㊍（10月17日，24日）
15:30〜

P8. $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ 測定結果の集合

$M = \{M_1, \cdots, M_r\}$: n次正方行列の集合

M が以下の条件をみたすとき，
M を測定（Iの分解）という

(M-1) M_i : エルミート　$M_i \geq 0$（固有値がすべて0以上）

(M-2) $\sum_{i=1}^{r} M_i = I$（I : 単位行列）

とくに

(M-3) $M_i^2 = M_i$ でかつ $M_i M_j = 0$

もみたされるとき Mを単純測定という　$P(\omega_i) = \mathrm{Tr}\, \mathcal{S} M_i$

$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$: 事象系

$p_1, \cdots, p_r$: 確率

$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$

状態　$\mathcal{S} = \mathrm{diag}[p_1, \cdots, p_r] = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_r \end{bmatrix}$

$\circ$ $M_i = \mathrm{diag}[0, 0, \cdots, \underset{i}{1}, 0, \cdots]$　〔残りの要素は0

$= \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$

測定と状態がどちらとも対角化されている

$P(\omega_i) = \mathrm{Tr}\, \mathcal{S} M_i = \mathrm{Tr} \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Tr} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & p_i & \\ & & 0 \end{bmatrix} = p_i$

木 (10月17日, 24日)
15:30〜

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pauli のスピン行列.

このとき状態 ρ は

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \right) \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

と表現できる.

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iy \\ iy & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}, \quad \underline{x^2+y^2+z^2 \leq 1}$$

状態 $\boxed{\begin{array}{ll} \rho : \text{エルミート.} & \rho \geq 0 \\ \mathrm{Tr}\,\rho = 1. & \end{array}}$

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \frac{1}{2}(1+z+1-z) = 1$$

$$\rho^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{1+z} & \overline{x+iy} \\ \overline{x-iy} & \overline{1-z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \rho$$

$$\det(\lambda I - \rho) = \det\begin{pmatrix} \lambda - \frac{1+z}{2} & \frac{-x+iy}{2} \\ \frac{-x-iy}{2} & \lambda - \frac{1-z}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right) - \frac{(x-iy)(x+iy)}{4}$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} - \frac{x^2+y^2}{4} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2} \geq 0$$

木 (10月17日, 24日)
15:30〜

$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Pauli のスピン行列.

このとき状態 ρ は

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \right) \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

と表現できる.

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iy \\ iy & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} \text{ ☆}, \quad \underline{x^2+y^2+z^2 \le 1}$$

状態 $\boxed{\begin{array}{ll} \rho : \text{エルミート}. & \rho \ge 0 \\ \mathrm{Tr}\,\rho = 1. & \end{array}}$

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \rho^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho = \rho^* \iff \underset{a \in \mathbb{R}}{a = \bar{a}},\ \underset{d \in \mathbb{R}}{d = \bar{d}},\ b = \bar{c} \quad \text{—②} \\ \mathrm{Tr}\,\rho = a + d = 1 \quad \text{—①} \end{cases}$$

ここで $z = 2a - 1 \in \mathbb{R}$ (i.e. $a = \frac{z+1}{2}$)

$x = 2\mathrm{Re}\,c$. (i.e. $c = \frac{x+iy}{2}$)
$y = 2\mathrm{Im}\,c$

①より $d = 1 - a = 1 - \frac{z+1}{2} = \frac{1-z}{2}$

②より $b = \bar{c} = \overline{\frac{x+iy}{2}} = \frac{x-iy}{2}$

よって z, x, y をつかって. $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ をみたすエルミート行列 ρ は ☆の形に かける.

木)(10月17日; 24日)
:30〜

$\Omega = \{+1, -1\}$

$M = \{M(+1), M(-1)\}$

$$\begin{cases} M(+1) = \frac{1}{2}(I + \alpha\sigma_x + \beta\sigma_y + \gamma\sigma_z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\gamma & \alpha-i\beta \\ \alpha+i\beta & 1-\gamma \end{bmatrix} \\ M(-1) = \frac{1}{2}(I - \alpha\sigma_x - \beta\sigma_y - \gamma\sigma_z) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\gamma & -\alpha+i\beta \\ -\alpha-i\beta & 1+\gamma \end{bmatrix} \end{cases}$$

Stern-Gerlach 型 の測定

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$.

$M(+1), M(-1)$: エルミート

$M(+1), M(-1) \geqq 0$. $M(+1)$の固有値. $\dfrac{1 \pm \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}{2} = \dfrac{1\pm 1}{2}$

0 or 1

$M(-1)$の固有値 $\dfrac{1 \pm \sqrt{(-\alpha)^2+(-\beta)^2+(-\gamma)^2}}{2} = 0$ or 1

$$M(+1) + M(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって. $M = \{M(+1), M(-1)\}$ は. 測定の条件をみたしている

$$P(+1) = \mathrm{Tr}\, S\, M(+1)$$

$$= \mathrm{Tr}\, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\gamma & \alpha-i\beta \\ \alpha+i\beta & 1-\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Tr}\, \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (1+z)(1+\gamma)+(x-iy)(\alpha+i\beta) & * \\ * & (x+iy)(\alpha-i\beta)+(1-z)(1-\gamma) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\{1+\cancel{\gamma}+\cancel{z}+z\gamma+x\alpha+i\cancel{x\beta}-i\cancel{y\alpha}+y\beta$$
$$+1-\cancel{\gamma}-\cancel{z}+z\gamma+x\alpha-i\cancel{x\beta}+i\cancel{y\alpha}+y\beta\}$$

$$= \frac{1+z\gamma+x\alpha+y\beta}{2}$$