# 量子推定理論

Masaki Sohma

平成２６年２月２０日

## 概 要

この資料は、Holevo「Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory」の内容に基づいて、量子推定理論について説明したものです。第1章が Holevo の本の Chapter II に、第2章が Chapter V に、第3章が Chapter VI に対応しています。時間の都合上、第1章と第2章については、メモ書き程度になってしまいました。まだ、間違いもたくさん含まれていると思われるので、間違いを見つけたかたはお知らせください。

量子推定理論に興味を持たれたかたは、ぜひ原著に挑戦してみてください。ただし、新版はタイプミスが非常にたくさんあるので、旧版（すでに絶版）をどこかで入手して読むことをお勧めします。

# 第1章　量子論の数学

以下、$\mathcal{H}$ はヒルベルト空間、$\mathbb{C}$ は複素数全体、$\mathbb{R}$ は実数全体を表すものとする。

## 1.1　非有界作用素のスペクトル表現

### 1.1.1　対称作用素と自己共役作用素

**定義 1.** 定義域 $\mathrm{dom}(X)$ を持つ線形作用素 $X:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ が $\langle X\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|X\psi\rangle$,$\varphi,\psi\in\mathrm{dom}(X)$ を満たすとき、対称作用素と呼ばれる。

**注意：**位相線形空間 (今の場合ヒルベルト空間) 上の線形写像は、線形作用素（線形演算子）と呼ばれることが多い。

**定義 2.**

$$\mathrm{dom}(X^*) := \{\varphi\in\mathcal{H}|\psi\to\langle\varphi|X\psi\rangle\text{: 連続線形汎関数}\}$$

**注意：**$f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ が $f(\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2) = \lambda_1 f(\psi_1)+\lambda_2 f(\psi_2)$ $(\lambda_i\in\mathbb{C},\psi_i\in\mathcal{H})$ を満たすとき $f$ を線形汎関数と呼ぶ。

**定義 3.** $\varphi\in\mathrm{dom}(X^*)$ に対しリース・フレッシェの補題により

$$\langle\varphi|X\psi\rangle = \langle\varphi^*|\psi\rangle$$

を満たす $\varphi^*\in\mathcal{H}$ が一意に存在する。このとき作用素 $\varphi\to\varphi^*$ を $X^*$ と表記する。

**定義 4.** $X = X^*$ のとき（$X$ が対称作用素で $\mathrm{dom}(X) = \mathrm{dom}(X^*)$ のとき）$X$ を自己共役作用素という。

### 1.1.2 量子測定と単位の分解

#### 量子測定

$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の密度作用素の集合とする。また、 $U$ を可測空間とし、$U$ の $\sigma$-集合族を $\mathfrak{A}(U)$、$U$ 上の確率測度全体を $\mathfrak{P}(U)$ と表記する。$U$ は測定値の全体を表している。
**注意：** 空間 $\Omega$ の部分集合の族 $\mathfrak{A}$ において、(i)$\varnothing \in \mathfrak{A}$ (ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$ (iii) $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{A}$ (iv) $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, ..)$, $A_m \cap A_n = \varnothing$ $(m \neq n) \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ が成り立つとき、$\mathfrak{A}$ を $\sigma$-集合族と呼ぶ (または、同値な条件 (i)$\varnothing \in \mathfrak{A}$ (ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$ (iii)$A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ を用いて定義する場合もある )。$\sigma$-集合族を持つ空間 $\Omega$ を可測空間と呼ぶ（$(\Omega, \mathfrak{A})$ とも表記される）。また、$\mathfrak{A}$ を定義域とする実数値関数が、(i) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathfrak{A}$ (ii) $P(\Omega) = 1$ (iii) $A_n \in \mathfrak{A}$,$A_n \cap A_m = \varnothing$, $n \neq m$ $\Rightarrow P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ を満たすとき、$P$ を $(\Omega, \mathfrak{A})$ 上の確率測度と呼ぶ。

**定義 5.** アファイン写像

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \ni S \to \mu_S \in \mathfrak{P}(U) \tag{1.1}$$

を、$U$ に値を持つ量子測定（$U$-測定）と呼ぶ。

**注意:** 式 (1.1) がアファイン写像であるとは、$S = pS_1 + (1-p)S_2$、$0 \leq p \leq 1$ に対して、$\mu_S = p\mu_{S_1} + (1-p)\mu_{S_2}$ が成立することをいう。

**単位の分解**

**定義 6.** $M = \{M(B) | B \in \mathfrak{A}(U)\}$ が以下の条件を満たしているとき、$M$ を単位の分解と呼ぶ。
*(A)* $M(\emptyset) = 0$、$M(U) = I$
*(B)* $M(B)$ は正値エルミート
*(C)* $B = \cup_j B_j$、$B_j \cap B_k \neq \emptyset$ に対して、

$$M(B) = \sum_j M(B_j) \tag{1.2}$$

**注意:**式 (1.2) は弱収束の意味で成立する。すなわち、任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ に対し、

$$\langle \varphi | M(B) \psi \rangle = \sum_j \langle \varphi | M(B_j) \psi \rangle$$

が成立する。

**定義 7.** 単位の分解 $M$ において、$B_1 \cap B_2 = \emptyset$ を満たす任意の $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}(U)$ に対して

$$M(B_1) M(B_2) = 0 \tag{1.3}$$

が成立しているとき、$M$ を直交単位分解と呼ぶ。以下、直交単位分解を $E$ と表記する。

式 (1.3) の条件を、「任意の $B \in \mathfrak{A}(U)$ に対して、

$$M(B)^2 = M(B)$$

が成立する」としてもよい。すなわち一般の単位の分解の条件（B）を、「$M(B)$ は射影作用素」という条件で置き換えたのが直交単位分解の定義である。

**量子測定と単位の分解の関係**

**定理 8.** $U$-測定 $S \to \mu_S$ と単位の分解 $M$ は、以下の関係式によって 1 ： 1 に対応づけられる。

$$\mu_S(B) = \mathrm{Tr}SM(B), \forall B \in \mathfrak{A}(U) \tag{1.4}$$

特に、$U$-測定 $S \to \mu_S$ が与えられるとき、任意の $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ について *(1.4)* を満たす単位の分解 $M$ が、一意に定まる。

**注意：**式 (1.4) の関係が成立していることを、

$$\mu_S(dx) = \mathrm{Tr}SM(dx)$$

と表記する場合がある。

**命題 9.** 単位の分解 $M$ と密度作用素 $S = \sum_j s_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ に対して、次式が成立する。

$$\mu_S(B) = \mathrm{Tr}SM(B) = \sum_j s_j\langle\psi_j|M(B)\psi_j\rangle \tag{1.5}$$

proof)

CONS として $S$ の固有ベクトル $|\psi_j\rangle$ をとってトレースを計算すると、

$$\mathrm{Tr}SM(B) = \sum_j \langle\psi_j|SM(B)\psi_j\rangle = \sum_j s_j\langle\psi_j|M(B)\psi_j\rangle$$

が成立する。

### 1.1.3 スペクトル分解

#### 作用素値汎関数

**命題 10.** 直交単位分解 $E$ と、ボレル可測関数 $f$ に対し、

$$\mathcal{D}_f = \{\varphi \in \mathcal{H} | \int |f(x)|^2 \langle \varphi | E(dx) \varphi \rangle < \infty\}$$

で定義される部分集合を考える。このとき、$\mathcal{H}$ 上の線形作用素 $A_f$ で、

$$\mathrm{dom}(A_f) = \mathcal{D}_f$$

$$\langle \varphi | A_f \varphi \rangle = \int f(x) \langle \varphi | E(dx) \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}_f \tag{1.6}$$

を満たすものがただ一つ存在する。また、このとき、

$$\| A_f \varphi \|^2 = \int |f(x)|^2 \langle \varphi | E(dx) \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}_f$$

が成立する。

(証明は、新井、「ヒルベルト空間と量子力学」p.113〜p.117)
**注意：** $n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における半開区間の全体 $\{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]; -\infty \leq a_j, b_j \leq \infty\}$ を含む最小の $\sigma$-加法族をボレル集合族（またはボレル集合体）と呼ぶ。$f$ を可測空間 $(\Omega, \mathfrak{A})$ 上の関数で実数値または $\pm\infty$ をとるとする。任意の実数 $a$ に対して $\{x \in \Omega; a < f(x)\} \in \mathfrak{A}$ となるとき、$f$ を $\mathfrak{A}$-可測関数と呼ぶ。特に、$\mathfrak{A}$ がボレル集合族の時、$f$ をボレル可測関数と呼ぶ。(文献によっては、一般の $\sigma$-加法族、$\mathfrak{A}$-可測関数のことを、ボレル集合族（ボレル集合体)、ボレル可測関数と呼んでいる場合があるので注意が必要)

**定義 11.** 上記の命題で定まる線形作用素を

$$A_f = \int f(x) E(dx)$$

と表記する。

### 自己随伴作用素のスペクトル定理

**定理 12.** $A$ を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする。このとき、以下を満たす直交単位分解 $E$ が一意に存在する。

$$\mathrm{dom}(A) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} | \int x^2 \langle \varphi | E(dx)\varphi \rangle < \infty \right\}$$

$$\langle \varphi | A\varphi \rangle = \int x \langle \varphi | E(dx)\varphi \rangle, \varphi \in \mathrm{dom}(A) \tag{1.7}$$

$$\| A\varphi \|^2 = \int x^2 \langle \varphi | E(dx)\varphi \rangle, \varphi \in \mathrm{dom}(A) \tag{1.8}$$

**注:**命題 10 と定理 12 より、自己共役作用素と直交単位分解が 1 ： 1 に対応していることがいえる。

### 対称作用素

**定理 13.** $X$ を $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とする。このとき、単位の分解 $M$ が存在し、

$$\mathrm{dom}(X) \subseteq \left\{ \varphi \in \mathcal{H} | \int x^2 \langle \varphi | M(dx)\varphi \rangle < \infty \right\}$$

$$\langle \varphi | X\varphi \rangle = \int x \langle \varphi | M(dx)\varphi \rangle, \varphi \in \mathrm{dom}(X) \tag{1.9}$$

$$\| X\varphi \|^2 = \int x^2 \langle \varphi | M(dx)\varphi \rangle, \varphi \in \mathrm{dom}(X) \tag{1.10}$$

が成立する。

**注：**$M$ の存在は一意とは限らない。また、すべての単位の分解 $M$ に対して、上記の積分が定義できるわけではない。

### 1.1.4　平均と分散

**定義 14.** 単位の分解 $M$ に対応する $U$-測定 $S \rightarrow \mu_S$ を考える ($\mu_S(dx) = \mathrm{Tr}SM(dx)$)。このとき、確率測度 $\mu_S$ の平均と分散をそれぞれ $E_S\{M\}, D_S\{M\}$ と表記する：

$$\begin{aligned} E_S\{M\} &= \int x\mu_S(dx) \\ D_S\{M\} &= \int (x - E_S\{M\})^2 \mu_S(dx) \end{aligned} \tag{1.11}$$

**定義 15.** $X$ を対称作用素とし、そのスペクトル分解を与える単位の分解（の一つ）を $M$ とする。このとき、$E_S\{M\}$、$D_S\{M\}$ を $E_S(X)$、$D_S(X)$ と表記する。

**注：** $E_S\{M\}$、$D_S\{M\}$ の値は、単位の分解の取り方によらず定まる。

## 1.2　トレースクラス作用素とヒルベルト・シュミット作用素

### 1.2.1　有限階数作用素

**定義 16.** $\sum_{j=1}^{n} x_j |e_j\rangle\langle f_j|$ の形に書くことができる線形作用素を有限階数作用素を呼ぶ。その全体を $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ と表記する。

### 1.2.2　有界作用素

**定義 17.** 線形作用素 $X$ に対して作用素ノルム $\|X\|$ が以下で定義される。

$$\| X \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Xx \|}{\| x \|}$$

**定義 18.** $\|X\| < \infty$ を満たす線形作用素 $X$ を有界作用素という。

### 1.2.3 コンパクト作用素

**定義 19.** $\{Ax | x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\}$ が $\mathcal{H}$ のノルム位相で相対コンパクトであるとき $A$ をコンパクト作用素と呼ぶ。また、コンパクト作用素の全体を $\mathfrak{C}(\mathcal{H})$ と表記する。

注：閉包がコンパクトな部分集合を相対コンパクト部分集合と呼ぶ。

**命題 20.** $A \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$ に対して $ONS\{|e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}, \{|f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ と正の実数列 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots > 0$ が存在して

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |e_n\rangle\langle f_n| \tag{1.12}$$

と書ける。

注：正規直交系 (OrthoNormal System) を ONS と表記する。

**命題 21.** $A \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$ で、$AA^* = A^*A$ のとき有限列または 0 に収束する無限列 $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ と $ONS\{|e_n\rangle\}$ が存在して

$$A = \sum_n \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

とかける。

**命題 22.** $\mathfrak{F}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}(\mathcal{H})$ であり、$\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ の作用素ノルムによる完備化によって得られるバナッハ空間は $\mathfrak{C}(\mathcal{H})$ に一致する。

注：すべてのコーシー列が収束する距離空間を完備距離空間と呼ぶ。線形空間が、その上に定義されたノルムから導かれる距離によって完備距離空間となる時、バナッハ空間と呼ばれる。

### 1.2.4 トレースクラス作用素

**命題 23.** $A$ を正値エルミート作用素とするとき、任意の $CONS\{e_j\}$ に対して

$$\sum_j \langle e_j | A e_j \rangle \tag{1.13}$$

の値が一意に定まる。

**注意**:有界な自己共役作用素をエルミート作用素と呼ぶ（文献によっては、対称作用素のことをエルミート作用素と呼んでいることもあるので注意が必要)。また、エルミート作用素 $X$ が、任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して、$\langle \psi | X\psi \rangle \geq 0$ を満たすとき、$X$ を正値エルミート作用素と呼ぶ。

**注意**：完全正規直交系 (Complete OrthoNormal Sytem) を CONS と表記する。

**定義 24.** 正値エルミート作用素 $A$ のトレースは、*(1.13)* によって定義される。トレースを $\mathrm{Tr}A$ と表記する。

**定義 25.** $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ が $\|T\|_1 = \mathrm{Tr}|X| < +\infty$ を満たすとき、$X$ をトレースクラス作用素とよぶ。その全体を $\mathfrak{T}^1(\mathcal{H})$ と表記する。

**命題 26.** $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ をトレースノルム $\|\cdot\|_1$ で完備化して得られるバナッハ空間は $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ に一致する。

**命題 27.** トレースクラス作用素はコンパクト作用素である。

**定義 28.** エルミートトレースクラス作用素 $T = \sum_j t_j |e_j\rangle\langle e_j|$ にたいし、正値作用素 $T_+, T_-$ を以下の式によって定めることができる。

$$T_+ = \sum_{t_j > 0} t_j |e_j\rangle\langle e_j|, T_- = -\sum_{t_j < 0} t_j |e_j\rangle\langle e_j|$$

このとき、$T = T_+ - T_-, |T| = T_+ + T_-$ が成立する。

**定理 29.** $T$ をトレースクラス作用素、$X$ を有界作用素とするとき、$TX$,$XT$ はトレースクラス作用素で、以下が成立する。

$$\mathrm{Tr}T^* = \overline{\mathrm{Tr}T}, \mathrm{Tr}TX = \mathrm{Tr}XT, |\mathrm{Tr}TX| \leq \|T\|_1 \cdot \|X\| \tag{1.14}$$

また、任意の $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に対して、

$$T \to \mathrm{Tr}TX \tag{1.15}$$

は $\mathfrak{T}^1(\mathcal{H})$ 上の連続線形汎関数を定める。逆に $\mathfrak{T}^1(\mathcal{H})$ 上の任意の連続線形汎関数に対し $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ が存在し、*(1.15)* が成立する。

### 1.2.5 ヒルベルト・シュミット作用素

**定義 30.** 有界作用素 $T$ が

$$\mathrm{Tr}T^*T < \infty$$

を満たすとき、$T$ をヒルベルト・シュミット作用素と呼ぶ。またヒルベルト・シュミット作用素の全体を $\mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$ と表記する。

**命題 31.** $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ のヒルベルト・シュミットノルム $\|T\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}T^*T}$ による完備化は $\mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$ と一致する。

## 1.3 $\mathfrak{L}^2$ spaces associated with a quantum state

### 1.3.1 ２乗和可能対称作用素

以下、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のエルミート作用素全体を $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$、作用素 $X$ の定義域を $\mathrm{dom}(X)$、値域を $\mathrm{ran}(X)$ と書くことにする。

### $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ 上の前内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$

密度作用素 $S$ に関して、$\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ 上の前内積を以下のように定義する。

$$\langle Y, X\rangle_S = \mathrm{Tr}S(Y \circ X) = \mathrm{ReTr}SYX \tag{1.16}$$

ただし、

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX) \tag{1.17}$$

である。前内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ を使って $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ を完備化して得られる空間を $\tilde{\mathfrak{L}}_h^2(S)$ と書く：

$$\tilde{\mathfrak{L}}_h^2(S) = \{\{X_n\}; \langle X_n - X_m, X_n - X_m\rangle_S \to 0, n, m \to \infty\}/\sim \tag{1.18}$$

ただし、$\langle X_n - Y_n, X_n - Y_n\rangle_S \to 0$ のとき、$\{X_n\} \sim \{Y_n\}$ とする。

### 密度作用素 $S$ に関する２乗和可能条件

$X$ を対称作用素とする。密度作用素 $S = \sum s_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ に対して、

$$\sum s_j \parallel X\psi_j \parallel^2 < \infty \tag{1.19}$$

が成立するとき、「$X$ は密度作用素 $S$ に関して２乗和可能である」という。$S$ に関して２乗和可能な対称作用素 $X, Y$ に対して、$X\psi_j = Y\psi_j$ が $s_j \neq 0$ なるすべての $j$ に対して成立するとき、$X \sim Y$ とする。このとき、$\mathfrak{L}_h^2(S)$=｛２乗和可能対称作用素｝/ $\sim$ と定義する。
**注意:**　$\sim$ は同値関係を表す記号である。

### $\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ ($\{\psi_j\}$ を用いた定義)

以下のように、$\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ 上の内積 (1.16) を $\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上に拡張する。

$$\langle Y, X\rangle_S = \sum_j s_j \frac{1}{2}[\langle Y\psi_j|X\psi_j\rangle + \langle X\psi_j|Y\psi_j\rangle], X, Y \in \mathfrak{L}_h^2(S) \tag{1.20}$$

ここで、収束は $X, Y$ が２乗和可能であることより導かれる。$\mathfrak{L}_h^2(S)$ はこの内積によって完備となる。
注意：(1.20) において、$\{\psi_j\}$ は $S$ の固有ベクトルによる CONS である。それ以外の CONS を用いることはできない。

**定理 32. (Theorem 8.1)**
ヒルベルト空間として以下の同型が成立する。

$$\tilde{\mathfrak{L}}_h^2(S) \cong \mathfrak{L}_h^2(S)$$

### ２乗和可能作用素のヒルベルト・シュミット作用素を用いた特徴付け

**命題 33. (Proposition 8.1)**
$s_j \neq 0$ となる $j$ に対して、$\mathrm{dom}(X) \ni \psi_j$ となる対称作用素 $X$ を考える。このとき、$X$ が２乗和可能であることと、（$X$ の定義域が $\mathrm{ran}(\sqrt{S})$ まで拡張可能で、）$X\sqrt{S}$ がヒルベルト・シュミット作用素となることは同値である。

### $\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ ($\{\psi_j\}$ を用いない定義)

命題 33 を用いることにより、内積 (1.20) を以下のように書き換えることができる。

$$\langle Y, X \rangle_S = \mathrm{Tr}\frac{1}{2}[(Y\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}) + (X\sqrt{S})^*(Y\sqrt{S})] \tag{1.21}$$

注意：$(Y\sqrt{S})^*$ を $\sqrt{S}Y^*$ にしてはだめ。前者の方が後者より、定義域が広い。

### 一方の作用素 $X$ が有界である場合の表現

**命題 34.** $X \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H}), Y \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ に対して以下が成立する。

$$\langle Y, X \rangle_S = \mathrm{Tr}(Y \hat{\circ} S)X \tag{1.22}$$

ただし、$Y \hat{\circ} S$ は以下で定義される。

$$Y \hat{\circ} S = \frac{1}{2}[\sqrt{S} \cdot (Y\sqrt{S})^* + (Y\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S}] \tag{1.23}$$

proof)

$X$ がエルミートであることより、$(X\sqrt{S})^* = \sqrt{S}X$、$(Y\sqrt{S})^*X \in \mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$ が成立する。よって、式 (1.21) を以下のように変形することができる。

$$\langle Y, X\rangle_S = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sqrt{S}\cdot(Y\sqrt{S})^*X + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Y\sqrt{S})\cdot\sqrt{S}X = \mathrm{Tr}(Y\hat{\circ}S)X \tag{1.24}$$

**注意：**これ以降 $\hat{\circ}$ を $\circ$ と略記する。

### 1.3.2 $\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上の歪対称形式 $[\cdot,\cdot]_S$

**$\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ 上の歪対称形式 $[\cdot,\cdot]_S$**

$X, Y \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ に対して歪対称形式を以下のように定義する。

$$[Y, X]_S = i\mathrm{Tr}S[Y, X] \in \mathbb{R} \tag{1.25}$$

ただし、$[Y, X] = YX - XY$ とする。

**$\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上の歪対称形式 $[\cdot,\cdot]_S$($\{\psi_j\}$ を用いた定義)**

$X, Y \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ に対して歪対称形式を以下のように定義する。これは、(1.25) の拡張になっている。

$$[Y, X]_S = i\sum_j s_j[\langle Y\psi_j|X\psi_j\rangle - \langle X\psi_j|Y\psi_j\rangle] \tag{1.26}$$

**$\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上の歪対称形式 $[\cdot,\cdot]_S$($\{\psi_j\}$ を用いない定義)**

命題 33 を用いることにより、式 (1.26) を以下のように書き換えることができる。

$$[Y, X]_S = i\mathrm{Tr}[(Y\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}) - (X\sqrt{S})^*(Y\sqrt{S})] \tag{1.27}$$

**一方の作用素 $X$ が有界である場合の表現**

$X \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H}), Y \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ に対して以下が成立する。

$$[Y, X]_S = i\mathrm{Tr}[Y, S]' \cdot X \tag{1.28}$$

ただし、

$$[Y, S]' = \sqrt{S} \cdot (Y\sqrt{S})^* - (Y\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S} \tag{1.29}$$

である。

**注意**:これ以降、$[Y, S]'$ を $[Y, S]$ と略記する。

**歪対称形式 $[\cdot, \cdot]_S$ の性質**

**命題 35.** $X, Y \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ に対して、以下が成立する。

$$[X, Y]_S = -[Y, X]_S, [X, X]_S = 0, [I, X]_S = 0 \tag{1.30}$$

proof)

$[I, X]_S = 0$ のみを示す。式 (1.28) より、$[I, X]_S = i\mathrm{Tr}[X, S]'$ であるが、これが 0 となることは以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}((X\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S} - \sqrt{S} \cdot (X\sqrt{S})^*) \\
&= \mathrm{Tr}\sqrt{S} \cdot (X\sqrt{S}) - \mathrm{Tr}(X\sqrt{S})^* \cdot \sqrt{S} \\
&= \mathrm{Tr}\sqrt{S}X\sqrt{S} - \mathrm{Tr}\sqrt{S}X\sqrt{S} = 0
\end{aligned} \tag{1.31}$$

ここで、$(X\sqrt{S})^* \supseteq \sqrt{S}X^* \supseteq \sqrt{S}X$ であり、$\mathrm{dom}(X) \supseteq \mathrm{ran}(\sqrt{S})$ より、$(X\sqrt{S})^*\sqrt{S} = \sqrt{S}X\sqrt{S}$ が成立することを使った。

### 1.3.3 $\mathfrak{L}_h^2(S)$ の複素化

**有界作用素のエルミート分解**

有界作用素 $X$ に対し、エルミート作用素 $X_1$,$X_2$ が存在し、以下の関係が成立する。

$$X = X_1 + iX_2 \tag{1.32}$$

ただし、

$$X_1 = \frac{1}{2}(X + X^*), X_2 = \frac{1}{2i}(X - X^*) \tag{1.33}$$

である。

**$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上の前内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$**

$\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ 上の前内積 (1.16) を $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上に以下のように拡張する。

$$\langle Y,X\rangle_S=\mathrm{Tr}S(Y^*\circ X)=\mathrm{Tr}(S\circ X)\cdot Y^*, X,Y\in\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \tag{1.34}$$

このとき、$X=X_1+iX_2\in B(\mathcal{H})$ に対して以下が成立している。

$$\langle X,X\rangle_S=\langle X_1,X_1\rangle_S+\langle X_2,X_2\rangle_S \tag{1.35}$$

よって、$X^*=X_1-iX_2$ に対して次式が成立する。

$$\langle X^*,X^*\rangle_S=\langle X_1,X_1\rangle_S+\langle X_2,X_2\rangle_S=\langle X,X\rangle_S \tag{1.36}$$

**$\mathfrak{L}^2(S)$ の定義と $\mathfrak{L}^2_h(S)$ との関係**

前内積 (1.34) に関する $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の完備化を $\mathfrak{L}^2(S)$ と書く。任意の $X\in\mathfrak{L}^2(S)$ に対して、$X_1,X_2\in\mathfrak{L}^2_h(S)$ が存在し、$X=X_1+iX_2$ が成立する。また、完備化によって得られる $\mathfrak{L}^2(S)$ 上の内積についても、(1.35),(1.36) の関係が成立する。このとき、「$\mathfrak{L}^2(S)$ は $\mathfrak{L}^2_h(S)$ の複素化である」と言い、以下のように表記する。

$$\mathfrak{L}^2(S)=\mathfrak{L}^2_h(S)\oplus i\mathfrak{L}^2_h(S) \tag{1.37}$$

**$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上の歪エルミート形式 $[\cdot,\cdot]_S$**

$X,Y\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に対して、以下のように 歪エルミート形式を与えることができる。これは、 (1.25) の拡張になっている。

$$[Y,X]_S=i\mathrm{Tr}S[Y^*,X]=i\mathrm{Tr}[X,S]\cdot Y^* \tag{1.38}$$

**$\{\psi_j\}$ を用いた表現**

$X,Y\in\mathfrak{L}^2(S)$ に対して、内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ と歪対称形式 $[\cdot,\cdot]_S$ を密度作用素 $S$ の表現 $S=\sum s_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ を用いて表す：式 (1.37) より、$X,Y$ に対して

$X_k, Y_\ell \in \mathfrak{L}_h^2(S), k, \ell = 1, 2$ が存在して、$X = X_1 + iX_2, Y = Y_1 + iY_2$ が成立している。この時、式 (1.20)、式 (1.26) より次式の成立がいえる。

$$\begin{aligned} \langle Y, X \rangle_S &= \langle Y_1 + iY_2, X_1 + iX_2 \rangle_S \\ &= \langle Y_1, X_1 \rangle_S - i\langle Y_2, X_1 \rangle_S + i\langle Y_1, X_2 \rangle_S + \langle Y_2, X_2 \rangle_S \\ &= \sum_j s_j \frac{1}{2} \left[ \langle Y\psi_j | X\psi_j \rangle + \langle X^*\psi_j | Y^*\psi_j \rangle \right] \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} [Y, X]_S &= [Y_1 + iY_2, X_1 + iX_2]_S \\ &= [Y_1, X_1]_S - i[Y_2, X_1]_S + i[Y_1, X_2]_S + [Y_2, X_2]_S \\ &= i \sum_j s_j \left[ \langle Y\psi_j | X\psi_j \rangle - \langle X^*\psi_j | Y^*\psi_j \rangle \right] \end{aligned} \tag{1.40}$$

### $\{\psi_j\}$ を用いない表現

命題 33 を用いることにより、式 (1.39)、(1.26) を以下のように書き換えることができる。

$$\langle Y, X \rangle_S = \mathrm{Tr} \frac{1}{2} [(Y\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}) + (X^*\sqrt{S})^*(Y^*\sqrt{S})] \tag{1.41}$$

$$[Y, X]_S = i\mathrm{Tr}[(Y\sqrt{S})^*(X\sqrt{S}) - (X^*\sqrt{S})^*(Y^*\sqrt{S})] \tag{1.42}$$

ここで、$X^* \supseteq X_1 - iX_2, X_1, X_2 \in \mathfrak{L}_h^2(S)$、$\mathrm{dom} X^* \ni \psi_j$ であり、

$$\sum_j s_j \parallel X^*\psi_j \parallel^2 \leq \sum_j s_j \parallel X_1\psi_j \parallel^2 + \sum_j s_j \parallel X_2\psi_j \parallel^2 < \infty \tag{1.43}$$

より、$X^*\sqrt{S}$ も $X\sqrt{S}$ 同様、ヒルベルト・シュミット作用素であることを使った。

### 一方の作用素 $X$ が有界である場合の表現

$X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), Y \in \mathfrak{L}_h^2(\mathcal{H})$ に対して、式 (1.41)、(1.42) を以下のように書き換えることができる。

$$\langle Y, X \rangle_S = \mathrm{Tr}(Y \circ S)X \tag{1.44}$$

$$[Y, X]_S = i\mathrm{Tr}[Y, S]X \tag{1.45}$$

但し、

$$Y \circ S = \frac{1}{2}[\sqrt{S} \cdot (Y\sqrt{S})^* + (Y^*\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S}] \tag{1.46}$$

$$[Y, S] = \sqrt{S} \cdot (Y\sqrt{S})^* - (Y^*\sqrt{S}) \cdot \sqrt{S} \tag{1.47}$$

である。

### 1.3.4 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ と $[\cdot,\cdot]_S$ の関係

**前内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S^{\pm}$**

$\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ 上の２つの前内積を以下で与える。

$$\langle Y, X\rangle_S^+ = \mathrm{Tr}SXY^*, \langle Y, X\rangle_S^- = \mathrm{Tr}SY^*X \tag{1.48}$$

これらの前内積に関して $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ を完備化して得られる空間を $\mathfrak{L}_{\pm}^2(S)$ と書く。$\langle X, X\rangle_S^{\pm} \leq 2\langle X, X\rangle_S$ が成立していることより、$\mathfrak{L}^2(S) \subseteq \mathfrak{L}_{\pm}^2(S)$ が言える。式 (1.34)、(1.38) より、$X, Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\begin{aligned}\langle Y, X\rangle_S^{\pm} &= \langle Y, X\rangle_S \pm \frac{i}{2}[Y, X]_S \\ [Y, X]_S &= i(\langle Y, X\rangle_S^- - \langle Y, X\rangle_S^+)\end{aligned} \tag{1.49}$$

が成立していることがわかる。この関係式は、$\mathfrak{L}^2(S)$ 上に拡張することができる。

また、$X = X_1 + iX_2 \in \mathfrak{L}^2(S)$ に対して以下が成立する。

$$[X, X]_S = 2i[X_1, X_2]_S \tag{1.50}$$

これより $X^* \equiv X_1 - iX_2$ に対して次式が従う。

$$[X^*, X^*] = -2i[X_1, X_2]_S = -[X, X]_S \tag{1.51}$$

更に、$X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), Y \in \mathfrak{L}_h^2(\mathcal{H})$ に対して、式 (1.44)、(1.45) と、式 (1.49) より、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\langle Y, X\rangle_S^+ &= \mathrm{Tr}Y^*SX, \\ \langle Y, X\rangle_S^- &= \mathrm{Tr}\sqrt{S} \cdot (Y\sqrt{S})^*X\end{aligned} \tag{1.52}$$

**$X = X_1 + iX_2 \in \mathfrak{L}^2(S)$ に対する関係式**

**命題 36.** $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ と $[\cdot,\cdot]_S$ は以下の同値な不等式によって関係づけられる。
*A)* $\langle X, X\rangle_S \geq \frac{i}{2}[X, X]_S, X \in \mathfrak{L}^2(S)$
*B)* $\langle X, X\rangle_S \geq -\frac{i}{2}[X, X]_S, X \in \mathfrak{L}^2(S)$
*C)* $\langle X_1, X_1\rangle_S + \langle X_2, X_2\rangle_S \geq \pm[X_1, X_2]_S, X_1, X_2 \in \mathfrak{L}^2_h(S)$
*D)* $\langle X_1, X_1\rangle_S \cdot \langle X_2, X_2\rangle_S \geq \frac{1}{4}[X_1, X_2]^2_S, X_1, X_2 \in \mathfrak{L}^2_h(S)$

proof)
式 (1.48) より、

$$\langle X, X\rangle_S + \frac{i}{2}[X, X]_S = \langle X, X\rangle^+_S \geq 0$$

が成立する。よって、(A) は明らか。
式 (1.36)、(1.51) により、(A) と (B) が同値であることは明らか。
式 (1.35)、(1.50) により、(A)（すなわち (B)) の式と、(C) の式が同値であることは明らか。
(C) の式において、$X_1$ を $tX_1 (t \in \mathbb{R})$ と置き換えると、

$$t^2\langle X_1, X_1\rangle_S \mp t[X_1, X_2]_S + \langle X_2, X_2\rangle \geq 0 \tag{1.53}$$

となる。これは、(D) の式（(1.53) の判別式 $\leq 0$）と同値である。

**$X_1, ..., X_n \in \mathfrak{L}^2_h(S)$ に対する関係式**

**命題 37.** $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{L}^2_h(S)$ に対して、行列 $A = [\langle X_j, X_k\rangle_S]$、$B = [[X_j, X_k]_S]$ を考えるとき、次式が成立する。

$$A \geq \pm\frac{i}{2}B$$

proof)

$$
\begin{aligned}
&(\bar{z}_1, ....\bar{z}_n)\left[A \pm \frac{i}{2}B\right]\begin{pmatrix} z_1 \\ : \\ : \\ z_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j,k} \bar{z}_j z_k \left(\langle X_j, X_k\rangle_S \pm \frac{i}{2}[X_j, X_k]_S\right) \qquad (1.54)\\
&= \langle \sum_j z_j X_j, \sum_k z_k X_k\rangle_S \pm \frac{i}{2}[\sum_j z_j X_j, \sum_k z_k X_k]_S \\
&= \langle X, X\rangle_S \pm \frac{i}{2}[X, X]_S \geq 0
\end{aligned}
$$

ただし、$X = \sum_j z_j X_j$ と置いて、Prop. 8.2. の (A),(B) を適用した。

**補題 38.** $X, Y \in \mathfrak{L}^2(S)$ の時、

$$
\langle X, X\rangle_S + \langle Y, Y\rangle_S \geq \mathrm{Re}[X, Y]_S \qquad (1.55)
$$

proof)

式 (1.35), と命題 36 の (C) 式より以下が成立する。

$$
\begin{aligned}
\langle X, X\rangle_S + \langle Y, Y\rangle_S &= (\langle X_1, X_1\rangle_S + \langle Y_1, Y_1\rangle_S) + (\langle X_2, X_2\rangle_S + \langle Y_2, Y_2\rangle_S) \\
&\geq [X_1, Y_1]_S + [X_2, Y_2]_S = \mathrm{Re}[X, Y]_S
\end{aligned} \qquad (1.56)
$$

**命題 39.** $X, Y \in \mathfrak{L}^2(S)$ に対して、

$$
\langle X, X\rangle_S \langle Y, Y\rangle_S \geq \frac{1}{4}|[X, Y]_S|^2 \qquad (1.57)
$$

proof)

式 (1.55) に対して、命題 36 の (D) 式の導出と同様に考えると、

$$
\langle X, X\rangle_S \langle Y, Y\rangle_S \geq \frac{1}{4}(\mathrm{Re}[X, Y]_S)^2
$$

が得られる。ここで、$X$ を $\lambda X$ に置き換えると（ただし $\lambda = [X, Y]_S / |[X, Y]_S|$）、

$$
|\lambda|^2 \langle X, X\rangle_S \langle Y, Y\rangle_S \geq \frac{1}{4}(\mathrm{Re}\bar{\lambda}[X, Y]_S)^2
$$

となり、式 (1.57) を得る。

## 1.4 Uncertainty relations for measurements with finite second moment

### 1.4.1 有限な２次モーメントを持つオブザーバブル

**定義 40.** $S$ を密度作用素、$X$ を稠密に定義された対称作用素とし、$M$ を $X$ のスペクトル分解を与える単位の分解とする。ここで、$\mu_S(dx) = \mathrm{Tr}SM(dx)$ に対し、

$$\int x^2 \mu_S(dx) < \infty \tag{1.58}$$

が成立するとき、$X$ を「$S$ に関して有限な２次モーメントを持つオブザーバブル」と呼ぶ。

**命題 41.** $X$ が $S$ に関して有限な２次モーメントを持つオブザーバブルであるとき

$$X \in \mathfrak{L}_h^2(S)$$

であり、

$$E_S(X) = \langle I, X\rangle_S, D_S(X) = \langle X - E_S(X), X - E_S(X)\rangle_S \tag{1.59}$$

となる。

proof) 定理 13 の式 (1.10) より、

$$\sum_j s_j \parallel X\psi_j \parallel^2 = \sum_j s_j \int x^2 \langle \psi_j | M(dx)\psi_j\rangle$$

が成立する。右辺の和と積分を入れ替えて、式 (1.5) を適用すると、$\int x^2 \mu_S(dx) (< \infty)$ に等しいことがわかる。よって、$\sum_j s_j \parallel X\psi_j \parallel^2 < \infty$ であり、$X \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ がいえる。

式 (1.59) に関しては、

$$\langle I, X\rangle_S = \sum_j s_j \langle \psi_j | X\psi_j\rangle$$

$$\langle X - E_S(X), X - E_S(X)\rangle_S = \sum_j s_j \langle (X - E_S(X))\psi_j | (X - E_S(X))\psi_j\rangle$$

に対して、同様の変形を施すことによって得られる。

**系 42.** エルミート作用素 $X$ に対して、

$$E_S(X) = \mathrm{Tr}SX, D_S(X) = \mathrm{Tr}S(X - E_S(X))^2$$

が成立する。

(1.16) 式を用いて、上記 (12) 式の右辺をトレースを用いた形に書き直せばよい。

**命題 43.** $S$ に関して有限な 2 次モーメントを持つオブザーバブル $X_1, X_2$ に対して、

$$D_S(X_1) \cdot D_S(X_2) \geq \frac{1}{4}[X_1, X_2]_S^2$$

が成立する。

proof)

命題 36 の (D) の不等式を用いて、不等式

$$D_S(X_1) \cdot D_S(X_2) \geq \frac{1}{4}[X_1 - E_S(X_1), X_2 - E_S(X_2)]_S^2$$

を導き、式 (1.30) を使って、右辺を整理すればよい。

### 1.4.2 有限な２次モーメントを持つ単位の分解

**定義 44.** $S$ を密度作用素、$M$ を単位の分解とする。ここで、$\mu_S(dx) = \mathrm{Tr}SM(dx)$ に対し、式 *(1.58)* が成立するとき、$M$ を「$S$ に関して有限な *2* 次モーメントを持つ単位の分解」と呼ぶ。

### 単関数に対する積分

**定義 45.** 単関数 $f(x) = \sum_j f_j 1_{B_j}(x)$ に対する積分を、

$$\int f(x)M(dx) = \sum_j f_j M(B_j)$$

で定義する。

**補題 46.** $f$ を実数値単関数とするとき、以下の不等式が成立する。

$$\langle \int f(x)M(dx), \int f(x)M(dx)\rangle_S \leq \int f(x)^2 \mu_S(dx) \tag{1.60}$$

proof)

$M(B_j)$ が正値エルミートであることより、

$$\sum_j [f_j - \sum_k f_k M(B_k)] M(B_j) [f_j - \sum_k f_k M(B_k)] \geq 0 \tag{1.61}$$

が成立する。この左辺を計算すると、$\sum_j f_j^2 M(B_j) - (\sum_j f_j M(B_j))^2 \geq 0$ となり、これより、

$$[\int f(x)M(dx)]^2 \leq \int f(x)^2 M(dx)$$

が得られる。この式の両辺に $S$ をかけてトレースをとると式 (1.60) が得られる。

### ２乗可積分関数に対する積分

**命題 47.** $f$ を実数値２乗可積分関数とし、$f$ の単関数による近似列を $\{f_n\}$ とする：

$$\int (f_n(x) - f(x))^2 \mu_S(dx) \to 0$$

この時、$X_n = \int f_n(x)M(dx)$ に対し、$X_M \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ が存在し、

$$\langle X_n - X_M, X_n - X_M\rangle_S \to 0$$

が成立する。

proof)

式 (1.60) より、

$$\begin{aligned}\langle X_n - X_m, X_n - X_m\rangle_S &= \langle \int (f_n(x) - f_m(x))M(dx), \int (f_n(x) - f_m(x))M(dx)\rangle_S \\ &\leq \int (f_n(x) - f_m(x))^2 \mu_S(dx) \to 0\end{aligned} \tag{1.62}$$

が成立する。よって $\{X_n\}$ は $\mathfrak{L}_h^2(S)$ のコーシー列であり、収束点 $X_M$ を持つ。

**定義 48.** 上記命題の収束点 $X_M \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ を

$$\int f(x)M(dx)$$

と表記する。

**命題 49.** 実数値 2 乗可積分関数 $f$ に対して、

$$\langle X_M, X_M\rangle_S = \langle \int f(x)M(dx), \int f(x)M(dx)\rangle_S \leq \int f(x)^2 \mu_S(dx) \tag{1.63}$$

が成立する。

### 複素数値２乗可積分関数に対する積分

**補題 50.** $f$ を複素数値単関数とする。このとき、以下の不等式が成立する。

$$\langle \int f(x)M(dx), \int f(x)M(dx)\rangle_S^{\pm} \leq \int |f(x)|^2 \mu_S(dx) \tag{1.64}$$

proof)

式 (1.61) のかわりに

$$\sum_j [f_j - \sum_k f_k M(B_k)] M(B_j) [f_j - \sum_k f_k M(B_k)]^* \geq 0 \tag{1.65}$$

を考えると、補題 46 と同様に証明できる

**命題 51.** $f$ を複素数値 2 乗可積分関数とし、$f$ の単関数による近似列を $\{f_n\}$ とする。この時、$X_n = \int f_n(x)M(dx)$ に対し、$X_M^{\pm} \in \mathfrak{L}_{\pm}^2(S)$ が存在し、

$$\langle X_n - X_M^{\pm}, X_n - X_M^{\pm} \rangle_S^{\pm} \to 0$$

が成立する。

**命題 52.** 複素数値 2 乗可積分関数 $f$ に対して

$$\langle X_M^{\pm}, X_M^{\pm} \rangle_S^{\pm} \leq \int |f(x)|^2 \mu_S(dx) \tag{1.66}$$

が成立する。

### 1.4.3 不確定性関係

**命題 53.** $S$ を密度作用素、$M$ を $S$ に関して有限な 2 次モーメントを持つ単位の分解、とするとき、$E_S\{M\}$ と $D_S\{M\}$ に関して、

$$E_S\{M\} = \langle I, X_M \rangle_S \tag{1.67}$$

$$D_S\{M\} \geq \langle X_M - E_S\{M\}, X_M - E_S\{M\} \rangle_S \tag{1.68}$$

が成立する。ただし、$X_M = \int xM(dx)$ である。

proof)

$$\int f(x)\mu_S(dx) = \langle I, \int f(x)M(dx) \rangle_S \tag{1.69}$$

が単関数について成立することは明らか。単関数による近似を考えることにより、式 (1.69) が 2 乗可積分関数に対しても成立することがわかる。今、$M$ は $S$ に関して有限な 2 次モーメントを持つ単位の分解であり、式 (1.58) が成立している。これは $f(x) = x$ が 2 乗可積分関数であることを示しており、$f(x) = x$ を式 (1.69) に代入することにより式 (1.67) を得る。

式 (1.68) は、式 (1.60) で $f(x) = x - E_S\{M\}$ と置くと、

$$\langle X_M - E_S\{M\}, X_M - E_S\{M\}\rangle_S \leq \int (x - E\{M\})^2 \mu_S(dx) = D_S\{M\}$$

となることよりいえる。

**命題 54.** $S$ を密度作用素、$M_j$ を $S$ に関して有限な２次モーメントを持つ単位の分解とするとき、不確定性関係

$$D_S\{M_1\} \cdot D_S\{M_2\} \geq \frac{1}{4}[X_{M_1}, X_{M_2}]_S^2$$

が成立する。

proof)

命題 36 の (D) と式 (1.68) より明らか。

## 1.5　２乗和可能作用素の行列表現

これまでは、作用素 $X$ とそれに対応する $\mathfrak{L}^2(S)$ の元を同じ記号を用いて表してきたが、本節では、後者を $[X]_S$ という記号を使って表すことにする。本節の内容を説明するためには両者を区別した方が都合が良いからである。$[X]_S = [Y]_S$ であるとき、作用素 $X$,$Y$ は

$$L := \{\sum_j c_j|\psi_j\rangle ; c_j \in \mathbb{C}, c_j \text{は有限個の } j \text{ を除いて } 0\}$$

上で一致するが、それ以外のところでは一般には一致しない。よって、$[X]_S$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素と考えるにしても、定義域は $\mathcal{H}$ の稠密でない部分集合 $L$ になってしまう。(稠密な定義域を持たない $[X]_S$ に対しては共役作用素すら定義できない。) 例えば本節では、式 (1.39) は、以下の様に表記される。

$$\langle [Y]_S, [X]_S\rangle_S = \sum_j s_j \frac{1}{2}[\langle Y\psi_j|X\psi_j\rangle + \langle X^*\psi_j|Y^*\psi_j\rangle] \tag{1.70}$$

**注意:** 式 (1.70) の右辺の $X$,$Y$ は $\mathcal{H}$ 上稠密に定義された作用素であって、$[X]_S$,$[Y]_S$ が作用素のように働いているわけではない。($[X]_S, [Y]_S$ には共

役作用素は存在しない。)
**注意:** $\mathfrak{L}^2(S)$ は完備な内積空間 (ヒルベルト空間) になっている。

**命題 55.** $E_{j,k} = |\psi_j\rangle\langle\psi_k| \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ とするとき、以下が成立する。

$$\langle [E_{j,k}]_S, [X]_S \rangle_S = \frac{1}{2}(s_k + s_j)\langle \psi_j | X\psi_k \rangle \tag{1.71}$$

proof)
式 (1.70) に従って計算すればよい。

### 1.5.1 非退化な状態に対する場合

**命題 56.** $S = \sum_j s_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ を非退化密度作用素とし、$E_{j,k} = |\psi_j\rangle\langle\psi_k| \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ とする。この時、

$$F_{j,k} = \frac{E_{j,k}}{\sqrt{\langle [E_{j,k}]_S, [E_{j,k}]_S \rangle_S}}$$

によって定まる $[F_{j,k}]_S$ は $\mathfrak{L}^2(S)$ の完全正規直交系をなす。

proof)
式 (1.71) より、

$$\langle [F_{j,k}]_S, [X]_S \rangle_S = \sqrt{\langle [E_{j,k}]_S, [E_{j,k}]_S \rangle_S}\langle \psi_j | X\psi_k \rangle \tag{1.72}$$

を得る。特に

$$\langle [F_{j,k}]_S, [F_{j',k'}]_S \rangle_S = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'} \tag{1.73}$$

であり、$[F_{j,k}]_S$ が $\mathfrak{L}^2(S)$ の正規直交系をなすことがわかる。また、任意の $j,k$ に対して $\langle [F_{j,k}]_S, [X]_S \rangle_S = 0$ が成立するとき、式 (1.72) より任意の $k$ に対し $X\psi_k = 0$ が成立する。これは $[X]_S = 0$ を意味しており完全性がいえる。

**命題 57.** $S=\sum_j s_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ を密度作用素とし、$\mathfrak{L}^2(S)$ における収束列 $[X_n]_S\to[X]_S, n\to\infty$ を考える。このとき、$s_j\neq 0$ を満たす任意の $j$ に対して

$$X_n\psi_j\to X\psi_j, X_n^*\psi_j\to X^*\psi_j, n\to\infty$$

が成立する。

**注意:** 収束 $[X_n]_S\to[X]_S$ は、ヒルベルト空間 $\mathfrak{L}^2(S)$ におけるベクトル列の収束であり、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素の列の「作用素ノルム」による収束ではない。

proof)

$[X_n]_S\to[X]_S$ $(n\to\infty)$ より、

$$\begin{aligned}&\langle[X_n]_S-[X]_S,[X_n]_S-[X]_S\rangle_S=\langle[X_n-X]_S,[X_n-X]_S\rangle_S\\&=\sum_j\frac{s_j}{2}[\|(X_n-X)\psi_j\|^2+\|(X_n^*-X^*)\psi_j\|^2]\to 0, n\to\infty\end{aligned}\tag{1.74}$$

が成立している。今、$s_j\neq 0$ (すなわち $s_j>0$) を満たすある $j$ について、

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n\psi_j-X\psi_j\|^2>0$$

が成立していると仮定する。このとき、実数 $K>0$ と自然数 $n_0$ が存在して、

$$n\geq n_0\Longrightarrow\|X_n\psi_j-X\psi_j\|^2>K$$

が成立する。これより、

$$n\geq n_0\Longrightarrow\langle[X_n]_S-[X]_S,[X_n]_S-[X]_S\rangle_S>\frac{s_j}{2}K>0$$

となり矛盾する。よって、$s_j\neq 0$ を満たす任意の $j$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n\psi_j-X\psi_j\|^2=0$$

を得る。同様にして、$\lim_{n\to\infty}\|X_n^*\psi_j-X^*\psi_j\|^2=0$ もいえる。

**命題 58.** $S=\sum_j s_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ を非退化密度作用素とする。$[X]_S\in\mathfrak{L}^2(S)$ の完全正規直交系 $[F_{j,k}]_S$ による展開を

$$[X]_S=\sum_{j,k}x_{j,k}[F_{j,k}]_S\in\mathfrak{L}^2(S) \tag{1.75}$$

とするとき、展開係数 $x_{m,\ell}$ は、

$$x_{m,\ell}=\langle\psi_m|X\psi_\ell\rangle\sqrt{\langle[E_{m,\ell}]_S,[E_{m,\ell}]_S\rangle_S} \tag{1.76}$$

で与えられる。

**注意:** 式 (1.75) により、$[X]_S$ は、無限行列 $(x_{j,k})$ によって表されることがわかる。しかし、$x_{j,k}$ は、あくまでも $[X]_S$ をヒルベルト空間 $\mathfrak{L}^2(S)$ のベクトルと見たときの完全正規直交系 $\{[F_{j,k}]\}$ による展開係数であり、作用素 $X$ の行列表示とは異なる。(作用素 $X$ の行列表示については Akhiezer and Glazman の４７章を参照)

proof)

式 (1.75) に命題 57 を適用して、任意の $\ell$ に対して

$$X\psi_\ell=\sum_{j,k}x_{j,k}F_{j,k}\psi_\ell\in\mathcal{H} \tag{1.77}$$

を得る。この式の両辺に左から $\langle\psi_m|$ を施すと

$$\langle\psi_m|X\psi_\ell\rangle=\langle\psi_m|\sum_{j,k}x_{j,k}F_{j,k}\psi_\ell\rangle=\sum_{j,k}x_{j,k}\langle\psi_m|F_{j,k}\psi_\ell\rangle=\frac{x_{m,\ell}}{\sqrt{\langle[E_{m,\ell}]_S,[E_{m,\ell}]_S\rangle_S}}$$

となる。ここで、２番目の等号は $\langle\psi_m|$ の有界性（連続性）を用いた。

**命題 59.** 式 *(1.75)* の展開係数 $x_{m,\ell}$ は、

$$x_{m,\ell}=\langle[F_{m,\ell}]_S,[X]_S\rangle_S$$

で与えられる。

proof)

式 (1.72) と式 (1.76) より明らか。

### 1.5.2 一般の状態に対する場合

**命題 60.** $S = \sum_j s_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ を（必ずしも非退化とは限らない）密度作用素とする。また、$J_0 = \{j; s_j = 0\}$ と置く。このとき、

$$\{[F_{j,k}]_S; (j,k) \notin J_0 \times J_0\}$$

は完全正規直交系をなす。

**注意：**$[X]_S \in \mathfrak{L}^2(S)$ は、以下のように展開できる。

$$[X]_S = \sum_{(j,k)\notin J_0\times J_0} x_{j,k}[F_{j,k}]_S \in \mathfrak{L}^2(S) \tag{1.78}$$

**定義 61.** 上記命題によって定まる $[X]_S$ の展開係数、$x_{j,k}$、$(j,k) \notin J_0 \times J_0$ を一列に並べたものを $[x_{j,k}]$ と表記し、$[X]_S$ のベクトル表示と呼ぶ。

### 1.5.3 交換作用素

**命題 62.**

$$[[Y]_S, [X]_S]_S = \langle [Y]_S, \mathfrak{D} \cdot [X]_S \rangle_S \tag{1.79}$$

を満たす $\mathfrak{L}^2(S)$ 上の有界線形作用素 $\mathfrak{D}$ が存在する。

**定義 63.** 上記命題によって存在が保証された作用素 $\mathfrak{D}$ を、状態 $S$ の交換作用素と呼ぶ。

**命題 64.** 状態 $S$ の交換作用素 $\mathfrak{D} : \mathfrak{L}^2(S) \to \mathfrak{L}^2(S)$ は以下の性質を満たす。

1. $\mathfrak{D}^* = -\mathfrak{D}$
2. $1 \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D} \geq 0$
3. $1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2 \geq 0$
4. $\mathfrak{D} \cdot I = 0$

**命題 65.** $S$ の交換作用素 $\mathfrak{D}$ の行列表示は以下で与えられる。

$$\mathfrak{D}([x_{j,k}]) = \left[\frac{2i(s_k - s_j)}{s_k + s_j} x_{j,k}\right]$$

**注意:** $\mathfrak{D}$ は対角行列になっている。すなわち、$[F_{j,k}]_S, (j,k) \notin J_0 \times J_0$ は、完全正規直交系をなすだけではなく、固有値 $2i(s_k - s_j)/(s_k + s_j)$ を持つ $\mathfrak{D}$ の固有ベクトルともなっている。このことより、任意の関数 $f$ に対して、作用素 $f(\mathfrak{D})$ を以下のように定義することができる。

$$f(\mathfrak{D})([x_{j,k}]) \left[f\left(\frac{2i(s_k - s_j)}{s_k + s_j} x_{j,k}\right)\right] \tag{1.80}$$

**命題 66.**

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)([x_{j,k}]) &= \left[\frac{2s_j}{s_k + s_j} x_{j,k}\right] \\
\left(1 - \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)([x_{j,k}]) &= \left[\frac{2s_k}{s_k + s_j} x_{j,k}\right] \\
\left(1 + \frac{1}{4}\mathfrak{D}^2\right)([x_{j,k}]) &= \left[\frac{2s_j s_k}{(s_k + s_j)^2} x_{j,k}\right]
\end{aligned} \tag{1.81}$$

**命題 67.** 以下の *1*〜*4* は互いに同値である。

*1.* $S$ が非退化

*2.* $1+\frac{i}{2}\mathfrak{D}$ が非退化

*3.* $1-\frac{i}{2}\mathfrak{D}$ が非退化

*4.* $1+\frac{1}{4}\mathfrak{D}^2$ が非退化

proof)

$[E_{j,k}]_S$ が $\mathfrak{L}^2(S)$ の基底になるための必要十分条件は、$(j,k)\notin J_0\times J_0$ である。このとき、$j\notin J_0$ なる $j$ は必ず存在する。このような $j$ に対して、$(j,k)\notin J_0\times J_0$ を満たす $k$ は全ての自然数をとることができる。よって、条件 3 が成立すれば、式 (1.81) より常に $s_k\neq 0$ であり、条件 1 が成立することがわかる。同様に、$2\to 1$、$4\to 1$ の成立もわかる。また、条件 1 が成立するとき、残りの 3 つの条件がいずれも成立することは明らか。

# 第2章　ガウス状態

## 2.1　シンプレクティック空間

**定義 68.** $Z$ を有限次元実線形空間とし、$\Delta(z,z')$ を $Z$ 上定義された非退化双線形歪対称形式とする。(すなわち、$\Delta(z,z')$ は $z$ と $z'$ に関して線形であり、$\Delta(z,z') = -\Delta(z',z)$ が成立する。また、任意の $z \in Z$ に対して $\Delta(z,z') = 0$ であるとき $z' = 0$ となる。) このとき、$(Z,\Delta)$ を有限次元シンプレクティック空間と呼ぶ。

**定義 69.** $(Z,\Delta)$ を有限次元シンプレクティック空間、$\alpha(z,z')$ を $Z$ 上の内積とする。このとき、以下の式で与えられる写像 $\mathcal{D} : Z \to Z$ を(内積 $\alpha$ に関して)$\Delta$ に付随する写像と呼ぶ。

$$\Delta(z,z') = \alpha(z,\mathcal{D}z') \tag{2.1}$$

**注意：**2.5 章で明らかになるようにガウス状態の相関関数は内積を与える。本章における内積 $\alpha$ を用いた議論は、2.5 章においてガウス状態の一般論を展開するときに有効である。

**命題 70.** $\Delta$ に付随する写像 $\mathcal{D}$ は、全単射線形写像であり、また内積 $\alpha$ に関して歪対称 ( $\alpha(-\mathcal{D}z,z') = \alpha(z,\mathcal{D}z'), \forall z,z' \in Z$ ) となる。

**命題 71.** $(Z,\Delta)$ を有限次元シンプレクティック空間、$\alpha(z,z')$ を $Z$ 上の内積とする。このとき、正規直交基底 $\{\tilde{e}_j,\tilde{h}_j\}$ が存在し、$\Delta$ に付随する写像 $\mathcal{D}$ の行列表示を以下のようにとることができる。

$$\mathrm{diag}\begin{bmatrix} 0 & d_j \\ -d_j & 0 \end{bmatrix}, d_j > 0 \tag{2.2}$$

特に、有限次元シンプレクティック空間の次元は偶数である。

**注意：** 基底 $\{\tilde{e}_j,\tilde{h}_j\}$ は、

$$\alpha(\tilde{e}_j,\tilde{h}_k)=0,\alpha(\tilde{e}_j,\tilde{e}_k)=\delta_{j,k}$$

を満たすとき正規直交基底と呼ばれる。また、式 (2.2) が成立するとき、

$$\Delta(z,z')=-\sum_{j=1}^{s} d_j(x_j y'_j - x'_j y_j)$$

となる。ただし、$z=[x_1,y_1,....,x_s,y_s]^T, z'=[x'_1,y'_1,....,x'_s,y'_s]^T$ は、基底 $\{\tilde{e}_j,\tilde{h}_j\}$ による $z,z'$ の成分表示である。
**注意：** $\mathrm{diag}X_j$ は、対角ブロックが行列 $X_j$ で与えられ、それ以外のブロックがすべて 0 となる行列を表わす表記である。

**定義 72.** $(Z,\Delta)$ を $2s$ 次元シンプレクティック空間とする。$Z$ の基底 $\{e_j,h_j\}$ が $\Delta(e_j,h_k)=\delta_{j,k}$,$\Delta(e_j,e_k)=\Delta(h_j,h_k)=0$ を満たすとき、$\{e_j,h_j\}$ をシンプレクティック基底と呼ぶ。

**命題 73.** $(Z,\Delta)$ を $2s$ 次元シンプレクティック空間とし、$\alpha$ を $Z$ 上の内積とする。このとき、$\alpha$ の行列表示が

$$\mathrm{diag}\begin{bmatrix} a_j & 0 \\ 0 & a_j \end{bmatrix}, a_j > 0$$

となるようなシンプレクティック基底が存在する。

proof)

$$\begin{aligned} e_j &= d_j^{-1/2}\tilde{e}_j \\ h_j &= d_j^{-1/2}\tilde{h}_j \end{aligned} \tag{2.3}$$

と基底を取ればよい。但し、$\tilde{e}_j, \tilde{h}_j, d_j$ の定義は命題71に従うものとする。

**定義 74.** $(Z, \Delta)$ を $2s$ 次元シンプレクティック空間とする。写像 $T : Z \to Z$ が

$$\Delta(Tz, Tz') = \Delta(z, z')$$

を満たすとき $T$ をシンプレクティック変換と呼ぶ。

**命題 75.** $T$ をシンプレクティック変換とするとき、

$$|\mathrm{det}T| = 1$$

が成立する。

## 2.2 CCR 表現

**定義 76.** $(Z, \Delta)$ を $2s$ 次元シンプレクティック空間とする。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素の連続な族 $Z \ni z \to V(z)$ が以下の関係 $(CCR)$ を満たすとき、$z \to V(z)$ を $CCR$ 表現と呼ぶ。

$$V(z)V(z') = \mathrm{e}^{i\Delta(z,z')/2}V(z+z'), z, z' \in Z \tag{2.4}$$

**命題 77.** $(Z, \Delta)$ を $2s$ 次元シンプレクティック空間とし、$Z \ni z \to V(z)$ を既約 $CCR$ 表現とする。このとき、$\{(2\pi)^{-s/2}\langle e_j|V(z)e_k\rangle\}$ は、$\mathfrak{L}^2(Z)$ の正規直交基底をなす。

既約 CCR 表現としては以下に定義するシュレディンガー表現がよく用いられる。まず $s = 1$ の場合から考えることにする。

**定義 78.** $V(x,y)$ を

$$V(x,y)\psi(\xi) = \exp[iy(\xi + \frac{x}{2})]\psi(\xi + x) \tag{2.5}$$

によって定まる $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ 上ユニタリ変換とする。このとき、2 次元シンプレクティック空間 $(Z,\Delta)$ のシンプレクティック基底を適当に一つに定めて、成分表示 $z = [x,y]^T$ を考えるとき

$$z = [x,y]^T \to V_{sh}(z) := V(x,y)$$

をシュレディンガー表現と呼ぶ。

**注意：** III 章で定義されたシュレディンガー表現 $(x,v) \to W_{x,v}$ とは、$V(x,y) = W_{-x,y/\mu}$ という関係がある。$W_{x,y}$ は量子論に起源を持つ表記であり、$V(x,y)$ は確率論に起源を持つ表記である。

**命題 79.** シュレディンガー表現は既約 $CCR$ 表現である。

**定義 80.** $2s$ 次元シンプレクティック空間 $(Z,\Delta)$ のシンプレクティック基底を適当に一つ定めて成分表示 $z = [x_1, y_1, ..., x_s, y_s]$ を考えるとき、

$$V_{sh}(z) = \otimes_{j=1}^{s} V(x_j, y_j)$$

により与えられる $\otimes_{j=1}^{s}\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ 上の表現 $Z \ni z \to V_{sh}(z)$ を自由度 $s$ のシュレディンガー表現と呼ぶ。但し、$V(x,y)$ は式 *(2.5)* によって定まるユニタリ変換である。

**注意：** $\otimes_{j=1}^{s}\mathfrak{L}^2(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{L}^2(\mathbb{R}^s)$ である（詳しくは、「新井、フォック空間と量子場」,p.46）。

**命題 81.** 自由度 $s$ のシュレディンガー表現は既約ＣＣＲ表現である。

## 2.3 非可換フー リエ変換

**定義 82.** $z \to V(z)$ を既約 $CCR$ 表現とするとき、非可換フーリエ変換を

$$\mathfrak{T}^1(\mathcal{H}) \ni T \to \mathcal{F}_z[T] = \mathrm{Tr}TV(z) \tag{2.6}$$

によって定義する。

**復習** $\mathfrak{T}^1(\mathcal{H})$ はトレースクラス作用素の空間である。
**注意：**非可換フーリエ変換はワイル変換の逆を与える。

**命題 83.** 非可換フーリエ変換 $T \to \mathcal{F}_z[T]$ に対し、以下が成立する。

1. $\mathcal{F}_0[T] = \mathrm{Tr}T$, $|\mathcal{F}_z[T]| \leq \| T \|_1$
2. $\mathcal{F}_z[T^*] = \overline{\mathcal{F}_{-z}[T]}$
3. $\mathcal{F}_z[TV(w)] = \mathcal{F}_{z+w}[T] \cdot \mathrm{e}^{i\Delta(w,z)/2}$
4. $\mathcal{F}_z[V(w)^*TV(w)] = \mathcal{F}_z[T] \cdot \mathrm{e}^{i\Delta(w,z)}$

**定理 84.** 非可換フーリエ変換

$$\mathfrak{T}^1(\mathcal{H}) \ni T \to \mathcal{F}_z[T]$$

は、一意に $\mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{L}^2(Z)$ へのユニタリ写像に拡張することができ、次式が成立する。

$$\mathrm{Tr}T_1^*T_2 = (2\pi)^{-s}\int_Z \overline{\mathcal{F}_z[T_1]}\mathcal{F}_z[T_2]d^{2s}z, T_1, T_2 \in \mathfrak{T}^2(\mathcal{H}) \tag{2.7}$$

**復習：**$\mathfrak{T}^2(\mathcal{H})$ はヒルベルト・シュミット作用素のヒルベルト空間、$\mathfrak{L}^2(Z)$ は $Z$ 上の 2 乗可積分関数のヒルベルト空間である。

**系 85.** 状態 $S$ が純粋状態であるための必要十分条件は次式が成立することである。

$$(2\pi)^{-s}\int_Z |\mathcal{F}_z[S]|^2 d^{2s}z = 1$$

**系 86.** $z \to V(z)$ を既約ＣＣＲ表現とし、$T$ をヒルベルト・シュミット作用素とするとき次式が成立する。

$$T = V(\mathcal{F}_z[T]) \tag{2.8}$$

## 2.4 特性関数と状態のモーメント

### 2.4.1 Δ-正定値関数

**定義 87.** $(Z, \Delta)$ をシンプレクティック空間とする。$\mathcal{F} : Z \to \mathbb{C}$ が、任意の $n$ と任意の $z_1, z_2, ..., z_n \in Z$、任意の $c_1, c_2, ...c_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \mathcal{F}(z_j - z_k) \exp\left[\frac{i}{2}\Delta(z_j, z_k)\right] \geq 0 \tag{2.9}$$

を満たすとき、$\mathcal{F}$ を Δ-正定値であるという。

**命題 88.** $T$ を正値エルミートトレースクラス作用素とするとき、$\mathcal{F}_z[T]$ は Δ-正定値となる。

**補題 89.** Δ-正定値関数 $\mathcal{F}(z)$ が $z = 0$ で連続で $\mathcal{F}(0) = 1$ を満たすとき以下が成立する。

1. $\overline{\mathcal{F}(z)} = \mathcal{F}(-z)$
2. $|\mathcal{F}(z)| \leq 1$
3. $\mathcal{F}(z)$ は任意の $z \in Z$ で連続

### 2.4.2 特性関数

$z \to V(z)$ を既約 CCR 表現とする。

**定義 90.** $S$ を状態 (密度作用素) とするとき、$\mathcal{F}_z[S]$ を状態 $S$ の特性関数と呼ぶ。

**注意：**
$\mathfrak{T}^2(\mathcal{H}) \ni T \to \mathcal{F}_z[T] \in \mathfrak{L}^2(Z)$:非可換フーリエ変換
$Z \ni z \to \mathcal{F}_z[S] \in \mathbb{C}$:特性関数

**命題 91.** $(Z, \Delta)$ をシンプレクティック空間とする。関数 $\mathcal{F}: Z \to \mathbb{C}$ が状態 $S$ の特性関数となるための必要十分条件は以下の通り。

1. $\mathcal{F}(0) = 1$、$\mathcal{F}(z)$ は $z = 0$ で連続
2. $\mathcal{F}(z)$ は $\Delta$-正定値

### 2.4.3 状態のモーメント

$(Z, \Delta)$ をシンプレクティック空間、$Z \ni z \to V(z)$ を既約 CCR 表現とする。今、$z \in Z$ を固定して考えるとき、$\mathbb{R} \ni t \to V(tz)$ はユニタリ表現となる。従って、ストーン・フォンノイマンの定理により、自己共役作用素 $R(z)$ が存在し、

$$V(tz) = \mathrm{e}^{itR(z)} \tag{2.10}$$

が成立する。$R(z)$ のスペクトル分解を

$$R(z) = \int_{\mathbb{R}} \lambda E_z(d\lambda)$$

とするとき、状態 $S$ のオブザーバブル $R(z)$ に関する確率測度は、

$$\mu_S^z(d\lambda) = \mathrm{Tr} S E_z(d\lambda)$$

で与えられる。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tz}[S] &= \mathrm{Tr} S V(tz) = \mathrm{Tr} S \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\lambda} E_z(d\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\lambda} \mathrm{Tr} S E_z(d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\lambda} \mu_S^z(d\lambda) \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。これは、$z$ を固定して考えるとき、$\varphi(t) = \mathcal{F}_{tz}[S]$ が、$\mu_S^z(d\lambda)$ の古典特性関数であることを意味している。以下、$\mu_S^z(d\lambda)$ の $n$ 次モーメントを $m_n(z)$ と表記する。

### 古典特性関数とモーメント

**命題 92.** 確率測度 $\mu(d\lambda)$ が有限な $n$ 次絶対モーメント ($\int|\lambda|^n\mu(d\lambda)$) を持つとき、$n$ 次モーメント $m_n=\int\lambda^n\mu(d\lambda)$ は、

$$m_n = i^{-n}\,\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\bigg|_{t=0} \tag{2.12}$$

で与えられる。ただし、$\varphi(t)$ は確率測度 $\mu(d\lambda)$ の古典特性関数 $\int \mathrm{e}^{it\lambda}\mu(d\lambda)$ である。

**命題 93.** 確率測度 $\mu(d\lambda)$ の古典特性関数を $\varphi(t)$ とする。$n$ が偶数の時、

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)\bigg|_{t=0}$$

が存在するなら $\mu(d\lambda)$ の $n$ 次モーメント $m_n$ は有限であり、式 *(2.12)* が成立する。

**系 94.** 確率測度 $\mu(d\lambda)$ が $2n$ 次モーメントを持つとき、$\mu(d\lambda)$ は $n$ 次絶対モーメントを持つ。

**系 95.** 確率測度 $\mu(d\lambda)$ の特性関数 $\varphi(t)$ が無限回微分可能であるとき、$\mu(d\lambda)$ は任意の $n$ に対し $n$ 次絶対モーメントを持ち、$n$ 次モーメント $m_n$ は、式 *(2.12)* で与えられる。

### 有限な 2 次モーメントを持つ状態

**定義 96.** 状態 $S$ が任意の $z\in Z$ に対して有限な 2 次モーメントを持つ ($m_2(z)<\infty$) とき、$S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態と呼ぶ。

$z\to V(z)=\mathrm{e}^{iR(z)}$ を既約ＣＣＲ表現とする。

**命題 97.** 状態 $S$ が有限な 2 次モーメントを持つ状態であることと

$$R(z) \in \mathfrak{L}_h^2(S), \forall z \in Z$$

は同値である。

**補題 98.** $M(d\lambda)$ を有限な 2 次モーメントを持つ単位の分解とする (すなわち、$M(d\lambda)$ は単位の分解でそれに付随する確率測度 $\mu(d\lambda) = \mathrm{Tr}SM(d\lambda)$ が、有限な 2 次モーメントを持っている)。また、$M(d\lambda)$ に対し、II 章 9 節の方法で定義される積分 $X_M \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ と $V_t \in \mathfrak{L}_\pm^2(S)$ を考える：

$$\begin{aligned} X_M &= \int \lambda M(d\lambda) \\ V_t &= \int \mathrm{e}^{it\lambda} M(d\lambda) \end{aligned} \tag{2.13}$$

このとき、

$$X_M = i^{-1} \left. \frac{d}{dt} V_t \right|_{t=0} \tag{2.14}$$

が $\mathfrak{L}_\pm^2(S)$ において成立する。

**命題 99.** $S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態とするとき、

$$R(z+z') = R(z) + R(z'), z, z' \in Z \tag{2.15}$$

が $\mathfrak{L}_h^2(S)$ において成立する。

**命題 100.**

$$R(tz) = tR(z), t \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

**命題 101.** $(Z, \Delta)$ をシンプレクティック空間、$S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態、$\mathcal{F}_z[S]$ を $S$ の特性関数とするとき、

$$\begin{aligned} m_2(z, z') :=& -\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \mathcal{F}_{tz+sz'}[S]\bigg|_{t=s=0} \\ =& i\Delta(z, z')/2 + \langle R(z'), R(z) \rangle_S^+ \end{aligned} \tag{2.17}$$

が成立する。

**系 102.** $m_2(z, z')$ は実双線形対称形式である。

**定義 103.** $(Z, \Delta)$ をシンプレクティック空間、$S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態、$\mathcal{F}_z[S]$ を $S$ の特性関数とするとき、

$$m(z) := m_1(z)$$

を $S$ の平均関数、

$$\alpha(z, z') := m_2(z, z') - m(z)m(z')$$

を $S$ の相関関数と呼ぶ。

**命題 104.** $\alpha(z, z')$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態 $S$ の相関関数とするとき、$\alpha(z, z)$ は状態 $S$ のオブザーバブル $R(z)$ に関する分散 $D_S(R(z)) := \int (\lambda - m(z))^2 \mu_S^z(d\lambda)$ を与えている。

**命題 105.** 有限な 2 次モーメントを持つ状態 $S$ の平均 $m(z)$ と相関関数 $\alpha(z, z')$ に対して、次式が成立する。

$$\begin{aligned} m(z) &= \langle I, R(z) \rangle_S \\ \alpha(z, z') &= \langle R(z) - m(z), R(z') - m(z') \rangle_S \end{aligned} \tag{2.18}$$

**命題 106.** $(Z,\Delta)$ をシンプレクティック空間、$S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態とするとき、次式が成立する。

$$[R(z), R(z')]_S = \Delta(z, z') \tag{2.19}$$

**命題 107.** $(Z,\Delta)$ をシンプレクティック空間、$S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態、$\alpha(z,z')$ を $S$ の相関関数とするとき、以下の同値な不等式が成立する。

1. $\alpha(z,z)\alpha(z',z') \geq \frac{1}{4}\Delta(z,z')^2$
2. $\alpha(z,z) + \alpha(z',z') \geq \Delta(z,z')$
3. $[\alpha(z_j,z_k) + \frac{i}{2}\Delta(z_j,z_k)] \geq 0$
4. $[\alpha(z_j,z_k) - \frac{i}{2}\Delta(z_j,z_k)] \geq 0$

**系 108.** $(Z,\Delta)$ をシンプレクティック空間、$S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態とするとき、$S$ の相関関数 $\alpha(z,z')$ は $Z$ の内積を与える。

## 2.5 ガウス状態

### 2.5.1 ガウス状態の定義

**定義 109.** $(Z,\Delta)$ をシンプレクティック空間する。状態 $S$ の特性関数が以下の形を持つとき、$S$ をガウス状態と呼ぶ。

$$\mathcal{F}_z[S] = \exp[im(z) - \frac{1}{2}\alpha(z,z)] \tag{2.20}$$

ここで、$m(z)$ は実線形汎関数、$\alpha(z,z')$ は実双線形対称形式である。

**命題 110.** 式 *(2.20)* で与えられるガウス状態 $S$ の平均関数は $m(z)$ であり、相関関数は $\alpha(z,z')$ である。

**定理 111.** シンプレクティック空間 $(Z,\Delta)$ 上の複素数値関数

$$\mathcal{F}(z)=\exp[im(z)-\frac{1}{2}\alpha(z,z)]$$

を考える。ただし、$m(z)$ は実線形汎関数、$\alpha(z,z')$ は実双線形対称形式である。このとき、$S$ がガウス状態となるための必要十分条件は、$\alpha(z,z')$ が命題 *107* の互いに同値な条件を満たすことである。

$\alpha(z,z')$ は $(Z,\Delta)$ 上の内積を与えるので、式 (2.1) により、$\Delta$ に付随する作用素 $\mathcal{D}$ を定義することができる。上記の定理の条件を $\mathcal{D}$ を用いて書き換えると以下のようになる。

**命題 112.** $(Z,\Delta)$ をシンプレクティック空間、$S$ を相関関数 $\alpha(z,z')$ を持つガウス状態とする。このとき、内積 $\alpha(z,z')$ に関して、

$$I+\frac{1}{4}\mathcal{D}^2\geq 0 \tag{2.21}$$

が成立する。すなわち、任意の $z\in Z$ に対して、$\alpha(z,z+(1/4)\mathcal{D}^2z)\geq 0$ が成立する。

**命題 113.** $(Z,\Delta)$ をシンプレクティック空間、$S$ をガウス状態とする。このときシンプレクティック基底 $\{e_j,h_j\}$ が存在し、その基底による成分表示 $z=[x_1,y_1,...,x_s,y_s]^T$,$z'=[x'_1,y'_1,...,x'_s,y'_s]^T$ を使って、$S$ の平均関数 $m(z)$ と相関関数 $\alpha(z,z')$ を以下のように与えることができる。

$$\begin{aligned}m(z)&=\sum_{j=1}^{s}(x_j\langle I,R(e_j)\rangle_S+y_j\langle I,R(h_j)\rangle_S)\\ \alpha(z,z')&=\sum_{j=1}^{s}a_j(x_jx'_j+y_jy'_j),a_j\geq 1/2\end{aligned} \tag{2.22}$$

**注意：**式 (2.22) はガウス状態の特性関数の標準形を与える。また、このとき $\Delta$ に付随する写像 $\mathcal{D}$ の行列表示は

$$\mathrm{diag}\begin{bmatrix}0 & 1/a_j\\ -1/a_j & 0\end{bmatrix}$$

で与えられる。

### 2.5.2 ガウス状態のシフト

**定義 114.** $(Z, \Delta)$ をシンプレクティック空間とし、$S$ を平均関数 $m(z)$ と相関関数 $\alpha(z, z')$ を持つガウス状態とする。このとき、$m_\Delta, m_\alpha \in Z$ を、

$$\begin{aligned} m(z) &= \Delta(m_\Delta, z) \\ m(z) &= \alpha(m_\alpha, z) \end{aligned} \tag{2.23}$$

で定義する。

**命題 115.** 平均関数 $m(z)$ と (一つに固定された) 相関関数 $\alpha(z, z')$ を持つガウス状態を $S_m$ とする。特に、$m(z) = 0$ のとき、$S_0$ と表記する。このとき、次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} S_m =& V(m_\Delta)^* S_0 V(m_\Delta) \\ S_m =& V(\mathcal{D}^{-1} m_\alpha) S_0 V(\mathcal{D}^{-1} m_\alpha)^* \end{aligned} \tag{2.24}$$

### 2.5.3 ガウス状態の特徴付け

$z \to V(z) = \mathrm{e}^{iR(z)}$ を既約 CCR 表現とする。

**補題 116.** $\{V(z); z \in Z\}$ の線形包は $\mathfrak{L}^2(S)$ で稠密である。

**定義 117.** $S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態とするとき、$\mathfrak{L}_h^2(S)$ の線形部分空間 $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathrm{Span}\{c + R(z); c \in \mathbb{R}, z \in Z\} \\ \mathcal{R}_0 &= \{cI; c \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{R}_1 &= \{R(z) - m(z)I; z \in Z\} \end{aligned} \tag{2.25}$$

**命題 118.**

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1 \tag{2.26}$$

**定義 119.**

$$[Y, X]_S = \langle Y, \mathfrak{D}X \rangle_S, X, Y \in \mathfrak{L}^2(S)$$

により、交換作用素 $\mathfrak{D} : \mathfrak{L}^2(S) \to \mathfrak{L}^2(S)$ を定める (II 章１０節参照)。また、$\mathfrak{D}$ の $\mathcal{R}_1$ への制限を $\mathfrak{D}_1$ と表記する。すなわち、$\mathcal{R}_1$ への射影を $P_1 : \mathfrak{L}^2(S) \to \mathfrak{L}^2(S)$ とするとき、$\mathfrak{D}_1 = P_1 \mathfrak{D} P_1$ である。

**補題 120.** $\mathcal{D}$ を $\Delta$ に付随する写像とするとき、以下が成立する。

$$\mathfrak{D}_1(R(z) - m(z)) = R(\mathcal{D}z) - m(\mathcal{D}z) \tag{2.27}$$

**定理 121.** $S$ を有限な 2 次モーメントを持つ状態する。$S$ がガウス状態となるための必要十分条件は $\mathcal{R}$(又は $\mathcal{R}_1$) が交換作用素 $\mathfrak{D}$ の不変部分空間になることである。

**注意：**上記の必要十分条件は、

$$\mathfrak{D}(R(z) - m(z)) = R(\mathcal{D}z) - m(\mathcal{D}z), \forall z \in Z \tag{2.28}$$

が成立することと同値ある。

**命題 122.** $(Z, \Delta)$ をシンプレクティック空間とし、$S_m$ を平均関数 $m(z)$ と相関関数 $\alpha(z, z')$ を持つガウス状態とする。このとき、

$$i[R(z), S_m] = (R(\mathcal{D}z) - m(\mathcal{D}z)) \circ S_m \tag{2.29}$$

が成立する。

**注意：**$[\cdot, \cdot]$ と $\circ$ は式 (1.46), (1.47) で与えられる。

### 2.5.4 ガウス状態の族の微分

**定義 123.** ガウス状態の平均関数を、パラメータ $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ を用いて以下のように与える。

$$m(z) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j m_j(z) \tag{2.30}$$

この平均関数を持つガウス状態を $S_\theta$ と表記する。

**注意：** $m_j(z)$ は固定された $Z$ 上の線形汎関数である。$m_j(z) = \alpha(m_j, z)$ によって、関数 $m_j(z)$ に対応する $m_j \in Z$ を定める。

**命題 124.** $\{S_\theta\}$ はバナッハ空間 $\mathfrak{T}^1(\mathcal{H})$ に値を持つ関数として微分可能であり、次式が成立する。

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta_j} = i[R(\mathcal{D}^{-1} m_j), S_\theta] = (R(m_j) - m(m_j)) \circ S_\theta$$

## 2.6 擬古典ガウス状態

### 2.6.1 擬古典状態

**定義 125.** 最小不確定状態 $S = |\bar{P}, \bar{Q}; \sigma^2\rangle\langle\sigma^2; \bar{Q}, \bar{P}|$ を以下によって与える。

$$|\bar{P}, \bar{Q}; \sigma^2\rangle := \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \exp\left[i\bar{P}\left(\xi - \frac{\bar{Q}}{2}\right) - \frac{(\xi - \bar{Q})^2}{4\sigma^2}\right] \in \mathfrak{L}^2(\mathbb{R}), \tag{2.31}$$

最小不確定状態 $|\bar{P}, \bar{Q}; \sigma^2\rangle$ において、$\bar{P} = D_S(P), \bar{Q} = D_S(Q)$、$\sigma^2 = D_S(Q) = [4D_S(P)]^{-1}$ が成立している。また、作用素の弱収束の意味で、以下の等式が成立する。

$$\int\int |\bar{P}, \bar{Q}; \sigma^2\rangle\langle\sigma^2; \bar{Q}, \bar{P}| \frac{d\bar{P} d\bar{Q}}{2\pi} = I \tag{2.32}$$

特に、$\sigma^2 = \hbar/2\omega$ の時、状態 $S$ はコヒーレント状態と呼ばれる。以降、$|\bar{P},\bar{Q}\rangle = |\bar{P},\bar{Q};\hbar/2\omega\rangle$ と略記する。更に、$\bar{P},\bar{Q}$ のかわりに $\alpha,\beta$ を使い、$|\alpha,\beta\rangle$ と表記することにする。コヒーレント状態以外の最小不確定状態はスクイズド状態と呼ばれることがある。

**定義 126.** 密度作用素

$$S = \int |\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha|\mu(d\alpha d\beta) \tag{2.33}$$

で与えられる状態を擬古典状態と呼ぶ。

**注意：**外界からの影響がランダム性を持つと仮定し、$\alpha$ と $\beta$ を確率分布 $\mu(d\alpha d\beta)$ を持つ確率変数であるとする。与えられた量子的対象だけを観測し、外界は観測の対象に含めない場合、対象となる状態は統計的に式 (2.33) の密度作用素で表すことができる。

**注意：**$(\alpha_j,\beta_j)$ を独立同一分布の確率変数の組とするとき、

$$\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j, \bar{\beta} = \sum_{j=1}^{k}\beta_j$$

の確率分布 $\mu(d\bar{\alpha}d\bar{\beta})$ は、中心極限定理により $k\to\infty$ のとき、ガウス分布で近似できる。従って、しばしば確率分布 $\mu$ はガウス分布と仮定される。

**命題 127.** $M$ を実数値量子測定（単位の分解）とする。また、擬古典状態 $S$ と状態 $|\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha|$ に対して測定 $M$ を行ったときの平均値をそれぞれ $E_S\{M\}$、$E_{\alpha,\beta}\{M\}$ と表記する。このとき、以下の関係が成立する。

$$E_S\{M\} = \int E_{\alpha,\beta}\{M\}\mu(d\alpha d\beta) \tag{2.34}$$

**命題 128.** 式 *(2.33)* によって定まる、確率分布 $\mu$ の単体 $\mathfrak{P}$ から量子状態の凸集合 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ への写像 $\mathcal{G}:\mathfrak{P}\to\mathfrak{S}$ は単射である。ただし、写像 $\mathcal{G}$ は全射とはならない。すなわち、式 *(2.33)* で表すことのできない状態が存在する。

### 2.6.2 擬古典ガウス状態とフォック表現

以下通常の物理の表記に倣い、状態 $|\alpha,\beta\rangle$ を複素振幅 $\zeta=(2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\beta+i\hbar\alpha)$ を用いて $|\zeta\rangle$ と書くことにする。

**定義 129.** 状態

$$S_{\bar{b}}=\frac{1}{\pi\bar{N}}\int|\zeta\rangle\langle\zeta|\mathrm{e}^{|\zeta-\bar{b}|^2/\bar{N}}d^2\zeta \tag{2.35}$$

を擬古典ガウス状態と呼ぶ。ここで、$\bar{b}=(2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\bar{Q}+i\hbar\bar{P})$ であり、$\bar{N}$ は平均光子数を表している。

擬古典ガウス状態は、式 (2.33) において、古典確率分布を

$$\mu(d\alpha d\beta)=\frac{1}{2\pi\bar{N}}\exp\left[-\frac{1}{2}[\frac{\hbar}{\omega\bar{N}}(\alpha-\bar{P})^2+\frac{\omega}{\hbar\bar{N}}(\beta-\bar{Q})^2]\right]d\alpha d\beta$$

で与えた擬古典状態と一致する。

**命題 130.** 擬古典ガウス状態 $S_0$ と数状態 $|n\rangle$ に対して以下が成立する。

$$\langle n|S_0|m\rangle=\delta_{nm}\frac{1}{\bar{N}+1}\left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}+1}\right)^n$$

**系 131.** 擬古典ガウス状態 $S_0$ は数状態 $|n\rangle$ により、以下のように表現される。

$$S_0=\frac{1}{\bar{N}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}+1}\right)^n|n\rangle\langle n| \tag{2.36}$$

またこの状態の平均光子数は $\bar{N}$ で与えられる。

**定義 132.** 平均 $\bar{b}_j=(2\hbar\omega_j)^{-1/2}(\omega_j\bar{Q}_j+i\hbar\bar{P}_j)$、平均 $\bar{N}_j$ を持つ擬古典ガウス状態

$$S^{(j)}_{\bar{b}_j}=\frac{1}{\pi\bar{N}_j}\int|\zeta\rangle\langle\zeta|\mathrm{e}^{|\zeta-\bar{b}_j|^2/\bar{N}_j}d^2\zeta \tag{2.37}$$

のテンソル積

$$S_{\bar{b}}=\otimes_{j=1}^{s}S^{(j)}_{\bar{b}_j}$$

によって定まる状態を自由度 $s$ の擬古典ガウス状態と呼ぶ。

### 2.6.3　特性関数

**自由度 1 の場合**

**命題 133.** $z = [x, y]^T \to V_{sh}(z) = V(x, y)$ をシュレディンガー表現とするとき、式 *(2.10)* によって定まる自己共役作用素は

$$R(z) = xP + yQ =: R(x, y) \tag{2.38}$$

で与えられる。ここで $Q$,$P$ は

$$\begin{aligned} Q\psi(\xi) =& \xi\psi(\xi) \\ P\psi(\xi) =& i^{-1}\frac{d}{d\xi}\psi(\xi) \end{aligned} \tag{2.39}$$

によって定義される $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役作用素であり、$xP + yQ$ は急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で定義された対称作用素を自己共役拡大して得られる自己共役作用素を表している。

**命題 134.** コヒーレント状態 $|\alpha, \beta\rangle$ の特性関数は以下で与えられる。

$$\mathcal{F}_{x,y}[|\alpha, \beta\rangle\langle\beta, \alpha|] = \exp\left[i(x\alpha + y\beta) - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\hbar}x^2 + \frac{\hbar}{\omega}y^2\right)\right] \tag{2.40}$$

**命題 135.** シュレディンガー表現 $z = [x, y]^T \to V_{sh}(z) = V(x, y)$ に関する擬古典状態 *(2.33)* の特性関数は、

$$\mathcal{F}_{x,y}[S] = \mathcal{F}_{x,y}[|0, 0\rangle\langle 0, 0|] \cdot \tilde{\mu}(x, y) \tag{2.41}$$

で与えられる。ここで、$\tilde{\mu}(x, y)$ は、確率測度 $\mu(d\alpha d\beta)$ の古典特性関数である：

$$\tilde{\mu}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \exp[i(x\alpha + y\beta)]\mu(d\alpha d\beta)$$

**命題 136.** シュレディンガー表現 $z=[x,y]^T \to V_{sh}(z)=V(x,y)$ に関する擬古典ガウス状態 *(2.35)* の特性関数は、

$$\mathcal{F}_{x,y}[S_{\bar{b}}] = \exp[i(\bar{P}x+\bar{Q}y) - \frac{1}{2}(\sigma_P^2 x^2 + \sigma_Q^2 y^2)] \tag{2.42}$$

で与えられる。ただし、

$$\bar{P} = E_S(P) = \langle I, P\rangle_S, \quad \bar{Q} = E_S(Q) = \langle I, Q\rangle_S \tag{2.43}$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\omega}{\hbar}(\bar{N}+\frac{1}{2}), \quad \sigma_Q^2 = \frac{\hbar}{\omega}(\bar{N}+\frac{1}{2}) \tag{2.44}$$

であり、$\bar{N} = \sigma_P\sigma_Q - 1/2$ が成立している。

ここで、

$$\alpha(z,z) = x^2\langle P-\bar{P}, P-\bar{P}\rangle_S + xy\langle P-\bar{P}, Q-\bar{Q}\rangle_S + yx\langle Q-\bar{Q}, P-\bar{P}\rangle_S + y^2\langle Q-\bar{Q}, Q-\bar{Q}\rangle_S \tag{2.45}$$

であることより、式 (2.44) は、

$$\begin{aligned} \langle P-\bar{P}, P-\bar{P}\rangle_S = \sigma_P^2, \quad \langle P-\bar{P}, Q-\bar{Q}\rangle_S = 0 \\ \langle Q-\bar{Q}, P-\bar{P}\rangle_S = 0, \quad \langle Q-\bar{Q}, Q-\bar{Q}\rangle_S = \sigma_Q^2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

を意味している。

**自由度 $s$ の場合**

**命題 137.** 自由度 $s$ のシュレディンガー表現に関する自由度 $s$ の擬古典ガウス状態の特性関数は、

$$\prod_{j=1}^{s} \exp[i(\bar{P}_j x_j + \bar{Q}_j y_j) - \frac{1}{2}(\sigma_{P_j}^2 x_j^2 + \sigma_{Q_j}^2 y_j^2)] \tag{2.47}$$

で与えられる。ただし、

$$\sigma_{P_j}^2 = \frac{\omega_j}{\hbar}(\bar{N}_j + \frac{1}{2}), \sigma_{Q_j}^2 = \frac{\hbar}{\omega_j}(\bar{N}_j + \frac{1}{2}),$$

であり、$\bar{N}_j = \sigma_{P_j}\sigma_{Q_j} - 1/2$ が成立する。

**命題 138.** 自由度 $s$ の擬古典ガウス状態の特性関数の標準形は、

$$\prod_{j=1}^{s} \exp[i(\bar{P'}_j x'_j + \bar{Q'}_j y'_j) - \frac{1}{2}a_j((x'_j)^2 + (y'_j)^2)]$$

で与えられる。ただし、$a_j = \sigma_{P_j}\sigma_{Q_j} = \bar{N}_j + 1/2$, $\bar{P'}_j = (\sigma_{Q_j}/\sigma_{P_j})^{1/2}\bar{P}_j$, $\bar{Q'}_j = (\sigma_{P_j}/\sigma_{Q_j})^{1/2}\bar{Q}_j$ である。

proof)

基底変換

$$(e'_1, h'_1, ...., e'_s, h'_s) = (e_1, h_1, ....., e_s, h_s)T, \tag{2.48}$$

$$T = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} (\sigma_{Q_j}/\sigma_{P_j})^{1/2} & 0 \\ 0 & (\sigma_{P_j}/\sigma_{Q_j})^{1/2} \end{bmatrix}$$

を (2.47) に適用すればよい。

## 一般のガウス状態の固有値

**命題 139.** $z \to V(z)$ 既約 $CCR$ 表現とし、ガウス状態 $S$ の特性関数 $\mathcal{F}(z) = \mathrm{Tr}SV(z)$ の標準形が式 *(2.22)* で与えられているとする。このとき、ガウス状態 $S$ の固有値は

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{1}{\bar{N}_j + 1} \left( \frac{\bar{N}_j}{\bar{N}_j + 1} \right)^{n_j}, n_j = 0, 1, 2, .... \tag{2.49}$$

で与えられる。

proof)

特性関数の標準形を与えるシンプレクティック基底を $\{e_1', h_1', ...., e_s', h_s'\}$ とする。式 (2.48) の基底変換の逆 $T^{-1}$ を施し、シンプレクティック基底 $\{e_1, h_1, ...., e_s, h_s\}$ による成分表示を行うことにより特性関数 $\mathcal{F}(z)$ は式 (2.47) の形となる。シンプレクティック基底 $\{e_1, h_1, ...., e_s, h_s\}$ に対してシュレディンガー表現 $Z \ni z \to V_{sh}(z)$ を考える。ストーン・フォンノイマンの定理より

$$V(z) = U_1^* V_{sh}(z) U_1$$

を満たすユニタリ変換 $U_1$ が存在するので、

$$\mathcal{F}(z) = \mathrm{Tr}SU_1^* V_{sh}(z) U_1 = \mathrm{Tr}U_1 S U_1^* V_{sh}(z)$$

が成立する。この式は $U_1 S U_1^*$ のシュレディンガー表現に関する特性関数が式 (2.47) で与えられることを意味している。よって特性関数の一意性より、$U_1 S U_1^*$ は自由度 $s$ の擬古典ガウス状態となる。また、命題 115 よりユニタリ変換 $U_2$ が存在して、

$$U_2 U_1 S U_1^* U_2^* = \otimes_{j=1}^{s} S_0^{(j)}$$

とすることができる。ここで、$S_0^{(j)}$ は式 (2.37) によって与えられる状態で $\bar{b}_j = 0, \bar{N}_j = a_j - 1/2$ とおいたものであり、式 (2.36) より固有値は

$$\frac{1}{\bar{N}_j + 1} \left( \frac{\bar{N}_j}{\bar{N}_j + 1} \right)^{n}, n = 0, 1, 2, ....$$

で与えられる。よって、状態 $U_2 U_1 S U_1^* U_2^*$ の固有値は式 (2.49) で与えられる。ユニタリ変換によって固有値は変化しないので、状態 $S$ の固有値も式 (2.49) で与えられる。

**系 140.** $z \to V(z)$ 既約 $CCR$ 表現とし、ガウス状態 $S$ の特性関数 $\mathcal{F}(z) = \mathrm{Tr}SV(z)$ の標準形が式 *(2.22)* で与えられているとする。このときガウス状態 $S$ が純粋状態になるための条件は、任意の $1 \leq j \leq s$ に対し $a_j = 1/2$ が成立すること、すなわち

$$\det \frac{1}{2}\mathcal{D} = 1$$

が成立することである。

### 2.6.4 ギッブス状態

自由度 $s$ の擬古典ガウス状態の例をあげる。

**定義 141.** 離散個エネルギー $\{E_n\}$ をとる量子的対象を考え、$S_n$ をエネルギー $E_n$ を持つ状態とする。このとき

$$S = c\sum_n \exp(-E_n/kT)S_n$$

をギッブス状態と呼ぶ。ただし、$k = 1.38 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ はボルツマン定数、$T$ は絶対温度、$c = (\sum_n \exp(-E_n/kT))^{-1}$ は正規化項とする。

**補足：**一般に、温度 $T$ で外界と無限に長い相互作用をすることにより得られる平衡状態がギッブス状態であると信じられている。ギッブス状態のエネルギー $E_n$ が

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

で与えられるとき、ギッブス状態は、平均光子数

$$\bar{N} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

をもつ擬古典ガウス状態と一致する。多自由度擬古典ガウス状態は量子光学において輻射場を表すのに広く使われる。輻射場としては自然光のようにカオス的な場合も、レーザで生成されるコヒーレントな場合もいずれも考えることができる。自由電磁場は数学的には無限個の調和振動子の集まりと数学的に等価であることが知られている。ただし、我々の

目的のためには周波数 $\omega_j$ $(j=1,2,...,s)$ をもつ有限個の振動子を考えれば十分である。このような輻射場を「(周波数が) カットオフされた輻射場」といい、そのカノニカルオブザーバブルを $P_j, Q_j$ $(j=1,...,s)$ とする。そのもっとも単純な例は以下の密度作用素で与えられる。

$$S = \otimes_j S_0^{(j)} \tag{2.50}$$

ここで、$S^{(j)}$ は式 (2.37) の平衡状態であり、平均光子数は $\bar{N}_j = (\exp(\hbar\omega_j/kT) - 1)^{-1}$ に等しい。この状態が外界からの影響を受け平均がシフトすると以下の状態に変化する。

$$S_{\bar{b}} = \otimes_j S_{\bar{b}_j}^{(j)} \tag{2.51}$$

式 (2.51) は「信号 $\bar{b}$ +雑音」を表している。

### 2.6.5 擬古典ガウス状態の族の微分と交換作用素

2.5.4 節の議論を擬古典ガウス状態の族の場合に適用する。既約 CCR 表現としてシュレディンガー表現を考える。このとき、平均関数と相関関数は

$$\begin{aligned} m(z) =& \bar{P}x + \bar{Q}y \\ \alpha(z,z') =& \sigma_P^2 xx' + \sigma_Q^2 yy' \end{aligned} \tag{2.52}$$

で与えられる (命題 136)。今、$\theta = (\bar{P}, \bar{Q})$ とし擬古典ガウス状態の族 $\{S_\theta\}$ を考えると、式 (2.30) に対応する式として、

$$m(z) = \bar{P}\alpha(m_p, z) + \bar{Q}\alpha(m_Q, z), z = [x,y]^T \tag{2.53}$$

$$m_P = \sigma_P^{-2}[1,0]^T, m_Q = \sigma_Q^{-2}[0,1]^T$$

を得る。また、式 (2.38) より、

$$\begin{aligned} R(m_P) - m(m_P) = \sigma_P^{-2}(P - \bar{P}) \\ R(m_Q) - m(m_Q) = \sigma_Q^{-2}(Q - \bar{Q}) \end{aligned} \tag{2.54}$$

を得る。$\Delta$ に付随する写像 $\mathcal{D}$ は以下で与えられる。

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_P^{-2} \\ -\sigma_Q^{-2} & 0 \end{bmatrix}$$

これらの事実と命題 124 より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{\bar{P},\bar{Q}}}{\partial \bar{P}} &= i[Q, S_{\bar{P},\bar{Q}}] = \sigma_P^{-2}(P-\bar{P}) \circ S_{\bar{P},\bar{Q}} \\ \frac{\partial S_{\bar{P},\bar{Q}}}{\partial \bar{Q}} &= -i[P, S_{\bar{P},\bar{Q}}] = \sigma_Q^{-2}(Q-\bar{Q}) \circ S_{\bar{P},\bar{Q}}\end{aligned} \tag{2.55}$$

が成立する。また式 (2.28) より、交換作用素 $\mathfrak{D}$ に対して

$$\mathfrak{D}(P) = -\sigma_Q^{-2}(Q-\bar{Q}), \mathfrak{D}(Q) = \sigma_P^{-2}(P-\bar{P}) \tag{2.56}$$

が成立する。

# 第3章　量子推定理論

## 3.1　量子推定理論の問題設定

$\Theta \subset \mathbb{R}^n$ を可測空間とし、状態の族 $\{S_\theta; \theta \in \Theta\}$ を考える。パラメータ $\theta$ の推定を与える測定を単位の分解 $M = \{M(B); B \in \mathfrak{A}(\Theta)\}$ によって表す。ここで、$\mathfrak{A}(\Theta)$ は $\Theta$ のボレル集合族である。この時、

$$\mu_\theta(B) = \mathrm{Tr} S_\theta M(B) \tag{3.1}$$

によって推定値の確率測度が与えられる。

$$\int \hat{\theta}_j \mu_\theta(d^n\hat{\theta}) = \theta_j, \quad j = 1, 2, .., n \tag{3.2}$$

を満たす推定を**不偏推定**と呼ぶ。但し、$d^n\hat{\theta} = d\hat{\theta}_1 ... d\hat{\theta}_n$ である。また、式（3.2）と

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \int \hat{\theta}_j \mu_\theta(d^n\hat{\theta}) = \delta_{jk} \tag{3.3}$$

がある固定された $\theta \in \Theta$ で成立している推定を、**$\theta$-局所不偏推定**と呼ぶ。但し、$\delta_{jk}$ は、$j = k$ の時 1 をそれ以外は 0 の値をとる。

以下、不偏推定の評価基準として、

$$\Sigma_\theta\{M\} = \int W_\theta(\hat{\theta}) \mu_\theta(d^n\hat{\theta}) \tag{3.4}$$

を用いる。但し、

$$W_\theta(\hat{\theta}) = \sum_{j,k} g_{jk}(\hat{\theta}_j - \theta_j)(\hat{\theta}_k - \theta_k) \tag{3.5}$$

とする。なお、$G = [g_{jk}]$ は非退化実正定値行列である。また $\Sigma\{M\}$ は、共分散行列

$$B_\theta\{M\} = [\int (\hat{\theta}_j - \theta_j)(\hat{\theta}_k - \theta_k) \mu_\theta(d^n\hat{\theta})] \equiv [b_{jk}\{M\}] \tag{3.6}$$

と重み行列 $G \equiv [g_{jk}]$ をもちいて、

$$\Sigma_\theta\{M\} = \mathrm{Tr} G B_\theta\{M\} = \sum_{j,k} g_{jk} b_{jk}\{M\} \tag{3.7}$$

と書ける。$\Sigma_\theta\{M\}$ を最小にする推定 $M$ をパラメータ $\theta$ の**最適推定**と呼ぶ。本章ではまず、$\Sigma_\theta\{M\}$ の一般的な下界 (3.57) を求める。ただし、この下界を達成する推定 $M$ が存在するかどうかは保証されていない。また、最適推定が存在したとしてもそれは各 $\theta$ 毎に定まるだけのものであることに注意が必要である。これは、あまり良い状況ではない。実際、$\theta$ の真の値がわからないから $\theta$ の値を推定するのであって、真の値 $\theta$ 毎に最適な推定があるだけでは不十分である。これに対し、推定 $M$ が、すべての $\theta \in \Theta$ に対して最適となっているとき、$M$ を**一様最適推定**と呼ぶ。一様最適推定はごく限られたモデルにしか存在しないが、ガウス状態の族に対しては、一様最適推定が存在することが知られている（定理 150）。

本章では、以下の４つの条件を仮定する。

仮定１：

$$\int \hat{\theta}_j^2 \mu_\theta(d^n\hat{\theta}) < \infty, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{3.8}$$

仮定２：

$$\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \to S_\theta \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}) \tag{3.9}$$

が、微分可能。すなわち

$$\| \frac{S_{(\theta_1,..,\theta_j+\delta,..,\theta_n)} - S_\theta}{\delta} - S_\theta^{(j)} \|_1 \to 0, \quad \delta \to 0 \tag{3.10}$$

を満たす、$S_\theta^{(j)} \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ が一意に存在する。以下、$S_\theta^{(j)}$ を $\frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta$ と書く。

仮定３：正定数 $c$ が存在して以下の不等式が成立する。

$$\left| \mathrm{Tr} \frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta \cdot X \right|^2 \le c \mathrm{Tr} S_\theta X^2, \quad X \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H}) \tag{3.11}$$

仮定４：

$$\frac{\partial}{\partial\theta_k} \int \hat{\theta}_j \mu_\theta(d^n\hat{\theta}) = \int \hat{\theta}_j \frac{\partial\mu_\theta}{\partial\theta_k}(d^n\hat{\theta}) \tag{3.12}$$

ここで、$\partial\mu_\theta/\partial\theta_k$ は以下で定義される、有限な全変動を持つ加法的集合関数である。

$$\frac{\partial\mu_\theta}{\partial\theta_k}(B) = \mathrm{Tr} \frac{\partial}{\partial\theta_k} S_\theta \cdot M(B), \quad B \in \mathfrak{A}(\Theta) \tag{3.13}$$

## 3.2　量子フィッシャー情報行列

仮定 2 より、任意の有界作用素 $X$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}E_\theta(X) = \mathrm{Tr}\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta\cdot X \tag{3.14}$$

が成立することがわかる。ただし、$E_\theta(X) = \mathrm{Tr}S_\theta X$。実際、

$$\begin{aligned}\left|\frac{E_{(\theta_1,..,\theta_j+\delta,..,\theta_n)}(X)-E_\theta(X)}{\delta} - \mathrm{Tr}\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta\cdot X\right| &= \left|\mathrm{Tr}\left(\frac{S_{(\theta_1,..,\theta_j+\delta,..,\theta_n)}-S_\theta}{\delta} - \frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta\right)X\right| \\ &\le \| X \| \| \frac{S_{(\theta_1,..,\theta_j+\delta,..,\theta_n)}-S_\theta}{\delta} - \frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta \|_1 \\ &\to 0, \quad \delta\to 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

より、(3.14) が導かれる (最後の不等号は式 (1.14) より得られる)。仮定 3 より、式 (3.14) によって定まる線形汎関数を $\mathfrak{L}_h^2(S_\theta)$ 上に拡張することができる。実際、下記のハーン・バナッハの拡張定理を、$E = \mathfrak{L}_h^2(S_\theta)$、$D = \mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$、$f(X) = \mathrm{Tr}\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta\cdot X$、$p(X) = (c\langle X, X\rangle_{S_\theta})^{1/2}$ とおいて適用すれば拡張された線形汎関数 $g(X), X \in \mathfrak{L}_h^2(S_\theta)$ を得る。但し、$X \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ に対し、$\langle X, X\rangle_{S_\theta} = \mathrm{Tr}S_\theta X^2$ が成立していることに注意する。以下、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{S_\theta}$ を $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$、$\mathfrak{L}_h^2(S_\theta)$ を $\mathfrak{L}_h^2(S)$ と略記することにする。

**命題 142.**（ハーン・バナッハの拡張定理）
$E$ を $\mathbb{K}$（$=\mathbb{R}$ $or$ $\mathbb{C}$）上の線形空間、$p$ を $E$ 上定義された半ノルム、$D$ を $E$ の線形部分空間とする。$f$ が $|f(x)| \le p(x)$　($x \in D$) を満たす $D$ 上の線形汎関数とするとき、$E$ 上の線形汎関数 $g$ で、

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x), \quad x \in D \\ |g(x)| &\le p(x), \quad x \in E \end{aligned} \tag{3.16}$$

を満たすものが存在する。

リース・フレッシェの補題により、

$$g(X) = \langle L_\theta^j, X\rangle_S, X \in \mathfrak{L}_h^2(S) \tag{3.17}$$

を満足する $L_\theta^j \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ がただ一つ存在する。以下、$L_\theta^j$ を $L^j$ と略記する。式 (3.17) を $\mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ に制限して、

$$\mathrm{Tr}\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta\cdot X = \langle L^j, X\rangle_S = \mathrm{Tr}(L^j\circ S_\theta)\cdot X \tag{3.18}$$

を得る。ただし、

$$L^j \circ S_\theta = \sqrt{S_\theta}(L^j\sqrt{S_\theta})^* + (L^j\sqrt{S_\theta})\sqrt{S_\theta} \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}) \tag{3.19}$$

である。ここで、有界作用素 $X$ が、$X = X_1 + iX_2$,$X_1, X_2 \in \mathfrak{B}_h(\mathcal{H})$ と表現できることより、式 (3.18) が、任意の $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に対しても成立することがわかる。式 (3.18) で、$X = |\phi\rangle\langle\psi| \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ とすると、$\langle\psi|\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta\phi\rangle = \langle\psi|(S_\theta \circ L^j)\phi\rangle$ を得る。$\psi, \phi \in \mathcal{H}$ は任意にとることができるので、

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta = L^j \circ S_\theta \tag{3.20}$$

が成立する。

**定義 143.** 式（*3.20*）を満たす $L^j \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ を対称対数微分（ＳＬＤ）と呼ぶ。

式 (3.14) と (3.18) を、$X = I$ に対して適用して

$$\langle L^j, I\rangle_S = \mathrm{Tr}\frac{\partial}{\partial\theta_j}S_\theta \cdot I = \frac{\partial}{\partial\theta_j}E_\theta(I) = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\mathrm{Tr}S_\theta = 0 \tag{3.21}$$

を得る。また、式 (3.13) と式 (3.18) より、

$$\frac{\partial\mu_\theta}{\partial\theta_j}(B) = \langle L^j, M(B)\rangle_S \tag{3.22}$$

が成立している。

仮定 1 より、積分

$$X_M^j = \int \hat{\theta}_j M(d^n\hat{\theta}) \in \mathfrak{L}_h^2(S) \tag{3.23}$$

が存在することがいえる (命題 47)。積分 (3.23) が有限和の $\mathfrak{L}_h^2(S)$ における極限であることより、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\langle L^k, X_M^j\rangle_S &= \langle L^k, \int \hat{\theta}_j M(d^n\hat{\theta})\rangle_S \\ &= \int \hat{\theta}_j \langle L^k, M(d^n\hat{\theta})\rangle_S = \int \hat{\theta}_j \frac{\partial\mu_\theta}{\partial\theta_k}(d^n\hat{\theta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta_k}\int \hat{\theta}_j \mu_\theta(d^n\hat{\theta})\end{aligned} \tag{3.24}$$

式 (3.24) より、式 (3.3) は次式と同値であることがわかる。

$$\langle L^k, X_M^j \rangle_S = \delta_{jk} \tag{3.25}$$

ここで新たに作用素

$$X_k = X_M^k - \theta_k \in \mathfrak{L}_h^2(S) \tag{3.26}$$

を導入する。この時、式 (3.25) は、式 (3.21) を用いて、

$$\langle L^j, X_k \rangle_S = \delta_{jk} \tag{3.27}$$

と書き換えることができる。

**命題 144.** $X_j$ のグラム行列 $[\langle X_j, X_k \rangle_S]$,$[\langle X_j, X_k \rangle_S^{\pm}]$ は、共分散行列 $B_\theta\{M\}$ の下界を与える：

$$B_\theta\{M\} \geq [\langle X_j, X_k \rangle_S] \tag{3.28}$$

$$B_\theta\{M\} \geq [\langle X_j, X_k \rangle_S^{\pm}] = [\langle X_j, X_k \rangle_S] \pm \frac{i}{2}[[X_j, X_k]_S] \tag{3.29}$$

proof) 命題 49 において、$f(\hat{\theta}) = \sum v_j(\hat{\theta}_j - \theta_j)$,$v_j \in \mathbb{R}$ とすることにより、式 (3.28) を得る。また、命題 52 において、$f(\hat{\theta}) = \sum v_j(\hat{\theta}_j - \theta_j)$,$v_j \in \mathbb{C}$ とすることにより、式 (3.29) を得る。式 (3.29) の最後の等式は、(1.48) による。

**定義 145.**

$$J = [\langle L^j, L^k \rangle_S]$$

を**ＳＬＤ量子フィッシャー情報行列**と呼ぶ。

式 (3.27) の成立を仮定する時、以下の補題を使うことにより、量子フィッシャー情報行列 $J$ が非退化であることがわかる。

**補題 146.** $X_j, L^j$ ; $j = 1, .., n$ を、以下の関係を満たす線形空間 $\mathcal{L}$ のベクトルとする。

$$\langle L^j, X_k \rangle = \delta_{jk}; \quad j, k = 1, 2, ...n \tag{3.30}$$

ただし、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathcal{L}$ 上の前内積である。この時、グラム行列 $\Gamma_X = [\langle X_j, X_k \rangle]$ と $\Gamma_L = [\langle L^j, L^k \rangle]$ は、いずれも非退化であり、$\Gamma_X \geq \Gamma_L^{-1}$ が成立する。ここで、等号は、$(X_1, ..., X_n)$ と $(L_1, .., L_n)\Gamma_L^{-1}$ が一次従属の時（すなわち、同時に 0 にならない数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在して、

$$\alpha(X_1, ..., X_n) + \beta(L_1, .., L_n)\Gamma_L^{-1} = 0 \tag{3.31}$$

が成立する時）に限る。

**注意**：前内積では、$\langle X, X \rangle = 0$ の時必ずしも $X = 0$ とならなくてよい。
proof) シュワルツの不等式 $\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle \geq |\langle X, Y \rangle|^2$ において、$X = \sum u_j X_j$、$Y = \sum v_j L^j$ とすると、

$$u^* \Gamma_X u \cdot v^* \Gamma_L v \geq |u^* v|^2 \tag{3.32}$$

が成立する。但し、$u = (u_1, .., u_n)^T$、$v = (v_1, ..., v_n)^T$ であり ($T$ は転置を表す)、$u^* = (\bar{u}_1, .., \bar{u}_n)$、$v^* = (\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n)$ である ($\bar{\cdot}$ は複素共役を表す)。式 (3.32) において、$u = v \neq 0$ とすると、$u^* u > 0$ より、$u^* \Gamma_X u > 0, u^* \Gamma_L u > 0$ が言えるが、これは、$\Gamma_X$、$\Gamma_L$ が非退化であることを示している。また、式 (3.32) において $v = \Gamma_L^{-1} u, u \neq 0$ とすると、

$$u^* \Gamma_X u \cdot u^* \Gamma_L^{-1} u \geq |u^* \Gamma_L^{-1} u|^2 \tag{3.33}$$

が成立する。ここで、$u^* \Gamma_L^{-1} u > 0$ より

$$u^* \Gamma_X u \geq u^* \Gamma_L^{-1} u \tag{3.34}$$

が任意の $u \neq 0$ に対して成立する。これは、$\Gamma_X \geq \Gamma_L^{-1}$ を意味している。シュワルツの不等式の等号成立条件より、式 (3.34) の等号は、同時に 0 とならない、$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在して、

$$\alpha(X_1, ..., X_n)(u_1, .., u_n)^T + \beta(L_1, ..., L_N)\Gamma_L^{-1}(u_1, .., u_n)^T = 0$$

となるときに限り成立する。$u = (u_1, ..., u_N)$ は任意にとれるので、この式は、

$$\alpha(X_1, ..., X_n) + \beta(L_1, ..., L_N)\Gamma_L^{-1} = 0$$

と書き換えることができる。□

## 3.3 $\Sigma_\theta\{M\}$ の下界の導出

本節では、$\theta$-局所不変性の条件 (3.27) の下で、式 (3.7) の下界を求める。そのためにまず、対称行列 $K = B\{M\} - [\langle X_j, X_k\rangle_S]$ を導入する。式 (3.29) より、

$$K \geq \pm\frac{i}{2}[[X_j, X_k]_S] \tag{3.35}$$

が成立している。式 (3.7) は以下のように書き換えることができる。

$$\Sigma_\theta\{M\} = \mathrm{Tr}G([\langle X_j, X_k\rangle_S] + K) \tag{3.36}$$

この時、任意の $\theta$-不偏推定 $M$ に対して、以下が成立する。

$$\Sigma_\theta\{M\} \geq \inf\{\mathrm{Tr}G([\langle X_j, X_k\rangle_S]+K); K \geq \pm\frac{i}{2}[[X_j, X_k]_S], \langle L^j, X_k\rangle_S = \delta_{jk}\} \tag{3.37}$$

$\theta$-不偏推定 $M$ が与えられると、式 (3.27) を満たす $\{X_j\}$ と、式 (3.35) を満たす対称行列 $K$ が定まるが、逆は成立しない。従って、(3.37) の右辺の最小値を達成する $\{X_j^*\}$ と $K^*$ がたとえ存在したとしても、それに対応する最適な不偏推定 $M^*$ が存在するとは限らない。式 (3.37) の右辺を簡単な形に書き換えるために、以下の補題を用いる。

**補題 147.** $X_j \in \mathfrak{L}_h^2(S), j = 1, ..., n$ と実対称行列 $K$ が式 (*3.35*) を満足するための必要十分条件は、以下の性質を満たす $Y_j \in \mathfrak{L}_h^2(S), j = 1, ..., n$ と $\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上の有界実対称作用素 $\mathfrak{F}$ が存在することである。

1. $X_j = \mathfrak{F}Y_j; j = 1, .., n$
2. $K = [\langle Y_j, \mathfrak{F}(I - \mathfrak{F})Y_k\rangle_S]$
3. $\mathfrak{F}$ の複素拡張 $\mathfrak{F}_c X = \mathfrak{F}X_1 + i\mathfrak{F}X_2$ ($X \in \mathfrak{L}^2(S), X_1, X_2 \in \mathfrak{L}_h^2(S)$) に対し次式が成立する。

$$\mathfrak{F}_c \geq \mathfrak{F}_c(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D})\mathfrak{F}_c \tag{3.38}$$

proof) 式 (3.35) を満たす $\{X_j\}$ と $K$ を考え、$X_j$ によって生成される $\mathfrak{L}_h^2(S)$

の部分空間を $\mathcal{L}$ とする。ここで、次式によって $\mathcal{L}$ 上の実対称作用素 $\mathfrak{K}$ を定義する。

$$[\langle X_j, \mathfrak{K}X_k\rangle_S] = K \tag{3.39}$$

この $\mathfrak{K}$ と式 (1.79) で定まる $\mathfrak{D}$ を用いて、式 (3.35) を以下のように書き換えることができる。

$$\langle Y, \mathfrak{K}Y\rangle_S \geq \pm\frac{i}{2}\langle Y, \mathfrak{D}Y\rangle_S, \quad Y \in \mathcal{L} \oplus i\mathcal{L} \tag{3.40}$$

ここで次式により実対称作用素 $\mathfrak{F} \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ を定義する。

$$\mathfrak{F} = \begin{cases} (I + \mathfrak{K})^{-1} & on \quad \mathcal{L} \\ 0 & on \quad \mathfrak{L}_h^2(S) \ominus \mathcal{L} \end{cases} \tag{3.41}$$

定義より、$\mathfrak{F}$ の値域 $\mathrm{ran}\mathfrak{F}$ は $\mathcal{L}$ に等しい。$Y_j \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ を $Y_j = (I+\mathfrak{K})X_j$ によって定める。この時、$X_j = \mathfrak{F}Y_j$、$(1-\mathfrak{F})Y_j = \mathfrak{K}\mathfrak{F}Y_j$ が成立する。よって、

$$\begin{aligned} K &= [\langle X_j, \mathfrak{K}X_k\rangle_S] = [\langle Y_j, \mathfrak{F}\mathfrak{K}\mathfrak{F}Y_k\rangle_S] \\ &= [\langle Y_j, \mathfrak{F}(I - \mathfrak{F})Y_k\rangle_S] \end{aligned} \tag{3.42}$$

を得る。これで、条件１，２が満足された。有界対称作用素 $\mathfrak{F}$ の複素化 $\mathfrak{F}_c$ は有界自己共役作用素となる。また、$\mathrm{dom}\mathfrak{F}_c = \mathfrak{L}^2(S)$、$\mathrm{ran}\mathfrak{F}_c = \mathcal{L} \oplus i\mathcal{L}$ である。よって、$Y = \mathfrak{F}_cX$、$X \in \mathfrak{L}^2(S)$ を式 (3.40) に代入して、

$$\langle X, \mathfrak{F}_c\mathfrak{K}\mathfrak{F}_cX\rangle_S \geq \pm\frac{i}{2}\langle X, \mathfrak{F}_c\mathfrak{D}\mathfrak{F}_cX\rangle_S, \quad X \in \mathfrak{L}^2(S) \tag{3.43}$$

となり、更に両辺に $\langle \mathfrak{F}_cX, \mathfrak{F}_cX\rangle_S$ を足して、

$$\begin{aligned} \langle X, \mathfrak{F}_c(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D})\mathfrak{F}_cX\rangle_S &\leq \langle X, \mathfrak{F}_c(I + \mathfrak{K})\mathfrak{F}_cX\rangle_S \\ &= \langle X, \mathfrak{F}_cX\rangle_S \end{aligned} \tag{3.44}$$

を得る。この式は、条件３の成立を示している。逆に、$\{Y_j\}$ と $\mathfrak{F}$ が、補題の条件を満たしているとする。この時、$\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上では、$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_c$ であることに注意して、式 (3.35) を以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} [\langle Y_j, \mathfrak{F}_c(I - \mathfrak{F}_c)Y_k\rangle_S] &\geq \pm\frac{i}{2}[[\mathfrak{F}_cY_j, \mathfrak{F}_cY_k]_S] \\ &= \pm\frac{i}{2}[\langle Y_j, \mathfrak{F}_c\mathfrak{D}\mathfrak{F}_cY_k\rangle_S] \end{aligned} \tag{3.45}$$

この式を証明すれば良いが、これは条件 3 の式 (3.38) より従う。□

補題 147 を使って、式 (3.36) を書き換えると

$$\Sigma_\theta\{M\} = \mathrm{Tr}G([\langle Y_j, \mathfrak{F}^2 Y_k\rangle_S] + [\langle Y_j, \mathfrak{F}(I-\mathfrak{F})Y_k\rangle_S]) = \mathrm{Tr}G[\langle Y_j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S] \tag{3.46}$$

また、式 (3.27) を書き換えて、

$$\langle L^j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S = \delta_{jk} \tag{3.47}$$

を得る。こうして、式 (3.37) を以下のように書き換えることができる。

$$\Sigma_\theta\{M\} \geq \inf\{\mathrm{Tr}G[\langle Y_j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S]; Y_j \in \mathfrak{L}_h^2(S), \mathfrak{F}_c \geq \mathfrak{F}_c(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D})\mathfrak{F}_c, \langle L^j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S = \delta_{jk}\} \tag{3.48}$$

ここで、$\mathfrak{F}_c \geq \mathfrak{F}_c(I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})\mathfrak{F}_c$ と $\mathfrak{F}_c \geq \mathfrak{F}_c(I - \frac{i}{2}\mathfrak{D})\mathfrak{F}_c$ を足し合わせて、

$$\mathfrak{F}_c \geq \mathfrak{F}_c^2 \geq 0 \tag{3.49}$$

を得る。これは、

$$\mathfrak{F} \geq \mathfrak{F}^2 \geq 0 \tag{3.50}$$

と同値である。実際、$\mathfrak{L}_h^2(S)$ 上の作用素 $\mathfrak{G}$ に対し、複素化 $\mathfrak{G}_c$ を考えるとき、$X, Y \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ に対して、

$$\langle X+iY, \mathfrak{G}_c(X+iY)\rangle_S = \langle X, \mathfrak{G}X\rangle_S + \langle Y, \mathfrak{G}Y\rangle_S + i(\langle X, \mathfrak{G}Y\rangle_S - \langle \mathfrak{G}X, Y\rangle_S) \tag{3.51}$$

が成立するので、

$$\mathfrak{G}_c \geq 0 \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{G} \geq 0 \tag{3.52}$$

である。よって、$\mathfrak{F}$ は正値作用素であり、$\sqrt{\mathfrak{F}}$ が定義できる。また、任意の $X \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ に対して

$$\langle X, (\mathfrak{F}_c - \mathfrak{F}^2)X\rangle_S = \langle \sqrt{\mathfrak{F}}X, (I-\mathfrak{F})\sqrt{\mathfrak{F}}X\rangle_S \geq 0 \tag{3.53}$$

が成立している。ここで、

$$\mathcal{H} = \ker\mathfrak{F} \oplus \mathrm{ran}\mathfrak{F} \tag{3.54}$$

が成立することを使うと、$\mathfrak{F}$ と $\sqrt{\mathfrak{F}}$ は、$\mathrm{ran}\mathfrak{F}$ 上の作用素と見なすことができる。よって、式 (3.53) は、$I - \mathfrak{F} \geq 0$ を意味している。よって、双線

形対称形式 $\langle X, \mathfrak{F}Y\rangle_S$ は、$\mathfrak{L}^2_h(S)$ 上の前内積を定める。この時、式 (3.47) より、補題 146 を適用することができて、$F = [\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S]$ が非退化で、

$$[\langle Y_j, \mathfrak{F}Y_k\rangle_S] \geq F^{-1} \tag{3.55}$$

が成立していることがわかる。ここで、等号は式 (3.31) より

$$\alpha(Y_1, ..., Y_n) + \beta(L_1, ..., L_n)F^{-1} = 0$$

を満たす同時に 0 にならない $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在するときに成立する。特に、$\alpha = 1, \beta = -1$ と置いて、

$$(Y_1, ..., Y_n) = (L_1, ...., L_N)F^{-1} \tag{3.56}$$

の時に成立している。こうして、式 (3.48) を以下のように書き換えることができる。

$$\Sigma_\theta\{M\} \geq \inf\{\mathrm{Tr}GF^{-1}; F = [\langle L_j, \mathfrak{F}L_k\rangle_S], \mathfrak{F}_c \geq \mathfrak{F}_c(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D})\mathfrak{F}_c\} \tag{3.57}$$

この右辺の最適化を達成する $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*$ が存在する場合、式 (3.37) の最適化を達成する $X_j^*$ と $K_*$ は、$F_* = [\langle L_j, \mathfrak{F}_*L_k\rangle_S]$ を使って、以下のように与えられる。

$$(X_1, ..., X_n) = (\mathfrak{F}_*Y_1^*, ...., \mathfrak{F}_*Y_n^*) = (\mathfrak{F}_*L_1^*, ..., \mathfrak{F}_*L_n^*)F_*^{-1} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} K_* =& [K_{jk}^*] = [\langle Y_j^*, \mathfrak{F}_*(I - \mathfrak{F}_*)Y_k^*\rangle_S] \\ =& [\langle \sum_\ell (F_*^{-1})_{\ell j}L_\ell, \mathfrak{F}_*(I - \mathfrak{F}_*)\sum_m (F_*^{-1})_{mk}L_m\rangle_S] \\ =& [\sum_{\ell,m} (F_*^{-1})_{\ell j}\langle L_\ell, \mathfrak{F}_*(I - \mathfrak{F}_*)L_m\rangle_S (F_*^{-1})_{km}] \\ =& F_*^{-1}[\langle L_\ell, \mathfrak{F}_*(I - \mathfrak{F}_*)L_m\rangle_S]F_*^{-1} \end{aligned} \tag{3.59}$$

## 3.4 対称対数微分に基づく下界

式 (3.50) より、$L = \sum u_j L_j$ に対して

$$\langle L, \mathfrak{F} L \rangle_S \leq \langle L, L \rangle_S \tag{3.60}$$

が成立している。これを $u = (u_1, ..., u_n)^T$ を使って書き換えると、

$$0 \leq u^T [\langle L_j, \mathfrak{F} L_k \rangle_S] u \leq u^T [\langle L_j, L_k \rangle_S] u \tag{3.61}$$

となり、

$$0 \leq F := [\langle L_j, \mathfrak{F} L_k \rangle_S] \leq [\langle L_j, L_k \rangle_S] =: J \tag{3.62}$$

を得る。更に、$F$ が非退化であることを使うと、$I \leq \sqrt{F}^{-1} J \sqrt{F}^{-1}$ を得る。両辺の逆行列をとって、$I \geq \sqrt{F} J^{-1} \sqrt{F}$ となり、

$$F^{-1} \geq J^{-1} \tag{3.63}$$

となることがわかる。この式と、式 (3.57) より、対称対数微分に基づく下界が得られる。

$$\Sigma_\theta \{M\} \geq \mathrm{Tr} G J^{-1} \tag{3.64}$$

## 3.5 右対数微分に基づく下界

右対数微分を導入するために、3.1 章の仮定 3 のかわりに以下の仮定をもうける。
仮定 3 ’:
正定数 $c$ が存在して以下の不等式が成立する。

$$\left| \mathrm{Tr} \frac{\partial}{\partial \theta_j} S_\theta \cdot X \right|^2 \leq c \mathrm{Tr} S_\theta X X^*, \quad X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \tag{3.65}$$

仮定 3 ’ より、式 (3.14) によって定まる線形汎関数を $\mathfrak{L}^2_+(S_\theta)$ 上に拡張することができる。実際、ハーン・バナッハの拡張定理を、$E = \mathfrak{L}^2_+(S_\theta)$、$D = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$、$f(X) = \mathrm{Tr} \frac{\partial}{\partial \theta_j} S_\theta \cdot X$、$p(X) = (c \langle X, X \rangle^+_{S_\theta})^{1/2}$ とおいて適用す

れば拡張された線形汎関数 $g(X), X \in \mathfrak{L}_+^2(S_\theta)$ を得る。但し、$X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に対し、$\langle X, X\rangle_{S_\theta}^+ = \mathrm{Tr} S_\theta X X^*$ が成立していることに注意する。以下、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{S_\theta}^+$ を $\langle\cdot,\cdot\rangle_S^+$、$\mathfrak{L}^2(S_\theta)$ を $\mathfrak{L}^2(S)$ と略記することにする。リース・フレッシェの補題により、

$$g(X) = \langle \tilde{L}_\theta^j, X\rangle_S, X \in \mathfrak{L}_+^2(S) \tag{3.66}$$

を満足する $\tilde{L}_\theta^j \in \mathfrak{L}^2(S)$ がただ一つ存在する。以下、$\tilde{L}_\theta^j$ を $\tilde{L}^j$ と略記する。式 (3.66) を $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に制限して、

$$\mathrm{Tr}\frac{\partial}{\partial\theta_j} S_\theta \cdot X = \langle L^j, X\rangle_S^+ \tag{3.67}$$

を得る。なお、$\langle X, X\rangle_S^\pm \le 2\langle X, X\rangle_S$ より、仮定３’が成立するとき仮定３も成立していることがわかる。対称対数微分と右対数微分の定義より、

$$\langle L^j, X\rangle_S = \langle \tilde{L}^j, X\rangle_S^+ \tag{3.68}$$

がすべての $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ に対して成立している。

第 1.3.4 章で示した２つの内積の関係と、第 1.5.3 章で導入した交換作用素を用いて

$$\begin{aligned} \langle Y, X\rangle_S^+ &= \langle Y, X\rangle_S \pm \frac{i}{2}[Y, X]_S \\ &= \langle Y, (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})X\rangle_S = \langle (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})Y, X\rangle_S \end{aligned} \tag{3.69}$$

を得る。これより、

$$(I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})\tilde{L}^j = L^j \tag{3.70}$$

の成立がわかる。(注：この議論は少し怪しい。式 (3.69) は $\mathfrak{L}^2(S)$ でのみ成立しているが、$\tilde{L}^j$ は、$\mathfrak{L}_+^2(S)$ の元である。）この式を式 (3.62) に代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned} 0 \le F &= [\langle (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})\tilde{L}^j, \mathfrak{F}_c(I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})\tilde{L}^k\rangle_S] \\ &\le [\langle \tilde{L}^j, (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})\tilde{L}^k\rangle_S] = [\langle \tilde{L}^j, \tilde{L}^k\rangle_S^+] =: \tilde{J} \end{aligned} \tag{3.71}$$

但し、最後の不等号を示すためには、以下の関係式を用いる。

$$0 \le (I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D})\mathfrak{F}_c(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}) \le (I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}) \tag{3.72}$$

実際、式 (3.38) の両辺に左右から $\sqrt{I \pm (i/2)\mathfrak{D}}$ をかけて

$$\begin{aligned}\sqrt{I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}}\mathfrak{F}_c\sqrt{I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}} &\geq \sqrt{I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}}\mathfrak{F}_c\left(I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}\right)\mathfrak{F}_c\sqrt{I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}} \\ &= \left(\sqrt{I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}}\mathfrak{F}_c\sqrt{I \pm \frac{i}{2}\mathfrak{D}}\right)^2\end{aligned} \tag{3.73}$$

となることより、$0 \leq \sqrt{I \pm (i/2)\mathfrak{D}}\mathfrak{F}_c\sqrt{I \pm (i/2)\mathfrak{D}} \leq I$ が言えるので、この式の両辺に左右から $\sqrt{I \pm (i/2)\mathfrak{D}}$ をかけることによって式 (3.72) が得られる。式 (3.71) より、$I \leq \sqrt{F}^{-1}\tilde{J}\sqrt{F}^{-1}$ すなわち $I \geq \sqrt{F}\tilde{J}^{-1}\sqrt{F}$ であり、

$$F^{-1} \geq \tilde{J}^{-1} = \mathrm{Re}\tilde{J}^{-1} + i\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1} \tag{3.74}$$

を得る。上式で複素共役をとっても不等号が成立するので、

$$F^{-1} \geq \mathrm{Re}\tilde{J}^{-1} - i\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1} \tag{3.75}$$

がいえる。よって式 (3.57) より、以下の不等式の成立がいえる。

$$\Sigma_\theta\{M\} \geq \min\{\mathrm{Tr}GB; B\text{ は実対称行列}, B \geq \mathrm{Re}\tilde{J}^{-1} \pm \mathrm{Im}\tilde{J}^{-1}\} \tag{3.76}$$

$\tilde{J}$ は複素エルミート行列なので、$\tilde{J}^{-1}$ も複素エルミート行列。よって、$(\tilde{J}^{-1})^* = (\mathrm{Re}\tilde{J}^{-1})^T - i(\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1})^T = (\mathrm{Re}\tilde{J}^{-1}) + i(\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1})$ となり、$\mathrm{Re}\tilde{J}^{-1}$ は実対称行列、$\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1}$ は実歪対称行列であることがわかる。このことより、式 (3.76) を以下のように書き換えることができる。

$$\Sigma_\theta\{M\} \geq \mathrm{Tr}G\mathrm{Re}\tilde{J}^{-1} + \min\{\mathrm{Tr}GB; B\text{ は実対称行列}, B \geq \pm\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1}\} \tag{3.77}$$

$L^j$ によって生成される $\mathfrak{L}^2(S)$ の部分空間を $\mathcal{L}$ が、交換作用素 $\mathfrak{D}$ によって不変であり：

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L} \tag{3.78}$$

エルミート作用素 $I+(i/2)\mathfrak{D}$ が非退化である（すなわち、$S = S_\theta$ が非退化 (命題 67)）と仮定する。(注意：補題 146 より、$[\langle L^j, L^k\rangle_S]$ は非退化行列で

あるので、$L_j$ は線形独立：実際 $[\langle L^j, L^k\rangle_S]$ が非退化行列であることより、$v_k = (\langle L^1, L^k\rangle_S, ..., \langle L^n, L^k\rangle_S)^T$ は線形独立。一方 $\lambda_1 L^1 + ... + \lambda_n L^n = 0$ とすると、$\lambda_1\langle L^j, L^1\rangle_S + ... + \lambda_n\langle L^j, L^n\rangle_S = 0$ すなわち $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$ であり、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ が言える。）この時、エルミート作用素 $I + (i/2)\mathfrak{D}$ を有限次元線形空間 $\mathcal{L}$ に作用する作用素であり、$(I + (i/2)\mathfrak{D})^{-1}$ はその逆作用素であると考えることができる。このような仮定の下で、$\tilde{J}^{-1}$ を以下のように計算することができる。まず、$|L^\ell\rangle = L^\ell$、$\langle L^m| = \langle L^m, \cdot\rangle_S$ という記号を導入する。この時、

$$\sum_{\ell,m} |L^\ell\rangle (J^{-1})_{\ell,m} \langle L^m| = I \tag{3.79}$$

が成立する。実際、$\varphi = \sum_k c_k |L^k\rangle$ に対し、

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell,m} |L^\ell\rangle (J^{-1})_{\ell,m} \langle L^m|\varphi &= \sum_{\ell,m} |L^\ell\rangle (J^{-1})_{\ell,m} \langle L^m, \sum_k c_k L^k\rangle \\
&= \sum_{\ell,m,k} c_k |L^\ell\rangle (J^{-1})_{\ell,m} \langle L^m, L^k\rangle = \sum_{\ell,m,k} c_k |L^\ell\rangle (J^{-1})_{\ell,m} (J)_{m,k} \\
&= \sum_{\ell,k} c_k |L^\ell\rangle I_{\ell,k} = \sum_\ell c_\ell |L^\ell\rangle = \varphi
\end{aligned} \tag{3.80}$$

となっている。このことを用いて次式を導くことができる。

$$\begin{aligned}
J_{j,k} = \langle L^j, L^k\rangle_S &= \langle L^j, (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})(I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})^{-1} L^k\rangle_S \\
&= \sum_{\ell,m} \langle L^j, (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D}) L^\ell (J^{-1})_{\ell,m} \langle L^m, (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})^{-1} L^k\rangle_S\rangle_S \\
&= \sum_{\ell,m} \langle L^j, (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D}) L^\ell\rangle_S (J^{-1})_{\ell,m} \langle L^m, (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})^{-1} L^k\rangle_S \\
&= \sum_{\ell,m} \tilde{J}'_{j,\ell} (J^{-1})_{\ell,m} \tilde{J}_{m,k} = (\tilde{J}'(J^{-1})\tilde{J})_{j,k}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

但し、$\tilde{J}' = [\langle L^j, (I + (i/2)\mathfrak{D}) L^k\rangle_S]$ とおいた。よって、$J = \tilde{J}' J^{-1} \tilde{J}$ であり、

$$\tilde{J}^{-1} = J^{-1} [\langle L^j, (I + (i/2)\mathfrak{D}) L^k\rangle_S] J^{-1} \tag{3.82}$$

を得る。更に、実歪対称行列

$$D = [\langle L^j, \mathfrak{D} L^k\rangle_S] = [[L^j, L^k]_S] \tag{3.83}$$

を導入し、上式を以下のように書き換える事ができる。

$$\tilde{J}^{-1} = J^{-1}[J + \frac{i}{2}D]J^{-1} = J^{-1} + \frac{i}{2}J^{-1}DJ^{-1} \tag{3.84}$$

よって、

$$\mathrm{Re}\tilde{J}^{-1} = J^{-1}, \quad \mathrm{Im}\tilde{J}^{-1} = \frac{1}{2}J^{-1}DJ^{-1} \tag{3.85}$$

が成立する。

下界 (3.77) をより、明示的な形にする。対角化可能行列

$$M = T\mathrm{diag}[\mu_1, ..., \mu_n]T^{-1} \tag{3.86}$$

に対して、abs$M$ を

$$\mathrm{abs}M = T\mathrm{diag}[|\mu_1|, , , .|\mu_n|]T^{-1} \tag{3.87}$$

によって定義する。（注意：一般に abs$M \neq |M| := \sqrt{M^*M}$ である。等号は、$M$ がエルミート行列であるときのみ成立する。）$G$ を非退化正値行列、$R$ をエルミート行列とするとき、$GR$ は対角化可能である。実際、$GR = \sqrt{G}(\sqrt{G}R\sqrt{G})\sqrt{G}^{-1}$ であり、$\sqrt{G}R\sqrt{G}$ はエルミート行列であることより、対角化可能であることがわかる。よって、

$$\mathrm{abs}(GR) = \sqrt{G}|\sqrt{G}R\sqrt{G}|\sqrt{G}^{-1} \tag{3.88}$$

が言える。

**補題 148.** $R$ を複素エルミート行列、$G$ を非退化正値行列とするとき、以下が成立する。

$$\min\{\mathrm{Tr}GX; X \geq \pm R\} = \mathrm{Tr\ abs}(GR) \tag{3.89}$$

また、最小値は、$X = G^{-1}\mathrm{abs}(GR)$ によって達成される。更に、$R$ が実歪対称行列 $Q$ によって $R = iQ$ と表されるとき、$X$ は実行列となる。

proof) $X \geq \pm R$ より、$\sqrt{G}X\sqrt{G} \geq \pm\sqrt{G}R\sqrt{G}$ であり、任意の列ベクトルに対して、

$$e^*\sqrt{G}X\sqrt{G}e \geq |e^*\sqrt{G}R\sqrt{G}e| \tag{3.90}$$

が成立する。$\sqrt{G}R\sqrt{G}$ の固有ベクトルと固有値をそれぞれ、$e_j$、$\mu_j$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}GX &= \mathrm{Tr}\sqrt{G}X\sqrt{G} = \sum_j e_j^* \sqrt{G}X\sqrt{G}e_j \geq \sum_j |\mu_j| \\ &= \mathrm{Tr}|\sqrt{G}R\sqrt{G}| = \mathrm{Tr\ abs}(GR)\end{aligned} \tag{3.91}$$

$X = G^{-1}\mathrm{abs}(GR)$ が下界を与えることは明らかなので、$G^{-1}\mathrm{abs}(GR) \geq \pm R$ を示せばよい。式 (3.88) より、$G^{-1}\mathrm{abs}(GR) = \sqrt{G}^{-1}|\sqrt{G}R\sqrt{G}|\sqrt{G}^{-1}$ なのでエルミート行列 $Y = \sqrt{G}R\sqrt{G}$ に対して、$|Y| \geq \pm Y$ の成立を言えば良いが、これは、$|\mu_j| \geq \pm\mu_j$ より明らか。

$R = iQ$ の時、$X$ が実行列となることは、

$$\begin{aligned}X &= G^{-1}\mathrm{abs}(GR) = \sqrt{G}^{-1}|\sqrt{G}R\sqrt{G}|\sqrt{G}^{-1} \\ &= \sqrt{G}^{-1}\sqrt{\sqrt{G}Q^T GQ\sqrt{G}}\sqrt{G}^{-1}\end{aligned} \tag{3.92}$$

と、$\sqrt{G}Q^T GQ\sqrt{G}$ が実対称行列となることより明らか。□

上記の補題より、式 (3.77) の最小値が $X = G^{-1}\mathrm{abs}(iG\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1})$ で与えられることがわかり、次式を得る。

$$\Sigma_\theta\{M\} \geq \mathrm{Tr}G\mathrm{Re}\tilde{J}^{-1} + \mathrm{Tr\ abs}(iG\mathrm{Im}\tilde{J}^{-1}) \tag{3.93}$$

注意：式 (3.93) は、式 (3.57) より弱い下界を与えている。しかし、条件 (3.78) が成立し、$I + (i/2)\mathfrak{D}$ が非退化の時式 (3.93) と式 (3.57) は等価となる (証明は省略（テキスト VI.7 の最後にある）)。またこの時、式 (3.85) が成立しており、式 (3.93) を更に以下のように書き換えることができる。

$$\Sigma_\theta\{M\} \geq \mathrm{Tr}GJ^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr\ abs}(iGJ^{-1}DJ^{-1}) \tag{3.94}$$

## 3.6　ガウス状態の推定

### 3.6.1　パラメータ次元 1 の擬古典ガウス状態の族の推定

式 (2.52) で与えられる、擬古典ガウス状態 $S_{\bar{P},\bar{Q}}$ を考える。まず、$\bar{P}$ の値を $\bar{P}_0$ に固定し、パラメータ $\theta = \bar{Q}$ に関する擬古典ガウス状態の族の族 $\{S_{\bar{P}_0,\bar{Q}}\}$ の推定について考察する。式 (2.55) より、ＳＬＤが

$$L^Q = \sigma_Q^{-2}(Q - \bar{Q}) \tag{3.95}$$

によって与えられることがわかる。この時、ＳＬＤフィッシャー情報量は、

$$J = \langle L^Q, L^Q \rangle_S = \sigma_Q^{-2} \tag{3.96}$$

によって与えられる。ここで、対称対数微分に基づく下界 (3.64) を、$G = 1$ として適用すると、

$$\Sigma_{\bar{Q}} \geq \sigma_Q^2 = \frac{\hbar}{\omega}(\bar{N} + \frac{1}{2}) \tag{3.97}$$

が得られる。

この限界は、任意の $\bar{Q}$ の値に対して、単純測定

$$E(d\bar{Q}) = |\bar{Q}\rangle\langle\bar{Q}|d\bar{Q} \tag{3.98}$$

によって達成される。但し、$|\bar{Q}\rangle$ は、自己共役作用素 $Q$ の形式的な固有ベクトルである。$E(d\bar{Q})$ は $Q$ のスペクトル測度なので、$X_E = Q$ であり、不偏推定の条件 (3.25) が成立することがわかる。実際、式 (2.46) より

$$\langle L^Q, Q \rangle_S = \sigma_Q^{-2}\langle Q - \bar{Q}, Q \rangle_S = \sigma_Q^{-2}\langle Q - \bar{Q}, Q - \bar{Q} \rangle_S = 1 \tag{3.99}$$

が成立している。こうして、自己共役作用素 $Q$ が、擬古典ガウス状態の族 $\{S_{\bar{P}_0,\bar{Q}}\}$ の一様最適局所不偏推定量を与えることがわかった。

### 3.6.2　パラメータ次元 2 の擬古典ガウス状態の族の推定

パラメータ $\theta = (\bar{P}, \bar{Q})$ に関する擬古典ガウス状態の族の族 $\{S_{\bar{P},\bar{Q}}\}$ の推定について考察する。式 (2.55) より、ＳＬＤが

$$L^Q = \sigma_Q^{-2}(Q - \bar{Q}), \quad L^P = \sigma_P^{-2}(P - \bar{P}) \tag{3.100}$$

となり、式 (2.46) よりＳＬＤ量子フィッシャー情報行列が、

$$J = \begin{pmatrix} \sigma_P^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_Q^{-2} \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

で与えられることがわかる。この時、$G = \mathrm{diag}[g_P, g_Q]$ に対してＳＬＤに基づく下界 (3.64) が以下によって与えられる。

$$\Sigma_{\bar{P},\bar{Q}} \geq g_P \sigma_P^2 + g_Q \sigma_Q^2 \tag{3.102}$$

右対数微分（ＲＬＤ）$\tilde{L}^P, \tilde{L}^Q$ を求める。式 (2.56) と、$\mathfrak{D} \cdot I = 0$(命題 64) によって、

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(L^Q) &= \sigma_Q^{-2} L^P \\ \mathfrak{D}(L^P) &= -\sigma_P^{-2} L^Q \end{aligned} \tag{3.103}$$

となり、

$$\begin{aligned} (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})L^Q &= L^Q + \frac{i}{2}\sigma_Q^{-2} L^P \\ (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})L^P &= L^P - \frac{i}{2}\sigma_P^{-2} L^Q \end{aligned} \tag{3.104}$$

を得る。ここで、$\sigma_P^2 \sigma_Q^2 = (\bar{N} + 1/2)^2 \neq 1/4$ であると ($S_{\bar{P},\bar{Q}}$ は純粋状態ではないと) 仮定する。この時、命題 139 より、ガウス状態 $S_{\bar{P},\bar{Q}}$ は非退化である。よって、命題 67 より、$(I + (i/2)\mathfrak{D})^{-1}$ が定義できて、上式と式 (3.70) より、

$$\begin{aligned} \tilde{L}^Q &= (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})^{-1} L^{\bar{Q}} = (4\sigma_P^2\sigma_Q^2 - 1)^{-1}[4\sigma_P^2(Q - \bar{Q}) - 2i(P - \bar{P})] \\ \tilde{L}^P &= (I + \frac{i}{2}\mathfrak{D})^{-1} L^{\bar{P}} = (4\sigma_P^2\sigma_Q^2 - 1)^{-1}[4\sigma_Q^2(P - \bar{P}) + 2i(Q - \bar{Q})] \end{aligned} \tag{3.105}$$

が得られる。式 (3.103) より、$L^P, L^Q$ によって生成される部分空間 $\mathcal{L}$ は、$\mathfrak{D}$ によって不変である (式 (3.78) を満たす) ことがわかる。よって、式 (3.94) を使うことができる。式 (3.83),(3.103),(2.46) を用いて、

$$D = \sigma_P^{-2}\sigma_Q^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.106}$$

となるので、この式と式 (3.101) を式 (3.94) に代入して計算すると、$G=\mathrm{diag}[g_P, g_Q]$ に対して、以下のようにＲＬＤに基づく下界を求めることができる。

$$\Sigma_{\bar{P},\bar{Q}} \geq g_p\sigma_P^2 + g_Q\sigma_Q^2 + \sqrt{g_P g_Q} \tag{3.107}$$

この下界は、局所不偏な以下の測定によって達成できる。

$$M(d\bar{P}, d\bar{Q}) = |\bar{P},\bar{Q};\sigma^2\rangle\langle\sigma^2;\bar{Q},\bar{P}|\frac{d\bar{P}d\bar{Q}}{2\pi}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\sqrt{g_P/g_Q} \tag{3.108}$$

こうして、ＲＬＤが一様最適な局所不偏推定によって達成されることがわかった。

### 3.6.3 パラメータ次元 $n$ のガウス状態の族の推定

$(Z,\Delta)$ をシンプレクティック空間、$z \to V(z)$ を既約ＣＣＲ表現とする。パラメータ $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ の測定 $M = \{M(d^n\theta)\}$ が有限な２次モーメントを持つ任意の状態 $S$ に対して以下の条件を満たすとき、測定 $M$ を線形測定と呼ぶ。

条件１：$M$ は、状態 $S$ に関して有限な２次モーメントを持ち、共分散行列

$$b_{j,k}\{M\} = \int(\theta_j - \bar{\theta}_j)(\theta_k - \bar{\theta}_k)\mu_S(d^n\theta) \tag{3.109}$$

が定義できる。但し、$\bar{\theta}_j = \int \theta_j\mu_S(d^n\theta)$、$\mu_S(d^n\theta) = \mathrm{Tr}SM(d^n\theta)$ である。

条件２：$X_M^j = \int \theta_j M(d^n\theta) \in \mathfrak{L}_h^2(S)$ は正準オブザーバブルの部分空間の元である。すなわち、

$$X_M^j = R(z_j); \quad j = 1, ..., n \tag{3.110}$$

を満たす $z_j \in Z$ が存在する。

条件３：$\kappa_{jk} = b_{jk}\{M\} - \alpha(z_j, z_k)$ が、$S$ の取り方によらず定まる。但し、$\alpha$ は状態 $S$ の相関関数である。

$\{R(z_j)\}$,$\{\kappa_{jk}\}$ を線形測定のパラメータと呼ぶ。線形測定のパラメータは以下の制約を受けている。

$$[\kappa_{jk}] \geq \pm\frac{i}{2}[\Delta(z_j, z_k)] \tag{3.111}$$

この式は、式 (3.35) で $X_j = R(z_j) - \bar{\theta}_j$ と置くことによって導かれる。

**命題 149.** $z_j, j = 1, 2, ..., n$ を $Z$ の任意の要素とし、$[\kappa_{jk}]$ を式 *(3.111)* を満たす実対称 $n \times n$ 行列とする。このとき、$\{R(z_j)\}$、$[\kappa_{jk}]$ をパラメータとする線形測定が存在する。

相関関数 $\alpha(\cdot, \cdot)$ と平均関数 $m(z) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j m_j(z)$ を持つガウス状態の族 $\{S_\theta; \theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n\}$ を考える。但し、相関関数 $\alpha(\cdot, \cdot)$ と、シンプレクティック空間 $(Z, \Delta)$ 上の線形汎関数 $m_j(\cdot)$ は既知で予め固定されているとする。また、$m_j(\cdot)$ は互いに線形独立であると仮定する。この時以下の定理が成立する。

**定理 150.** ガウス状態の族 $\{S_\theta\}$ の平均値パラメータ $\theta$ に対する一様最適局所不偏推定が存在し、線形測定によって与えられる。