



CURSO DE FORMACIÓN

**PROGRAMA DE ESPECIALIZACIÓN  
EN INGENIERÍA SÍSMICA Y ANÁLISIS  
DINÁMICO DE ESTRUCTURAS**

M.S.C. EDWAR ESTEBA APAZA.  
INGENIERO ESTRUCTURAL



## MODULO VI: DINAMICA ESTRUCTURAL

### Temario



- Logro de la sesión
- Introducción
- Comportamiento Inelástico ante carga incrementales.
- Resistencia, ductilidad, tenacidad.
- Comportamiento dinámico inelástico.
- Degradación de la resistencia y rigidez.
- Demandas de ductilidad y energía histerética.
- Respuesta inelástica de estructura de un grado de libertad.
- Respuesta máxima y cantidades espectrales.
- Factores de reducción de fuerza sísmica.
- Relaciones entre el factor de reducción y las demandas de ductilidad y energía.
- Espectros de Respuesta inelástica.
- Espectros de demanda de ductilidad.
- Espectros de ductilidad constante.
- Espectros de demanda y capacidad.

## Logro de la sesión



Al finalizar la sesión el estudiante calcula la respuesta inelástica de Estructuras de modelos de 1gdl.



# **INTRODUCCIÓN**



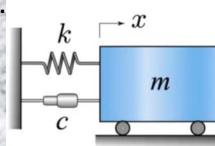
## Conceptos Previos



### ¿Análisis Lineal (Elástica) ?



- Fuerza elástica **proporcional** al desplazamiento.
- Fuerza de Amortiguación **Proporcional** a la Velocidad.



$$F_I + F_c + F_R = P(t)$$

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + ku = P(t)$$

### ¿Análisis No Lineal (Inelásticos)?

Casos en el cual el **modelo lineal** no representa sus características dinámicas de la estructura en forma adecuada.

- Fuerza elástica **NO es proporcional al desplazamiento.**
- Fuerza de Amortiguación **NO es Proporcional** a la Velocidad.

## Modelo No Lineal con un grado de Libertad



### Equilibrio de Fuerzas

$$F_I(t_i) + F_D(t_i) + F_S(t_i) = F(t_i)$$

### Variación de tiempo $\Delta t$

$$F_I(t_i + \Delta t) + F_D(t_i + \Delta t) + F_S(t_i + \Delta t) = F(t_i + \Delta t)$$

$$\Delta F_I + \Delta F_D + \Delta F_S = \Delta F_i$$

### Fuerzas Incrementales.

$$\Delta F_I = F_I(t_i + \Delta t) - F_I(t_i)$$

$$\Delta F_D = F_D(t_i + \Delta t) - F_D(t_i)$$

$$\Delta F_S = F_S(t_i + \Delta t) - F_S(t_i)$$

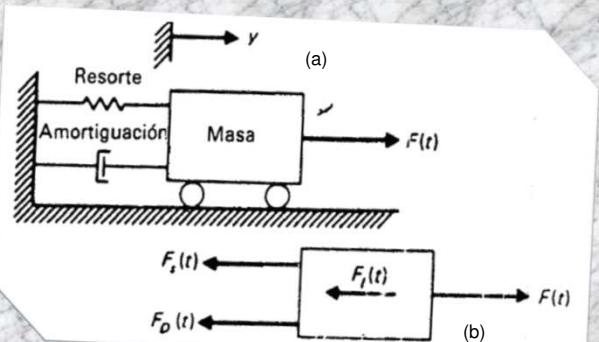
$$\Delta F_i = F(t_i + \Delta t) - F(t_i)$$

$F_I(t_i)$ : Fuerzas internas

$F_D(t_i)$ : Fuerza de Amortiguamiento

$F_S(t_i)$ : Fuerza en resorte

$F(t_i)$ : Fuerza exterior



(a) Modelo para un sistema un grado de libertad

(b) Diagrama de cuerpo libre (fuerza de inercia, la fuerza de amortiguación, la fuerza en el resorte y la fuerza externa).

## Modelo No Lineal con un grado de Libertad

**MAGNA**

Se pueden expresar.

$$\Delta F_I = m \Delta \ddot{y}_i$$

- a) Rigidez no lineal.

$$\Delta F_D = c_i \Delta \dot{y}_i$$

- b) Amortiguación no lineal.

$$\Delta F_S = k_i \Delta y_i$$

Donde el desplazamiento integral  $\Delta y$  velocidad integral  $\Delta \dot{y}$ , aceleracion incremental  $\Delta \ddot{y}$ .

$$\Delta y_i = y(t_i + \Delta t) - y(t_i)$$

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{y}(t_i + \Delta t) - \dot{y}(t_i)$$

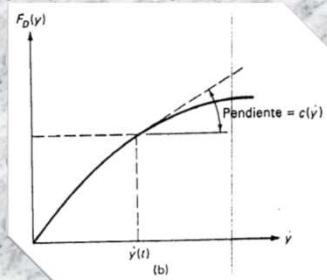
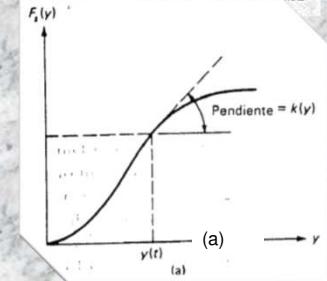
$$\Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}_i(t_i + \Delta t) - \ddot{y}_i(t_i)$$

$k_i = \left( \frac{dF_S}{dy} \right)_{y=y_i}$     $c_i = \left( \frac{dF_D}{dy} \right)_{y=y_i}$  *coeficientes no permanecen constantes.*

Ecuación Incremental.

$$m \Delta \ddot{y}_i + c_i \Delta \dot{y}_i + k_i \Delta y_i = \Delta F_i$$

*Ecuación aproximada.*



## Resistencia, Ductilidad y Tenacidad

**MAGNA**

Se pueden expresar.

$$\Delta F_I = m \Delta \ddot{y}_i$$

- a) Rigidez no lineal.

$$\Delta F_D = c_i \Delta \dot{y}_i$$

- b) Amortiguación no lineal.

$$\Delta F_S = k_i \Delta y_i$$

Donde el desplazamiento integral  $\Delta y$  velocidad integral  $\Delta \dot{y}$ , aceleracion incremental  $\Delta \ddot{y}$ .

$$\Delta y_i = y(t_i + \Delta t) - y(t_i)$$

$$\Delta \dot{y}_i = \dot{y}(t_i + \Delta t) - \dot{y}(t_i)$$

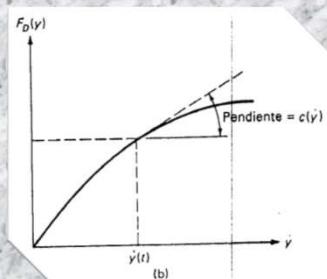
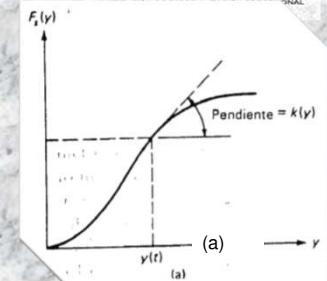
$$\Delta \ddot{y}_i = \ddot{y}_i(t_i + \Delta t) - \ddot{y}_i(t_i)$$

$k_i = \left( \frac{dF_S}{dy} \right)_{y=y_i}$     $c_i = \left( \frac{dF_D}{dy} \right)_{y=y_i}$  *coeficientes no permanecen constantes.*

Ecuación Incremental.

$$m \Delta \ddot{y}_i + c_i \Delta \dot{y}_i + k_i \Delta y_i = \Delta F_i$$

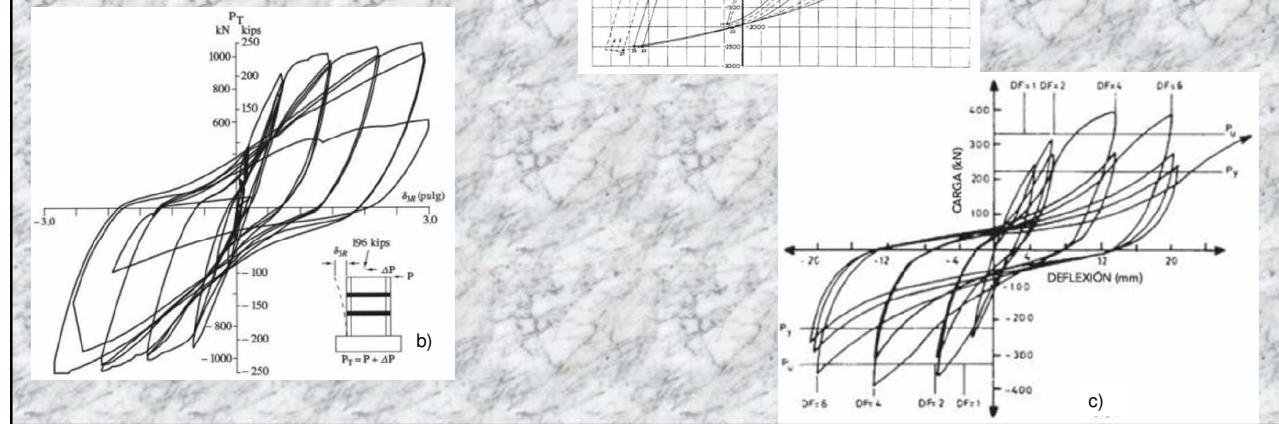
*Ecuación aproximada.*



## Relación Fuerza - Deformación.

**MAGNA**  
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

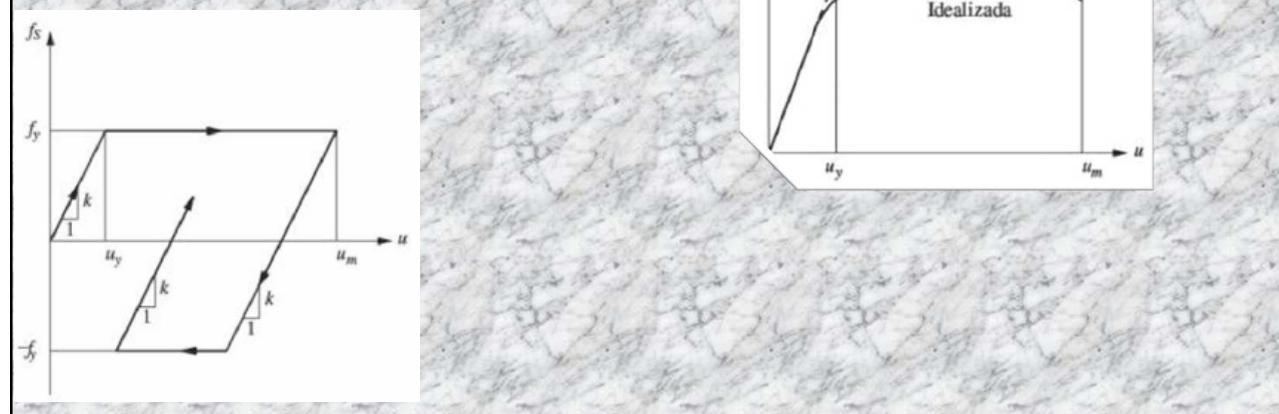
- a) Acero Estructural. (Anil K. Chopra)
- b) Concreto Reforzado. (Anil K. Chopra)
- c) Mampostería. (Anil K. Chopra)



## Idealización Elastoplástica

**MAGNA**  
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

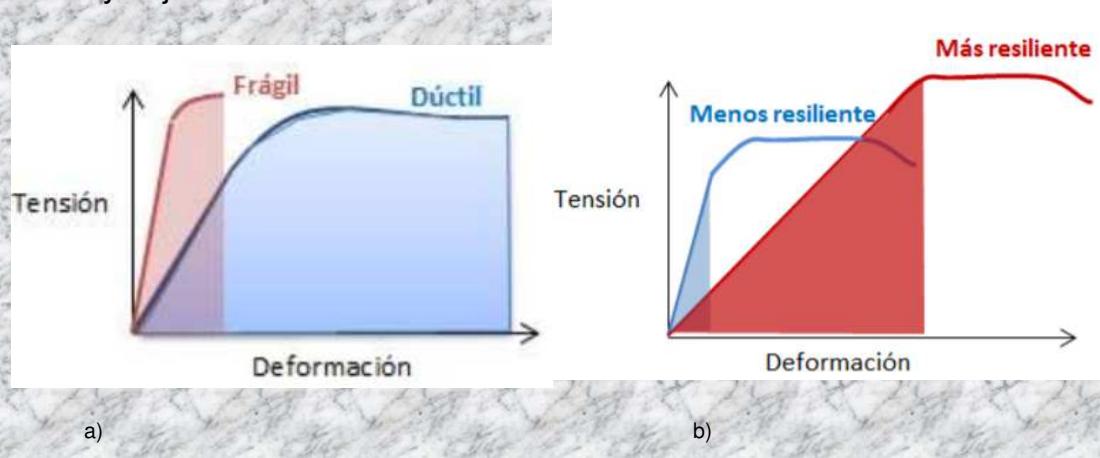
- a) Curva de fuerza - deformación durante la aplicación de carga: real e idealization.
- b) Relación elastoplástica de fuerza deformación.



## Ductilidad, Resiliencia,Tenacidad



- a) Comparación entre ductilidad y fragilidad. Se denomina material dúctil a aquel que al llegar a rotura ha sufrido deformaciones grandes.
- b) Un material resiliente tiene el límite elástico muy alto y el módulo elástico muy bajo.



## Ductilidad, Resiliencia,Tenacidad



- a) (1) resistencia alta poca deformación, es poco tenaz, (2) posee buenas cualidades de resistencia a la tracción y de deformabilidad, es tenaz, (3) altamente deformable pero posee muy poca resistencia; es por tanto muy dúctil, pero poco tenaz

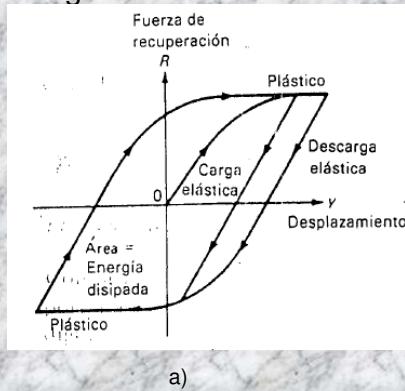


## COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO.

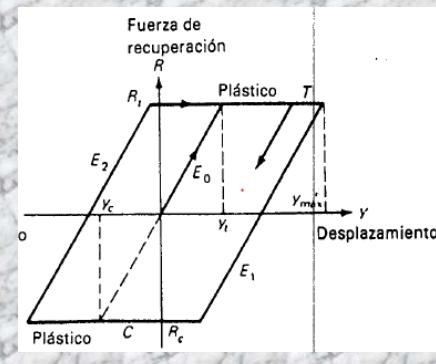
Modelos Estructurales Inelásticos.

- a) Deformación Plástico general.
- b) Comportamiento elastoplástico.

Disipa energía en un ciclo de Histeresis.



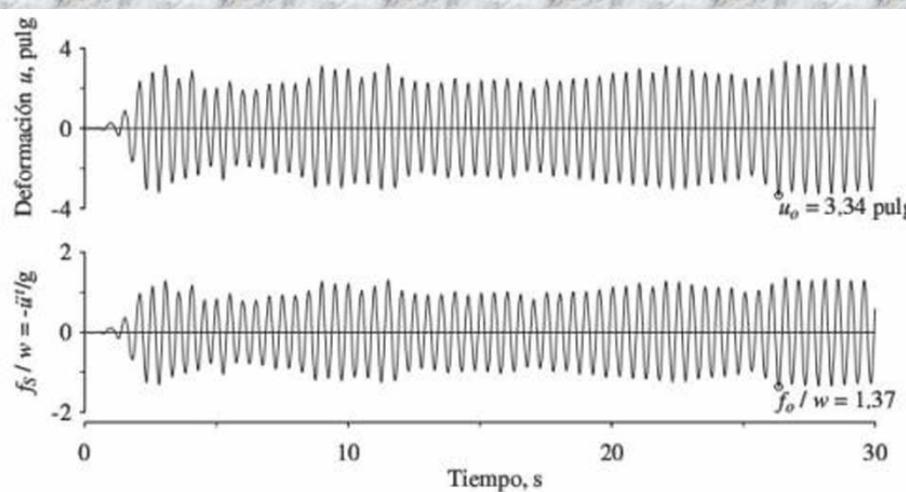
a)



b)

## EFEKTOS DE LA CEDENCIA

- a) Respuesta de un Sistema lineal con  $T_0=0.5\text{s}$  y  $\zeta = 0$  al movimiento de terremoto.



a)

## EFFECTOS DE LA CEDENCIA

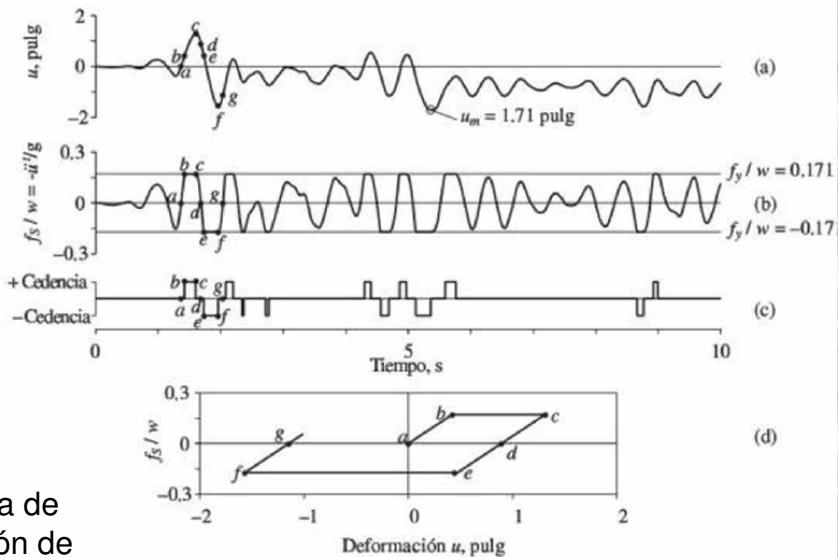
**MAGNA**

Historia de Respuesta.

Respuesta de un Sistema elastoplástico con  $T_0=0.5s$ ,  $\zeta = 0$  y  $\bar{f}_y = 1.25$  al movimiento de terremoto.

- Deformación
- Fuerza restauradora y aceleraciones.
- Intervalo de tiempo de cedencia.
- Relación fuerza – deformación.

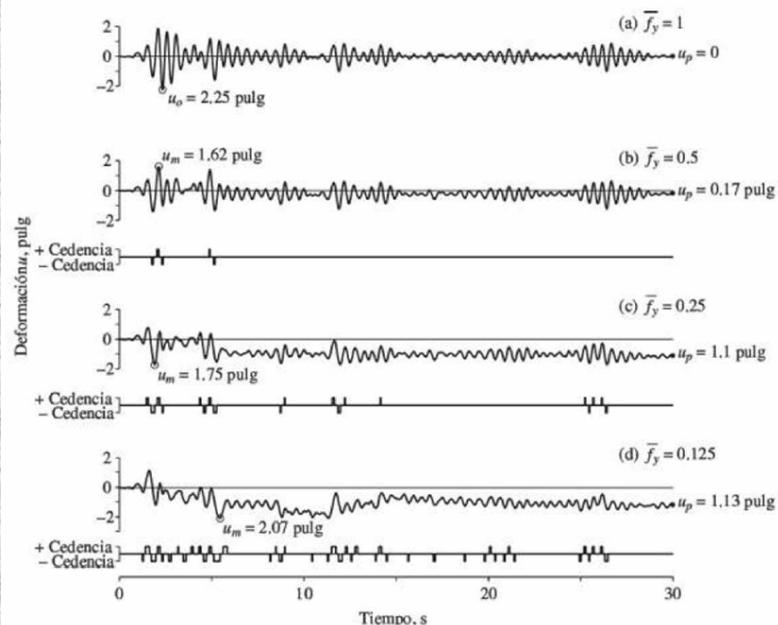
La cedencia el Sistema de distorsionó de su posición de equilibrio inicial.



## EFFECTOS DE LA CEDENCIA

**MAGNA**

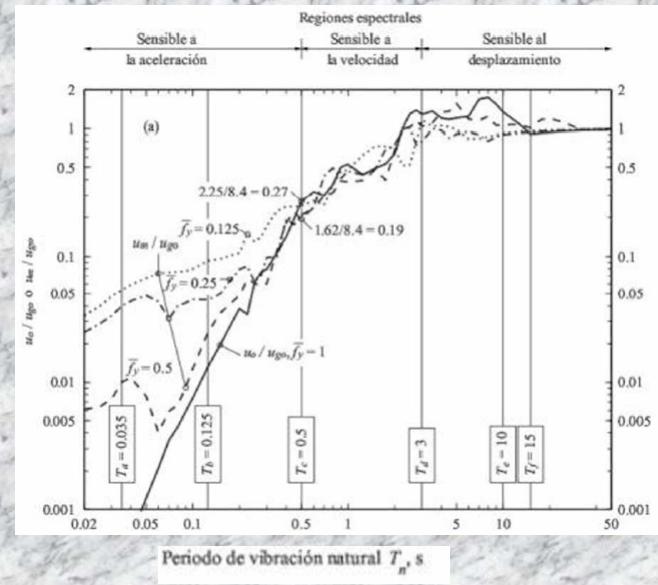
Los sistemas con una Resistencia a la cedencia inferior ceden con mas frecuencia y durante intervalos mas largos.



## DEMANDA DE DUCTILIDAD, DEFORMACIONES MAXIMAS Y RESISTENCIA A LA CEDENCIA NORMALIZADA



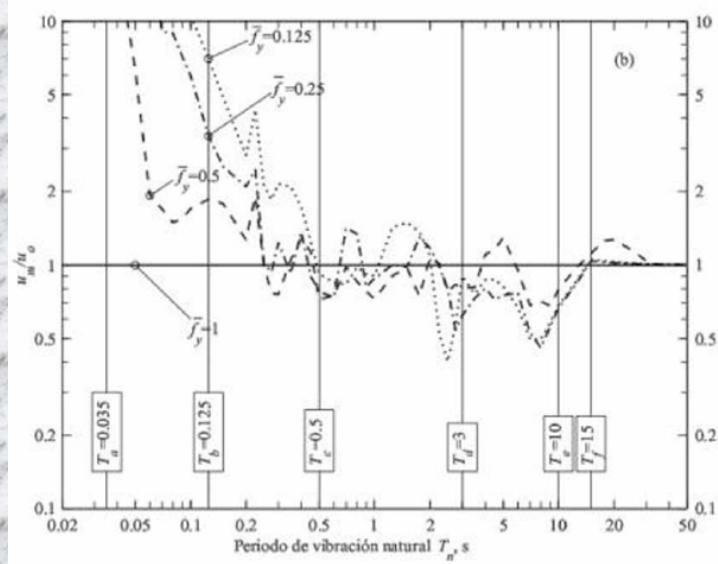
Deformaciones máximas  
 $u_m$  y  $u_o$  de sistemas  
 elastoplásticas y del  
 sistema lineal  
 correspondiente debida al  
 movimiento del terreno.  
 Región espectral



## DEMANDA DE DUCTILIDAD, DEFORMACIONES MAXIMAS Y RESISTENCIA A LA CEDENCIA NORMALIZADA



Relación  $u_m / (u_o T_n)$  varia  $\zeta = 5\%$  y  
 $\bar{f}_y = 1, 0.5, 0.25$  y  $0.125$ .



## ESPECTRO DE RESPUESTA PARA LA DEFORMACIÓN DE CEDENCIA LA RESISTENCIA A LA CEDENCIA



Definiciones

$$D_y = u_y \quad V_y = \omega_n u_y \quad A_y = \omega_n^2 u_y$$

$D_y$ : deformación de cedencia de  $u_y$  del sistema elastoplástico.

$$\frac{A_y}{\omega_n} = V_y = \omega_n D_y \text{ o } \frac{T_n}{2\pi} A_y = V_y = \frac{2\pi}{T_n} D_y$$

La resistencia a la cedencia de un sistema elastoplástico es

$$\frac{A_y}{g} w = f_y, \text{ donde } w \text{ es el peso.}$$

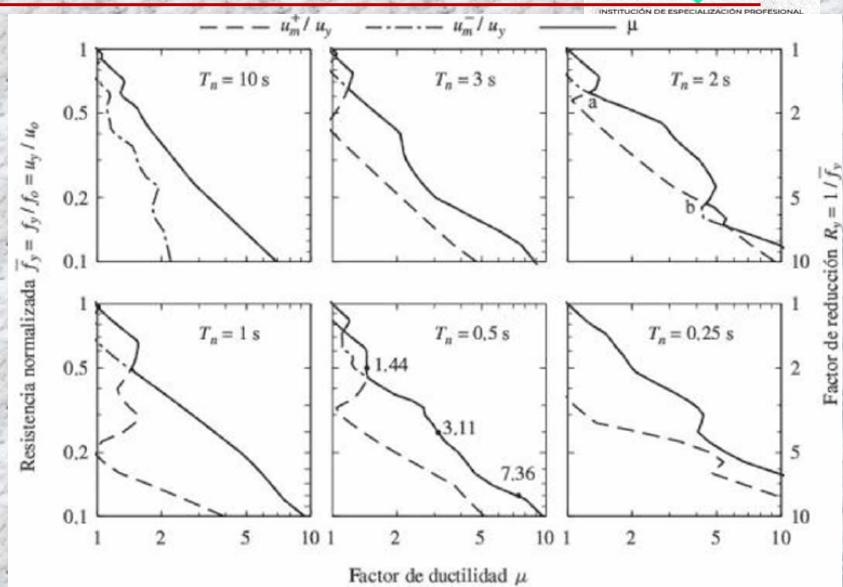
$$f_y = k u_y = m(\omega_n^2 u_y) = m A_y = \frac{A_y}{\omega_n} w$$

$f_o = \frac{A}{g} w$  donde  $A$  es el espectro de respuesta de pseudo-aceleración para los sistemas elásticos lineales.

## RESISTENCIA A LA CEDENCIA PARA UNA DUCTILIDAD ESPECIFICADA



Relación entre la Resistencia normalizada (o factor de reducción) y el factor de ductilidad debido al movimiento del terreno.



## CONSTRUCCION DEL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DUCTILIDAD CONSTANTE



INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

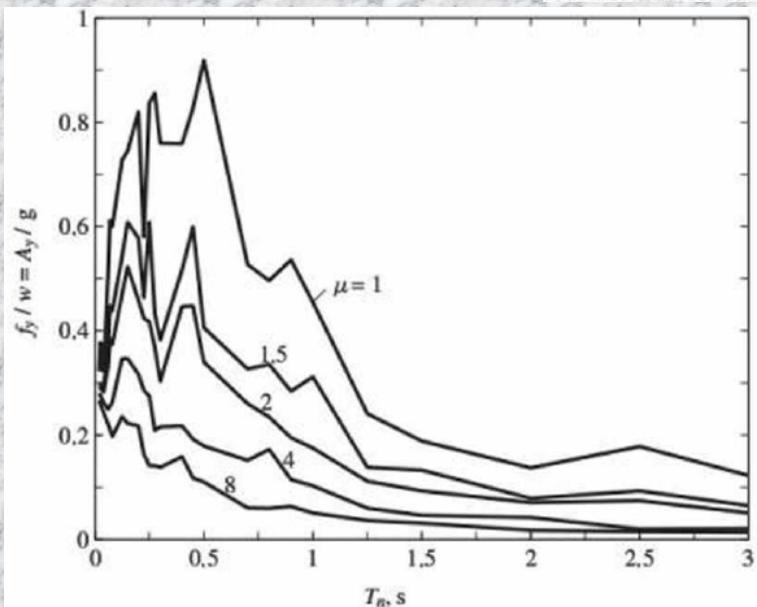
1. Defina numéricamente el movimiento de terreno  $\ddot{u}_g(t)$ .
2. Seleccione y fije el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  para el cual va a graficarse el espectro.
3. Seleccione un valor para  $T_n$ .
4. Determine la respuesta de  $u(t)$  del sistema lineal con  $T_n$  y  $\zeta$  igual a los valores seleccionados.
5. Determine la respuesta  $u(t)$  de un sistema elastoplástico con los mismo  $T_n$  y  $\zeta$  y la resistencia a la cedencia  $f_y = \bar{f}_y f_o$ , con una  $\bar{f}_y < 1$  seleccionada.
6. Para una  $u$  seleccionada, determine el valor  $\bar{f}_y$  a partir de los resultados del paso 5, si mas de  $\bar{f}_y$  valor corresponde a un valor particular de  $u$ , elije el valor mas grande de  $\bar{f}_y$ .
7. Repita los paso del 3 al 6 para un intervalo de  $T_n$  resultante en el espectro valido para el valor de  $u$  elegido en el paso 6
8. Repita los paso del 3 al 7 para vario valores de  $u$

## CONSTRUCCION DEL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DUCTILIDAD CONSTANTE



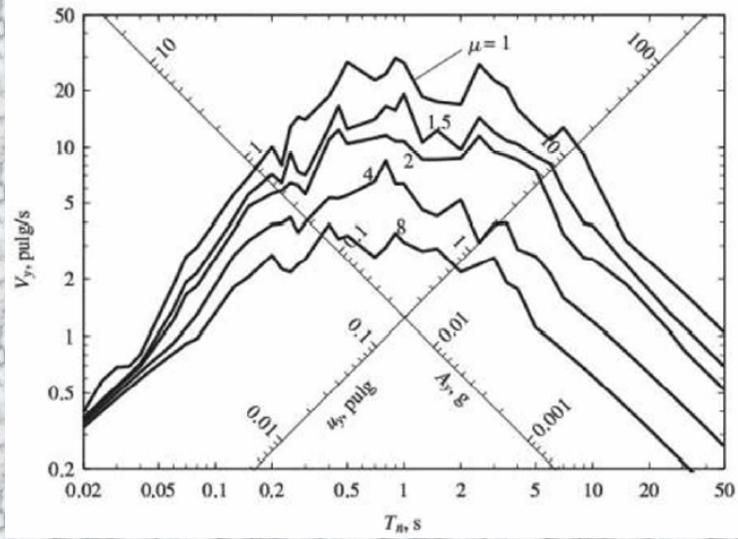
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

Espectro de respuesta de ductilidad constante para los Sistema elastoplásticos y el movimiento del terreno



## CONSTRUCCIÓN DEL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DUCTILIDAD CONSTANTE

Espectro de respuesta de ductilidad constante para los Sistema elastoplásticos y el movimiento del terreno



## RESISTENCIA A LA CEDENCIA Y DEFORMACIÓN A PARTIR DEL ESPECTOR DE RESPUESTA.

A partir de la siguiente ecuación.

$$u_m = \mu u_y$$

Donde.

$$u_y = \frac{f_y}{k} = \left( \frac{T_n}{2\pi} \right)^2 A_y$$

Al unir las ecuaciones se obtiene.

$$u_m = \mu \left( \frac{T_n}{2\pi} \right)^2 A_y$$

## RESISTENCIA A LA CEDENCIA Y DEFORMACIÓN A PARTIR DEL ESPECTOR DE RESPUESTA.



A partir de la siguiente ecuación.

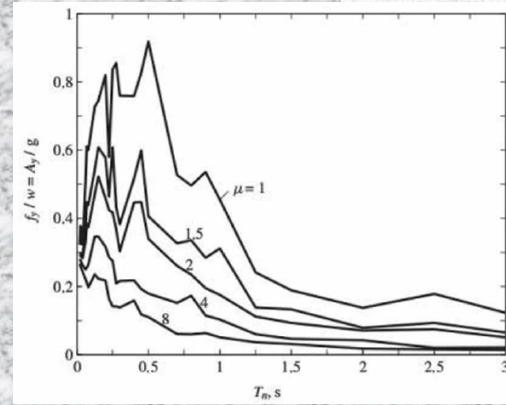
$$u_m = \mu u_y$$

Donde.

$$u_y = \frac{f_y}{k} = \left( \frac{T_n}{2\pi} \right)^2 A_y$$

Al unir las ecuaciones se obtiene.

$$u_m = \mu \left( \frac{T_n}{2\pi} \right)^2 A_y$$



Con ejemplo, para  $T_n = 0.5s$ ,  $\zeta = 5\%$  y  $\mu = 4$ , la figura  $\frac{A_y}{g} = 0.179$   $f_y = 0.179w$   
 $u_y = \left( \frac{0.5}{2\pi} \right)^2 0.179g = 0.438 \text{ pulg}$  se tiene  $u_m = 4(0.438) = 1.752 \text{ pulg}$ .

## RELACIÓN RESISTENCIA A LA CEDENCIA – DUCTILIDAD.

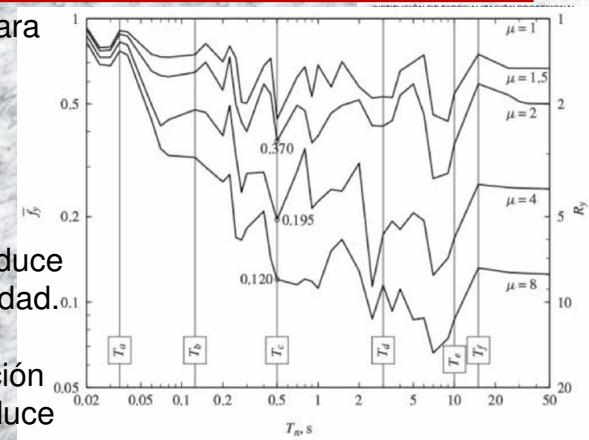


La resistencia a la cedencia  $f_y$  requerida para que un sistema de 1GDL experimento una deformación inelástica es inferior a la resistencia mínima necesaria para que la estructura permanezca elástica.

La resistencia de cedencia requerida se reduce al aumentar los valores del factor de ductilidad.

Incluso pequeñas cantidades de deformación inelástica, correspondientes a  $\mu = 1.5$  produce reducción significativa en la resistencia requerida.

Con valores creciente de  $\mu$  se consigue reducciones mayores pero a un ritmo mas lento  
 Al unir las ecuaciones se obtiene.

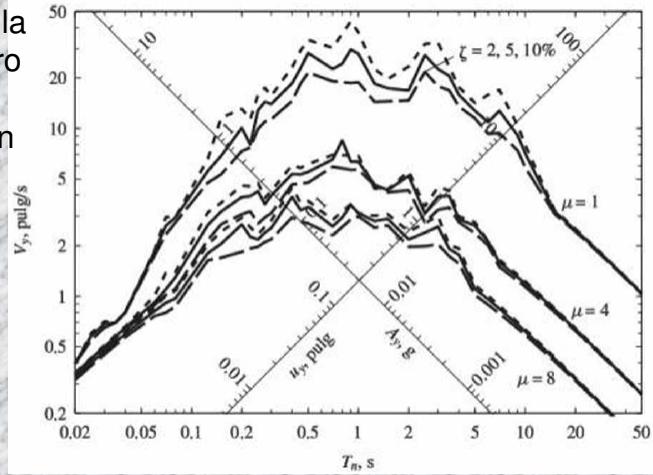


Resistencia normalizada  $\bar{f}_y$  de sistema elastoplástico como una función del periodo natural de vibración  $T_n$  para  $\mu = 1, 1.5, 2, 4$  y  $8$ ;  $\zeta = 5\%$

## EFFECTOS RELATIVOS DE LA CEDENCI Y EL AMORTIGUAMIENTO



Los efectos del amortiguamiento visco y la cedencia son similares en un sentido pero diferente en otro. Se asemejan en el sentido que cambio mecanismos reducen al pseudo-aceleración y por lo tanto, el valor máximo de la fuerza lateral para la que debe diseñarse el sistema.

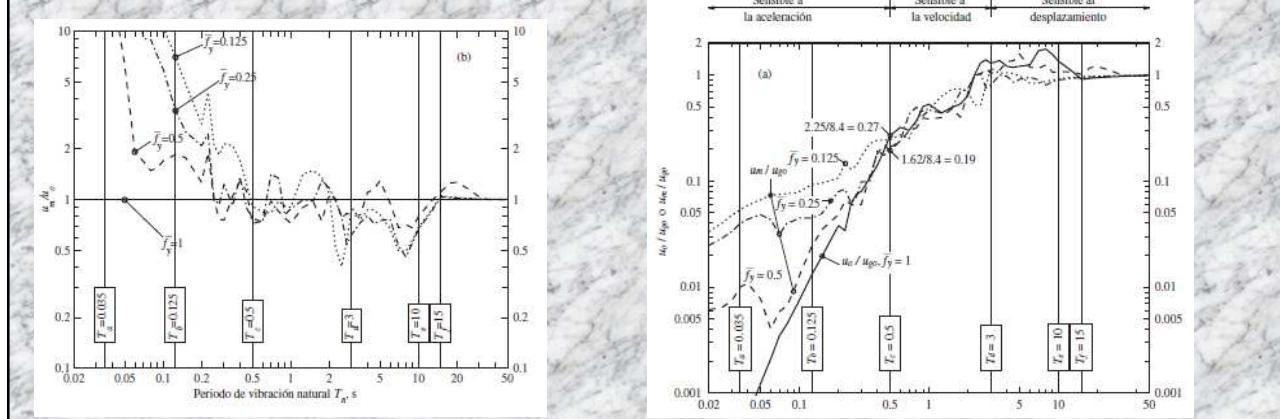


Espectro de respuesta para los sistemas elastoplásticos para  $\mu = 1,4$  y  $8$ ;  $\zeta = 2.5$  y  $10\%$

## EFFECTOS RELATIVOS DE LA CEDENCI Y EL AMORTIGUAMIENTO



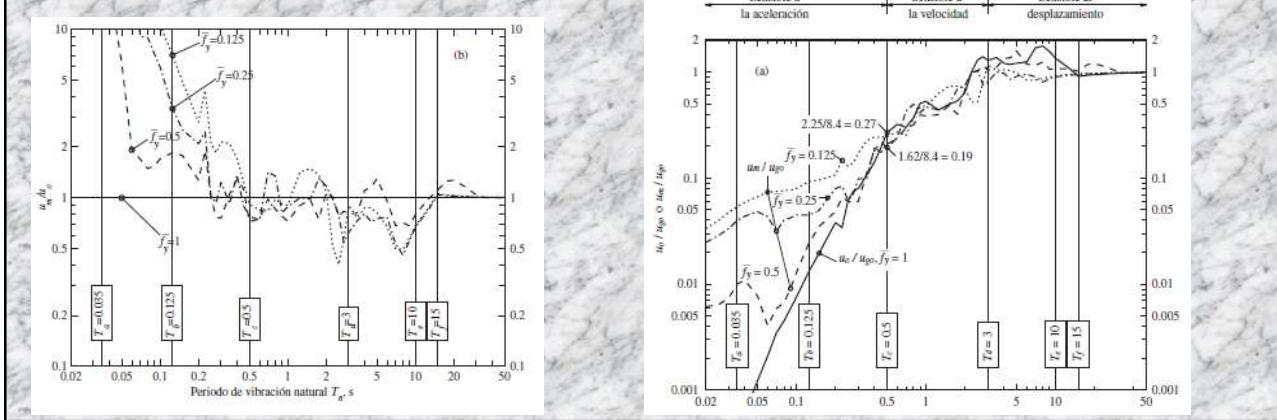
El amortiguamiento tiene una influencia insignificante sobre la respuesta de los sistemas con  $T_n > T_f$  en la región del espectro sensible al desplazamiento, mientras que para tales sistemas los efectos de la cedencia sobre la fuerza de diseño son muy importantes, pero en la deformación máxima  $u_m$  son insignificantes



## EFFECTOS RELATIVOS DE LA CEDENCI Y EL AMORTIGUAMIENTO

**MAGNA**  
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

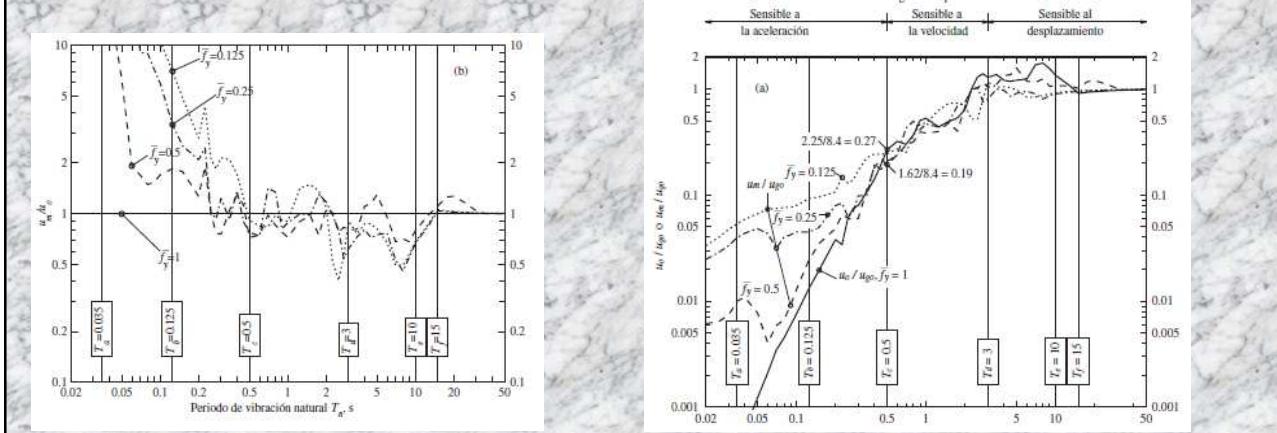
El amortiguamiento tiene una influencia insignificante en la respuesta de los sistemas con  $T_n < T_a$  en la región del espectro sensible a la aceleración, mientras que para tales sistemas los efectos de la cedencia sobre la deformación máxima y la demanda de ductilidad son muy importantes pero en la fuerza de diseño son pequeños



## EFFECTOS RELATIVOS DE LA CEDENCI Y EL AMORTIGUAMIENTO

**MAGNA**  
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

En el límite cuando  $T_n$  tiende a cero, la pseudo-aceleración  $A$  o  $Ay$  se aproximará al valor máximo de la aceleración del terreno, lo que implica que este parámetro de respuesta no se ve afectado por el amortiguamiento o la cedencia



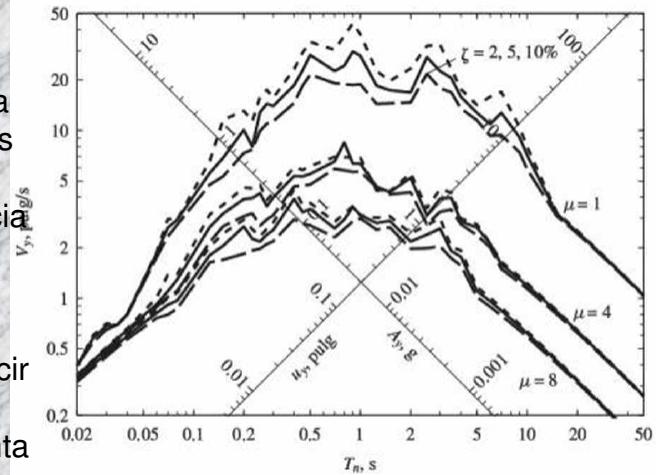
## EFEKTOS RELATIVOS DE LA CEDENCI Y EL AMORTIGUAMIENTO



El amortiguamiento es más efectivo en reducir la respuesta de los sistemas con  $T_n$  en la región del espectro sensible a la velocidad, donde la cedencia es aún más efectiva.

Así, en general, los efectos de la cedencia no pueden considerarse en términos de una cantidad fija de amortiguamiento viscoso equivalente.

La eficacia del amortiguamiento en reducir la respuesta es menor para los sistemas inelásticos y disminuye conforme aumenta la deformación inelástica



Espectro de respuesta para los sistemas elastoplásticos para  $\mu = 1,4$  y  $8$ ;  $\zeta = 2.5$  y  $10\%$

## ENERGIA DISIPADA



La energía de entrada aplicada a un sistema inelástico por un sismo se disipa tanto por el amortiguamiento viscoso como por la cedencia.

Los diferentes términos de energía pueden definirse al integrar ecuación de movimiento de un sistema inelástico.

$$\int_0^u m\ddot{u}(t) du + \int_0^u c\dot{u}(t) du + \int_0^u f_s(u) du = - \int_0^u m\ddot{u}_g(t) du \quad (7.9.1)$$

El lado derecho de esta ecuación es la entrada de energía a la estructura dado el inicio de la excitación sísmica.

$$E_I(t) = - \int_0^u m\ddot{u}_g(t) du$$

Esto es claro si se observa que a medida que la estructura se mueve a través de un incremento del desplazamiento  $du$ , la energía suministrada a la estructura por la fuerza efectiva

$$p_{ef}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$$

## ENERGIA DISIPADA



$$dE_I = -m\ddot{u}_g(t) du$$

El primer término en el lado izquierdo de la ecuación (7.9.1) es la energía cinética de la masa asociada a su movimiento en relación con el terreno.

$$E_K(t) = \int_0^u m\ddot{u}(t) du = \int_0^u m\dot{u}(t) du = \frac{m\dot{u}^2}{2}$$

El segundo término en el lado izquierdo de la ecuación (7.9.1) es la energía disipada por el amortiguamiento viscoso, definida anteriormente en la sección 3.8

$$E_D(t) = \int_0^u f_D(t) du = \int_0^u c\dot{u}(t) du$$

El tercer término en el lado izquierdo de la ecuación (7.9.1) es la suma de la energía disipada por la cedencia y la energía de deformación recuperable del sistema

$$E_S(t) = \frac{[f_S(t)]^2}{2k}$$

## ENERGIA DISIPADA



donde  $k$  es la rigidez inicial del sistema inelástico. Así, la energía disipada por la cedencia es

$$E_Y(t) = \int_0^u f_S(u) du - E_S(t)$$

Con base en estas cantidades de energía, la ecuación (7.9.1) es una descripción del balance de energía para el sistema

$$E_I(t) = E_K(t) + E_D(t) + E_S(t) + E_Y(t)$$

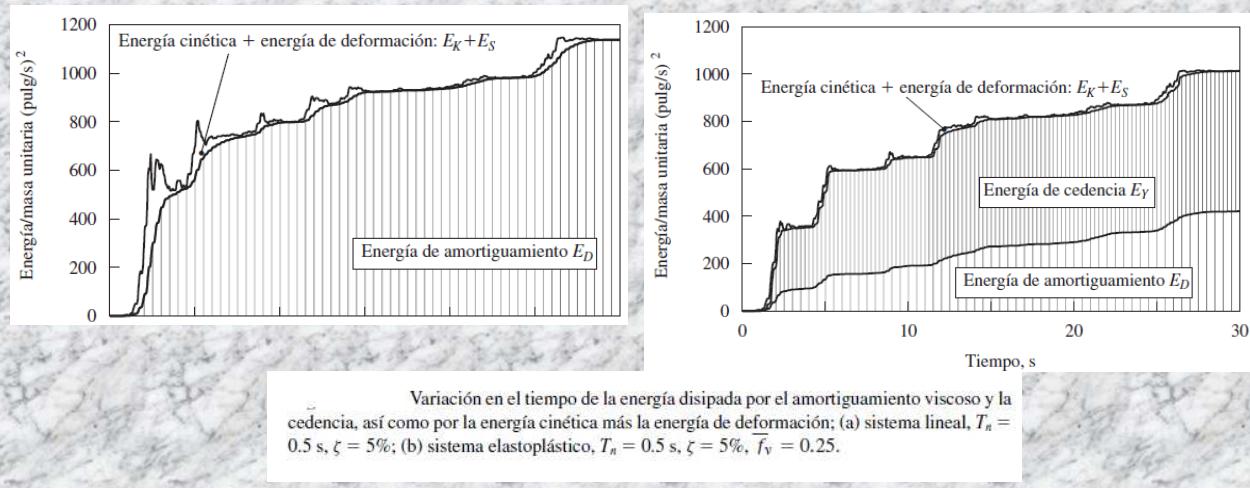
Paralelas con el análisis de la respuesta sísmica de un sistema, estas cantidades de energía pueden calcularse de manera conveniente al reescribir las integrales con respecto al tiempo

$$E_D(t) = \int_0^t c[\dot{u}(t)]^2 dt$$

$$E_Y(t) = \left[ \int_0^t \dot{u} f_S(u) dt \right] - E_S(t)$$

## ENERGIA DISIPADA

El análisis de energía anterior es para una estructura cuya masa está sometida a una fuerza  $p_{ef}(t) = -m\ddot{u}$ , no para una estructura cuya base se excita mediante la aceleración  $\ddot{u}_{gt}$



Variación en el tiempo de la energía disipada por el amortiguamiento viscoso y la cedencia, así como por la energía cinética más la energía de deformación: (a) sistema lineal,  $T_n = 0.5$  s,  $\zeta = 5\%$ ; (b) sistema elastoplástico,  $T_n = 0.5$  s,  $\zeta = 5\%$ ,  $f_V = 0.25$ .

## DISPOSITIVOS COMPLEMENTARIOS PARA LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA

### Amortiguadores de fluido viscoso y viscoelásticos.

En el amortiguador viscoso que se usa con más frecuencia para la protección sísmica de estructuras.

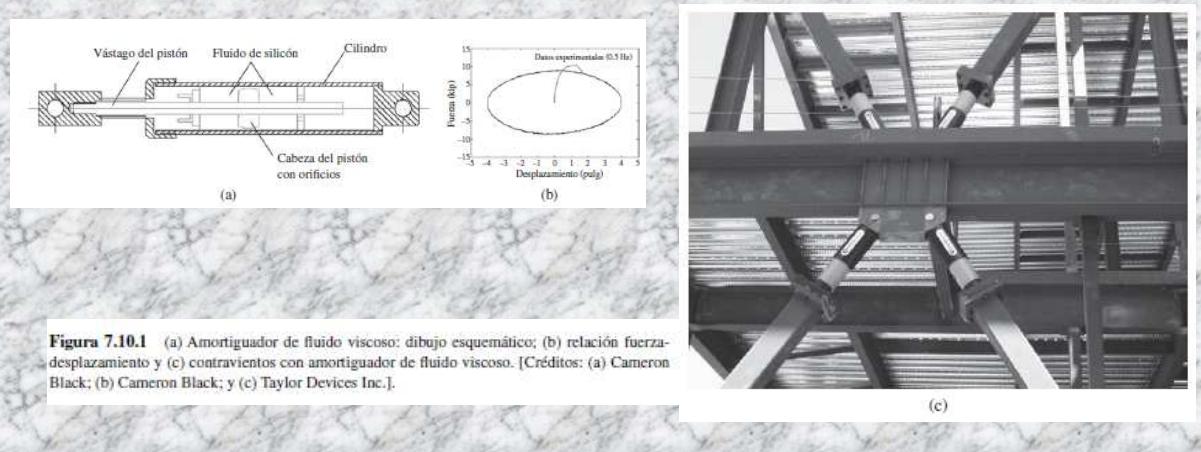
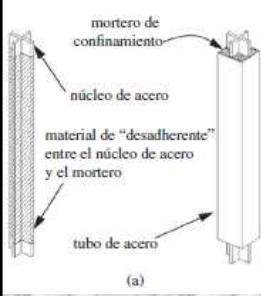


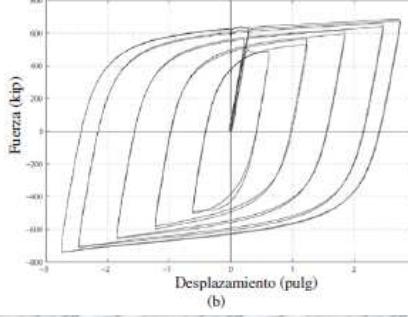
Figura 7.10.1 (a) Amortiguador de fluido viscoso: dibujo esquemático; (b) relación fuerza-desplazamiento y (c) contrafuertes con amortiguador de fluido viscoso. [Créditos: (a) Cameron Black; (b) Cameron Black; y (c) Taylor Devices Inc.].

## DISPOSITIVOS COMPLEMENTARIOS PARA LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA

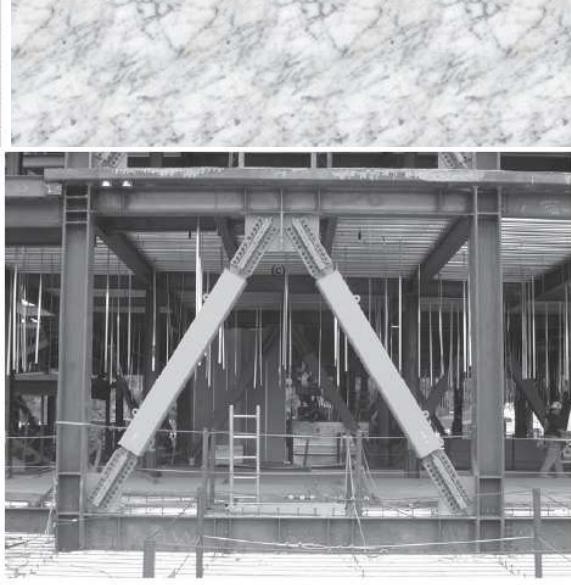
**MAGNA**  
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL



(a)



(b)



(c)

(a) Contraviento restringido contra el pandeo (CRP); dibujos esquemáticos, (b) relación fuerza-desplazamiento y (c) contravientos con CRP. [Créditos: (a) Ian Aiken, (b) Cameron Black; y (c) Ian Aiken].

## DISPOSITIVOS COMPLEMENTARIOS PARA LA DISIPACIÓN DE ENERGÍA

**MAGNA**  
INSTITUCIÓN DE ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

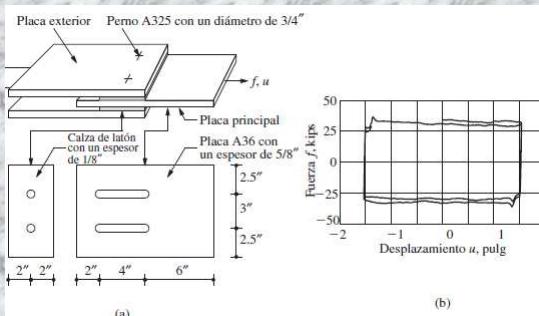
**Amortiguadores metálicos histeréticos**

Los amortiguadores metálicos disipan energía a través del comportamiento histéretico de los metales cuando se deforman en su intervalo inelástico



**Amortiguadores de fricción**

Estos dispositivos aumentan la capacidad de la estructura para disipar energía, pero no cambian demasiado los períodos naturales de vibración (aproximadamente entre 10 y 20%)



(a)

(b)

