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

که در آن ثابت‌های a_n , b_n را تعیین نمود.

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\left\{\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2k}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}x + \int_{L/2}^{L}\frac{2k}{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\right.$$

$$= \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n\ge1} a_n\cos\frac{cn\pi}{L}t\,\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$= \frac{8k}{\pi^2}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{cn\pi}{L}t\,\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Ex

حل معادلهٔ موج در حالت کلی تر :

حال مسئله زیر را در نظر بگیرید :

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t) \quad 0<x<L,\ t>0$$
$$u(x,0)=f(x)\ ,\ u_t(x,0)=g(x)$$
$$u(0,t)=p(t)\ ,\ u(L,t)=q(t) \quad t\geq 0$$

برای حل این مسئله ابتدا سعی می کنیم شرایط مرزی را همگن کنیم، برای این کار از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم :

$$u=v+w$$
$$w(0,t)=p(t)\ ,\ w(L,t)=q(t)$$ که $w=w(x,t)$ باید طوری باشد

let: $w=ax+b\ ,\ w(0,t)=p(t)\Rightarrow b=p(t)$

$$w(L,t)=q(t)\Rightarrow aL+p(t)=q(t)\Rightarrow a=\frac{q-p}{L}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{L}\{q(t)-p(t)\}x+p(t).$$

با قرار دادن عبارت فوق در معادله داریم :

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=F_1(x,t) \quad 0<x<L,\ t>0$$
$$v(x,0)=f_1(x)\ ,\ v_t(x,0)=g_1(x)$$
$$v(0,t)=0\ ;\ v(L,t)=0$$

با توجه به شرایط مرزی و یکتایی جواب، دنبال جوابی به فرم $\sum G_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x$ برای تابع $v(x,t)$ می گردیم

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=\sum_{n\geq 1}(\ddot{G}_n+\lambda_n^2G_n)\sin\frac{n\pi}{L}x=F_1(x,t)$$

که اگر بسط سینوسی تابع $F_1(x,t)$ را هم بنویسیم، آنگاه:

$$\ddot{C}_n + \lambda_n^2 C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^L F_1(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

می توان جواب معادله دیفرانسیل فوق را به فرم زیر معرفی نمود:

$C_n(t) = a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t + C_n^*(t)$

$$\Rightarrow V(x,t) = \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t + C_n^*(t)\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

که در آن $C_n^*(t)$ جواب خصوصی معادله است:

$$V(x,0)=0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(a_n + C_n^*(0)\right)\sin\frac{n\pi}{L}x = f_1(x) \Rightarrow$$

$$a_n + C_n^*(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f_1(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow a_n = \cdots$$

$$V_t(x,0) = g(x) \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(b_n\lambda_n + \dot{C}_n^*(0)\right)\sin\frac{n\pi}{L}x = g_1(x)$$

$$\Rightarrow b_n\lambda_n + \dot{C}_n^*(0) = \frac{2}{L}\int_0^t g_1(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow b_n = \cdots$$

Ex) $u_{tt} - 4u_{xx} = x \quad , \; 0<x<\pi \; , \; t>0$

$u(x,0) = 3x \quad , \; u_t(x,0) = 1$

$u(0,t) = t \quad , \; u(\pi,t) = 1-t \; , \; t\geq 0$

let: $u = v + w$ s.t.:

$$w = \frac{1-3t}{\pi}x + t$$

then: $v_{tt} - 4v_{xx} = x$

$v(x,0) = (3-\frac{1}{\pi})x \;,\; v_t(x,0) = \frac{3}{\pi}x \quad 0 \le x \le \pi$

$v(0,t) = 0 \quad , \quad v(\pi,t) = 0$

so, let: $v(x,t) = \sum_{n\ge 1} C_n(t) \sin nx$

$\Rightarrow \sum_{n\ge 1} (\ddot{C}_n + 4n^2 C_n) \sin nx = x$

$\Rightarrow \ddot{C}_n + 4n^2 C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx\, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow C_n(t) = a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt + \underbrace{\frac{1}{2n^3}(-1)^{n+1}}_{C_n^*(t)}$

$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n\ge 1} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt + \frac{1}{2n^3}(-1)^{n+1}) \sin nx$

$\Rightarrow v(x,0) = \sum_{n\ge 1} (a_n + \frac{1}{2n^3}(-1)^{n+1}) \sin nx = (3 - \frac{1}{\pi})x$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2n^3}(-1)^n + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (3-\frac{1}{\pi}) x \sin nx\, dx = \frac{2}{n}(-1)^n(\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{\pi} - 3)$

$v_t(x,0) = \sum_{n\ge 1} 2n b_n \sin nx = \frac{3}{\pi}x \Rightarrow b_n = \int_0^\pi \frac{3}{2n\pi} \sin nx\, dx = \frac{3}{\pi n^2}(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n\ge 1} \{ \frac{2}{n}(-1)^n(\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{\pi} - 3)\cos 2nt + \frac{3}{\pi n}(-1)^{n+1} \sin 2nt$
$+ \frac{1}{2n^3}(-1)^{n+1} \} \sin nx$

$\Rightarrow u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

Ex) $u_{tt} - u_{xx} = 4x - \frac{1}{2}(\sin t + 2)x^2 \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$

$u(x,0) = x^2 \quad , u_t(x,0) = \frac{3}{2} + 2x, \qquad 0 \le x \le 1$

$u_x(0,t) = t^2 \quad , u_x(1,t) = \sin t \qquad t \ge 0$

حل:

فرض می‌کنیم: $u = v + w$ به‌طوری‌که:

$w_x(0,t) = t^2 \ , \ w_x(1,t) = \sin t$

با قرار دادن $w(x,t) = ax^2 + bx$ داریم:

$w_x = 2ax + b$

$w_x(0,t) = t^2 \Rightarrow b = t^2$

$w_x(1,t) = \sin t \Longrightarrow a = \frac{1}{2}(\sin t - t^2)$

$\Rightarrow u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{2}(\sin t - t^2)x^2 + t^2 x$

با قرار دادن عبارت فوق در معادله داریم:

$v_{tt} - v_{xx} = 2x + \sin t - t^2$

با توجه به شرایط اولیه برای u داریم: $v(x,0) = x^2 ,\ v_t(x,0) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3/2$

$v_x(0,t) = 0 ,\ v_x(1,t) = 0 \ , t \ge 0$

$v(x,t) = \sum_{n \ge 0} C_n(t) \cos n\pi x$

$v_{tt} - v_{xx} = \sum_{n \ge 0} (C_n''(t) + n^2\pi^2 C_n(t)) \cos n\pi x = 2x + \sin t - t^2$

$$\Rightarrow \ddot{a}_0 + \sum_{n\geq 1} (\ddot{a}_n + n^2\pi^2 a_n)\cos n\pi x = 2x + \sin t - t^2$$

$$\Rightarrow \ddot{a}_0 = \int_0^1 (2x + \sin t - t^2)\,dx = \sin t - t^2 + 1$$

$$\ddot{a}_n + n^2\pi^2 a_n = 2\int_0^1 (2x + \sin t - t^2)\cos n\pi x\,dx = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) \quad n\geq 0$$

$$\Rightarrow a_0 = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 - \sin t + a_0 t + b_0$$

$$a_n = a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t + \frac{4}{n^4\pi^4}((-1)^n - 1)$$

$$\Rightarrow v(x,t) = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 - \sin t + a_0 t + b_0$$

$$+ \sum_{n\geq 1} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t + \frac{4}{n^4\pi^4}((-1)^n - 1)\cos n\pi x$$

$$v(x,0) = x^2 \Rightarrow b_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n + \frac{4}{n^4\pi^4}((-1)^n - 1)\right)\cos n\pi x = x^2$$

$$\Rightarrow b_0 = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$

$$a_n = \frac{4}{n^4\pi^4}(1 + (-1)^{n+1}) + 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x = \frac{4}{n^4\pi^4}(1 + (-1)^n(n^2\pi^2 - 1))$$

$$v_t(x,0) = -1 + a_0 + \sum_{n\geq 1} n\pi b_n \cos n\pi x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3/2$$

$$\Rightarrow a_0 = 1 + \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3/2)\,dx = 10/3$$

$$b_n = \frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n - 2)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = w(x,t) + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{n^4\pi^4}\left(1+(-1)^n(n^2\pi^2-1)\right)\cos n\pi t + C_0(t) + \frac{2}{n^3\pi^3}\left((-1)^n-2\right)\sin n\pi t + \frac{4}{n^4\pi^4}\left((-1)^n-1\right)\Big)\cos n\pi x.$$

8) $u_{tt} - u_{xx} = t^2$

$u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0) = \cos\frac{5x}{2} + x$

$u_x(0,t) = t,\quad u(\pi,t) = 0$

let: $u = v + w$

$w = ax + b,\quad w_x(0,t) = t \Rightarrow \boxed{a = t}$

$w(\pi,t) = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\pi t}$

let: $u = v + w$, so we have:

$V_{tt} - 4V_{xx} = t^2$

$V(x,0) = 0 \quad V_t(x,0) = \cos\frac{5x}{2} + \pi$

$V_x(0,t) = 0 \qquad V(\pi,t) = 0$

let: $V(t) = \sum_{n\geq 0} C_n(t)\cos\frac{2n+1}{2}x \Rightarrow \ldots$