

2013. 7. 10

1

A : Hermite 行列

$$A = \sum_i a_i P_i, \quad P_i : \text{正射影行列}$$

$$P_i = |e_{i,1}\rangle\langle e_{i,1}| + |e_{i,2}\rangle\langle e_{i,2}| + \dots$$

$$\langle e_{i,k} | e_{j,l} \rangle = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} + |e_{i,n_i}\rangle\langle e_{i,n_i}|$$

Q: 正射影行列とは?

第3章 情報 概論

\mathbb{C}^2

$$A = a_1 |e_1\rangle\langle e_1| + a_2 |e_2\rangle\langle e_2|$$

二重項
 $a_1 = a_2$

ε 考えはこれに意味が「T」か「F」

(判定値が「1」か「0」?)

状態 とは、次の2つの条件を満たす

n -次元 正射影行列.

$$(S1) \quad S \in \mathcal{L}_h \quad \text{かつ} \quad S \geq 0$$

$$(S2) \quad \text{Tr } S = 1$$

$$S \geq 0 \iff \forall \psi \in \mathcal{H} \quad \langle \psi | S \psi \rangle \geq 0$$

Q \iff 固有値 a_i がすべて 0 以上

2013. 7. 10

2



$$\text{Tr} S = \sum_{i=1}^n s_{ii}$$

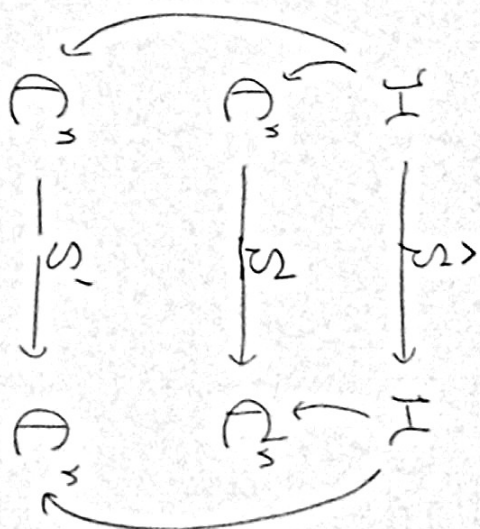
$$\text{Tr} \alpha A = \alpha \text{Tr} A$$

$$\text{Tr} (A+B) = \text{Tr} A + \text{Tr} B$$

$$\text{Tr} A^t = \text{Tr} A$$

$$\text{Tr} A^* = \overline{\text{Tr} A}$$

$$\text{Tr} AB = \text{Tr} BA$$



$$S' = P S P^{-1}$$

$$\text{Tr} S' = \text{Tr} P S P^{-1}$$

$$= \text{Tr} P^{-1} P S$$

これはトレースの性質で、
S'はSの相似変換であるから、
トレースは不変である。

2013. 7. 10

3

量子情報理論では

状態はノルム1のベクトル $|\psi\rangle$ で表わされる

基底状態 (量子状態の2つ)

$$\mathcal{H} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi| = (\bar{z} \quad \bar{w})$$

$$= \begin{pmatrix} z\bar{z} & z\bar{w} \\ w\bar{z} & w\bar{w} \end{pmatrix}$$

$$\|\psi\| = \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$$

$$= 1$$

①

$$(S1) \quad \forall \phi \quad \langle\phi|\mathcal{H}\phi\rangle \geq 0$$

$$\odot \quad \langle\phi|\mathcal{H}\phi\rangle = \langle\phi|\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle$$

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\bar{z} & z\bar{w} \\ w\bar{z} & w\bar{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z|^2 + |w|^2 \\ z\bar{w} + w\bar{z} \end{pmatrix}$$

基底ベクトル表記

$$\phi \leftrightarrow |\phi\rangle$$

$$\mathcal{H}\phi \leftrightarrow |\mathcal{H}\phi\rangle$$

$$\leftrightarrow \mathcal{H}|\phi\rangle$$

$$= \overline{\langle\psi|\phi\rangle} \langle\psi|\phi\rangle$$

$$= |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \geq 0$$

$$(S2) \quad \text{Tr } \mathcal{H} = |z|^2 + |w|^2 = 1$$

①

2013. 7. 10

4

$\mathcal{H} = |\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2|$
純粋状態
(量子状態)

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

$$p_i \geq 0$$

混合状態
(量子状態 + 古典状態)
 $\{p_i\}$

$$\text{Tr} S = 1 \text{ (or)}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$|0\rangle$
 $|1\rangle \dots (1-p)$

$$\mathcal{H} = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$$

出力状態

測定 とは次の2条件を満たす n -次元正定行列

の集合 $M = \{M_1, \dots, M_r\}$ である。

$$(M-1) \quad \forall i=1, \dots, r \quad M_i \in \mathcal{L}_n, \frac{M_i}{\text{Tr} M_i} \geq 0$$

$$(M-2) \quad \sum_{i=1}^r M_i = I$$

$$(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$M \in \mathcal{I}$ の分解としよう

(例)

POVM (Positive Operator valued measurement)

仮説 状態 S に対して測定 M を行い

結果として事象 $w_i \in \Omega$ が得られる確率

$$P(w_i) \text{ は } P(w_i) = \text{Tr} S M_i \text{ である}$$

2013. 7. 10

5

5.3 小清新概率論

$\hat{S} = |u\rangle\langle u|$: 純粋状態

$A \rightarrow A = a_1 |e_1\rangle\langle e_1| + a_2 |e_2\rangle\langle e_2|$

↑
物理量

(固有値, 固有ベクトル)

$-(a_1, |e_1\rangle), (a_2, |e_2\rangle)$

測定値	確率	測定後の状態
w_1, \dots, a_1	$ \langle u e_1 \rangle ^2$	$ e_1\rangle$
w_2, \dots, a_2	$ \langle u e_2 \rangle ^2$	$ e_2\rangle$

$M_1 = |e_1\rangle\langle e_1| \geq 0$ (M-1)

$M_2 = |e_2\rangle\langle e_2| \geq 0$

Q: $|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| = I$ (M-2)

a_1, a_2 の確率

$P(w_i) = \text{Tr} \hat{S} M_i$ $\langle u | e_i \rangle$

$$= \text{Tr} |u\rangle\langle u| |e_1\rangle\langle e_1|$$

$$= \langle u | e_1 \rangle \text{Tr} (|u\rangle\langle u| |e_1\rangle\langle e_1|)$$

$$= \langle u | e_1 \rangle^2$$

$$\begin{aligned} \overline{z^2} &= |\overline{z}|^2 \\ &= \langle u | e_1 \rangle \overline{\langle u | e_1 \rangle} = |\langle u | e_1 \rangle|^2 \end{aligned}$$

$B = b_1 |f_1\rangle\langle f_1| + b_2 |f_2\rangle\langle f_2|$

測定値	確率	測定後の状態
b_1	$ \langle u f_1 \rangle ^2$	$ f_1\rangle$
b_2	$ \langle u f_2 \rangle ^2$	$ f_2\rangle$

$AB \neq BA$ のとき

測定値は物理量に
測定値は物理量

2013. 7. 10

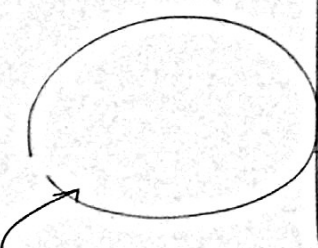
6

状態.

測定値

確率

$w_1 \dots a_1 \quad b_1$
 $w_2 \dots a_2 \quad b_1$
 $w_3 \dots a_1 \quad b_2$
 $w_4 \dots a_2 \quad b_2$
 c_2



可逆性とは
 逆正定値行列
 の存在を定義する
 一般化



$M_1 = |e_1\rangle\langle e_1|$
 $M_2 = |e_2\rangle\langle e_2|$

von Neumann 測定 (単系測定)

\mathbb{C}^2

\mathbb{C}^n の場合は

$$M_i = |e_{i,1}\rangle\langle e_{i,1}| + \dots + |e_{i,n_i}\rangle\langle e_{i,n_i}|$$

である。

$$M_i M_j = 0$$

また、このような測定を von Neumann 測定

(単系測定と呼ぶ)

②