2013. 7. 3

1

$T(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = T|\psi\rangle + T|\phi\rangle$

$T(\lambda|\psi\rangle) = \lambda T|\psi\rangle$

$|\psi\rangle = z_1|e_1\rangle + \cdots + z_n|e_n\rangle$

$= z_1'|e_1'\rangle + \cdots + z_n'|e_n'\rangle$

$|\phi\rangle = w_1|e_1\rangle + \cdots + w_n|e_n\rangle$

$= w_1'|e_1'\rangle + \cdots + w_n'|e_n'\rangle$

$$\begin{tikzcd}
|\psi\rangle \in \mathcal{H} \arrow[r, "T"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & \mathcal{H} \ni |\phi\rangle = T|\psi\rangle \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \underset{|e_1\rangle,\dots,|e_n\rangle}{\mathbb{C}^n} \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \underset{|e_1\rangle,\dots,|e_n\rangle}{\mathbb{C}^n} \ni \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \arrow[d, "P"] \\
\begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} \in \underset{|e_1'\rangle,\dots,|e_n'\rangle}{\mathbb{C}^n} \arrow[r, "A'"] \arrow[u, shift right, "P^{-1}"'] & \underset{|e_1'\rangle,\dots,|e_n'\rangle}{\mathbb{C}^n} \ni \begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_n' \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

$$\underset{\sim}{A'} = P \underset{\sim}{A} P^{-1}$$

◎ 状態 (一般化バージョン)

復習 (量子情報概論の復習)

$\mathbb{C}^2 \ni |\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \langle\psi| = (\bar{z}_1\ \bar{z}_2)$

ケットベクトル

$= \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}^{\textcircled{T}}$

転置

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^T = (z_1\ z_2)$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A^* \underset{\text{定義}}{=} \bar{A}^t$

エルミート共役

(随伴行列)

$A = A^*$ のとき A をエルミート行列 (Hermite)

<u>内積</u> $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\cdot|\phi\rangle = (\bar{z}_1\ \bar{z}_2)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2$

$(\bar{z}_1\ \bar{z}_2)$

<u>ノルム</u> $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$

z に対して $\bar{z}z = |z|^2$

$\mathbb{C}$

2013. 7. 3

2

A : エルミート 行列

(固有値, 固有ベクトル)

$(\lambda_1, |e_1\rangle), (\lambda_2, |e_2\rangle)$

但し $\langle e_1|e_2\rangle = \langle e_2|e_1\rangle = 0$ $\quad$ (すなわち $|e_1\rangle$ と $|e_2\rangle$ は $\mathbb{C}^2$ の正規直交基底になっている)

$\|e_1\| = \|e_2\| = 1$

A は物理量をあらわしている. (λ_i : 測定値)

A は $(\lambda_i, |e_i\rangle)$ を使って以下のように書ける

$$A = \lambda_1|e_1\rangle\langle e_1| + \lambda_2|e_2\rangle\langle e_2| \qquad (\text{証略})$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}(\bar{z}_1 \ \bar{z}_2) = \begin{pmatrix} z_1\bar{z}_1 & z_1\bar{z}_2 \\ z_2\bar{z}_1 & z_2\bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|^2 & z_1\bar{z}_2 \\ z_2\bar{z}_1 & |z_2|^2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda|\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\begin{pmatrix} |z_1|^2 & z_1\bar{z}_2 \\ z_2\bar{z}_1 & |z_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda|z_1|^2 & \lambda z_1\bar{z}_2 \\ \lambda z_2\bar{z}_1 & \lambda|z_2|^2 \end{pmatrix}$$

状態 = ノルム1 のベクトル. $|\psi\rangle$

$|\psi\rangle$ の物理量 A を測定すると

測定値	確率	測定後の状態
λ_1	$\lvert\langle\psi\lvert e_1\rangle\rvert^2$	$\lvert e_1\rangle$
λ_2	$\lvert\langle\psi\lvert e_2\rangle\rvert^2$	$\lvert e_2\rangle$

$$\mathcal{L} \underset{\text{定義}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

すべての (All)

$A \in \mathcal{L}$ に対して「$\forall\psi, \forall\varphi \in H \quad \langle\psi|A\varphi\rangle = \langle B\psi|\varphi\rangle$」

となる行列 B が唯1つ存在する. 実は $B = A^* = \bar{A}^T$.

○ $n=2$ のときに証明 $\quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \ |\varphi\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\langle\psi|A\varphi\rangle = \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}^T A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

等しい

一方 $\langle B\psi|\varphi\rangle = \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}^T \bar{B}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$(AB)^T = B^T A^T$

$$\left(|B\psi\rangle = B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \langle B\psi| = \overline{\left(B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)}^T = \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^T B^T} = \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}^T \bar{B}^T \right)$$

$|\psi\rangle$ と $|\varphi\rangle$ は自由にとることができるので $A = \bar{B}^T = B^*$ $\therefore A^* = (B^*)^* = B$」

2013. 7. 3

3

$A = A^*$ をみたす行列を エルミート行列と呼ぶ.

A^*は Aの共役転置行列で与えられる $(A^* = \overline{A}^T)$

$n=2$ のとき

$$A = \lambda_1 |e_1\rangle\langle e_1| + \lambda_2 |e_2\rangle\langle e_2|$$

一般の nの時も同様の式が成立:

$$A = \lambda_1 |e_1\rangle\langle e_1| + \lambda_2 |e_2\rangle\langle e_2| + \cdots + \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ (すなわち $|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ は正規直交基底)

λ_i の値に重複がある場合もある.

$\downarrow$

λ_iが同じ値のものはまとめておくと

例. $A = \underline{2}|e_1\rangle\langle e_1| + \underline{2}|e_2\rangle\langle e_2| + 3|e_3\rangle\langle e_3| + 3|e_4\rangle\langle e_4| + 3|e_5\rangle\langle e_5|$

$$= \underset{a_1}{2}\,\underbrace{\left(|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2|\right)}_{P_1} + \underset{a_2}{3}\,\underbrace{\left(|e_3\rangle\langle e_3| + |e_4\rangle\langle e_4| + |e_5\rangle\langle e_5|\right)}_{P_2}$$

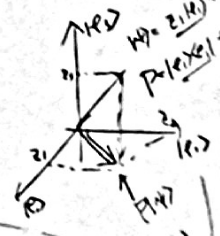
$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2$$

P: 正射影行列 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $P = |e_1\rangle\langle e_1| + \cdots + |e_m\rangle\langle e_m|$

$$\langle e_i | e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

例. Hの正規直交基底を $|e_1\rangle, \cdots, |e_n\rangle$ とする

$|e_1\rangle, \cdots, |e_m\rangle$ $\quad m < n$



$|\psi\rangle = z_1|e_1\rangle + z_2|e_2\rangle + z_3|e_3\rangle$

$P = |e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2|$

$$P = |e_1\rangle\langle e_1| + \cdots |e_m\rangle\langle e_m|$$

$$H \ni |\psi\rangle = z_1|e_1\rangle + \cdots + z_n|e_n\rangle$$

$$P|\psi\rangle = \left(|e_1\rangle\langle e_1| + \cdots + |e_m\rangle\langle e_m|\right)\left(z_1|e_1\rangle + \cdots + z_n|e_n\rangle\right)$$

$$= \underbrace{z_1 |e_1\rangle\underset{1}{\langle e_1|e_1\rangle} + \cdots z_n|e_1\rangle\underset{0}{\langle e_1|e_n\rangle}}_{z_1|e_1\rangle} + z_2|e_2\rangle + \cdots + z_m|e_m\rangle$$

$$= z_1|e_1\rangle + \cdots + z_m|e_m\rangle$$

$P|\psi\rangle = z_1|e_1\rangle + z_2|e_2\rangle$