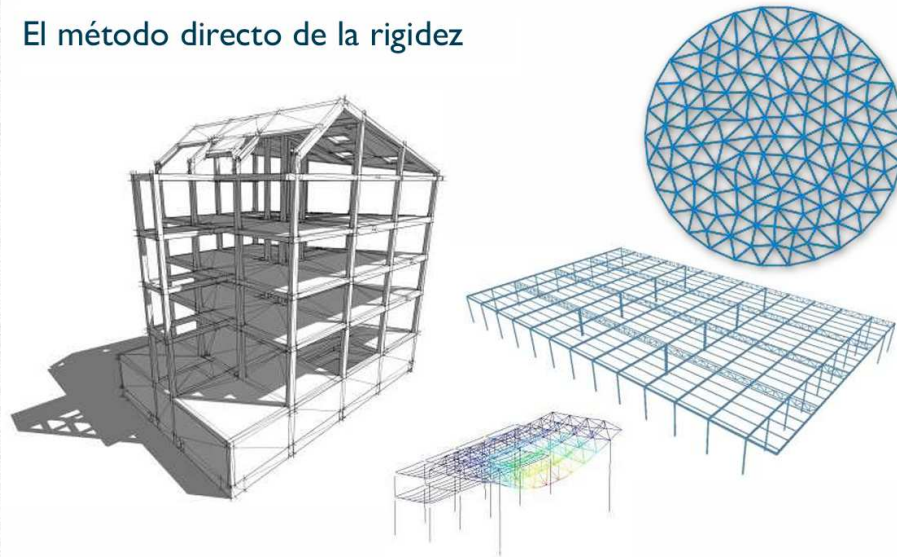


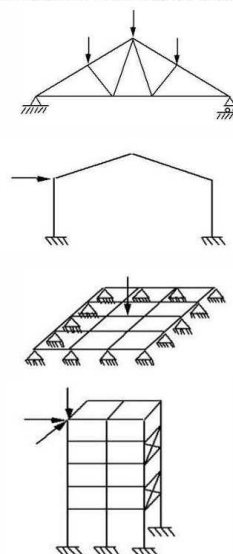
MÉTODO MATRICIAL

El método directo de la rigidez



ESTRUCTURAS DE ELEMENTOS UNIDIRECCIONES

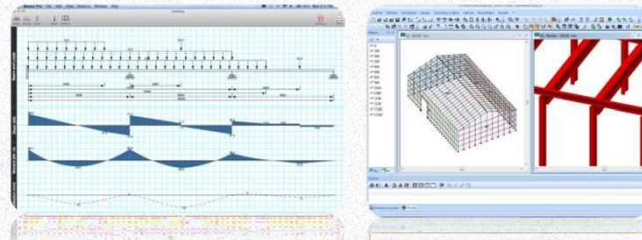
- **Celosías:**
 - cargas en los nudos
 - sólo hay tracciones y compresiones en las barras
- **Pórtico plano:**
 - estructura plana (de nudos rígidos generalmente)
 - con las cargas en el propio plano
- **Emparrillado:**
 - estructura plana (con nudos rígidos generalmente)
 - con las cargas en el plano perpendicular
- **Pórtico tridimensional:**
 - estructura formada por barras formando
 - pórticos ortogonales en el espacio
 - cargas en cualquier dirección



Métodos matriciales



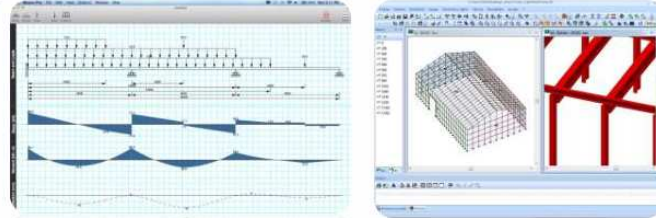
- Gran simplicidad
- No aportan nuevas ideas conceptuales al análisis de estructuras.
- Son una evolución de las ideas de Maxwell y de Mohr de finales del siglo XIX.
- Para su comprensión se necesitan
 - conocimientos de álgebra de matrices
 - teoremas fundamentales del cálculo clásico de estructuras.
- El éxito de estos métodos radica en su gran adaptación al ordenador.
- Tipos:
 - Método de la Flexibilidad (método de compatibilidad). Resuelve el problema planteando la compatibilidad de desplazamientos en primer lugar.
 - **Método de la Rigidez** (método de equilibrio). Plantea el equilibrio de fuerzas primero.



Métodos matriciales

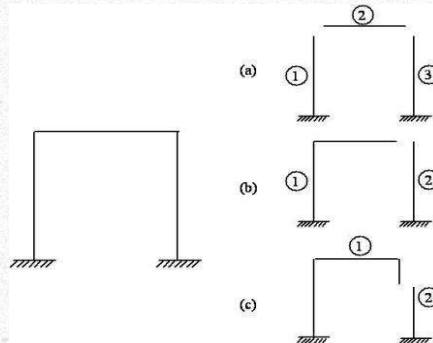


- Gran simplicidad
- No aportan nuevas ideas conceptuales al análisis de estructuras.
- Son una evolución de las ideas de Maxwell y de Mohr de finales del siglo XIX.
- Para su comprensión se necesitan
 - conocimientos de álgebra de matrices
 - teoremas fundamentales del cálculo clásico de estructuras.
- El éxito de estos métodos radica en su gran adaptación al ordenador.
- Tipos:
 - Método de la Flexibilidad (método de compatibilidad). Resuelve el problema planteando la compatibilidad de desplazamientos en primer lugar.
 - **Método de la Rigidez** (método de equilibrio). Plantea el equilibrio de fuerzas primero.



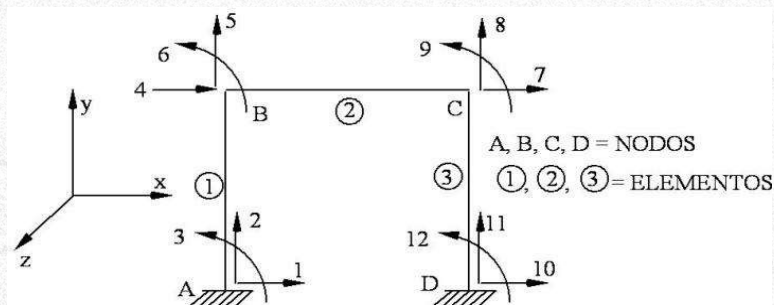
Discretización de estructuras

- Elementos unidos por puntos llamados nodos.
- Se obtienen sólo resultados para los nodos de la estructura.
 - Los valores entre nodos se interpolarán o se estimarán.
- La discretización más común es aquella en la que coinciden los nodos con los nudos de unión de barras (a).



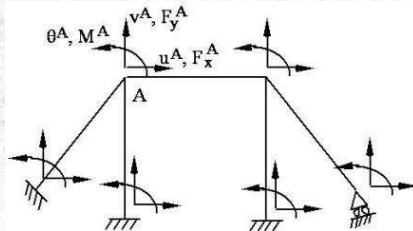
Grados de libertad g.d.l.

- Grado de libertad: la posibilidad que tiene cualquier punto de la estructura para desplazarse o girar
- En los métodos matriciales los grados de libertad se refieren sólo a los nodos
- Una estructura deformada se define a través de los desplazamientos y giros en los grados de libertad.



Sistema de referencia global

- XYZ permite definir de forma única los desplazamientos y las fuerzas en los distintos G.D.L. de los nodos.

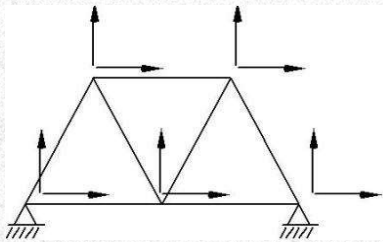


Pórtico plano:

2 desplazamientos ortogonales y un giro (u, v, θ).

2 fuerzas ortogonales y un momento (F_x, F_y, M) por cada nodo.

$$u(A) = \begin{Bmatrix} u^A \\ v^A \\ \theta^A \end{Bmatrix} \quad F(A) = \begin{Bmatrix} F_x^A \\ F_y^A \\ M^A \end{Bmatrix}$$



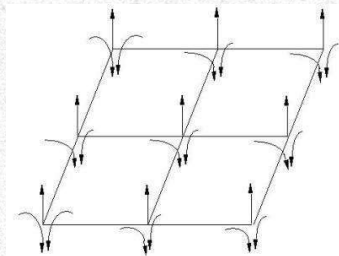
Celosía plana:

2 desplazamientos ortogonales (u, v) por nodo.

2 fuerzas ortogonales (F_x, F_y) por cada nodo.

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

G.D.L. de otros tipos estructurales

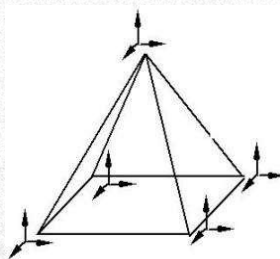


Emparrillado:

1 desplazamiento en perpendicular al emparrillado y 2 giros por nodo (w, θ_x, θ_y).

1 fuerza perpendicular al emparrillado y 2 momentos por nodo (F_z, M_x, M_y).

$$u = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}$$



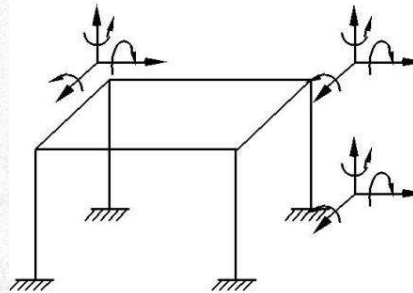
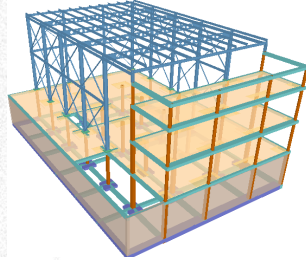
Celosía tridimensional:

3 desplazamientos ortogonales (u, v, w) por nodo.

3 fuerzas ortogonales (F_x, F_y, F_z) por cada nodo.

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$$

G.D.L. de un pórtico tridimensional



Pórtico tridimensional (caso más general):

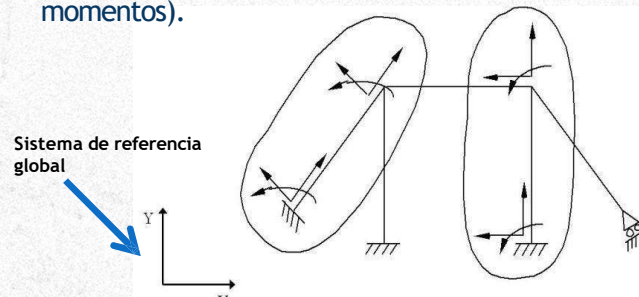
3 desplazamientos ortogonales y 3 giros
 $(u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$.

3 fuerzas ortogonales y 3 momentos $(F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)$ por cada nodo.

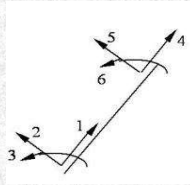
$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Sistema de referencia local

- Permite definir las relaciones entre los vectores de cargas y desplazamientos independientemente de la orientación de los elementos.
- Los sistemas locales van asociados a cada uno de los elementos
- Uno de los ejes seguirá la dirección de la barra y los otros serán ortogonales.
- Las fuerzas que aparecen en nodos expresadas en sistemas de referencia locales son los esfuerzos internos (normales, cortantes y momentos).



G.D.L. en los elementos (en locales)

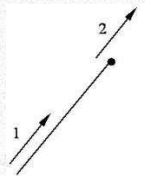


$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad P = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_2 \\ M_3 \\ N_4 \\ V_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento de pórtico plano:

Los nodos extremos del elemento pueden desplazarse en la dirección del mismo y la perpendicular, además del giro.

El vector de fuerzas contiene los normales (dirección del elemento), los cortantes (dirección perpendicular) y los momentos.

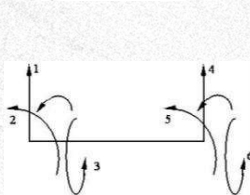


$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad P = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento de celosía plana:

Los nodos extremos del elemento sólo pueden desplazarse en la dirección del mismo.

El vector de fuerzas contiene normales únicamente.



$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_2 \\ T_3 \\ V_4 \\ M_5 \\ T_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento de emparrillado:

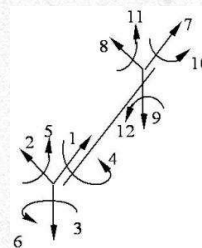
Los nodos extremos del elemento pueden desplazarse en la dirección perpendicular al plano, además de girar alrededor de los dos ejes contenidos en él.

El vector de fuerzas contiene un cortante, un momento flector y un torsor.

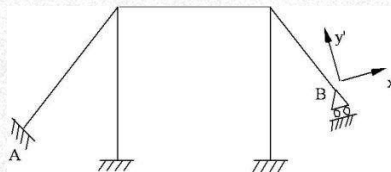
S.R. locales y S.R. nodales



$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{Bmatrix} \quad P = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ T_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ N_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ T_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}$$



En algunos casos, los nodos tienen condiciones de contorno (apoyos) cuyas restricciones no se ajustan a los S.R. global o locales. En esos casos deben utilizarse sistemas de referencia nodales.

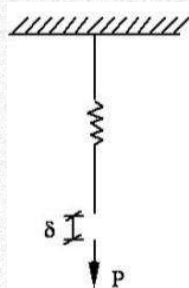


Ejemplo:

En el nodo A las condiciones de contorno son de aplicación inmediata, con independencia de la definición de coordenadas.

El nodo B tiene impedido el desplazamiento según el eje y' del sistema nodal representado.

Matrices de rigidez y flexibilidad



Ley de Hooke para un muelle: $P = k \cdot \delta$

k es la constante de rigidez del muelle y **representa la fuerza que es preciso aplicar para obtener un desplazamiento unidad.**

Se puede escribir la ecuación: $\delta = a \cdot P$

$a = 1/k$ es el coeficiente de flexibilidad del muelle (inversa de la rigidez k) y representa el desplazamiento que aparece al aplicar una fuerza unidad.

Para una estructura de n grados de libertad, el sistema de fuerzas se define por un vector de fuerzas F y la deformada por un vector de deformaciones u .

Los vectores F y u están relacionados por matrices

$$F = K u$$

K = Matriz de rigidez ($n \times n$)

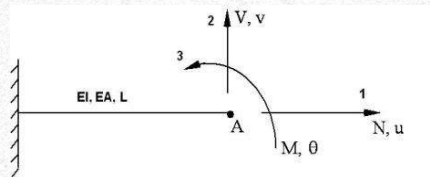
$$u = A F$$

A = Matriz de flexibilidad ($n \times n$)

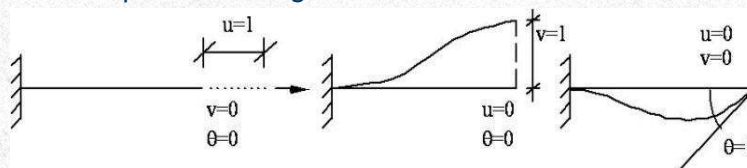
$$K \cdot A = I \Rightarrow A = K^{-1}$$

Términos de la matriz de rigidez

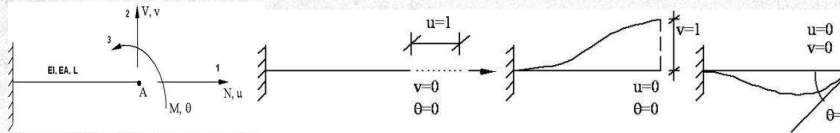
- Término de la matriz k_{ij} término de la fila i columna j
 - k_{ij} = fuerza/momento en el g.d.l. i cuando se aplica un desplazamiento/giro 1 en el g.d.l. j y 0 en el resto.
- Ejemplo: 3 G.D.L. del extremo de una viga



- ¿Qué fuerzas o momentos aparecen en los G.D.L. cuando se aplican estos desplazamientos o giros?



Términos de matriz de rigidez



g.d.l. (coordenadas)	1 (u=1)	2 (v=1)	3 (theta=1)
1 (N)	$N = \frac{EA}{L}$	$N = 0$	$N = 0$
2 (V)	$V = 0$	$V = \frac{12EI}{L^3}$	$V = -\frac{6EI}{L^2}$
3 (M)	$M = 0$	$M = -\frac{6EI}{L^2}$	$M = \frac{4EI}{L}$

- Estos términos pueden obtenerse mediante el PTV

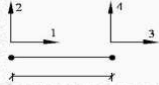
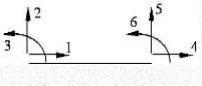

Propiedades de todas las matrices de rigidez

- k_{ij} representa la fuerza/momento en la coordenada i cuando se impone un desplazamiento/giro unidad en la coordenada j, siendo cero todos los demás.

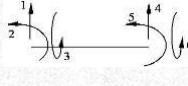
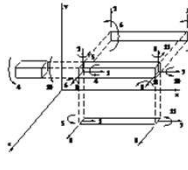
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{j1} & \dots & k_{ji} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

- Por la ley de reciprocidad de Maxwell $k_{ij} = k_{ji}$, las matrices de rigidez K son simétricas.
- Los elementos de la diagonal de K no pueden ser negativos pues representan la fuerza en una coordenada para conseguir un desplazamiento unidad en ella misma.
- El principio de superposición permite calcular la fuerza en una coordenada
 - $P_i = k_{i1} \delta_1 + \dots + k_{ii} \delta_i + \dots + k_{ij} \delta_j + \dots + k_{in} \delta_n$

Matrices de rigidez elementales $[k]$ de est.planas

ELEMENTO	ESQUEMA	MATRIZ DE RIGIDEZ	COMENTARIOS
ELEMENTO DE CELOSÍA PLANA		$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA}{L}$	Se obvian los grados de libertad de giro. Los g.d.l. perpendiculares a la barra deben permanecer para poder hacer posteriores cambios en la inclinación del elemento.
ELEMENTO DE PÓRICO PLANO		$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	Será una matriz de 6x6 al considerar 3 g.d.l. por cada nodo.
ELEMENTO DE VIGA CONTINUA SIN CARGA AXIAL		$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$	Coincide con la matriz anterior eliminando las filas y columnas de los grados de libertad axiales. (1ª y 4ª fila y columna)

Otras matrices de rigidez

ELEMENTO	ESQUEMA	MATRIZ DE RIGIDEZ	COMENTARIOS
ELEMENTO DE EMPARRILLADO		$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} \end{bmatrix}$	Incluye términos de momento torsor y elimina filas y columnas de axiles
ELEMENTO DE PÓRICO TRIDIMENSIONAL		$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} \end{bmatrix}$	Es el caso más general, con 6 grados de libertad por nodo. Considera 2 momentos flectores diferentes, cortantes en 2 direcciones y torsores.

Transformación de coordenadas



- Es muy común en el cálculo de matricial
 - Las matrices de rigidez se tienen en coordenadas locales (x'y')
 - El problema matricial se plantea en coordenadas globales (xy)
- Cambio de coordenadas de un vector cualquiera P

La relación entre las coordenadas:

$$P_{x'} = P_x \cos \alpha + P_y \sin \alpha$$

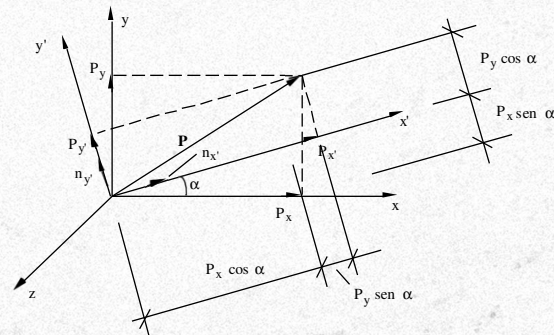
$$P_{y'} = -P_x \sin \alpha + P_y \cos \alpha$$

Matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}$$

Para pasar de locales a globales:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \end{Bmatrix}$$



Matriz de cambio de base [R]



- Así, la matriz para cambiar un vector de coordenadas locales a globales es:

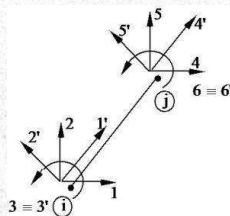
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- Que tiene la propiedad $R \cdot R^T = I$ o $R^{-1} = R^T$

- Por tanto: $P' = R^T \cdot P$ y $P = R \cdot P'$ siendo

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

- Para cambiar de globales a locales vectores correspondientes a un elemento de un pórtico plano con dos nudos i, j:



$$P' = L^T P \Rightarrow \begin{Bmatrix} P'_i \\ P'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix}$$

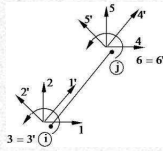
y

$$\delta' = L^T \delta \Rightarrow \begin{Bmatrix} \delta'_i \\ \delta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}$$

Matriz de cambio de base $[L]$



- la matriz L^T debe considerar el grado de libertad del giro.



$$L^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La transformación de coordenadas de la matriz de rigidez se deduce de:

$$P' = k' \delta' \Rightarrow L^T P = k' L^T \delta \Rightarrow P = (L k' L^T) \delta$$

Ley de Hooke para el elemento en coordenadas locales

Como en coordenadas globales debe cumplirse que $P = k \delta$, entonces: $k = L k' L^T$

Se cumple que $L^T = L^{-1}$

$$L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

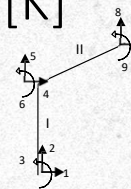
Ensamblaje de la matriz de rigidez $[K]$



- Numerar los grados de libertad de la estructura total.

Ejemplo:

9 g.d.l (3 por nodo) al ser estructura plana con nudos rígidos.



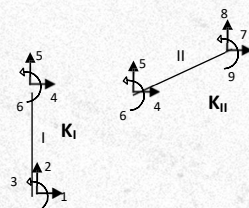
- Obtener las matrices k en c. globales para cada barra

$$k_I = L k'_I L^T$$

$$k_{II} = L k'_{II} L^T$$

$$L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ensamblar todas las matrices de rigidez en una sola matriz global. Los nudos comunes a varias barras tendrán varios términos de rigidez k_{ij} en sus g.d.l. que deben sumarse. Las zonas sin términos se rellenan con ceros.

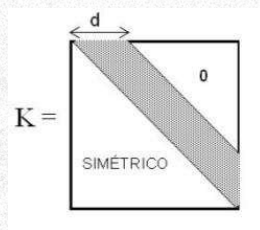


$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & & & & & & & & \\ 3 & & & & & & & & \\ 4 & & & K_I & & & & & \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 7 & & & & & & & & \\ 8 & & & & & & & & \\ 9 & & & 0 & & & K_{II} & & 0 \end{bmatrix}$$

En esta zona se suman los términos

Consideraciones sobre la matriz de rigidez global

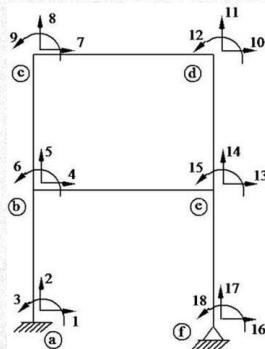
- Es una **matriz cuadrada $n \times n$** , siendo **n el número de grados de libertad de los nodos** de la estructura.
- Es una **matriz simétrica**.
- Si los valores distintos de cero se concentran alrededor de la diagonal principal, sólo será preciso almacenar una banda de valores a un lado de la diagonal (d = semiancho de banda).



Esto se consigue numerando los nudos y los grados de libertad de un modo adecuado. Los ordenadores pueden trabajar de este modo, reordenando los g.d.l. internamente.

Grados de libertad libres L y restringidos R

- **G.D.L. restringidos:** en los que se impiden desplazamientos o giros
- Se reordenan los G.D.L. identificando:
 - L=coordenadas o grados de libertad libres
 - R=coordenadas o grados de libertad restringidos. En estos grados de libertad aparecerán reacciones debido a esas restricciones.



Ejemplo:

Los grados de libertad 1, 2, 3, 16 y 17 son grados de libertad restringidos puesto que los nodos a y f están impedidos en esas direcciones. En cada uno de esos grados de libertad aparecerán reacciones.

Resolver: desplazamientos $\{u_L\}$ y reacciones $\{F_R\}$



- Si dividimos los vectores y la matriz según la diferenciación L-R:

$$F = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_L \\ u_R \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_R \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} F_L &= K_{LL} u_L + K_{LR} u_R \\ F_R &= K_{RL} u_L + K_{RR} u_R \end{aligned}$$

- Las incógnitas del problema son:
 - El vector de los desplazamientos en las coordenadas libres: u_L
 - El vector de las REACCIONES: F_R
- Si los G.D.L. restringidos está inmovilizados $u_R=0$, para obtener los desplazamientos u_L el sistema que debe resolverse es:

$$F_L = K_{LL} u_L$$

- Por tanto, el sistema de ecuaciones que habrá que resolver es, simplemente, el que se corresponde con los grados de libertad libres.
- Para obtener las reacciones, conocido u_L :

$$F_R = K_{RL} u_L$$

Cálculo de esfuerzos $\{P'\}$



- El vector de fuerzas elemental en coordenadas locales P' es el que indica los esfuerzos (N,V,M).
- Los esfuerzos se calculan después de resolver los desplazamientos u (a los desplazamientos para el elemento concreto les llamaremos δ)
 - EL DESPLAZAMIENTO DE LOS NUDOS CREA ESFUERZOS EN LAS BARRAS
- Para obtener los esfuerzos en un caso con cargas en los nudos únicamente usamos la matriz elemental en coordenadas globales sabiendo que $P=k \cdot \delta$:

$$P' = L^T P = L^T k \delta$$

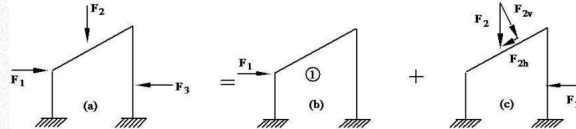
- Si preferimos utilizar la matriz elemental en locales k' , sabiendo $P'=k' \cdot \delta'$

$$P' = k' \delta' = k' L^T \delta$$

Solicitaciones fuera de los nodos: obtener P_{eq}



- El método está pensado para solicitaciones en los G.D.L. de los nodos.
- Hay que sustituir las cargas sobre barra por cargas aplicadas sobre los nodos para poder aplicar $K \cdot u = F$
 - Separar cargas en nudos de cargas sobre el elemento
 - Expresar la carga sobre barra en coordenadas locales (descomponiéndola si es necesario)

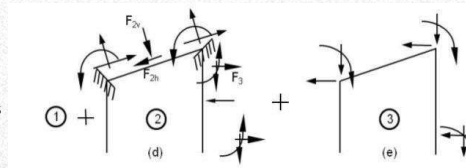


- Calcular las reacciones de empotramiento perfecto P_{emp}
- Las cargas equivalentes son opuestas a las de empotramiento perfecto:

$$(3) P'_{eq} = -P'_{emp} \Rightarrow P_{eq} = -P_{emp}$$

(a) = (1) + (2) + (3)

- (1) Tiene sólo cargas en nudos
 (2) Tiene cargas sobre barra pero los nudos están inmóviles
 SE DESPRECIA EN MATRICIAL
 (3) Tiene las reacciones de empotramiento cambiadas de signo (P_{eq})



Esfuerzos de empotramiento perfecto P'_{emp}



- Se corresponden con los que aparecen en una barra biempotrada sometida a cargas sobre ella.
- Se usan como un dato a partir de tablas.
 - Se pueden obtener mediante el método de las fuerzas.

Debe cuidarse el signo: nótese que el de las tablas no coincide con el de matricial

	$M_A = M_B = \frac{qL^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{qL}{2}$		$M_A = \frac{qL^2}{12L^2} (Lc^2 - 3bc^2 + 12ab^2)$ $M_B = \frac{qL^2}{12L^2} (Lc^2 - 3ac^2 + 12a^2b)$
	$M_A = M_B = \frac{PL}{8}$ $R_A = R_B = \frac{P}{2}$		$M_A = \frac{L^2}{60} (3q_1 + 2q_2)$ $M_B = \frac{L^2}{60} (2q_1 + 3q_2)$
	$M_A = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B = \frac{Pa^2b}{L^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{L^2} (L + 2a)$ $R_B = \frac{Pa^2}{L^2} (L + 2b)$		$M_A = \frac{qL^2}{30}$ $M_B = \frac{qL^2}{20}$ $R_A = \frac{3qL}{20}$ $R_B = \frac{7qL}{20}$
	$M_A = \frac{Mb}{L} \left(\frac{3b}{L} - 2 \right)$ $M_B = \frac{Ma}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right)$ $R_A = -\frac{6Mab}{L^2}$ $R_B = \frac{6Mab}{L^3}$		$M_A = M_B = \frac{5qL^2}{96}$ $R_A = R_B = \frac{qL}{4}$
	$M_A = M_B = -\frac{EIo(2T)}{L^3}$ $R_A = R_B = 0$		$M_A = \frac{qL^2}{30L} \left(L^3 + a^3 + L^2a - \frac{7}{2}La^2 \right)$ $M_B = \frac{qL^2}{30L} \left(L^3 - \frac{3}{2}a^3 + L^2a + La^2 \right)$

Vector de cargas total y v.de esfuerzos total



- P'_{eq} = cargas equivalentes para un elemento en coordenadas locales

Debe pasarse a coordenadas globales con la matriz cambio de base L:

- $P_{eq} = L \cdot P'_{eq}$

$$L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- El vector de cargas total F será el correspondiente a las cargas sobre los nudos (INCLUYENDO REACCIONES) más el que incluya las cargas equivalentes P_{eq} en cada grado de libertad.
- Para el cálculo de esfuerzos en una barra deben sumarse los esfuerzos que se obtienen a partir de los desplazamientos (matriz de rigidez elemental en coord. locales x desplazamiento en coordenadas locales) con los esfuerzos de empotramiento perfecto.

$$P' = k' \delta' + P'_{emp}$$

El movimiento de los nudos crea esfuerzos

Las cargas sobre barra crean esfuerzos de empotramiento perfecto

Caso de desplazamientos impuestos o asientos



- Los desplazamientos o giros impuestos en nudos se corresponden con **grados de libertad restringidos**

• MÉTODO DIRECTO

- Meterlos en el vector de desplazamientos $\{u\}$
- Resolver el sistema

• MÉTODO INDIRECTO

- Considerar sólo sus cargas equivalentes P^0_{eq}
- Ya vimos que todas las ecuaciones del método matricial de la rigidez tienen la forma $F = K \cdot u$
- Pasándolo a globales y cambiándolo de signo tendremos P^0_{eq}
- \Rightarrow Fuerzas = Rigidez · Desplazamientos
- Los desplazamientos impuestos Δ generan unos esfuerzos de empotramiento perfecto:

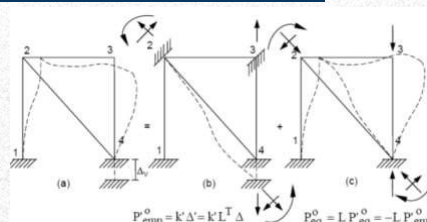
Si tenemos ya la matriz k del elemento en globales lo más sencillo es, directamente:

$$P^0_{eq} = -k \cdot \Delta$$

(a)=(b)+(c)

(b) Los nudos están inmóvilizados y aparecen reacciones de empotramiento debido al asentamiento Δ

(c) Tiene las reacciones de empotramiento cambiadas de signo (P_{eq}) y no hay asentamiento ESTE ES EL SISTEMA QUE REALMENTE SE ESTUDIA POR EL M. INDIRECTO



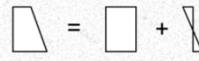
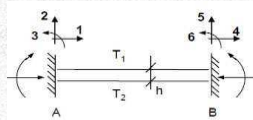
$$P^0_{emp} = k' \Delta = k' L^T \Delta \quad P^0_{eq} = L \cdot P^0_{emp} = -L \cdot P^0_{emp}$$

Caso de cargas térmicas



- Se trata como el método indirecto de los desplazamientos impuestos.
- Se calculan los esfuerzos de empotramiento perfecto $P'^{\#}_{emp}$ y:

$$P'^{\#}_{eq} = L \cdot P'^{\#}_{eq} = -L \cdot P'^{\#}_{emp}$$



$$\text{Alargamiento unitario } \epsilon = \frac{\alpha (T_1 + T_2)}{2}$$

$$\text{Curvatura } \kappa = \frac{\alpha (T_1 - T_2)}{h}$$

- Una barra biempotrada como esta no puede ni alargarse ni curvarse, por tanto es como si le impusiésemos desplazamientos y giros en los empotramientos.

$$P'^{\#}_{emp} = k' \delta' = k' \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = k' \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\alpha (T_1 + T_2)}{2} L \\ \frac{\alpha (T_1 - T_2)}{2h} L \\ \frac{\alpha (T_1 - T_2)}{h} L \end{Bmatrix}$$

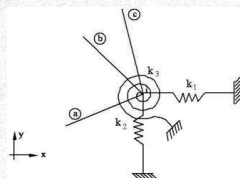
$$P'^{\#}_{emp} = \begin{bmatrix} EA\alpha \frac{(T_1 + T_2)}{2} \\ 0 \\ -EI\alpha \frac{(T_1 - T_2)}{h} \\ -EA\alpha \frac{(T_1 + T_2)}{2} \\ 0 \\ EI\alpha \frac{(T_1 - T_2)}{h} \end{bmatrix}$$

El caso de una barra de celosía no tendría los valores correspondientes a las coordenadas de momentos (3° y 6°).

Apoyos elásticos



- Cada apoyo elástico o muelle tratados individualmente sólo afectan a un grado de libertad: ej. 1, 2 y 3



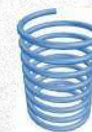
$$K_{ii} = k_{ii}^{(a)} + k_{ii}^{(b)} + k_{ii}^{(c)} + K_{ii}^{ap} \quad \text{siendo} \quad K_{ii}^{ap} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$y \quad F_i^{ap} = K_{ii}^{ap} u_i$$

A efectos prácticos, lo único que hay que hacer cuando tengamos un muelle en el grado de libertad n será sumar la rigidez del muelle en el término correspondiente de la matriz de rigidez (término nn).

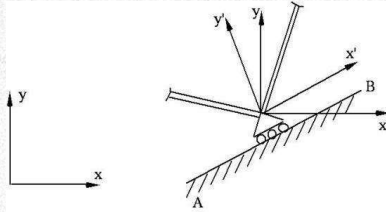
- En los muelles las reacciones se obtienen a partir de los desplazamientos y siempre son opuestas a ellos:

$$R_{mi} = -S_m \cdot u_i$$



Apoyos no concordantes

- Se usará el subíndice L para el caso de concordancia con las coordenadas globales y D para los grados de libertad de los nodos con restricciones no concordantes.



En coordenadas nodales $x'y'$

$$u'_D = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' \\ 0 \\ \theta' \end{Bmatrix}$$

- Separando por concordancia habría que resolver $F = Ku \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_L \\ F_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LD} \\ K_{DL} & K_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u_D \end{Bmatrix}$
- Si tenemos en cuenta que nos interesa trabajar con los vectores u'_D y F'_D , correspondientes a los nodos no concordantes, en el sistema de coordenadas local del nodo:

$$u_D = L \cdot u'_D$$

$$F_D = L \cdot F'_D$$

$$\begin{Bmatrix} F_L \\ F'_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LD} L \\ L^T K_{DL} & L^T K_{DD} L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_L \\ u'_D \end{Bmatrix}$$

ELEMENTOS FINITOS

INTRODUCCIÓN

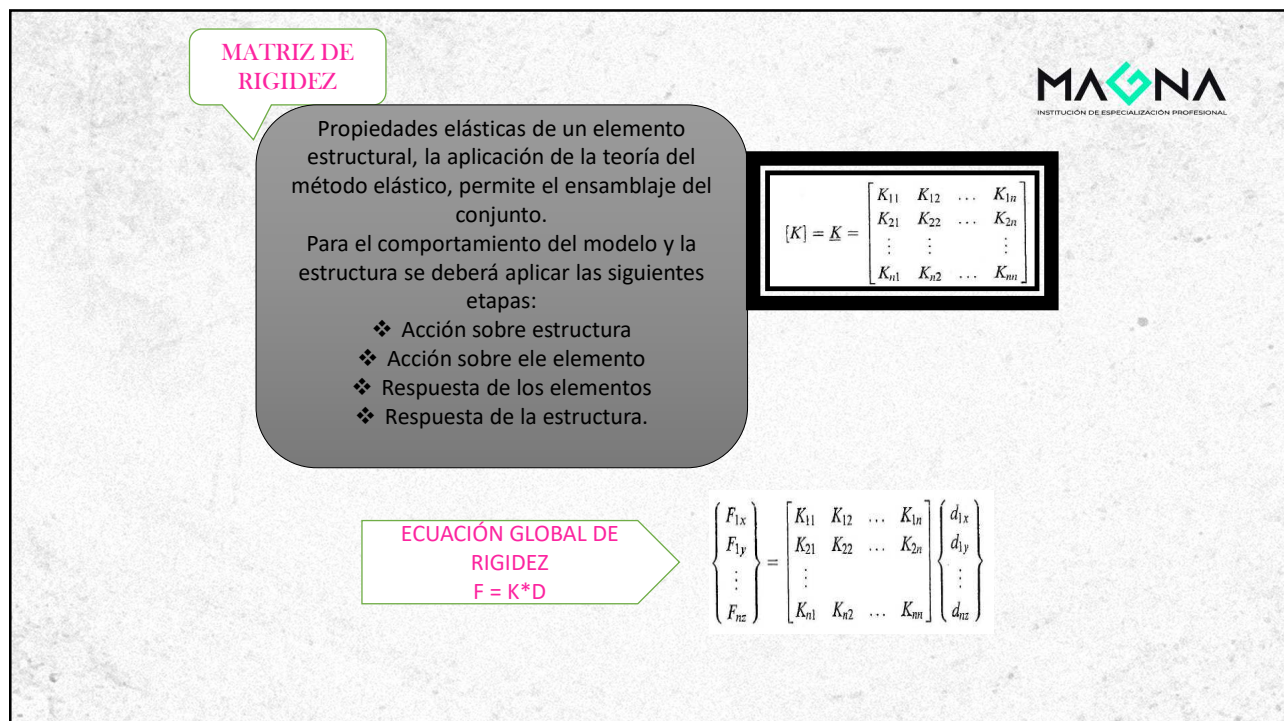
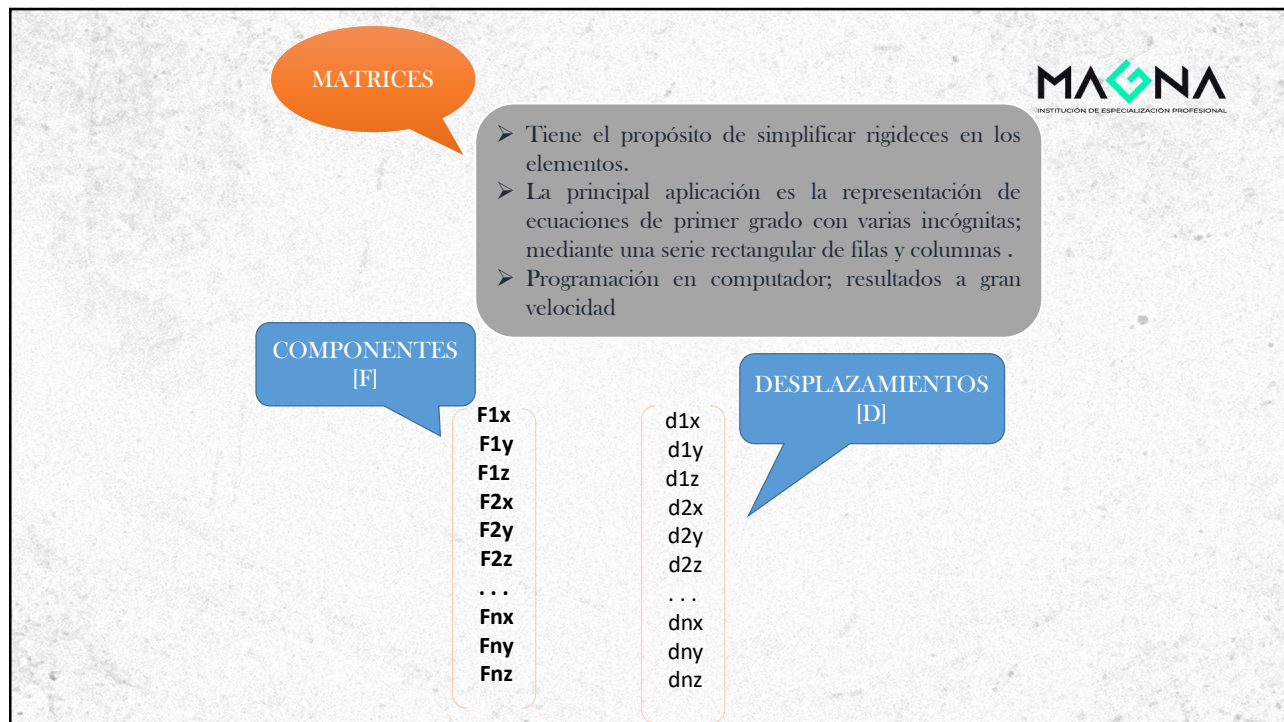


- El método numérico para resolver problemas de ingeniería y de la física matemática.
- El análisis en dividir la geometría en la que se quiere resolver el problema físico en pequeños elementos; para los cuales se aplican ecuaciones diferenciales; dichos problemas, que requieren de la aplicación de elementos finitos son:
 - Mecánica de fluidos
 - Transmisión de calor
 - Electromagnetismo
 - Mecánica estructural, etc.

HISTORIA



- A LO LARGO DE LOS AÑOS ALGUNOS AUTORES PUDIERON DESARROLLAR UN MÉTODO MODERNO DE LOS ELEMENTOS FINITOS:
- 1941.- Hrennikoff y Mchenry «solucionar tensiones en barras»
- 1943.- Courant «Soluciones de tensiones; interpolación (soluciones aproximadas)»
- 1947 y en 1953.- Levy «Flexibilidad ó método de fuerza; desplazamiento ó rigidez»
- 1954.- Argyris y Kelsey «Método matricial»
- 1956.- Turner «Elementos bidimensionales»
- 1960.- Clough «Análisis de tensión plana»
- 1960.- Melosh «Matriz de rigidez»
- 1963.- Grafton-Strone «Presión asimétrica»
- 1963.- Callaghe y Padlog «solucionar problemas de pandeo»
- 1965.- Archer «Análisis dinámico»
- 1969.- Zsazó y Lee «Ecuaciones de elasticidad»
- 1976.- Belytschko «Comportamiento dinámico no lineal»
- 1977.- Lynkas «Determinación de campo magnético»



USO DEL ORDENADOR



- La posición del elemento coordenadas nodales.
 - Unión de elementos mediante: las propiedades de materiales de los elementos, las cargas aplicadas, condiciones divisorias o coacciones, y la clase de análisis.
- «ESTE ANÁLISIS PERMITE SOLUCIONAR PROBLEMAS CON MÁS DE UN MILLÓN DE INCÓGNITAS»

ELEMENTOS FINITOS

Pasos generales
Desarrollan soluciones a problemas estructurales y no estructurales

Método variacional
✓ Teorema de energía potencial
✓ Derivadas de la ecuaciones algebraicas con respecto a elementos estructurales

- Determinar desplazamientos, en cada nudo para mantener el equilibrio.
- Flexibilidad, es sometida al principio de superposición de esfuerzos
- Ecuaciones de equilibrio en cada nudo.



MODELACIÓN DE LA ESTRUCTURA

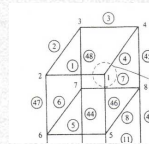
MAGNA
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

- ❖ El desplazamiento se determina en cada elemento finito; que están interconectados por interfaces de los nodos, líneas de contorno, superficies
- ❖ El comportamiento en cada nodo depende de una serie de ecuaciones algebraicas.

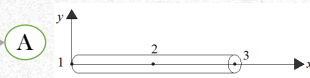
Aplicados en:
Barras
Vigas
Columnas
Marcos rígidos

UNO

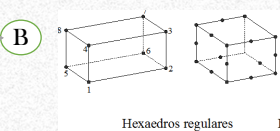
Discretizar y seleccionar los tipos de elementos consiste en dividir el elemento en un sistema equivalente de elementos finitos con nodos asociados y seleccionando el tipo de elemento más adecuado para modelo más de cerca el comportamiento físico real.



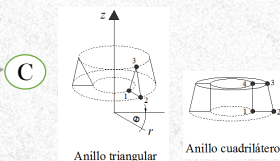
C
A
S
O
S



Para representar una barra o elemento de la viga (de orden superior)



Nodos intermedios a lo largo de los lados, para representar tensión plana / tensión



Nodos intermedios a lo largo de los bordes, para representar el estado de tensión tridimensional

MAGNA
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

DOS



- Consiste en elegir una función de desplazamiento dentro de cada elemento
- Se utiliza ecuaciones de tipo lineal, cuadrática y cúbica.
- Son funciones de uso frecuente debido a que son fáciles de trabajar en la formulación de elementos finitos.
- El desplazamiento de un elemento de 2D, se lo hace en base al plano XY; la ecuaciones se tendrá como incógnitas.
- La función general de desplazamiento se expresa mediante un modelo aproximado compuesto de un conjunto de tramos continuos.

TRES



Definir las relaciones tensión - desplazamiento y la tensión - deformación

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

Desplazamiento por para pequeñas deformaciones

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

La tensión más simple; deformación de las leyes, se relaciona con la ley de Hooke, que se utiliza a menudo en el análisis de Tensión.

CUATRO

Deducción de la Matriz de rigidez del elemento y ecuaciones

MAGNA
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL**Métodos de trabajo o energía**

teorema de Castigliano; se aplica únicamente a los materiales elásticos.

$$\pi = \iint F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xx}, \dots, v_{yy}) dx dy$$

Métodos de residuos ponderados

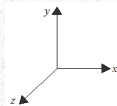
método de Galerkin; es aplicable a cualquier ecuación diferencial:

- Elementos de barras
- Elementos de viga
- Problema calor - conducción y masa transporte.

MAGNA
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \dots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \dots k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \dots k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & \vdots & \vdots \dots k_{nm} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix}$$

(f) es el vector de fuerzas elemento nodal
(k): es la matriz de rigidez del elemento (normalmente cuadrada y simétrica)
(d) es el vector de desplazamientos



Grados de libertad nodales o generalizados

CINCO

Ensamble de ecuaciones de cada elemento, para obtener las ecuaciones globales o totales en los nodos; esto, para conseguir una base nodal para el equilibrio de fuerzas.

$$\{F\} = [k] \{d\}$$

[F] : es el vector de fuerzas nodales globales
 [K] : es la matriz de rigidez de la estructura global o total
 {d}: Es el vector de desplazamiento de los grados de libertad

seis

Resuelve los Grados de libertad (desplazamientos generalizados) desconocidos de donde se puede obtenemos una matriz expandida como se la detalla a continuación

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix}$$

SIETE

Resuelva para las cepas del elemento y subraya

MAGNA
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

Para el análisis estructural el y la momento fuerza de corte se puede obtener debido a que puede ser expresado directamente en términos de los desplazamientos determinados en el paso 6.

OCHO

Interpretar los resultados

El objetivo final es para interpretar y analizar los resultados para su uso en el proceso de diseño

- Determinar la ubicación en la estructura donde se producen grandes deformaciones y tensiones es generalmente importante en la toma de decisiones para el diseño.

1.5 Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos

MAGNA
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

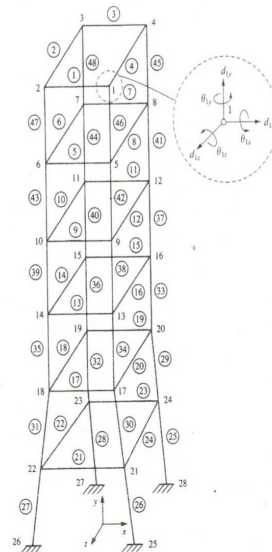
- El método de elementos finitos puede ser utilizado para analizar tanto los problemas estructurales y no estructurales. Incluyen Áreas típicas estructurales.
- 1. Análisis de esfuerzos, incluyendo entramado, análisis de marco, y problemas de concentración de esfuerzos típicamente asociados con agujeros, redondeos, u otros cambios en la geometría de un cuerpo.
- 2. Pandeo
- 3. Análisis de vibración

Los Problemas no estructurales incluyen

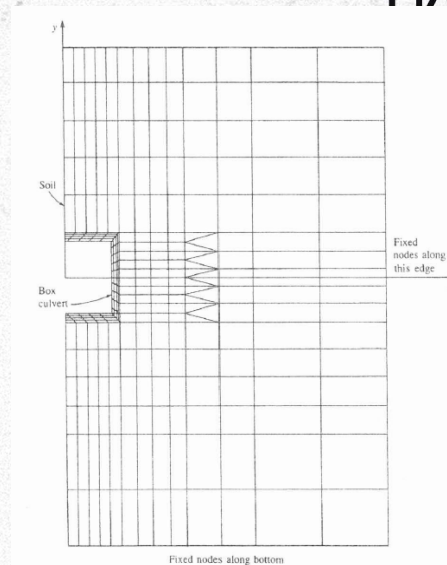
- ✓ Transferencia de calor
- ✓ Fluido, incluyendo la filtración a través de medios porosos.
- ✓ Distribución de potencial eléctrico o magnético

- Se ilustra una torre de control de un ferrocarril. La torre es una estructura tridimensional que comprende una serie de elementos de tipo de viga. Los 48 elementos son etiquetados por los números dentro de círculos, mientras que los 28 nodos se indican mediante los números fuera del círculo. Cada nodo tiene tres rotación y tres componentes de desplazamiento asociados. Las rotaciones (θ_s) y desplazamientos (d_s) son llamados los grados de libertad.
- Este método permite que el diseñador rápidamente obtenga desplazamientos y tensiones en la torre para los casos típicos de carga, como es requerido por los códigos de diseño. Antes del desarrollo del método de los elementos finitos y el computador, incluso este problema relativamente simple llevó muchas horas para resolver.

16 ▲ 1 Introduction


MAGNA
 ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

- Se muestra el modelo de caja subterránea alcantarilla discretizado. Aquí se puede apreciar que diferentes tipos de elementos (barras y deformación plana) a menudo pueden ser utilizados en un modelo de elemento finito.


MAGNA
 ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

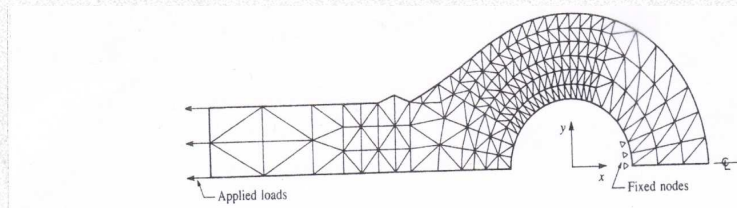
Se observa que el extremo de la barra de cilindro hidráulico mostrado en la figura.



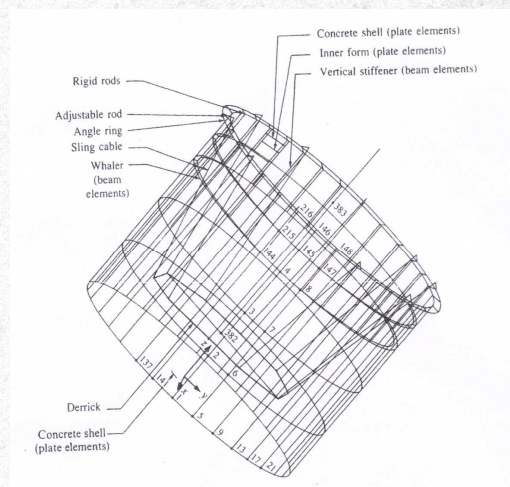
Dos dimensiones de análisis de un extremo de la varilla del cilindro hidráulico.

Elementos de deformación plana triangular.

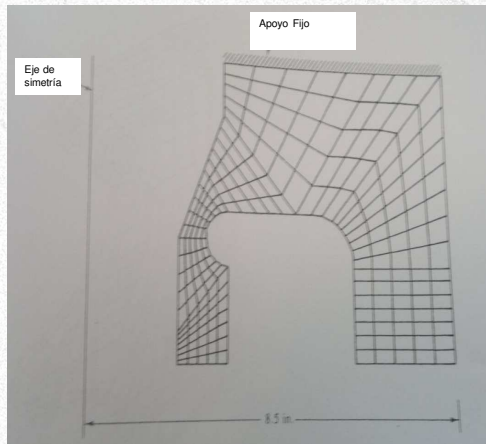
Simetría se aplicó también al extremo de la barra de modo que sólo la mitad de la del extremo de la barra tenía que ser analizados.



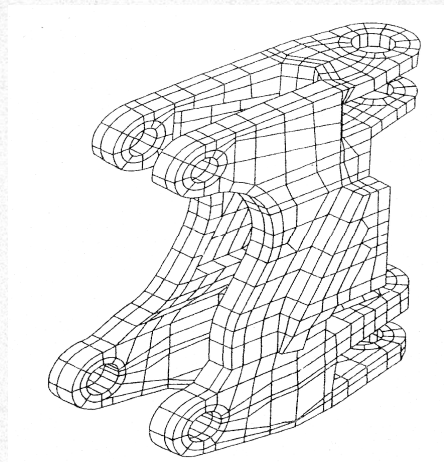
- Se muestra una sección de chimenea. En esta ilustración, los elementos de viga se utiliza para modelar los refuerzos verticales y horizontales que forman el encofrado,
- Los desplazamientos y las tensiones en el hormigón eran la principal preocupación en este problema
- ón



- **Modelo de una matriz de acero de alta resistencia (240 elementos axisimétricos) que utiliza la industria de plástico.**
- **La geometría irregular y potenciales asociadas a las concentraciones de tensión obligó a utilizar el método de elementos finitos para obtener una solución razonable**
- **se utilizan para el modelo tridimensional morir.**



- **se ilustra el uso de elementos sólidos en tres dimensiones.**
- **Los elementos de tres dimensiones hexahedrales son necesarios para modelar la forma irregular tridimensional. Los Modelos bidimensionales ciertamente no produciría soluciones precisas de ingeniería a este problema.**



VENTAJAS DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS



- **tiene una serie de ventajas que han hecho muy populares. que incluyen la habilidad de.**
- **1 modelar cuerpos de forma irregular con bastante facilidad**
- **2 Manejar las condiciones generales de carga sin dificultad**
- **3. Modelar cuerpos compuestos por varios materiales diferentes porque los elementos iguales son evaluados individualmente**
- **4. Manejar un número ilimitado y tipos de condiciones de contorno**
- **5. Variar el tamaño de los elementos para hacer posible el uso de elementos pequeños donde sea necesario**
- **6. Modifica los elementos finitos relativamente fácil y barato**
- **7. Incluye efectos dinámicos**
- **8. Maneja el comportamiento no lineal existente con grandes deformaciones y materiales no lineales**

Programas informáticos para el Método de los Elementos Finitos



- **Existen dos métodos.**
- ✓ **Una de ellas es utilizar grandes programas comerciales, muchos de los cuales han sido configurados para ejecutarse en ordenadores personales con el propósito general están diseñados para resolver muchos tipos de problemas.**
- ✓ **El otro es el desarrollo variados pequeños programas de propósito especial para resolver problemas específicos**

PROGRAMAS



- Hay numerosos vendedores que apoyan los programas de elementos finitos, y el usuario interesado debe consultar cuidadosamente el vendedor antes de comprar cualquier software. para la resolución de problemas mediante el método de elementos finitos, se presenta una lista parcial de los programas existentes.



1. Algor [46]
 2. Abaqus [47]
 3. ANSYS [48]
 4. COSMOS / M [49]
 5. GT-STRUDL [50]
 6. MARC [51]
 7. MSC / NASTRAN [52]
 8. NISA [53]
 9. Pro / Mechanical [54]
 10. SAP2000 [55]
 11. STARDYNE
- 12. GID.
 - 13. CONS

**GRACIAS POR SU
ATENCIÓN**

