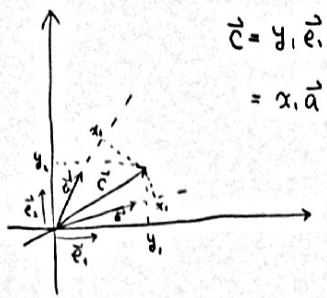
2013. 6. 26

1



$\vec{c} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= x_1\vec{a} + x_2\vec{b} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \end{cases}$

$(\vec{a} \ \ \vec{b}) = (\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

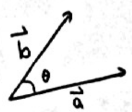
$\vec{c} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = (\vec{a} \ \ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= (\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \ \ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

内積

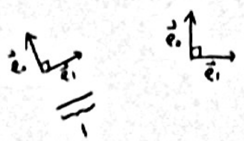


$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

定義

成分であらわされたベクトルの内積

大きさ1で互いに直交する基底ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を考える



正規直交基底
(normal)

大きさ1

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の大きさは1なので

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

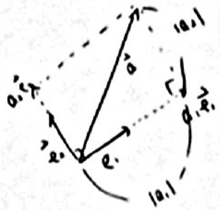
$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$a_1\vec{e}_1$ の大きさは $|a_1|$

$a_2\vec{e}_2$ の大きさは $|a_2|$

$b_1\vec{e}_1$ の 〃 $|b_1|$

$b_2\vec{e}_2$ の 〃 $|b_2|$

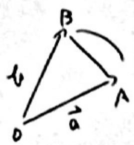


$\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ は直交しているので

$\vec{a}$ の大きさは $\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}$

正規直交基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ のとり方によらずに1つ定まる

同様にして $\vec{b}$ の大きさは $\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}$

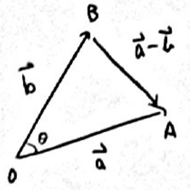


$\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2$

BA の大きさは $= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

2013. 6. 26

2



余弦定理を使うと

$$BA^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2\}$$

$$= 2a_1b_1 + 2a_2b_2$$

$$\therefore\ |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \underline{a_1b_1 + a_2b_2}$$

正規直交基底のとり方によらない。

○ 内積も考える場合は

基底として正規直交基底をとるのが都合がよい。

$$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^2$$

☆ $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \psi$, $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \varphi$

(ψ, φ)

内積：$\langle\psi|\varphi\rangle = \langle z| \cdot |w\rangle = (\bar{z}_1\ \bar{z}_2)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2$

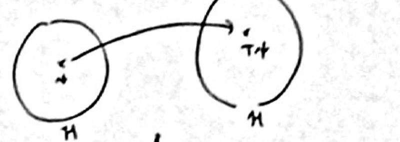
ブラケット積　ブラベクトル　ケットベクトル

（線形作用素）

$\psi \longmapsto T\psi$

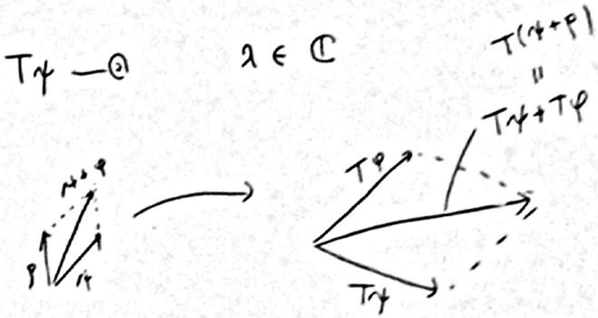
・線形写像　$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

但し $\mathcal{H}$ は複素線形空間



この対応関係を写像と呼ぶ

線形性の条件 $\begin{cases} T(\psi+\varphi) = T\psi + T\varphi \quad —① \\ T(\lambda\psi) = \lambda T\psi \quad —② \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{C}$



$\vec{e}_1, \vec{e}_2$：$\mathcal{H}$ の基底

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \xrightarrow{T} T\vec{a} = T(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2)$$

$$\overset{①}{=} T(a_1\vec{e}_1) + T(a_2\vec{e}_2) \overset{②}{=} a_1 T\vec{e}_1 + a_2 T\vec{e}_2$$

$\updownarrow$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

このAをみつけたい。

2013. 6. 26

3

$$\left.\begin{aligned} T\vec{e}_1 &= t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 \\ T\vec{e}_2 &= t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 \end{aligned}\right\}$$ となるような $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$ をみつける.

$$(T\vec{e}_1\ T\vec{e}_2) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \quad —\ ①$$

$$T\vec{a} = a_1 T\vec{e}_1 + a_2 T\vec{e}_2 = (T\vec{e}_1\ T\vec{e}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \overset{①}{=} (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$T\vec{a} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$H = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \ ;\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

実ベクトル空間

$1+x,\quad 1+2x+5x^2+x^4$

$$\sum_{i=0}^{4} a_i x^i + \sum_{i=0}^{4} b_i x^i = \sum_{i=0}^{4} (a_i + b_i) x^i$$

ex. $(1+x) + (1+2x+x^2) = 2+3x+x^2$

$$\lambda \sum_{i=0}^{4} a_i x^i = \sum_{i=0}^{4} \lambda a_i x^i$$

ex. $4(1+2x^2+x^3) = 4+8x^2+4x^3$

基底 $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$

$\ \vec{e}_0\ \ \vec{e}_1\ \ \vec{e}_2\ \ \vec{e}_3\ \ \vec{e}_4$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$a_0\vec{e}_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$$

2013. 6. 26

4

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 4a_4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 6a_3 \\ 12a_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \xrightarrow{\text{微分 } D} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \xrightarrow{D} 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$$

一致している

$$D\vec{e}_0 = 0$$
$$D\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_0$$
$$D\vec{e}_2 = Dx^2 = 2x = 2\vec{e}_1$$
$$D\vec{e}_3 = Dx^3 = 3x^2 = 3\vec{e}_2$$
$$D\vec{e}_4 = Dx^4 = 4x^3 = 4\vec{e}_3$$

$T(x+y) = Tx + Ty$

$T\lambda x = \lambda T x$

線形写像

行列

$$(D\vec{e}_0\ D\vec{e}_1\ D\vec{e}_2\ D\vec{e}_3\ D\vec{e}_4) = (\vec{e}_0\ \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3\ \vec{e}_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

微分をあらわす行列 A

和・スカラー積

線形空間

$$A^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 6a_3 \\ 12a_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$