1 2013. 6. 12

高校の確率

コイン投げ（2回投げる）

表… θ

裏… $1-\theta$

表が出る回数の期待値 X

			X
$(1-\theta)^2$	裏	裏	0
$(1-\theta)\theta$	裏	表	1
$\theta(1-\theta)$	表	裏	1
θ^2	表	表	2

X	0	1	2
確率	$(1-\theta)^2$	$2\theta(1-\theta)$	θ^2

$$E[X] = 0\cdot(1-\theta)^2 + 1\cdot 2\theta(1-\theta) + 2\theta^2$$

$$= 2\theta$$

{推定}

θ の値を推定

$\hat{\theta}$

$\omega_4' = (\omega_2, \omega_2)$ 裏 裏 $\longrightarrow$ $\hat{\theta}$(裏, 裏) $= 0 \ (= \frac{0}{2})$

$\omega_3' = (\omega_2, \omega_1)$ 裏 表 $\longrightarrow$ $\hat{\theta}$(裏 表) $= \frac{1}{2}$

$\omega_2' = (\omega_1, \omega_2)$ 表 裏 $\longrightarrow$ $\hat{\theta}$(表 裏) $= \frac{1}{2}$

$\omega_1' = (\omega_1, \omega_1)$ 表 表 $\longrightarrow$ $\hat{\theta}$(表 表) $= 1$

直積事象

$$\hat{\theta} = \frac{X}{2}$$

$$E[\hat{\theta}] = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

θに一致している!!

（不偏推定）

表… ω_1，裏… ω_2

事象

$P(\omega_1) = \theta$

$P(\omega_2) = 1-\theta$

$$P(\omega_1') = P(\omega_1)P(\omega_1) = \theta^2, \quad P(\omega_2') = P(\omega_3') = \theta(1-\theta)$$

$$P(\omega_4') = (1-\theta)^2$$

$$E[\hat{\theta}] = P(\omega_1')\cdot 1 + \underbrace{P(\omega_2')\cdot\frac{1}{2} + P(\omega_3')\frac{1}{2}} + P(\omega_4')\cdot 0$$

2

2013. 6. 12

表記をかえる

$P(\omega_1),\ P(\omega_2) \longrightarrow P_\theta(\omega_1),\ P_\theta(\omega_2)$

$P(\omega_1') = P(\omega_1, \omega_1) \longrightarrow P_\theta^2(\omega_1') = P_\theta^2(\omega_1, \omega_1) = P_\theta(\omega_1)P_\theta(\omega_1)$

$\hat{\theta}(\omega_2, \omega_2) = 0,\quad \hat{\theta}(\omega_2, \omega_1) = \frac{1}{2},\quad \hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2},\quad \hat{\theta}(\omega_1, \omega_1) = 1$

$E[\hat{\theta}] \longrightarrow E_\theta[\hat{\theta}]$

これらによって $E[\hat{\theta}]$ の式をかきかえると

$$E_\theta[\hat{\theta}] = P_\theta^2(\omega_1, \omega_1)\hat{\theta}(\omega_1, \omega_1) + P_\theta^2(\omega_1, \omega_2)\hat{\theta}(\omega_1, \omega_2) + P_\theta^2(\omega_2, \omega_1)\hat{\theta}(\omega_2, \omega_1)$$
$$+ P_\theta^2(\omega_2, \omega_2)\hat{\theta}(\omega_2, \omega_2)$$

$\Omega^2 = \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2)\}$

$\Omega^2 \ni (\omega_1, \omega_1)$

$\Omega^2 \ni (\omega_1, \omega_2)$

$\Omega^2 \ni (x_1, x_2)$

x_1, x_2 は. ω_1 又は ω_2 の値をそれぞれとる

$$E_\theta[\hat{\theta}] = \sum_{(x_1, x_2) \in \Omega^2} P_\theta^2(x_1, x_2)\,\hat{\theta}(x_1, x_2)$$

↓ N回投げることにすると

$$E_\theta[\hat{\theta}] = \sum_{(x_1, \cdots, x_N) \in \Omega^N} P_\theta^N(x_1, x_2, \cdots, x_N)\,\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_N)$$

$$P_\theta^N(x_1, \cdots, x_N) = P_\theta(x_1) \cdots P_\theta(x_N) \cdots (1)$$

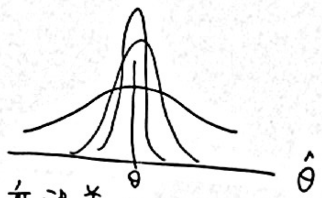
以下 1次元モデルに話を限定する。

$\boxed{\text{コイン投げ}}$

	$\hat{\theta}$
表 (ω_1) $\longrightarrow$	1
裏 (ω_2) $\longrightarrow$	0

3

2013. 6. 12



$$V_\theta[\hat{\theta}] = \sum_{x\in\Omega} P_\theta(x)\big(\underbrace{\hat{\theta}(x)-\theta}_{\text{真値}\theta\text{からのずれ}}\big)^2$$ 平均2乗誤差

↖ 推定の良しあしの基準

$\hat{\theta}$ が不偏推定量の場合

$\theta = E_\theta[\hat{\theta}]$ なので

$$V_\theta[\hat{\theta}] = \sum_{x\in\Omega} P_\theta(x)\big(\hat{\theta}(x) - E_\theta[\hat{\theta}]\big)^2$$: $\hat{\theta}$ の分散

Th.1. (Cramér-Rao)　P_θ は θ に関して滑らかとする.

↖連続 & 微分可能

$S = \{P_\theta\}$ の パラメータ θ に対する

任意の不偏推定量を $\hat{\theta}$ とすると

$$V_\theta[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{J_\theta}$$

$$J_\theta = \sum_{x\in\Omega} P_\theta(x)\left(\frac{d}{d\theta}\log P_\theta(x)\right)^2$$

コインなげ. 表 … ω_1, 裏 … ω_2

$P_\theta(\omega_1) = \theta \quad = f_1(\theta)$

$P_\theta(\omega_2) = 1-\theta \quad = f_2(\theta)$

$$\frac{d}{d\theta}\log \underbrace{P_\theta(\omega_1)}_{f_1(\theta)} = \frac{d}{d\theta}\log\theta = \frac{1}{\theta}$$

固定

注 ω_1 の関数とは見ない

$$\frac{d}{d\theta}\log P_\theta(\omega_2) = \frac{d}{d\theta}\log(1-\theta) = \frac{(1-\theta)'}{1-\theta} = \frac{-1}{1-\theta}$$

$$J_\theta = P_\theta(\omega_1)\left(\frac{d}{d\theta}\log P_\theta(\omega_1)\right)^2 + P_\theta(\omega_2)\left(\frac{d}{d\theta}\log P_\theta(\omega_2)\right)^2$$

$$= \theta\,\frac{1}{\theta^2} + (1-\theta)\left(-\frac{1}{1-\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

3 2013.6.12

$$V_\theta[\hat{\theta}] = \sum_{x\in\Omega} P_\theta(x)\left(\hat{\theta}(x)-\theta\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{J_\theta} = \theta(1-\theta) \quad \text{——} \quad Ⓐ$$

推定量

$\hat{\theta}(\omega_1) = 1$　　$P_\theta(\omega_1) = \theta$

$\hat{\theta}(\omega_2) = 0$　　$P_\theta(\omega_2) = 1-\theta$

$$E_\theta[\hat{\theta}] = \sum_{x\in\Omega} P_\theta(x)\,\hat{\theta}(x) = P_\theta(\omega_1)\hat{\theta}(\omega_1) + P_\theta(\omega_2)\hat{\theta}(\omega_2)$$

$$= \theta\cdot 1 + (1-\theta)\cdot 0 = \theta$$

$$V_\theta[\hat{\theta}] = \sum_{x\in\Omega} P_\theta(x)\left(\hat{\theta}(x)-\theta\right)^2$$

$$= P_\theta(\omega_1)\left(\hat{\theta}(\omega_1)-\theta\right)^2 + P_\theta(\omega_2)\left(\hat{\theta}(\omega_2)-\theta\right)^2$$

$$= \theta(1-\theta)^2 + (1-\theta)(0-\theta)^2$$

$$= \theta(1-\theta)$$ ← 限界を達成している

よって推定量は最適なものであることがわかる.