2013. 7. 10

1

$A$ : Hermite 行列

$A=\sum_i a_i P_i$ , $P_i$ 正射影行列

$P_i = |e_{i,1}\rangle\langle e_{i,1}| + |e_{i,2}\rangle\langle e_{i,2}| + \cdots + |e_{i,n_i}\rangle\langle e_{i,n_i}|$

$\langle e_{i,k}|e_{i,j}\rangle = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k\neq j \end{cases}$

Q : 正射影行列とは?

# 量子情報概論

$\mathbb{C}^2$ $A = a_1|e_1\rangle\langle e_1| + a_2|e_2\rangle\langle e_2|$

この場合 $a_1 = a_2$ を考えることに意味がなかった（測定値が1つだけ?）

**状態** とは 次の2つの条件をみたす

$n$次元 正方行列.

(S1) $S \in \mathcal{L}_{\underset{\text{エルミート行列}}{h}}$ かつ $S \geq 0$

(S2) $\mathrm{Tr}\, S = 1$

---

$S \geq 0 \iff \forall \psi \in \mathcal{H}\ \langle \psi | S\psi \rangle \geq 0$

Q $\iff$ 固有値$a_i$がすべて0以上

2013. 7. 10

2

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \\ s_{n1} & \cdots & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\, S = \sum_{i=1}^{n} s_{ii}$$

$$\mathrm{Tr}\, \alpha A = \alpha \, \mathrm{Tr}\, A$$

$$\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\, A + \mathrm{Tr}\, B$$

$$\mathrm{Tr}\, A^{t} = \mathrm{Tr}\, A$$

$$\mathrm{Tr}\, A^{*} = \overline{\mathrm{Tr}\, A}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA}$$

Q

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\hat{S}"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & \mathcal{H} \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "S"] & \mathbb{C}^n \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "S'"] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

$$S' = PSP^{-1}$$

$$\mathrm{Tr}\, S' = \mathrm{Tr}\, \boxed{PS}\,\boxed{P^{-1}}$$

$$= \mathrm{Tr}\, (\underbrace{\boxed{P^{-1}P}}_{=I\,(\text{単位行列})} S)$$

$$= \mathrm{Tr}\, S$$

Tr は
基底のとり方によらず
$\hat{S}$ に対して定義できている

2013. 7. 10

3

量子情報概論では
状態はノルム1のベクトル $|\psi\rangle$ であらわされていた
純粋状態（量子雑音のみ）

$\updownarrow$

$S = |\psi\rangle\langle\psi|$

$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$
$= \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} (\bar{z}\ \bar{w})$

$= \begin{pmatrix} z\bar{z} & z\bar{w} \\ w\bar{z} & w\bar{w} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} |z|^2 & z\bar{w} \\ w\bar{z} & |w|^2 \end{pmatrix}$

$\langle\psi| = (\bar{z}\ \bar{w})$

$\|\psi\| = \sqrt{|z|^2+|w|^2}$
$= 1$ ①

(S1) $\forall \phi, \quad \langle\phi|S\phi\rangle \geq 0$

① $\langle\phi|S\phi\rangle = \langle\phi||S\phi\rangle = \langle\phi||\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle$

$S|\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle$, $\langle\psi\phi\rangle$

$\langle\phi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\phi\rangle}$

ケットベクトル表記
$\phi \leftrightarrow |\phi\rangle$
$S\phi \leftrightarrow |S\phi\rangle$
$\leftrightarrow S|\phi\rangle$

$= \overline{\langle\psi|\phi\rangle}\langle\psi|\phi\rangle$

$= |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \geq 0$

(S2) $\mathrm{Tr}\, S = |z|^2+|w|^2 = 1$ ①

2013. 7. 10

# 4

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \longleftrightarrow \quad \rho = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i}_{古} \underbrace{|\psi_i\rangle\langle\psi_i|}_{量}$$

純粋状態
(量子雑音)

$\lambda_i \geq 0$

混合状態
(量子雑音 + 古典雑音 $\{p_i\}$)

$\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ より
$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Q

$|0\rangle$ ──── $|0\rangle \cdots p$, $|1\rangle \cdots (1-p)$

$$\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$$

出力状態

<u>測定</u> とは 次の 2 条件 をみたす $n$次正方行列

の 集合 $M = \{M_1, \cdots, M_r\}$ のこと.

(M-1) $\forall i = 1, \dots, r \quad M_i \in \mathcal{L}_n,\ \underline{M_i \geq 0}$

(M-2) $\sum_{i=1}^{r} M_i = I \qquad \left( I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$M$ を <u>$I$ の分解</u> ともいう

POVM (<u>Positive</u> <u>operator</u> valued measurement)

仮説 状態 $\rho$ に対して測定 $M$ を行った
結果として事象 $\omega_i \in \Omega$ が得られる確率
$P(\omega_i)$ は $P(\omega_i) = \mathrm{Tr}\,\rho M_i$ で与えられる

2013. 7. 10

5

量子情報概論

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ : 純粋状態

$\mathcal{L}_h \ni A = a_1 |e_1\rangle\langle e_1| + a_2 |e_2\rangle\langle e_2|$

↑ 物理量

(固有値, 固有ベクトル)

$-(a_1, |e_1\rangle), (a_2, |e_2\rangle)$

| | 測定値 | 確率 | 測定後の状態 |
|---|---|---|---|
| $\omega_1$ …… | $a_1$ | $\lvert\langle\psi\lvert e_1\rangle\rvert^2$ | $\lvert e_1\rangle$ |
| $\omega_2$ …… | $a_2$ | $\lvert\langle\psi\lvert e_2\rangle\rvert^2$ | $\lvert e_1\rangle$ |

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= |e_1\rangle\langle e_1| \geq 0 \\ M_2 &= |e_2\rangle\langle e_2| \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{(M-1)}$$

Q : $|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| - I$ (M-2)

$a_1$ がでる確率 $P(\omega_1) = \mathrm{Tr}\,\rho M_1$

$$= \mathrm{Tr}\, |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi| \cdot |e_1\rangle}_{\langle\psi|e_1\rangle} \langle e_1|$$

$$= \langle\psi|e_1\rangle\, \mathrm{Tr}\, |\psi\rangle\langle e_1|$$

Q $\langle e_1|\psi\rangle$

$$= \langle\psi|e_1\rangle \underline{\langle e_1|\psi\rangle} \leftarrow \overline{\langle\psi|e_1\rangle}$$

$z\bar{z} = |z|^2$ →

$$= \langle\psi|e_1\rangle \overline{\langle\psi|e_1\rangle}$$

$$= |\langle\psi|e_1\rangle|^2$$

$B = b_1 |f_1\rangle\langle f_1| + b_2 |f_2\rangle\langle f_2|$

| 測定値 | 確率 | 測定後の状態 |
|---|---|---|
| $b_1$ | $\lvert\langle\psi\lvert f_1\rangle\rvert^2$ | $\lvert f_1\rangle$ |
| $b_2$ | $\lvert\langle\psi\lvert f_2\rangle\rvert^2$ | $\lvert f_2\rangle$ |

$AB \neq BA$ のとき

$A$ と $B$ の物理量は同時に測定できない。

2013. 7. 10

6

状態

| 測定値 | | | 確率 |
|---|---|---|---|
| $\omega_1 \cdots$ | $a_1$ | $b_1$ | |
| $\omega_2 \cdots$ | $a_2$ | $b_1$ | |
| $\omega_3 \cdots$ | $a_1$ | $b_2$ | |
| $\omega_4 \cdots$ | $a_2$ | $b_2$ | |

$\cap$
$\Omega$

ここの可能性をすべ
記述するには
一般的な測定の
定義が必要

$$M_1 = |e_1\rangle\langle e_1|$$
$$M_2 = |e_2\rangle\langle e_2|$$

von Neumann 測定（単純測定）

$\mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^n$ の場合は

$$M_i = |e_{i,1}\rangle\langle e_{i,1}| + \cdots + |e_{i,n_i}\rangle\langle e_{i,n_i}|$$

であり、

$$M_i M_j = 0$$

をみたすような測定を von Neumann 測定

（単純測定と呼ぶ）