Einleitung zum Anfängerpraktikum mit Fehlerrechnung (Differentialrechnung)

Aktualisiert: 09-2019 von C. Krellner

Goethe-Universität Frankfurt am Main
Fachbereich Physik
Physikalisches Institut
Anfängerpraktikum Teil 1 (AP1)

1. Einleitung

Aufgabe des physikalischen Praktikums ist es, dem Studierenden die Physik durch das Experiment näher zu bringen, ihn mit der Methode des Experimentierens vertraut zu machen und ihn zur Kritik der Methode zu motivieren.

Wegen der organisatorisch bedingten Entkopplung des Praktikums vom Gang der Vorlesung ist es unumgänglich, dass sich die Teilnehmer vor jedem Versuch auch theoretisch vorbereiten. Dazu sollten sie neben den „Anweisungen“ auch andere Einführungen in die Physik verwenden. Während des Praktikums stehen den Teilnehmern die Assistenten des Praktikums für die Erteilung von Auskünften zur Verfügung.

Nach Abschluss des Experiments soll innerhalb einer Woche eine Ausarbeitung (Protokoll) in elektronischer Form (PDF-Datei) in OLAT hochgeladen werden. Neben dem genormten Deckblatt enthält es folgende Kapitel:

1) Aufgabenstellung.
2) Physikalische Grundlagen, eventuell mit Skizze/Bild.
3) Versuchsaufbau mit Skizze/Bild.
4) Messwerte, daraus ermittelte Mittelwerte und Endresultate mit Fehler.
5) Auswertung, wenn sinnvoll mit graphischen Darstellungen.
6) Fehlerrechnung und Diskussion der Ergebnisse.
7) Literaturangeben.
8) Anhang, eventuell Messwertetabellen, Nebenrechnungen.

2. Messung und Genauigkeit

Eine Größe messen heißt, eine Maßzahl zu bestimmen, die angibt, wieviel mal eine konventionell festgelegte Einheit in der unbekannten Größe enthalten ist. Nun gibt es keine „genauen“ Instrumente und keine „exakten“ Methoden in der Physik, sondern Instrumente und Methoden erscheinen nur mitunter als exakt. Eine Messung führt daher nicht zu einer ganz eindeutigen Maßzahl, sondern zur Angabe eines Bereiches, innerhalb dessen die Maßzahl liegt.

Nach dem jeweiligen Genauigkeitsanspruch richtet es sich, welche Methode zweckmäßigerweise zur Anwendung gebracht werden kann und wieviel Zeit zu ihrer Durchführung benötigt wird. Die Dichte einer Flüssigkeit z.B. auf 1% genau zu bestimmen, wird sich mit einem Messzylinder und einer Briefwaage in etwa einer Minute ausführen lassen. Auf 0.1% wird man sie mit einer Mohrschen Waage in einer Viertelstunde bestimmen können. Eine Genauigkeit von 0.001% wird man mit einem Pyknometer, einem Thermostaten und einer guten Waage bei einem Zeitaufwand von einigen Stunden erreichen. Eine noch 100-mal größere Genauigkeit zu erzielen, wird selbst bei Einsatz größter Mittel kaum durchführbar sein. Den Begriff „genau“ und „ungenau“ gibt es daher nicht in einem absoluten Sinne, sondern es gibt nur die Frage, was sich aus einem vorgegebenen Instrument und einer bestimmten Methode in einer vorgegebenen Zeit von einem bestimmten Experimentator an

Genauigkeit herausholen lässt. Darüber soll der Studierende im Praktikum Erfahrungen sammeln, die er für die weitere Praxis braucht.

3. Statistische Schwankungen eines Messwerts

Eine erste Begrenzung der Genauigkeit stellt die Ableseunsicherheit der benutzten Instrumente dar. Wenn man eine Länge mit einem Millimetermaßstab bestimmt, so wird man die Bruchteile des Millimeters nur der Schätzung nach ermitteln und daher angeben, dass das Resultat eine Unsicherheit von ca. ± 0.1 mm besitzt. Digitalinstrumente haben zwar keine Ableseunsicherheit, dennoch ist abgesehen von tatsächlichen Schwankungen das letzte Digit unsicher. Der Ablesefehler ist jedoch nicht das einzige, was berücksichtigt werden muss. Meistens wird man feststellen, dass bei Wiederholung der Messung innerhalb einer Messreihe Schwankungen auftreten, die größer sind als die Ableseunsicherheit. Das Beobachten dieser Schwankungen ist sehr wichtig, denn sie liefern ein Maß für die wissenschaftliche Aussagekraft des Experiments. Das Wiederholen der Messungen unter möglichst gleichen oder unter kontrolliert veränderten Bedingungen ist daher ein Grundprinzip der experimentellen Arbeit. Im Folgenden wird beschrieben, wie man aus den beobachteten Schwankungen einen Wert für die Genauigkeit des Experiments ermitteln kann.

4. Standardabweichung von Einzelmessung und Mittelwert

Betrachten wir eine Messreihe, bei der eine physikalische Größe x unter möglichst gleichen Bedingungen n-mal gemessen wird. Die gewonnenen n Messwerte bezeichnen wir als x_1, ..., x_i, ..., x_n. Wir unterteilen den Bereich der n gemessenen Werte in eine Reihe von gleich großen Intervallen der Breite Δx und bestimmen die Anzahl der Messwerte $n(x)$ pro Intervall.

Diese Häufigkeitsverteilung kann in einem Balkendiagramm dargestellt werden, das *Histogramm* genannt wird. Figur 1 zeigt ein solches Beispiel, in dem insgesamt $n = \sum n(x) = 200$ Messungen einer Variable x dargestellt sind. Die Intervallbreite ist $\Delta x = 1$. Man erkennt, dass die Messwerte nicht gleichmäßig verteilt sind, sondern sich anhäufen. Für die meisten kontinuierlich veränderlichen Messgrößen nimmt man an, dass die Verteilung für immer größere n und immer kleinere Intervallbreite Δx die sog. *Gauß*- oder *Normalverteilung* anstrebt (siehe Abbildung 1). Diese Verteilung wird auch Glockenkurve genannt und ist charakterisiert durch ihre Breite und ihren Schwerpunkt. Diese beiden Größen enthalten die benötigte Information. Der Schwerpunkt wird bei einer symmetrischen Verteilung durch den arithmetischen Mittelwert $\langle x \rangle$ gegeben:

(1) $$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Er gibt den gesuchten Messwert an. Ein vielbenutztes Maß für die Breite der Kurve und damit für die Genauigkeit einer Einzelmessung ist die sogenannte *Standardabweichung der Einzelmessung* σ :

(2) $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}$$

Für $n = 1$ ($n - 1 = 0$) ist σ nach Gl.(2) undefiniert. Das bringt die Tatsache zum Ausdruck, dass man für eine Fehlerabschätzung mindestens zwei Messwerte braucht. Bei der theoretischen Gaußverteilung ($n \to \infty, \Delta x \to 0$) liegen genau 68.3% der Messwerte in dem Bereich zwischen $\langle x \rangle + \sigma$ und $\langle x \rangle - \sigma$ (schraffierter Bereich in Abbildung 1). Für endliches n ist σ mit einer Unsicherheit behaftet, trotzdem aber brauchbar als Indikator der Messgenauigkeit. Als Faustregel kann man behalten, dass für nicht zu kleines n ($n > 5$) zwei Drittel der Messwerte zwischen $\langle x \rangle + \sigma$ und $\langle x \rangle - \sigma$ liegen und schon über 90% zwischen $\langle x \rangle + 2\sigma$ und $\langle x \rangle - 2\sigma$.

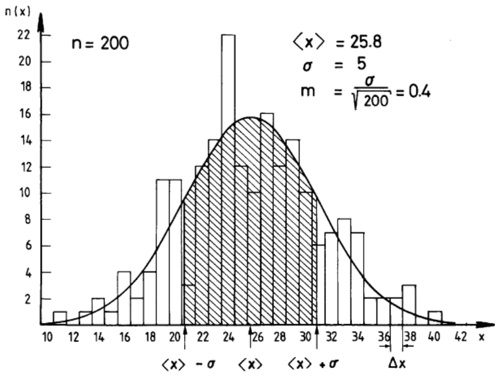

Abbildung 1: Histogramm und zugehörige Gaußkurve für n = 200.

Aus Abbildung 1 wird einsichtig, dass die Unsicherheit des Mittelwerts (und damit des Messwerts) mit steigender Anzahl an Messungen kleiner wird als der Fehler einer einzelnen Messung. Man unterscheidet daher zwischen der Standardabweichung der Einzelmessung σ und der Standardabweichung des Mittelwerts m. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist gegeben durch:

(3) $$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Obwohl die Genauigkeit der Einzelmessung σ mit steigendem n einen immer weniger schwankenden, konstanten Wert anstrebt, kann man durch Wiederholung der Messung die Präzision des Messresultats m verbessern. σ ist ein statistisches Maß für die Qualität der jeweiligen Kombination Messaufstellung – Experimentator, m für den Fleiß des Experimentators und für die erreichte Genauigkeit des Messresultats.

Der Fehler des Mittelwertes m ist proportional zu $1/\sqrt{n}$; durch Wiederholung der Messungen lässt sich zunächst eine rasche Steigerung der Genauigkeit erzielen. Man erreicht mit einer Messwiederholung jedoch bald eine Grenze der Nützlichkeit. Für eine 3-fache Genauigkeit ist eine 9-fache Anzahl von Messungen erforderlich, für eine 10-fache Genauigkeit braucht man schon die 100-fache Anzahl.

Eine weitaus größere Genauigkeitssteigerung wird erzielt, wenn anstatt der n-maligen Messung von x sofort die n-fache Größe $n \cdot x$ gemessen werden kann. Dies ist z.B. der Fall bei der Untersuchung der Schwingungsdauer eines Pendels. Anstatt 10-mal die Zeit einer einzelnen Schwingungsperiode T zu ermitteln, wertet man sofort die Schwingungsdauer von 10 Pendelschwingungen $10 \cdot T$ aus. Da man eine 10-fache Zeitdauer mit dem gleichen Absolutfehler wie eine 1-fache bestimmen kann, ist der Fehler in $\langle T \rangle$ zehnmal kleiner als der Fehler einer Einzelmessung von T. Zehnmal T zu messen ist mehr Aufwand, und der Fehler im Mittelwert wäre nur um ein Faktor $\sqrt{10} \approx 3$ kleiner. Soll eine unbekannte Skala mit Hilfe einer bekannten geeicht werden, schätzt man nicht die Länge eines einzelnen Skalenteils ab, sondern vergleicht ebenfalls möglichst weite Skalenbereiche miteinander.

Neben der hier behandelten Gaußverteilung bei statistisch streuenden Messwerten gibt es noch andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen wie die Binomialverteilung (für Kopf-oder-Zahl-ähnliche Prozesse), die Lorentzverteilung (bei Resonanzphänomenen) oder die Poissonverteilung (für Vorgänge mit sehr niedrigen Wahrscheinlichkeiten). Für alle kann man Abweichungen vom Mittelwert bestimmen, oft auch Linienbreiten genannt.

5. Statistische und systematische Fehler

Die bisher behandelten Fehler einer Messung resultieren aus statistischen Schwankungen der Messwerte um den Mittelwert. Man bezeichnet sie daher als *statistische Fehler*. Sie haben mal einen zu hohen, mal einen zu niedrigen Messwert zur Folge, beeinflussen den Mittelwert der Messung aber nicht.

Die Ursachen von statistischen Fehlern sind z.B. mangelhafte Reproduzierbarkeit wegen Lagerreibung, begrenzte Empfindlichkeit der Messinstrumente (auch Augen und Ohren sind als Messinstrumente einsetzbar), Schwankungen der Messgröße selbst z.B. wegen ungewollter Temperaturschwankungen, usw. Manchmal sind die Grenzen der maximal erreichbaren Genauigkeit auch fundamentalerer Art. So wird z.B. das Auflösungsvermögen eines Mikroskops beschränkt durch die Wellenlänge der verwendeten Strahlung.

Neben den statistischen Fehlern kann ein Messresultat auch durch *systematische Fehler* beeinflusst werden. Systematische Fehler unterscheiden sich von statistischen Fehlern dadurch, dass sie entweder einen zu großen oder einen zu kleinen Messwert zur Folge haben und daher den Mittelwert in eine Richtung verschieben. Eine Wiederholung der Messung kann den systematischen Fehler des Mittelwerts *nicht* verringern.

Ursachen für systematische Fehler sind z.B. die unkorrekte Kalibrierung einer Waage, eine falsch abgelesene Zeitbasiseinstellung eines Oszillographen, nicht konsistenter Einsatz von Einheiten, verlaufende Nulleinstellung, usw.

Zur Erfassung von systematischen Fehlern sollte man etwas messen, was schon bekannt oder der Literatur zu entnehmen ist. Mit einer Mohrschen Waage bestimme man z.B. zunächst die Dichte von normalem Wasser. Wenn das Resultat nicht in etwa den Wert von 1 g/cm^3 erreicht, sollte man sich auf die Suche nach systematischen Fehlern begeben. Ein Abbe-Refraktometer wird ebenfalls mit Hilfe einer Messung an destilliertem Wasser geeicht. Bei dem Gebrauch einer Pirani-Druckmessröhre lässt sich die Skala durch Messung mit niedrigstem Druck und Atmosphärendruck kontrollieren und justieren. Wenn zu einem Messverfahren einmal keine Eichgröße vorhanden ist, gibt eine Anwendung verschiedener Messmethoden auf die gleiche Messgröße möglicherweise Aufschluss.

Manchmal sind systematische Fehler theoretisch oder empirisch so gut zu erfassen, dass sie als Korrektur des Messresultates in die Messmethode inkorporiert werden können. Zum Beispiel lässt sich bei der Pyrometrie (Temperaturmessung eines Körpers mit Hilfe des Planckschen Strahlungsgesetzes) die falsch abgelesene Temperatur eines glühenden Palladiumblechs korrigieren, wenn man die Abweichung seines Verhaltens von dem eines idealen schwarzen Strahlers mit in Betracht zieht.

6. Ermittlung und Auswertung des Messfehlers

Bei vielen Experimenten liefert die eingesetzte Messapparatur unmittelbar die gesuchte Messgröße. Dies ist z.B. der Fall bei der Verwendung einer Waage zur Massenbestimmung oder bei der Messung einer Länge mit einem Maßstab. In solchen Fällen lassen sich Messwert und Messfehler, sehen wir von systematischen Fehlern einmal ab, über eine mehrfache Messwiederholung ermitteln. Der Messwert ergibt sich dann aus dem Mittelwert der Einzelmessungen, seine Unsicherheit aus der Standardabweichung des Mittelwerts.

Neben der statistischen Erfassung sollte man jedoch immer eine Plausibilitätsbetrachtung bezüglich des Messwerts und eine quantitative Abschätzung des Messfehlers anfügen. Sie vermitteln dem Experimentator ein Gefühl für die Aussagekraft der Messung. Ist eine Wiederholung der Messung und damit eine statistische Auswertung nicht möglich oder die Anzahl der Wiederholungen zu gering, kann der Messfehler ausschließlich über eine individuelle Abschätzung ermittelt werden. Hierzu sollten alle wesentlichen Störeinflüsse berücksichtigt und quantitativ erfasst werden, was eine kritische Auseinandersetzung mit dem Experiment erfordert.

Liefert die Messapparatur nicht sofort den gesuchten Wert, sondern muss dieser aus verschiedenen Messwerten ermittelt werden, fließen die verschiedenen Messfehler ebenfalls ins Ergebnis ein. Die einzelnen Messwerte werden hierzu als separate Messgrößen aufgefasst, ihre jeweiligen Messfehler werden für jede Größe aus der jeweiligen Standardabweichung oder über eine quantitative Genauigkeitsabschätzung gewonnen. Wird beispielsweise zur Dichtebestimmung eines Körpers die Masse und das Volumen separat gemessen, muss für beide Größen eine Fehleranalyse stattfinden. Den Gesamtfehler des Endresultats (hier die Dichte des Körpers) erhält man nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung, die weiter unter besprochen werden.

Eine weiterführende Auswertungsmethode ist die Lineare Regression, die bei der Untersuchung funktionaler Zusammenhänge zwischen Endergebnis und einzelnen Messvariablen (z.B. Temperatur) angewendet werden kann. Sie liefert ähnlich der Standardabweichung bei der statistischen Auswertung sofort ein Maß für die Unsicherheit des Resultats.

7. Notation von Messwert und Messfehler

Das Ergebnis einer Messung ist für ein wissenschaftliches Arbeiten nur dann brauchbar, wenn es mit einer Angabe der Einheit und des Messfehlers versehen wird. Diese Angabe sollte dabei möglichst unmissverständlich sein.

Die einfachste Methode, einen Messfehler darzustellen, besteht darin, dass nur diejenigen Dezimalstellen der Messgröße angeben werden, die bis auf die letzte definitiv sicher sind (sogenannte *signifikante Stellen*). So bedeutet eine Massenangabe von $M = 5.4\,\mathrm{g}$, dass die erste Nachkommastelle bereits unsicher ist. In diesem Praktikum wird jedoch eine Schreibweise bevorzugt, bei der der Unsicherheitsbereich explizit anzugeben ist. Beträgt die Unsicherheit der Masse etwa $\Delta M = \pm 0.2\,\mathrm{g}$, wird dies folgendermaßen angegeben:

(4) $$M = (5.4 \pm 0.2)\,\mathrm{g}$$

Hier wurde der Fehler des Messwerts als absolute Größe ($\Delta M = \pm 0.2\,\mathrm{g}$) erfasst (*absoluter Fehler*). Man kann den Fehler aber auch als relative Größe bezüglich des Messwertes beschreiben und erhält einen *relativen bzw. prozentualen Fehler*

(5) $$\frac{\Delta M}{M} = \pm \frac{0.2\,\mathrm{g}}{5.4\,\mathrm{g}} \approx \pm 0.04 = \pm 4\%$$

Auf welche der beiden Notationen, der des absoluten oder der des relativen Fehlers, zurückgegriffen wird, ist Geschmacksfrage. Für die Fehlerfortpflanzung (siehe unten) braucht man jedoch sowohl Absolutfehler als auch Relativfehler der Zwischenresultate.

Weiterhin sind für eine klare und übersichtliche Protokollierung folgende Punkte zu beachten:

a. Von einem Messresultat werden generell *nur* die signifikanten Stellen angegeben. Die signifikanten Stellen werden mit Hilfe der Fehlerangabe ermittelt. Diese Fehlerangabe soll, wenn möglich, die Standardabweichung des Mittelwerts m sein, ansonsten der Ablesefehler oder eine vernünftige Fehlerabschätzung. Eine Angabe weiterer Stellen täuscht eine Genauigkeit vor, die nicht vorhanden ist!

b. Da der Fehler aufgrund der endlichen Anzahl der Messungen selbst eine erhebliche Unsicherheit besitzt, weist die Fehlerangabe selbst nur eine, maximal zwei signifikante Stellen auf. Der Messfehler wird dabei großzügig aufgerundet. So wird aus dem ermittelten Mittelwert $\langle M \rangle$ sowie Standardabweichung des Mittelwerts *m*:

   $\langle M \rangle = 5.3678921\,\mathrm{g}, m = 0.17965443\,\mathrm{g} \;\rightarrow\; M = (5.4 \pm 0.2)\,\mathrm{g},$ oder $M = (5.37 \pm 0.18)\,\mathrm{g}$

c. Der Messwert und sein absoluter Fehler besitzen die *gleiche* Dimension, bei exponentieller Schreibweise ebenfalls den *gleichen* Exponenten:

   $M = (5.4 \pm 0.2)\,\mathrm{g},$ oder $M = (5.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$

   Falsche Angaben sind z.B.: $M = 5.4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \pm 0.2\,\mathrm{g},$ oder $M = 5.4\,\mathrm{g} \pm 0.2$ etc.

8. Fehlerfortpflanzung

Wir nehmen an, dass das Resultat eines Experimentes nicht unmittelbar mit einem Messwert gegeben ist, sondern erst über eine mathematische Funktion aus unterschiedlichen Messparametern erhalten werden kann. Es stellt sich dann die Frage nach der Fortpflanzung der einzelnen Messfehler zum Gesamtfehler im Endergebnis. Ein Beispiel ist die oben erwähnte Dichtebestimmung eines Körpers. Da das gesuchte Ergebnis, die Dichte des Körpers ($\rho = M/V$), eine Funktion von dem Messwert Masse *M* und dem Messwert Volumen *V* ist, erhält man über die Messfehler, ΔM und ΔV, mit den Regeln der Fehlerfortpflanzung den Fehler der Dichte $\Delta\rho$.

Zunächst beschränken wir uns auf nur eine Messgröße x, die einen Messfehler von Δx besitzen soll. Die gesuchte Funktion $f(x)$, das Ergebnis unseres Experiments, besitzt damit eine Unsicherheit Δf:

(6) $$x \pm \Delta x \rightarrow f \pm \Delta f$$

Unter der Annahme, dass $|\Delta x| << x$ bzw. $|\Delta f| << f$ ist, erhalten wir über die Ableitung $f'(x)$ den gesuchten Fehler Δf:

(7) $$\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x$$

<u>BEISPIEL:</u> Das Volumen einer Kugel mit dem Durchmesser d beträgt $V = V(d) = \pi\, d^3/6$. Ist der Durchmesser mit einer Genauigkeit von $d \pm \Delta d$ gemessen worden, liegt der Volumenfehler bei

(8) $$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial d} \cdot \Delta d = \left(\pi \frac{d^2}{2}\right) \cdot \Delta d \quad \text{mit} \quad \frac{\partial V}{\partial d} = \pi \frac{d^2}{2}$$

Ist das Resultat des Experiments eine Funktion von mehreren Messparametern $f(x_1, x_2, \ldots)$, so wird jede Messgröße x_i aufgrund ihres Fehlers Δx_i einen Fehler Δf_i in f verursachen. Für Δf_i erhält man dann analog zu Gl.(7):

(9) $$\Delta f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$$

Bei der Bildung der Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ werden die jeweils übrigen Parameter $x_{j(\neq i)}$ als konstant angesehen. Dies ist gestattet, wenn die einzelnen Parameter unabhängig voneinander sind. In diesem Fall sind auch die resultierenden Fehler Δf_i unabhängig voneinander und werden sich daher statistisch gesehen zum Teil gegenseitig aufheben. Der Gesamtfehler Δf ergibt sich dann über das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

(10) $$\Delta f = \sqrt{(\Delta f_1)^2 + (\Delta f_2)^2 + \ldots} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot (\Delta x_2)^2 + \ldots}$$

Aufgrund der quadratischen Gewichtung der Fehler in Gl.(10) schlägt sich der jeweils größte Messfehler am weitaus stärksten nieder.

Vernachlässigt man die statistische gegenseitige Kompensation der Einzelfehler, erhält man den sogenannten *Maximalfehler*. Er ergibt sich aus der Summe der Beträge der Einzelfehler:

(11) $$\Delta f_{\max} = |(\Delta f_1)| + |(\Delta f_2)| + \ldots = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \cdot \Delta x_1\right| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \cdot \Delta x_2\right| + \ldots$$

Zur Fehlerrechnung in diesem Praktikum sollte man das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz Gl.(10) anwenden, da die einzelnen Messgrößen im Regelfall unabhängig sind.

<u>**BEISPIEL:**</u> Für die Dichtebestimmung $\rho = M/V$ erhalten wir mit den Messfehlern ΔM und ΔV nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz einen Gesamtfehler von:

(12) $$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial M}\right)^2 \cdot (\Delta M)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2 \cdot (\Delta V)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 \cdot (\Delta M)^2 + \left(-\frac{M}{V^2}\right)^2 \cdot (\Delta V)^2}$$

In der Praxis lassen sich daraus einige Spezialfälle ableiten. Sie reichen bei einfachen funktionalen Zusammenhängen häufig aus und erleichtern die experimentelle Auswertung im Praktikum. Darauf vorgreifend (siehe nächster Abschnitt), bringen wir Gl.(12) auf eine merklich einfachere Form durch Übergang zum Relativfehler $\frac{\Delta \rho}{\rho} = \Delta \rho \frac{V}{M}$ anstatt des Absolutfehlers:

(13) $$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$

9. Praktische Spezialfälle

Wir wollen die beiden Spezialfälle der Fehlerfortpflanzung betrachten, bei denen das gesuchte Resultat entweder aus einer Summe (Differenz) oder aus einem Produkt (Quotient) von Messwerten besteht. In beiden Fällen soll der Fehler nach dem Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet werden.

<u>**SPEZIALFALL I:**</u>

Fehler bei einer SUMME (DIFFERENZ) von Messwerten x_i mit multiplikativen Konstanten a_j

(14) $$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots; \quad \text{Meßfehler:} \quad \pm\Delta x_1, \pm\Delta x_2, \pm\Delta x_3, \ldots$$

Der Fehler von f ergibt sich nach Gl.(10) zu:

(15) $$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\sum_i \left(a_i \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\left(a_1 \Delta x_1\right)^2 + \left(a_2 \Delta x_2\right)^2 + \left(a_3 \Delta x_3\right)^2 + \ldots}$$

<u>REGEL I:</u> Bei einer Summe (Differenz) von Messwerten addieren sich die Quadrate der *absoluten* Fehler:

$$f = \sum_i a_i x_i \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \sqrt{\sum_i \left(a_i \Delta x_i \right)^2}$$

<u>SPEZIALFALL II:</u>

Fehler bei einem PRODUKT (QUOTIENT) von Messwerten x_i mit Exponenten n_i und einer multiplikativen Konstanten a

(16) $f = a \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \ldots$; Meßfehler: $\pm \Delta x_1, \pm \Delta x_2, \pm \Delta x_3, \ldots$

Der Fehler von f ergibt sich nach Gl.(10) zu:

(17) $$\Delta f = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{a \sum_i \left(n_i \cdot \frac{f}{x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\sum_i \left(n_i \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

REGEL II: Bei einem Produkt (Quotient) von Messwerten addieren sich die Quadrate der *relativen* Fehler:

$$f = a \prod_i x_i^{n_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\sum_i \left(n_i \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

<u>BEISPIELE FÜR REGEL I:</u>

1. Abschätzung der Vorbereitungszeit τ für den nächsten Praktikumsversuch.
   Zweimaliges Lesen der Anleitung: $2 \cdot \left(t_1 \pm \Delta t_1\right) = 2 \cdot \left(25\,\text{min} \pm 5\,\text{min}\right)$
   Literaturstudium: $\left(t_2 \pm \Delta t_2\right) = \left(40\,\text{min} \pm 10\,\text{min}\right)$
   Vorhandenes Vorwissen spart die Zeit: $\left(t_3 \pm \Delta t_3\right) = \left(20\,\text{min} \pm 10\,\text{min}\right)$
   $$\tau = 2 \cdot t_1 + t_2 - t_3 = 70\,\text{min} \;\rightarrow\; \Delta \tau = \sqrt{\left(2 \cdot \Delta t_1\right)^2 + \left(\Delta t_2\right)^2 + \left(\Delta t_3\right)^2} = 18 \text{ min}\,.$$
   Die Vorbereitungszeit liegt also bei $\tau = \left(70 \pm 18\right)\text{min}$. Vorsicht! Der relative Fehler bei der Differenzbildung kann stark anwachsen, wie im nächsten Beispiel gezeigt werden soll.
2. Aus der Wägung eines Gefäßes mit und ohne Substrat soll die Masse des Substrates M bestimmt werden.
   Gefäß mit Substrat: $\left(M_1 \pm \Delta M_1\right) = \left(102.1 \pm 0.5\right)\text{g}$
   Gefäß ohne Substrat: $\left(M_2 \pm \Delta M_2\right) = \left(99.8 \pm 0.5\right)\text{g}$

$$M = M_1 - M_2 = 2.3\,\text{g} \quad \rightarrow \quad \Delta M = \sqrt{(\Delta M_1)^2 + (\Delta M_2)^2} = 0.7\,\text{g}$$

Das Substrat besitzt mit $M = (2.3 \pm 0.7)\,\text{g}$ einen relativen Fehler von $\Delta M_i / M_i \approx 30\%$, während er bei den Einzelmessungen bei $\Delta M_i / M_i = 0.5\%$ liegt!

BEISPIELE FÜR REGEL II:

3. Es soll das Fassungsvermögen V eines zylindrischen Becherglases bestimmt werden. Gemessen werden Durchmesser $d \pm \Delta d$ und Höhe $h \pm \Delta h$.

   Durchmesser: $(d \pm \Delta d) = (75.2 \pm 0.5)\,\text{mm}$

   Höhe: $(h \pm \Delta h) = (123.8 \pm 0.5)\,\text{mm}$

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h = 5.50 \cdot 10^5\,\text{mm}^3, \quad \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = \sqrt{(2 \cdot 0.007)^2 + 0.004^2} = 0.15$$

   Das Volumen beträgt also $V = (5.50 \pm 0.08) \cdot 10^5\,\text{mm}^3$.

4. Fehler Δk eines Wellenvektors $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, wenn der Fehler der Wellenlänge $\Delta\lambda = 0.03$ beträgt. Anwendung von Regel II mit $f = k = 2\pi\lambda^{-1}$ ergibt $\dfrac{\Delta k}{k} = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.03$.

Bei Verknüpfungen aus den einzelnen Rechenoperationen können die beiden Fortpflanzungsregeln nacheinander angewendet werden. Dies erscheint ein wenig umständlich, lässt sich in der Praxis jedoch recht zügig bewerkstelligen und ist bei weitem weniger zeitaufwendig als eine Berechnung mit Gl.(10).

BEISPIEL FÜR DIE VERKNÜPFUNG DER REGELN:

5. Der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ soll experimentell nachgewiesen werden. Man misst zu diesem Zweck die Längen eines gleichschenkeligen Dreiecks und erhält die Messgrößen $a \pm \Delta a, b \pm \Delta b, c \pm \Delta c$.

   Länge $a : (a \pm \Delta a) = (90 \pm 1)\,\text{mm}$

   Länge $b : (b \pm \Delta b) = (173 \pm 1)\,\text{mm}$

   Länge $c : (c \pm \Delta c) = (194 \pm 1)\,\text{mm}$

   Es soll gezeigt werden:

$$f = a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow f \pm \Delta f = 393\,\text{mm}^2 \pm \Delta f$$

   Beim Quadrieren verdoppelt sich zunächst der relative Fehler der einzelnen Längen (Regel II), er wird anschließend für die Addierung der Quadrate (Regel I) in einen Absolutfehler umgerechnet:

   Anwendung von Regel II:

$$\frac{\Delta\left(a^2\right)}{a^2} = 2\frac{\Delta a}{a} = 0.02 \quad \rightarrow \ \Delta\left(a^2\right) = 0.02 \cdot a^2 = 162\,\mathrm{mm}^2$$

$$\frac{\Delta\left(b^2\right)}{b^2} = 2\frac{\Delta b}{b} = 0.012 \rightarrow \ \Delta\left(b^2\right) = 0.012 \cdot b^2 = 359\,\mathrm{mm}^2$$

$$\frac{\Delta\left(c^2\right)}{c^2} = 2\frac{\Delta c}{c} = 0.01 \quad \rightarrow \ \Delta\left(c^2\right) = 0.01 \cdot c^2 = 376\,\mathrm{mm}^2$$

Anwendung von Regel I:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\Delta\left(a^2\right)\right)^2 + \left(\Delta\left(b^2\right)\right)^2 + \left(\Delta\left(c^2\right)\right)^2} \Rightarrow \Delta f = \sqrt{\left(162^2 + 359^2 + 376^2\right)\mathrm{mm}^2} = 545\,\mathrm{mm}^2$$

Der Satz des Pythagoras ist somit mit $f = (393 \pm 545)\mathrm{mm}^2 \approx 0$ innerhalb des Messfehlers bestätigt worden.

10. Lineare Regression

Wissenschaftliche Experimente haben nicht allein das Ziel, separate Messgrößen oder Naturkonstanten zu bestimmen. Vielmehr interessieren funktionale Zusammenhänge zwischen verschiedenen Messparametern wie beispielsweise der temperaturabhängige Verlauf der Dichte $\rho = \rho(T)$ eines Körpers oder die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex eines Prismas. Die Formulierung der bisher bekannten Naturgesetze geht ebenfalls auf die experimentelle Untersuchung funktionaler Zusammenhänge zurück.

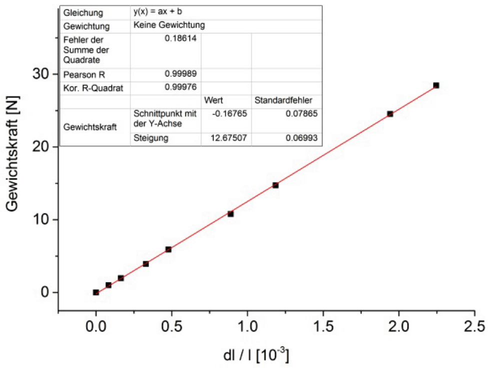

Abbildung 2: Lineare Regression für einen linearen Zusammenhang aus dem Versuch elastische Konstanten durchgeführt mit dem Programm OriginPro.

Zur Untersuchung einer gegenseitigen Abhängigkeit zweier Messgrößen, x und y, werden mehrere Wertepaare (x_i, y_i) bei verschiedenen x_i aufgenommen. Anschließend werden die (x_i, y_i) graphisch gegeneinander aufgetragen, und es lässt sich der funktionale Zusammenhang $y = y(x)$ erkennen und quantitativ auswerten. Die Auswertung birgt dabei eine gewisse Unsicherheit, denn die Messwerte streuen aufgrund ihrer Messfehler um den idealen Verlauf.

Eine Analyse nach diesem Verfahren ist sehr überschaubar, wenn es sich um einen linearen Zusammenhang zwischen den Größen y und x handelt (siehe Abbildung 2). Ein solcher kann durch folgende Geradengleichung beschrieben werden:

(18) $\quad y(x) = \alpha \cdot x + \beta$

α beschreibt die Steigung der Geraden, β den y-Achsenabschnitt. Diese beiden Parameter tragen die gesuchte Information der physikalischen Abhängigkeit zwischen beiden Messgrößen. α und β können auf graphischem Wege ermittelt werden, indem man durch die Messpunkte eine Ausgleichsgerade legt. Aus der Steigung erhält man mittels eines Steigungsdreiecks den Wert für α, der entsprechende Wert für β kann aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse abgelesen werden.

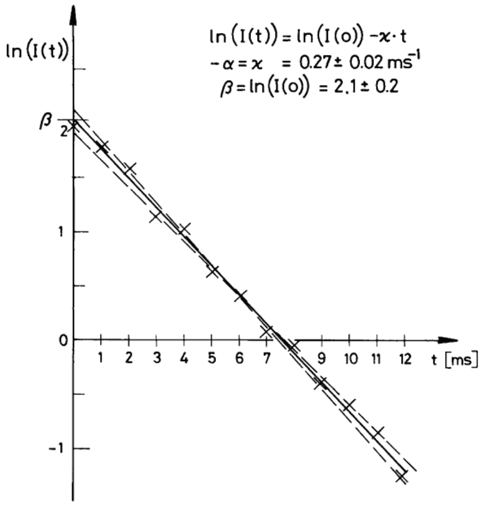

Abbildung 3: Lineare Regression für einen exponentiellen Zusammenhang.

Aufgrund der Streuung der Messwerte beinhalten α und β aber einen Fehler $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$. Er lässt sich ebenfalls aus der Graphik bestimmen. Hierzu werden neben der optimalen Ausgleichsgeraden noch zwei weitere Geraden mit eingezeichnet, die einmal eine geringere, einmal eine größere Steigung besitzen, aber mit der Streuung der Messwerte noch gerade vereinbar sind (Abbildung 3).

Neben der graphischen Auswertung gibt es die rechnerische Methode der *linearen Regression*. Bei ihr werden mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ein α und β errechnet, die die Summe der Abstände von den gemessenen Wertepaaren (x_i, y_i) zur Regressionsgeraden $y(x) = \alpha \cdot x + \beta$ minimalisieren. Geeignete Taschenrechner oder Computerprogramme erzeugen nach Eingabe der (x_i, y_i)-Paare die gesuchten Werte mit Fehlern, d.h. $\alpha \pm \Delta\alpha$ und $\beta \pm \Delta\beta$. Die Formeln sind am Ende dieses Kapitels aufgelistet und werden von Origin bei Verwendung eines linearen Fits mit angegeben.

Die graphische Analyse besitzt gegenüber der rechnerischen jedoch den Vorteil, dass man sich eine optische Kontrolle über die Ergebnisse verschaffen kann. So lassen sich z.B. Ausreißer in einer Messreihe leichter erkennen. Ferner kann man unmittelbar überprüfen, inwieweit die Annahme eines linearen Zusammenhangs der Messgrößen überhaupt gerechtfertigt ist. Besteht zwischen den Messgrößen eine funktionale Abhängigkeit, die *nicht* durch eine Geradengleichung gegeben ist, empfiehlt es sich, die Messparameter auf einen linearen Zusammenhang umzurechnen (siehe Abbildung 3).

Ein Beispiel ist die Lumineszenz des Rubins (siehe Versuch „Phosphoreszenz"). Nach Bestrahlung mit weißem Licht leuchtet ein Rubin in roter Farbe nach. Die Intensität des roten Lichts $I(t)$ klingt dabei mit zunehmender Zeit t exponentiell ab:

(19) $$I(t) = I(0) \cdot e^{-\kappa t}$$

$\kappa = 1/\tau$ ist eine für den Rubin charakteristische Konstante. Zu ihrer Bestimmung wird man zu verschiedenen Zeiten t_i Intensitätsmessungen $I_i(t_i)$ unternehmen. Die Auswertung soll in einer linearisierten Auftragung erfolgen. Logarithmiert man beide Seiten in Gl.(19), erhält man den gewünschten linearen Zusammenhang:

(20) $$\ln\left(I(t)\right) = -\kappa \cdot t + \ln\left(I(0)\right)$$

Tragen wir die $\ln\left(I_i(t_i)\right)$-Werte gegen die t_i-Werte auf, sollten die Messpunkte auf einer Geraden liegen mit der Steigung $\alpha = -\kappa$ und dem y-Achsenabschnitt $\beta = \ln\left(I(0)\right)$ (Abbildung 3).

11. Gewichteter Mittelwert [2]

Liegen für eine Messgröße G verschiedene Messergebnisse $G_1, G_2, G_3,\ldots$ vor, die mit verschiedenen Messunsicherheiten $\Delta G_1, \Delta G_2, \Delta G_3,\ldots$ gewonnen worden sind, und sollen diese zu einem Gesamtmittelwert $\overline{G}$ mit Fehler zusammengefasst werden, so bildet man folgenden gewichteten Mittelwert:

(21) $$\overline{G} = \frac{g_1 G_1 + g_2 G_2 + g_3 G_3 + \ldots}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots} = \frac{\sum_i g_i G_i}{\sum_i g_i} \quad \text{mit } g_i = \frac{1}{(\Delta G_i)^2}$$

Der Fehler zu dem gewichteten Mittelwert $\Delta\overline{G}$ berechnet sich dann nach:

(22) $$\Delta\overline{G} = \frac{1}{\sqrt{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots}} = \left(\sum_i g_i\right)^{-1/2}$$

<u>Beispiel:</u> Folgende Einzelmessungen wurden mit Fehler bestimmt $G_1 = 10.0 \pm 1.0, G_2 = 9.0 \pm 0.5, G_3 = 9.50 \pm 0.25$. Dann ist: $g_1 = 1, g_2 = 4, g_3 = 16$ und damit $\overline{G} = \frac{1\cdot 10 + 4\cdot 9 + 16\cdot 9.5}{1+4+16} = 9.43$ und $\Delta\overline{G} = \frac{1}{\sqrt{1+4+16}} = 0.22$. Als Endergebnis erhält man in dem Fall $\underline{\underline{G = 9.43 \pm 0.22}}$.

12. Formelsammlung für die Fehlerrechnung

<u>1. Statistik:</u>

Es liegen n Einzelmessungen x_i vor.

Arithmetischer Mittelwert: $\langle x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Standardabweichung der Einzelmessung: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2}$

Standardabweichung des Mittelwertes: $m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Absoluter Fehler: σ und m bzw. Δx bei Einzelmessung

Relativer Fehler: $\frac{\sigma}{\langle x\rangle}$ und $\frac{m}{\langle x\rangle}$ bzw. $\frac{\Delta x}{x}$ bei Einzelmessung

<u>2. Fehlerfortpflanzung:</u>

$f = f(x_1, x_2, \ldots)$ ist eine Funktion der Messwerte $x_1 \pm \Delta x_1,\ x_2 \pm \Delta x_2, \ldots$

Fehler in f aufgrund Δx_i : $\left(\Delta f\right)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot \Delta x_i$

Gesamtfehler in f: $$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot \Delta x_2\right)^2 + \ldots}$$

Maximalfehler in f: $$\Delta f_{\max} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot \Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot \Delta x_2\right| + \ldots$$

Spezialfall I:

$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots$: $$\Delta f = \sqrt{(a_1 \Delta x_1)^2 + (a_2 \Delta x_2)^2 + \ldots}$$

Spezialfall II:

$f = a \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots$: $$\frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(n_1 \frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(n_2 \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \ldots}$$

3. Lineare Regression:

Es liegen n Wertepaare (x_i, y_i) vor. Die Ausgleichsgerade sei $y(x) = \alpha \cdot x + \beta$. Summiert wird jeweils von 1 bis n.

$$\alpha = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - n \sum x_i^2}, \qquad \beta = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{\left(\sum x_i\right)^2 - n \sum x_i^2}$$

Maß für die Streuung der y_i-Werte um die Ausgleichsgerade: $$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (\alpha x_i + \beta - y_i)^2}{n-2}}$$

Standardabweichung der Steigung: $$\sigma_\alpha = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

Standardabweichung des y-Achsenabschnitts: $$\sigma_\beta = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

3. Gewichteter Mittelwert:

Mittelwert aus gewichteten Einzelwerten G_i: $\overline{G} = \dfrac{g_1 G_1 + g_2 G_2 + g_3 G_3 + \ldots}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots}$ mit $g_i = \dfrac{1}{(\Delta G_i)^2}$

Fehler des gewichteten Mittelwertes: $$\Delta \overline{G} = \frac{1}{\sqrt{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots}} = \left(\sum_i g_i\right)^{-1/2}$$

13. Literatur

[1] H.-J. Kunze, Physikalische Messmethoden. Teubner Studienbücher, Physik.
[2] W. Walcher, Praktikum der Physik, Teubner-Verlag, Stuttgart 1989