1 2013.5.8.

◎ コイン投げ

表がる確率 θ

裏 〃 $1-\theta$

← θを推定する

N回投げて n回表がでた

$\longrightarrow \theta = \frac{n}{N}$ と推定

◎ 一般化

$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ ：有限$\underbrace{\text{事象}}$系

↑ 考える対象

例) コインなげ $\longrightarrow \Omega = \{\underbrace{\text{表がでる}}_{\omega_1}, \underbrace{\text{裏がでる}}_{\omega_2}\}$

サイコロ $\longrightarrow \Omega = \{\underbrace{\text{1の目がでる}}_{\omega_1}, \cdots, \underbrace{\text{6の目がでる}}_{\omega_6}\}$

$p(\omega_i)$ ：ω_iがおきる確率

確率がθというパラメータで決まって

いることを強調したい場合

$p(\omega_i)$ を $p_\theta(\omega_i)$ とかくこともある

。 $p_\theta(x)$, $x \in \Omega$

$x = \omega_1, \cdots, \omega_r$

。 $\theta = (\theta^1, \cdots, \theta^d) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$

サイコロの場合

$p(\omega_1) = \theta^1$, $p(\omega_2) = \theta^2$, $\cdots$, $p(\omega_5) = \theta^5$

$p(\omega_6) = 1 - (\theta^1 + \theta^2 + \cdots + \theta^5) \geq 0$

この場合 $\Theta = \{\theta = (\theta^1, \cdots, \theta^5) ; 0 \leq \theta^1, \cdots 0 \leq \theta^5$

$\theta^1 + \cdots + \theta^5 \leq 1\}$

 2013.5.8.

$$\begin{cases} p(\omega_1) = \cdots = p(\omega_5) = \Theta \\ p(\omega_6) = 1 - \Theta \end{cases}$$ （特殊な model）

の場合は 1次元.

N回の独立試行の結果

データ $\underbrace{(x_1, \cdots, x_N)}_{\in \Omega^N}$ $x_i \in \Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ が得られた

n回目の結果にそれ以外の回の結果が影響を与えない.

例 (表, 裏, …, 裏) → $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_2)$

$$\hat{\Theta} : \Omega^N \longrightarrow \Theta$$

$$(x_1, \cdots, x_N) \longmapsto \hat{\Theta}(x_1, \cdots, x_N)$$

例. サイコロ.

$$\hat{\Theta} : (x_1, \cdots, x_N) \longmapsto \hat{\Theta}(x_1, \cdots, x_N) = \frac{\omega_1 \text{がおきた回数}}{N}$$

（表がでた回数）

$(x_1, \cdots, x_N) \longrightarrow \boxed{\hat{\Theta}} \longrightarrow \Theta$ の推定値

入力　　　　　　　　出力

N=2

入力 (x_1, x_2)	出力
(ω_1, ω_1) →	$\frac{2}{2} = 1$
(ω_1, ω_2) →	$\frac{1}{2}$
(ω_2, ω_1) →	$\frac{1}{2}$
(ω_2, ω_2) →	$\frac{0}{2} = 0$

推定 $\hat{\Theta}$

2013.5.8

N=1

入力	出力
ω_1	$\frac{1}{1}=1$
ω_2	$\frac{0}{1}=0$

$(x_1,\cdots,x_N) \longrightarrow \boxed{\hat{\theta}} \longrightarrow \theta=\frac{1}{2}$　でたらめな推定

推定値の期待値が θの真の値に一致.

↑

不偏推定量

値		事象		確率
$X(\omega_1)$	$\longleftarrow$	ω_1	$\longrightarrow$	$p(\omega_1)$
$X(\omega_2)$	$\longleftarrow$	ω_2	$\longrightarrow$	$p(\omega_2)$
		$\vdots$		
$X(\omega_r)$	$\longleftarrow$	ω_r	$\longrightarrow$	$p(\omega_r)$

例　サイコロ　$X(\omega_i)=$

100	100	1	$\longleftarrow$	ω_1:1の目がでる	$\longrightarrow$	$p(\omega_1)$
0	200	2	$\longleftarrow$	ω_2:2の目がでる	$\longrightarrow$	$p(\omega_2)$
100						
$\vdots$				$\vdots$		
1						
0	600	6	$\longleftarrow$	ω_6:6の目がでる	$\longrightarrow$	$p(\omega_6)$

確率変数.

4」 2013.5.8.

確率変数 X に対する期待値

$$p(\omega_1)X(\omega_1)+\cdots+p(\omega_r)X(\omega_r)$$

サイコロ $p(\omega_1)=p(\omega_2)=\cdots=p(\omega_6)=\frac{1}{6}$

$X(\omega_i)=i$

期待値 $\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\cdots+\frac{1}{6}\cdot 6$

$=\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}=3.5$」

θ : 1次元

$$\hat{\Theta} : \Omega^N \longrightarrow \Theta$$

$(x_1,\dots,x_N) \longrightarrow$ θ の推定値

$p_\theta^N(x_1,\dots,x_N)=p_\theta(x_1)\cdots p_\theta(x_N)$

$$\sum_{(x_1,\dots,x_N)\in\Omega^N} p_\theta^N(x_1,\dots,x_N)\,\hat{\Theta}(x_1,\dots,x_N)$$

$N=2$

	入力	出力
$\theta^2=p_\theta(\omega_1)p_\theta(\omega_1)$	$\to(\omega_1,\omega_1)$	1
$\theta(1-\theta)=p_\theta(\omega_1)p_\theta(\omega_2)$	$\to(\omega_1,\omega_2)$	1/2
$(1-\theta)\theta=p_\theta(\omega_2)p_\theta(\omega_1)$	$\to(\omega_2,\omega_1)$	1/2
$(1-\theta)^2=p_\theta(\omega_2)p_\theta(\omega_2)$	$\to(\omega_2,\omega_2)$	0

$$\theta^2\cdot 1+\theta(1-\theta)\frac{1}{2}+(1-\theta)\theta\frac{1}{2}+(1-\theta)^2\,0$$

$$=\theta^2+(\theta-\theta^2)\frac{1}{2}+(\theta-\theta^2)\frac{1}{2}=\theta.$$

5 2013.5.8

$N=1$

	入力	出力
$\theta = P_\theta(\omega_1) \longrightarrow$	ω_1	1
$1-\theta = P_\theta(\omega_2) \longrightarrow$	ω_2	0

期待値. $\theta \cdot 1 + (1-\theta) \cdot 0 = \theta$