第一章　事件及其概率

Tianxiao Pang

Zhejiang University

September 12, 2021

内容

内容

内容

内容

随机现象与统计规律性

1.1.1 随机现象

自然界与人类社会中存在着两类现象:

随机现象与统计规律性

1.1.1 随机现象

自然界与人类社会中存在着两类现象:

(1) 确定性现象: 在一定条件下必定发生或必定不发生的现象.
例: 在标准大气压下, 水在100摄氏度时会沸腾; 太阳从西边升起.

随机现象与统计规律性

1.1.1 随机现象

自然界与人类社会中存在着两类现象:

(1) 确定性现象: 在一定条件下必定发生或必定不发生的现象.
例: 在标准大气压下, 水在100摄氏度时会沸腾; 太阳从西边升起.

(2) 随机现象: 在一定条件下可能发生也可能不发生的现象.
例: 杭州明天下雨; 买了一张彩票会中奖.

随机现象与统计规律性

1.1.1 随机现象

自然界与人类社会中存在着两类现象:

(1) 确定性现象: 在一定条件下必定发生或必定不发生的现象.
例: 在标准大气压下, 水在100摄氏度时会沸腾; 太阳从西边升起.

(2) 随机现象: 在一定条件下可能发生也可能不发生的现象.
例: 杭州明天下雨; 买了一张彩票会中奖.

概率论是一门研究随机现象的数量规律性的学科.

随机试验(random experiment)

满足下列3个条件的对随机现象的观察、记录或实验被称为随机试验(简称为试验):

(1) 在相同的条件下可重复进行,

(2) 试验前事先知道所有可能出现的结果,

(3) 每次试验会出现哪一结果是无法预知的.

随机试验(random experiment)

满足下列3个条件的对随机现象的观察、记录或实验被称为随机试验(简称为试验):

(1) 在相同的条件下可重复进行,

(2) 试验前事先知道所有可能出现的结果,

(3) 每次试验会出现哪一结果是无法预知的.

例: 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面;

随机试验(random experiment)

满足下列3个条件的对随机现象的观察、记录或实验被称为随机试验(简称为试验):

(1) 在相同的条件下可重复进行,

(2) 试验前事先知道所有可能出现的结果,

(3) 每次试验会出现哪一结果是无法预知的.

例: 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面; 对听课人数进行一次登记.

注: (1) 对于随机试验, 每次试验不能预测其结果, 这反映了随机试验结果的出现具有偶然性; (2) 但如果进行大量重复试验, 所出现结果又具有某种规律性—— 统计规律性. 例: 多次抛一枚质量均匀的硬币, 正反面出现的次数大致相等.

随机事件(random event): 随机试验的某一可能结果. 简称为事件.

必然事件: 必定发生的事件. 记为Ω.

不可能事件: 必定不发生的事件. 记为ϕ.

随机事件(random event): 随机试验的某一可能结果. 简称为事件.

必然事件: 必定发生的事件. 记为Ω.

不可能事件: 必定不发生的事件. 记为ϕ.

注: 为了处理上的方便, 我们把必然事件和不可能事件当成随机事件来处理.

1.1.2 概率的统计定义

在相同的条件下重复作N次试验, 各次试验互不影响. 考察事件A出现的次数(频数)n, 称

$$F_N(A) = \frac{n}{N}$$

为A在N次试验中出现的频率(frequency).

1.1.2 概率的统计定义

在相同的条件下重复作N次试验, 各次试验互不影响. 考察事件A出现的次数(频数)n, 称

$$F_N(A) = \frac{n}{N}$$

为A在N次试验中出现的频率(frequency).

人们发现: 当N很大时, 频率会呈现某种稳定性, 即在某常数附近摆动. 当$N \to \infty$时, 频率趋向于某常数. 这种规律即为随机现象的统计规律.

概率的统计定义: 人们把频率所稳定到的那个常数表示事件A在一次试验中发生的可能性大小, 称作**概率**(probability), 记为P(A).

例1(利用频率求概率) 历史上有一些数学家进行抛硬币试验, 结果如下:

实验者	投硬币次数	出现正面次数	频率
浦丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

记$A = \{$抛一枚硬币，出现正面$\}$, 自然地, 根据概率的统计定义, 我们认为

例1(利用频率求概率) 历史上有一些数学家进行抛硬币试验, 结果如下:

实验者	投硬币次数	出现正面次数	频率
浦丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

记$A=\{$抛一枚硬币，出现正面$\}$, 自然地, 根据概率的统计定义, 我们认为

$$\mathsf{P}(A)=0.5.$$

频率的性质:

- 非负性: $F_N(A) \geq 0$;

频率的性质:

- 非负性: $F_N(A) \geq 0$;
- 规范性: 对必然事件Ω, $F_N(\Omega) = 1$;

频率的性质:

- 非负性: $F_N(A) \geq 0$;
- 规范性: 对必然事件Ω, $F_N(\Omega) = 1$;
- 可加性: 若A与B是两个不会同时发生的事件, 以$A+B$记A与B至少有一个发生这一事件, 则

$$F_N(A+B) = F_N(A) + F_N(B).$$

(可推广到任意有限个事件)

古典概型与几何概型

1.2.1 样本空间与样本点

样本点(sample point): 随机试验的每一可能结果. 记为ω. 也称样本点为**基本事件**.

样本空间(sample space): 样本点的全体, 即随机试验的所有可能结果. 记为Ω.

古典概型与几何概型

1.2.1 样本空间与样本点

样本点(sample point): 随机试验的每一可能结果. 记为ω. 也称样本点为**基本事件**.

样本空间(sample space): 样本点的全体, 即随机试验的所有可能结果. 记为Ω.

注: 即使对同一试验, 若试验目的不同, 样本空间也可能会发生变化. 讨论问题前需事先取定样本空间.

例1 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面.

例1 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面.

$$\omega_1 = \{\text{正面}\}, \omega_2 = \{\text{反面}\},$$

例1 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面.

$$\omega_1 = \{\text{正面}\}, \omega_2 = \{\text{反面}\},$$

$$\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\}.$$

例1 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面.

$$\omega_1 = \{正面\}, \omega_2 = \{反面\},$$

$$\Omega = \{正面, 反面\}.$$

例2 抛一枚质量均匀的硬币, 观察出现正面的次数.

例1 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面.

$$\omega_1 = \{\text{正面}\}, \omega_2 = \{\text{反面}\},$$

$$\Omega = \{\text{正面, 反面}\}.$$

例2 抛一枚质量均匀的硬币, 观察出现正面的次数.

$$\omega_1 = \{0\}, \omega_2 = \{1\},$$

例1 抛一枚质量均匀的硬币, 观察正反面.

$$\omega_1=\{\text{正面}\},\omega_2=\{\text{反面}\},$$

$$\Omega=\{\text{正面},\ \text{反面}\}.$$

例2 抛一枚质量均匀的硬币, 观察出现正面的次数.

$$\omega_1=\{0\},\omega_2=\{1\},$$

$$\Omega=\{0,1\}.$$

例3 杭州今天发生交通事故的次数.

例3 杭州今天发生交通事故的次数.

$$\omega_1 = \{0\}, \omega_2 = \{1\}, \cdots ,$$

例3 杭州今天发生交通事故的次数.

$$\omega_1 = \{0\}, \omega_2 = \{1\}, \cdots ,$$

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

例3 杭州今天发生交通事故的次数.

$$\omega_1 = \{0\}, \omega_2 = \{1\}, \cdots ,$$

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

例4 发射一枚炮弹, 考察落地点与目标之间的距离.

例3 杭州今天发生交通事故的次数.

$$\omega_1 = \{0\}, \omega_2 = \{1\}, \cdots ,$$

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

例4 发射一枚炮弹, 考察落地点与目标之间的距离.

$$\Omega = [0, a].$$

1.2.2 古典概型(classical probability model)

1. 定义及计算

定义（古典概型）

满足下列两个条件的试验模型被称为古典概型,

- 样本空间是有限的, 即$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$; (有限性)
- 各样本点的出现是等可能的. (等可能性)

古典概率(classical probability)的定义:

定义 (古典概率)

设一试验有n个等可能发生的样本点，而事件A包含其中的m个样本点，则事件A发生的概率$P(A)$定义为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{包含的样本点个数}}{\text{样本空间中样本点总数}}=\frac{\#A}{\#\Omega}.$$

古典概率性质:

- 非负性: $\mathsf{P}(A) \geq 0$;

古典概率性质:

- 非负性: $\mathsf{P}(A) \geq 0$;
- 规范性: 对必然事件Ω, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

古典概率性质:

- 非负性: $\mathsf{P}(A) \geq 0$;
- 规范性: 对必然事件Ω, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
- 可加性: 若A与B是两个不会同时发生的事件, 以$A+B$记A与B至少有一个发生这一事件, 则

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

(可推广到任意有限个事件)

古典概率性质:

- 非负性: $\mathsf{P}(A) \geq 0$;
- 规范性: 对必然事件Ω, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
- 可加性: 若A与B是两个不会同时发生的事件, 以$A + B$记A与B至少有一个发生这一事件, 则

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

(可推广到任意有限个事件)

特别地, 如果A和B两事件不可能同时发生, 并且A与B至少发生一个, 则$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(B)$.

2. 一些例子

例5 掷一颗均匀的骰子, $A = \{$所得点数为偶数$\}$, 求P(A).

2. 一些例子

例5 掷一颗均匀的骰子, $A = \{$所得点数为偶数$\}$, 求P(A).

解:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{2, 4, 6\},$$

容易知道这是一个古典概型.

2. 一些例子

例5　掷一颗均匀的骰子, $A=\{\text{所得点数为偶数}\}$, 求$\mathsf{P}(A)$.

解:

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\},$$

$$A=\{2,4,6\},$$

容易知道这是一个古典概型. 所以

$$\mathsf{P}(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

例6 有n个球, N个格子($n \leq N$), 球与格子都是可以区分的. 每个球落在各个格子内的概率相同(设格子足够大, 可以容纳任意多个球). 将这n个球随机地放入N个格子, 求: (1)指定的n个格子各有一球的概率; (2)有n格各有一球的概率.

例6 有n个球, N个格子($n \le N$), 球与格子都是可以区分的. 每个球落在各个格子内的概率相同(设格子足够大, 可以容纳任意多个球). 将这n个球随机地放入N个格子, 求: (1)指定的n个格子各有一球的概率; (2)有n格各有一球的概率.

解: 把球编号为$1, \cdots, n$. 把n个球放入N个格子的每一种放法看成一个样本点, 则样本空间中共有N^n个样本点. 这是一个古典概型.

例6 有n个球, N个格子($n \le N$), 球与格子都是可以区分的. 每个球落在各个格子内的概率相同(设格子足够大, 可以容纳任意多个球). 将这n个球随机地放入N个格子, 求: (1)指定的n个格子各有一球的概率; (2)有n格各有一球的概率.

解: 把球编号为$1, \cdots, n$. 把n个球放入N个格子的每一种放法看成一个样本点, 则样本空间中共有N^n个样本点. 这是一个古典概型.

(1) 记$A = \{$指定的n个格子各有一球$\}$.

例6 有n个球, N个格子($n \leq N$), 球与格子都是可以区分的. 每个球落在各个格子内的概率相同(设格子足够大, 可以容纳任意多个球). 将这n个球随机地放入N个格子, 求: (1)指定的n个格子各有一球的概率; (2)有n格各有一球的概率.

解: 把球编号为$1, \cdots, n$. 把n个球放入N个格子的每一种放法看成一个样本点, 则样本空间中共有N^n个样本点. 这是一个古典概型.

(1) 记$A = \{$指定的n个格子各有一球$\}$. 则$\#A = n!$(即在指定的n个格子里放入n个球的全排列数),

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{n!}{N^n}.$$

例6 有n个球, N个格子($n \le N$), 球与格子都是可以区分的. 每个球落在各个格子内的概率相同(设格子足够大, 可以容纳任意多个球). 将这n个球随机地放入N个格子, 求: (1)指定的n个格子各有一球的概率; (2)有n格各有一球的概率.

解: 把球编号为$1, \cdots, n$. 把n个球放入N个格子的每一种放法看成一个样本点, 则样本空间中共有N^n个样本点. 这是一个古典概型.

(1) 记$A = \{$指定的n个格子各有一球$\}$. 则$\#A = n!$(即在指定的n个格子里放入n个球的全排列数),

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{n!}{N^n}.$$

(2) 记$B = \{$有n格各有一球$\}$.

例6 有n个球, N个格子($n \le N$), 球与格子都是可以区分的. 每个球落在各个格子内的概率相同(设格子足够大, 可以容纳任意多个球). 将这n个球随机地放入N个格子, 求: (1)指定的n个格子各有一球的概率; (2)有n格各有一球的概率.

解: 把球编号为$1, \cdots, n$. 把n个球放入N个格子的每一种放法看成一个样本点, 则样本空间中共有N^n个样本点. 这是一个古典概型.

(1) 记$A = \{$指定的n个格子各有一球$\}$. 则$\# A = n!$(即在指定的n个格子里放入n个球的全排列数),

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{n!}{N^n}.$$

(2) 记$B = \{$有n格各有一球$\}$. 则$\# B = P_N^n$(即N个格子中选取n个格子的选排列数),

$$\mathsf{P}(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{P_N^n}{N^n}.$$

由于

$$\frac{P_N^n}{N^n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)$$

并注意到$\log(1-x) = -x + O(x^2), x \to 0$, 因此有

$$\begin{aligned}
&\log\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1-\frac{k}{N}\right)\\
=&-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{N} + O\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{N^2}\Big)\\
=&-\frac{n(n-1)}{2N} + O\Big(\frac{n^3}{N^2}\Big).
\end{aligned}$$

故当N比n大得多时, 我们可以采用近似计算公式:

$$\mathsf{P}(B) \approx \exp\left\{-\frac{n(n-1)}{2N}\right\}.$$

例7(生日问题) 求n个人中至少有2个人生日相同的概率.

例7(生日问题) 求n个人中至少有2个人生日相同的概率.

解: 记$A = \{n$个人中至少有2个人生日相同$\}$. 在例6中令$N = 365$, 把n个人的生日看成n个球, 把一年365天看成是365个格子. 类似于例6可得

例7(生日问题) 求n个人中至少有2个人生日相同的概率.

解: 记$A=\{n$个人中至少有2个人生日相同$\}$. 在例6中令$N=365$, 把n个人的生日看成n个球, 把一年365天看成是365个格子. 类似于例6可得

$$\mathsf{P}(A)=\frac{365^n-P_{365}^n}{365^n}=1-\frac{P_{365}^n}{365^n}.$$

例7(生日问题) 求n个人中至少有2个人生日相同的概率.

解: 记$A=\{n$个人中至少有2个人生日相同$\}$. 在例6中令$N=365$, 把n个人的生日看成n个球, 把一年365天看成是365个格子. 类似于例6可得

$$\mathsf{P}(A)=\frac{365^n-P_{365}^n}{365^n}=1-\frac{P_{365}^n}{365^n}.$$

有趣的结果:

n	20	30	40	50	60	70	80
P(A)	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994	0.9992	0.9999

例8(摸球问题) 口袋中有a只白球, b只黑球, 随机地一只只摸球.

(1) 若是有放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

(2) 若是不放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

例8(摸球问题) 口袋中有a只白球, b只黑球, 随机地一只只摸球.

(1) 若是有放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

(2) 若是不放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

解: 记$A = \{$第k次摸得白球$\}$.

例8(摸球问题) 口袋中有a只白球, b只黑球, 随机地一只只摸球.

(1) 若是有放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

(2) 若是不放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

解: 记$A = \{$第k次摸得白球$\}$.

(1) 把球编号, 不妨记a只白球的号码为$1, \cdots, a$; b只黑球号码为$a+1, \cdots, a+b$. 把第k次摸球所得的号码看成样本点.

例8(摸球问题) 口袋中有a只白球, b只黑球, 随机地一只只摸球.

(1) 若是有放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

(2) 若是不放回摸球, 求第k次摸得白球的概率.

解: 记$A=\{$第k次摸得白球$\}$.

(1) 把球编号, 不妨记a只白球的号码为$1,\cdots,a$; b只黑球号码为$a+1,\cdots,a+b$. 把第k次摸球所得的号码看成样本点. 则

$$\Omega=\{1,2,\cdots,a+b\},$$

$$\#\Omega=a+b,\quad \#A=a.$$

所以

$$\mathrm{P}(A)=\frac{a}{a+b}.$$

(2) 方法1: 把球编号, 按摸的次序把球排成一列, 直到$a+b$个球都摸完. 把每一列看成一个样本点.

(2) 方法1: 把球编号, 按摸的次序把球排成一列, 直到$a+b$个球都摸完. 把每一列看成一个样本点. 则

$$\#\Omega = (a+b)!, \quad \#A = \binom{a}{1}(a+b-1)!.$$

所以

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\binom{a}{1}(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}.$$

(2) 方法1: 把球编号, 按摸的次序把球排成一列, 直到$a+b$个球都摸完. 把每一列看成一个样本点. 则

$$\#\Omega=(a+b)!,\quad \#A=\binom{a}{1}(a+b-1)!.$$

所以

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\binom{a}{1}(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

方法2: 各球不编号, 所有白球看成相同, 所有黑球看成相同. $a+b$个球仍按摸球的次序排列, 但a个位置放白球, 不论白球间如何交换, 只算一种放法(即把a个白球的放法看成样本点).

(2) 方法1: 把球编号, 按摸的次序把球排成一列, 直到$a+b$个球都摸完. 把每一列看成一个样本点. 则

$$\#\Omega=(a+b)!,\quad \#A=\binom{a}{1}(a+b-1)!.$$

所以

$$\mathsf{P}(A)=\frac{\binom{a}{1}(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

方法2: 各球不编号, 所有白球看成相同, 所有黑球看成相同. $a+b$个球仍按摸球的次序排列, 但a个位置放白球, 不论白球间如何交换, 只算一种放法(即把a个白球的放法看成样本点). 则

$$\#\Omega=\binom{a+b}{a},\quad \#A=\binom{a+b-1}{a-1}.$$

所以

$$\mathsf{P}(A)=\frac{\binom{a+b-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}=\frac{a}{a+b}.$$

方法3: 把球编号. 把第k次摸得球的号码看成样本点.

方法3: 把球编号. 把第k次摸得球的号码看成样本点. 则

$$\#\Omega = a + b, \quad \#A = \binom{a}{1} = a.$$

所以

$$\mathsf{P}(A) = \frac{a}{a+b}.$$

方法3: 把球编号. 把第k次摸得球的号码看成样本点. 则

$$\#\Omega = a + b, \quad \#A = \binom{a}{1} = a.$$

所以

$$\mathsf{P}(A) = \frac{a}{a+b}.$$

结论: 摸球与顺序无关.

1.2.3 几何概型

若样本空间中有无穷个样本点, 则不能利用古典概型求概率. 但类似的算法可以进行推广.

1.2.3 几何概型

若样本空间中有无穷个样本点, 则不能利用古典概型求概率. 但类似的算法可以进行推广.

若样本空间是一个包含无限个点的区域Ω(一维, 二维, $\cdots$, n维), 样本点是区域中的一个点, 此时用点数度量样本点的多少就毫无意义. "等可能性" 可理解为: 对任意两个区域, 当它们的测度(长度, 面积, 体积, $\cdots$)相等时, 样本点落在这两区域上的概率相等, 而与形状和位置都无关.

几何概率(geometric probability)的定义:

定义 (几何概率)

假设上述“等可能性”成立. 记

$$E_g = \{\text{任取一个样本点, 它落在区域}g \subset \Omega\},$$

则定义E_g发生的概率为

$$P(E_g) = \frac{g\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}} = \frac{m(g)}{m(\Omega)}.$$

几何概率性质:

- 非负性: $\mathsf{P}(A) \geq 0$;

几何概率性质:

- 非负性: $\mathsf{P}(A) \geq 0$;
- 规范性: 对必然事件Ω, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

几何概率性质:

- 非负性: $\mathsf{P}(A) \geq 0$;
- 规范性: 对必然事件Ω, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
- 可加性: 若A与B是两个不会同时发生的事件, 以$A+B$记A与B至少有一个发生这一事件, 则

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

(可推广到任意个事件)

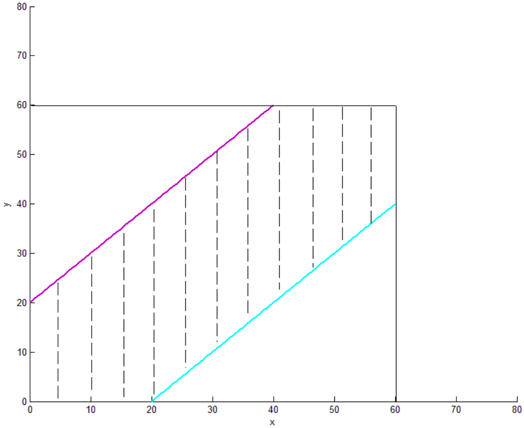
例9(会面问题) 两人相约7点到8点在某地会面, 先到者等候另一人20分钟, 过时离去. 求两人会面的概率.

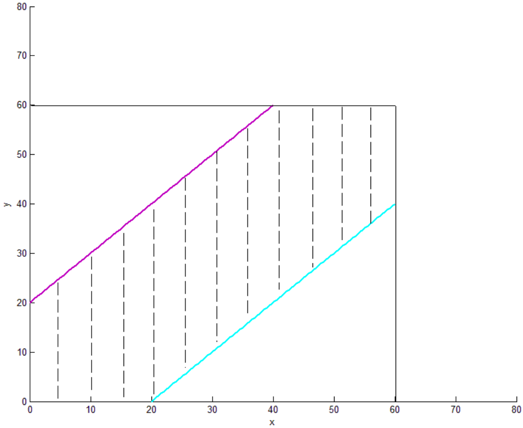
例9(会面问题) 两人相约7点到8点在某地会面, 先到者等候另一人20分钟, 过时离去. 求两人会面的概率.

解: 样本点由两个数(甲乙两人各自到达的时刻)组成. 以7点作为计算时间的起点, 设甲乙各在第x分钟和第y分钟到达, 则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y)|0 \leq x, y \leq 60\}.$$

会面的充要条件是$|x - y| \leq 20$. 即事件$A = \{$甲乙会面$\}$所对应的区域g为图中阴影部分.


80
70
60
50
40
30
20
10
0
y
0
10
20
30
40
50
60
70
80
x



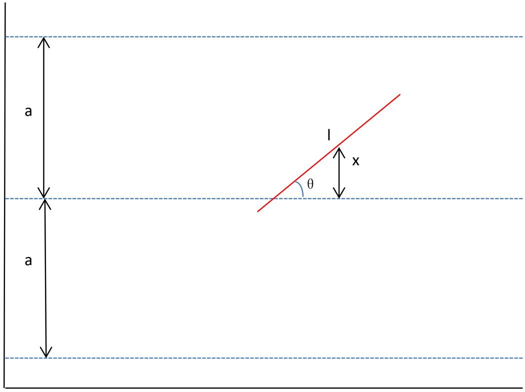
所以

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m(g)}{m(\Omega)} = \frac{g\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

例11(浦丰(Buffon)投针问题) 平面上画很多平行线, 间距为a. 向此平面投掷长为$l(l < a)$的针, 求此针能与平行线相交的概率.

例11(浦丰(Buffon)投针问题) 平面上画很多平行线, 间距为a. 向此平面投掷长为$l(l < a)$的针, 求此针能与平行线相交的概率.

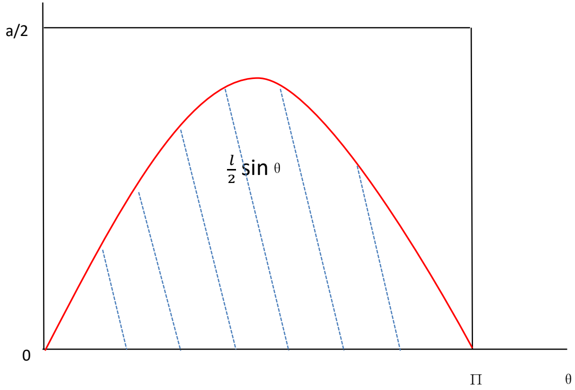
解: 以针的位置为样本点, 它可由两个参数决定: 针的中点与最接近的平行线之间的距离x, 针与平行线的交角θ.



样本空间为

$$\Omega = \{(\theta, x) | 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq x \leq a/2\}.$$

针与平行线相交的充要条件是$x \leq \frac{l}{2}\sin\theta$.



所以, 所求概率为

$$\mathsf{P}=\frac{m(g)}{m(\Omega)}=\frac{g\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\pi a/2}=\frac{2l}{a\pi}.$$

所以, 所求概率为

$$\mathsf{P}=\frac{m(g)}{m(\Omega)}=\frac{g\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\pi a/2}=\frac{2l}{a\pi}.$$

注: 用频率逼近概率P, 可得到π的近似值: 重复投针N次, 统计与平行线相交的次数n, 则$\mathsf{P}\approx n/N$. 又因a与l可以精确测量, 故从$\mathsf{P}=\frac{2l}{a\pi}$可得到

$$\pi\approx\frac{2lN}{an}.$$

这个实验的有关资料(把a折算成1):

实验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	π的实验值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218.5	3.1554
De morgan	1860	1.0	600	382.5	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

概率的公理化定义

概率的统计定义属于描述性定义，古典概率和几何概率都建立在“等可能性”基础之上，只适用于某些特定的概率模型．同时，对于“等可能性”的不同理解可能会导致不同的答案．

因此，我们需要把统计概率，古典概率和几何概率的性质进行抽象化，提出概率的公理化定义．

1.3.1 事件

在随机试验中, 我们除了对基本结果(样本点)感兴趣外, 我们往往还对某些复杂的结果感兴趣. 例如: 口袋中装有10个球, 3个红球, 3个白球以及4个黑球, 然后对它们进行编号$1,2,\cdots,10$, 任取一球. 我们除了关心10个基本结果$\omega_1,\cdots,\omega_{10}$外, 往往还关心类似下列的结果:

1.3.1 事件

在随机试验中，我们除了对基本结果(样本点)感兴趣外，我们往往还对某些复杂的结果感兴趣. 例如: 口袋中装有10个球, 3个红球, 3个白球以及4个黑球, 然后对它们进行编号$1, 2, \cdots, 10$, 任取一球. 我们除了关心10个基本结果$\omega_1, \cdots, \omega_{10}$外, 往往还关心类似下列的结果:

- $A = \{$取得红球或白球$\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;

1.3.1 事件

在随机试验中, 我们除了对基本结果(样本点)感兴趣外, 我们往往还对某些复杂的结果感兴趣. 例如: 口袋中装有10个球, 3个红球, 3个白球以及4个黑球, 然后对它们进行编号$1, 2, \cdots, 10$, 任取一球. 我们除了关心10个基本结果$\omega_1, \cdots, \omega_{10}$外, 往往还关心类似下列的结果:

- $A = \{$取得红球或白球$\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;
- $B = \{$取得球的号码小于$5\ \}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$;

1.3.1 事件

在随机试验中，我们除了对基本结果(样本点)感兴趣外，我们往往还对某些复杂的结果感兴趣．例如：口袋中装有10个球，3个红球，3个白球以及4个黑球，然后对它们进行编号$1, 2, \cdots, 10$，任取一球．我们除了关心10个基本结果$\omega_1, \cdots, \omega_{10}$外，往往还关心类似下列的结果：

- A = {取得红球或白球}=$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;
- B = {取得球的号码小于5 }=$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$;
- C = {没有取得红球}=$\{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$.

A, B, C 都是样本空间的子集.

1.3.1 事件

在随机试验中，我们除了对基本结果(样本点)感兴趣外，我们往往还对某些复杂的结果感兴趣. 例如: 口袋中装有10个球，3个红球，3个白球以及4个黑球，然后对它们进行编号$1,2,\cdots,10$，任取一球. 我们除了关心10个基本结果$\omega_1,\cdots,\omega_{10}$外，往往还关心类似下列的结果:

- $A=\{$取得红球或白球$\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$;
- $B=\{$取得球的号码小于5 $\}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$;
- $C=\{$没有取得红球$\}=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$.

A,B,C 都是样本空间的子集.

我们把样本空间Ω的子集定义为事件，用大写英文字母A, B, C等表示. 这样定义的好处就是可以用集合论的方法来探讨事件.

如果在一次试验中某样本点ω出现, 而$\omega \in A$, 则称事件A发生.

全集Ω以及空集ϕ都是Ω的子集, 因此它们是事件.

因为在每次试验中必然出现Ω中的一个样本点, 即Ω必然发生, 所以称Ω为必然事件.

因为在每次试验中ϕ必定不发生, 因此称它为不可能事件.

事件的关系:

事件的关系:

1. 包含: 若事件A的发生导致B的发生(或者说, 若$\omega \in A$则$\omega \in B$), 则称事件A包含于事件B(或者说B包含A), 记为$A \subset B$(或$B \supset A$).

事件的关系:

1. 包含: 若事件A的发生导致B的发生(或者说, 若$\omega \in A$则$\omega \in B$), 则称事件A包含于事件B(或者说B包含A), 记为$A \subset B$(或$B \supset A$).

2. 相等: 若事件A的发生导致B的发生, 且B的发生导致A的发生(即$A \subset B$且$B \subset A$), 则称事件A和事件B相等. 记为$A = B$.

事件的关系:

1. 包含: 若事件A的发生导致B的发生(或者说, 若$\omega \in A$则$\omega \in B$), 则称事件A包含于事件B(或者说B包含A), 记为$A \subset B$(或$B \supset A$).

2. 相等: 若事件A的发生导致B的发生, 且B的发生导致A的发生(即$A \subset B$且$B \subset A$), 则称事件A和事件B相等. 记为$A = B$.

3. 和(并)事件: 称A与B至少有一个发生(或者说: A发生或B发生)这一事件为A与B的和事件. 记为$A \cup B$.

事件的关系:

1. 包含: 若事件A的发生导致B的发生(或者说, 若$\omega \in A$则$\omega \in B$), 则称事件A包含于事件B(或者说B包含A), 记为$A \subset B$(或$B \supset A$).

2. 相等: 若事件A的发生导致B的发生, 且B的发生导致A的发生(即$A \subset B$且$B \subset A$), 则称事件A和事件B相等. 记为$A = B$.

3. 和(并)事件: 称A与B至少有一个发生(或者说: A发生或B发生)这一事件为A与B的和事件. 记为$A \cup B$.

4. 积(交)事件: 称A与B同时发生(或者说: A发生且B发生)这一事件为A与B的积事件. 记为$A \cap B$(或者AB).

5. 差事件: 称A发生而(且)B不发生这一事件为A与B的差事件. 记为$A\backslash B$. 如果$B\subset A$, 则$A\backslash B$可写作$A-B$.

5. 差事件: 称A发生而(且)B不发生这一事件为A与B的差事件. 记为$A\backslash B$. 如果$B \subset A$, 则$A\backslash B$可写作$A - B$.

6. 互不相容事件: 若A与B不能同时发生, 即$AB = \phi$. 则称A与B为互不相容事件. 这时, $A \cup B$可写为$A + B$.

5. 差事件: 称A发生而(且)B不发生这一事件为A与B的差事件. 记为$A\backslash B$. 如果$B \subset A$, 则$A\backslash B$可写作$A - B$.

6. 互不相容事件: 若A与B不能同时发生, 即$AB = \phi$. 则称A与B为互不相容事件. 这时, $A \cup B$可写为$A + B$.

7. 逆(对立, 余)事件: 若A与B有且只有一个发生, 即$AB = \phi$且$A \cup B = \Omega$. 则称A与B互为逆事件. 记作$B = \bar{A} = A^c$, $A = \bar{B}$ $= B^c$. (注: $A\backslash B = A\bar{B} = A - AB$)

事件的运算:

事件的运算:

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

事件的运算:

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
2. 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;

事件的运算:

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
2. 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;
3. 分配律: $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

事件的运算:

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
2. 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;
3. 分配律: $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
4. 德摩根(De Morgan)律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

事件的运算:

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
2. 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;
3. 分配律: $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
4. 德摩根(De Morgan)律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

要求: 集合论的写法和事件的语言能互相翻译, 能把复杂事件分解成简单事件.

例1 若A, B, C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}$

例1 若A, B, C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}=AB\bar{C} = AB\backslash C = AB - ABC$;

例1 若A,B,C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}$=$AB\bar{C}=AB\backslash C=AB-ABC$;

$\{A,B,C$都发生$\}$

例1 若A,B,C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}=AB\bar{C}=AB\backslash C=AB-ABC$;

$\{A,B,C$都发生$\}=ABC$;

例1 若A, B, C是3个事件, 则

{A与B都发生而C不发生}=$AB\bar{C} = AB\backslash C = AB - ABC$;

{A, B, C都发生}=ABC;

{三事件恰好发生一个}

例1 若A,B,C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}=AB\bar{C}=AB\backslash C=AB-ABC$;

$\{A,B,C$都发生$\}=ABC$;

$\{$三事件恰好发生一个$\}=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

例1 若A, B, C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}=AB\bar{C} = AB\backslash C = AB - ABC$;

$\{A, B, C$都发生$\}=ABC$;

$\{$三事件恰好发生一个$\}=A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$;

$\{$三事件恰好发生两个$\}$

例1 若A, B, C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}=AB\bar{C} = AB \backslash C = AB - ABC$;

$\{A, B, C$都发生$\}=ABC$;

$\{$三事件恰好发生一个$\}=A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$;

$\{$三事件恰好发生两个$\}=AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$;

例1 若A,B,C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}=AB\bar{C}=AB\backslash C=AB-ABC$;

$\{A,B,C$都发生$\}=ABC$;

$\{$三事件恰好发生一个$\}=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

$\{$三事件恰好发生两个$\}=AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$;

$\{$三事件至少发生一个$\}$

例1 若A, B, C是3个事件, 则

$\{A$与B都发生而C不发生$\}=AB\bar{C} = AB\backslash C = AB - ABC$;

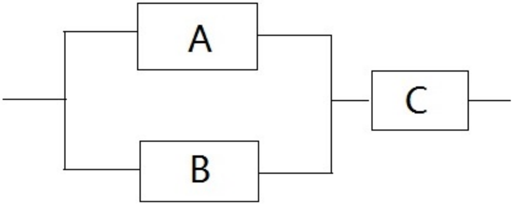
$\{A, B, C$都发生$\}=ABC$;

$\{$三事件恰好发生一个$\}=A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$;

$\{$三事件恰好发生两个$\}=AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$;

$\{$三事件至少发生一个$\}=A \cup B \cup C$.

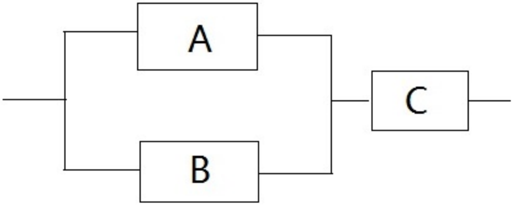
例2 三个原件A, B, C以如图所示连接. 以A, B, C表示相应的三个原件能正常工作. 记$W = \{$系统能正常工作$\}$.



则

$$W =$$

例2 三个原件A, B, C以如图所示连接. 以A, B, C表示相应的三个原件能正常工作. 记$W = \{$系统能正常工作$\}$.



则

$$W = (A \cup B)C = AC \cup BC.$$

1.3.2 概率空间

1.3.2 概率空间

概率空间由三个要素组成：

- 样本空间Ω;
- 事件域$\mathscr{F}$(σ域, σ代数);
- 概率(测度)P.

1.3.2 概率空间

概率空间由三个要素组成：

- 样本空间Ω;
- 事件域$\mathscr{F}$(σ域, σ代数);
- 概率(测度)P.

在几何概型中, 若g的测度不存在, 则我们无法定义g的概率. 因此, 我们并不是对所有的事件感兴趣.

1.3.2 概率空间

概率空间由三个要素组成：

- 样本空间Ω;
- 事件域$\mathscr{F}$(σ域, σ代数);
- 概率(测度)P.

在几何概型中，若g的测度不存在，则我们无法定义g的概率. 因此，我们并不是对所有的事件感兴趣.

事件域$\mathscr{F}$是指Ω中满足下列条件的子集所组成的集类:

- $\Omega \in \mathscr{F}$;
- 若$A \in \mathscr{F}$, 则$\bar{A} \in \mathscr{F}$;
- 若$A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$, 则$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

事件域有下列的性质:

- $\phi \in \mathscr{F}$;

事件域有下列的性质:

- $\phi \in \mathscr{F}$;
- 若$A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$, 则$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

$$(因为\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n});$$

事件域有下列的性质:

- $\phi \in \mathscr{F}$;
- 若$A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$, 则$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

  (因为$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n}$);
- 若$A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$, 则$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$.

事件域的选取:

事件域的选取:

1. 若我们只对Ω中的一个子集A感兴趣, 则通常取

$$\mathscr{F}=\{A,\bar{A},\phi,\Omega\}.$$

事件域的选取:

1. 若我们只对Ω中的一个子集A感兴趣, 则通常取

$$\mathscr{F} = \{A, \bar{A}, \phi, \Omega\}.$$

2. 若样本空间由有限个或者可列个样本点组成, 则常取Ω的一切子集所构成的集类作为$\mathscr{F}$.

3. 若$\Omega=\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$(一维实数全体), 则取一切左开右闭有界区间和它们的(有限或可列)并、(有限或可列)交、逆所构成的集类作为$\mathscr{F}$(一维Borel σ域).

3. 若$\Omega = \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$(一维实数全体), 则取一切左开右闭有界区间和它们的(有限或可列)并、(有限或可列)交、逆所构成的集类作为$\mathscr{F}$(一维Borel σ域).

注: 若x, y表示任意实数, 由于

$$\begin{aligned} \{x\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x]; \\ (x, y) &= (x, y] - \{y\}; \\ [x, y] &= (x, y] + \{x\}; \\ [x, y) &= \{x\} + (x, y). \end{aligned}$$

因此$\mathscr{F}$中包含一切开区间、闭区间、半开半闭区间、单个实数、可列个实数, 以及由它们经可列次并、交运算而得出的集合.

4. 若$\Omega = \mathbb{R}^n$(n维实数空间), 则取一切左开右闭有界n维矩形和它们的(有限或可列)并、(有限或可列)交、逆所构成的集类作为$\mathscr{F}$(n维Borel σ域).

定义（概率）

概率是定义在$\mathscr{F}$上的实值集函数: $A(\in \mathscr{F}) \mapsto P(A)$, 且满足下列三个条件:

- 非负性: 对任一$A \in \mathscr{F}$, $P(A) \geq 0$;
- 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- 可列可加性: 若$A_1, \cdots, A_n, \cdots$是$\mathscr{F}$中两两互不相容事件, 则

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

定义（概率）

概率是定义在$\mathscr{F}$上的实值集函数: $A(\in \mathscr{F}) \mapsto P(A)$, 且满足下列三个条件:

- 非负性: 对任一$A \in \mathscr{F}$, $P(A) \geq 0$;
- 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- 可列可加性: 若$A_1, \cdots, A_n, \cdots$是$\mathscr{F}$中两两互不相容事件, 则

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

注: 若无特别声明, 今后遇到的事件都假定来自事件域$\mathscr{F}$, 使得它有概率.

概率的性质:

概率的性质:

1. $P(\phi) = 0$.

概率的性质:

1. $\mathsf{P}(\phi) = 0$.

证明: 因为

$$\mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\phi) + \mathsf{P}(\phi) + \cdots,$$

所以两边消去$\mathsf{P}(\Omega)$得$\mathsf{P}(\phi) = 0$.

概率的性质:

1. $\mathsf{P}(\phi)=0.$

证明: 因为

$$\mathsf{P}(\Omega)=\mathsf{P}(\Omega)+\mathsf{P}(\phi)+\mathsf{P}(\phi)+\cdots,$$

所以两边消去$\mathsf{P}(\Omega)$得$\mathsf{P}(\phi)=0.$

2. 有限可加性: 若$A_iA_j=\phi, i,j=1,2,\cdots,n, i\neq j$, 则

$$\mathsf{P}(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i).$$

概率的性质:

1. $\mathsf{P}(\phi) = 0$.

证明: 因为

$$\mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\phi) + \mathsf{P}(\phi) + \cdots,$$

所以两边消去$\mathsf{P}(\Omega)$得$\mathsf{P}(\phi) = 0$.

2. 有限可加性: 若$A_iA_j = \phi, i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$, 则

$$\mathsf{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i).$$

证明: 在公理化定义的可列可加性中令$A_i = \phi, i > n$, 再结合性质1可得有限可加性.

3. $\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

3. $\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

证明: 利用有限可加性以及$\Omega = A \cup \bar{A}$可证此性质.

3. $\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

证明: 利用有限可加性以及$\Omega = A \cup \bar{A}$可证此性质.

4. 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(A - B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)$.

3. $\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

证明: 利用有限可加性以及$\Omega = A \cup \bar{A}$可证此性质.

4. 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(A - B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)$.

证明: 因为$A = B + (A - B)$且B与$A - B$互不相容, 所以

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A - B).$$

推论1: 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(B) \le \mathsf{P}(A)$;
推论2: 对任何$B \in \mathscr{F}$, 有$\mathsf{P}(B) \le 1$.

3. $\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

证明: 利用有限可加性以及$\Omega = A \cup \bar{A}$可证此性质.

4. 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(A - B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)$.

证明: 因为$A = B + (A - B)$且B与$A - B$互不相容, 所以

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A - B).$$

推论1: 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(B) \le \mathsf{P}(A)$;
推论2: 对任何$B \in \mathscr{F}$, 有$\mathsf{P}(B) \le 1$.

5. $\mathsf{P}(A \backslash B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB)$.

3. $\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

证明: 利用有限可加性以及$\Omega = A \cup \bar{A}$可证此性质.

4. 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(A - B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)$.

证明: 因为$A = B + (A - B)$且B与$A - B$互不相容, 所以

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A - B).$$

推论1: 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(B) \le \mathsf{P}(A)$;
推论2: 对任何$B \in \mathscr{F}$, 有$\mathsf{P}(B) \le 1$.

5. $\mathsf{P}(A \backslash B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB)$.

证明: 因为$A \backslash B = A - AB$且$AB \subset A$, 再利用性质4, 可得此性质.

3. $\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

证明: 利用有限可加性以及$\Omega = A \cup \bar{A}$可证此性质.

4. 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(A - B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)$.

证明: 因为$A = B + (A - B)$且B与$A - B$互不相容, 所以

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A - B).$$

推论1: 若$B \subset A$, 则$\mathsf{P}(B) \leq \mathsf{P}(A)$;
推论2: 对任何$B \in \mathscr{F}$, 有$\mathsf{P}(B) \leq 1$.

5. $\mathsf{P}(A \backslash B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB)$.

证明: 因为$A \backslash B = A - AB$且$AB \subset A$, 再利用性质4, 可得此性质.

6. 加法公式: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$.

6. 加法公式: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$.

证明: 因为$A \cup B = A + (B - AB)$且$AB \subset B$, 所以

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - AB) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

6. 加法公式: $\mathsf{P}(A\cup B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB)$.

证明: 因为$A\cup B=A+(B-AB)$且$AB\subset B$, 所以

$$\mathsf{P}(A\cup B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B-AB)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(AB).$$

7. 多还少补(exclusion-inclusion)定理:

$$\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}\mathsf{P}(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}\mathsf{P}(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}\mathsf{P}(A_1A_2\cdots A_n).$$

证明: 数学归纳法(略).

8. 次可加性: $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$. $(\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$ 也成立)

8. 次可加性: $\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$. ($\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i)$ 也成立)

证明: 令$B_1 = A_1, B_2 = \bar{A}_1 A_2, \cdots, B_n = \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{n-1} A_n, \cdots$,
则$B_1, \cdots, B_n, \cdots$两两互不相容,

8. 次可加性: $\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$. ($\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i)$ 也成立)

证明: 令$B_1 = A_1, B_2 = \bar{A}_1 A_2, \cdots, B_n = \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{n-1} A_n, \cdots$, 则$B_1, \cdots, B_n, \cdots$两两互不相容, 且有

$$B_i \subset A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

8. 次可加性: $\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$. ($\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i)$ 也成立)

证明: 令$B_1 = A_1, B_2 = \bar{A}_1 A_2, \cdots, B_n = \bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{n-1} A_n, \cdots$,
则$B_1, \cdots, B_n, \cdots$两两互不相容, 且有

$$B_i \subset A_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

所以由可列可加性得

$$\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

利用概率的定义和性质求“复杂”事件的概率:

利用概率的定义和性质求“复杂”事件的概率:

例3 某城有N辆卡车, 车牌号从1到N, 有一个外地人到该城去, 把遇到的n辆车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号), 求抄到的最大号码正好为k的概率.

利用概率的定义和性质求“复杂”事件的概率:

例3 某城有N辆卡车, 车牌号从1到N, 有一个外地人到该城去, 把遇到的n辆车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号), 求抄到的最大号码正好为k的概率.

解: 看成是古典概型问题, 即设每辆卡车被遇到的机会相等. 记A_k为抄到的最大号码为k这一事件, B_k为抄到的最大号码不超过k这一事件. 则有$B_{k-1} \subset B_k$且

$$A_k = B_k - B_{k-1}.$$

直接计算可知$\mathsf{P}(B_k) =$

利用概率的定义和性质求“复杂”事件的概率:

例3 某城有N辆卡车, 车牌号从1到N, 有一个外地人到该城去, 把遇到的n辆车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号), 求抄到的最大号码正好为k的概率.

解: 看成是古典概型问题, 即设每辆卡车被遇到的机会相等.
记A_k为抄到的最大号码为k这一事件, B_k为抄到的最大号码不超过k这一事件. 则有$B_{k-1} \subset B_k$且

$$A_k = B_k - B_{k-1}.$$

直接计算可知$\mathsf{P}(B_k) = k^n/N^n$, 所以

$$\mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}(B_k) - \mathsf{P}(B_{k-1}) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

例4(匹配问题) 某班有n个士兵, 每人各有一支枪, 这些枪外形完全一致. 在一次夜里紧急集合中, 每人随机取一支枪. 求至少有一人拿到自己的枪的概率.

例4(匹配问题) 某班有n个士兵, 每人各有一支枪, 这些枪外形完全一致. 在一次夜里紧急集合中, 每人随机取一支枪. 求至少有一人拿到自己的枪的概率.

解: 记$A_i = \{$第i个人拿到自己的枪$\}, i = 1, \cdots, n$. 则所求概率为$\mathrm{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)$.

例4(匹配问题) 某班有n个士兵, 每人各有一支枪, 这些枪外形完全一致. 在一次夜里紧急集合中, 每人随机取一支枪. 求至少有一人拿到自己的枪的概率.

解: 记$A_i = \{第i个人拿到自己的枪\}, i = 1, \cdots, n$. 则所求概率为$\mathsf{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)$. 因为

$$\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{n}, \mathsf{P}(A_iA_j) = \frac{1}{n(n-1)}, \cdots, \mathsf{P}(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!},$$

所以由多还少补公式得

$$
\begin{aligned}
p_n =&\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\\
=&n\cdot\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}\\
&+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\\
=&1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

所以由多还少补公式得

$$
\begin{aligned}
p_n =& \mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \\
=& n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} \\
& + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \\
=& 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

可以看出

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - e^{-1}.$$

1.3.3 概率测度的连续性

1.3.3 概率测度的连续性

给定一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, 假定$A_1, A_2, \cdots$ 是一列单调增加的事件序列, 即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots .$$

记$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 则称$A$为$A_n$的极限.

1.3.3 概率测度的连续性

给定一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, 假定$A_1, A_2, \cdots$ 是一列单调增加的事件序列, 即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots .$$

记$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 则称$A$为$A_n$的极限. 若$A_1, A_2, \cdots$ 是一列单调减少的事件序列, 即

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots .$$

记$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则称$A$为$A_n$的极限.

从事件域的定义可以看出，A仍然是一来自$\mathscr{F}$的事件. 下面定理给出该事件的概率大小.

从事件域的定义可以看出, A仍然是一来自$\mathscr{F}$的事件. 下面定理给出该事件的概率大小.

定理

如果$A_1, A_2, \cdots$是一列单调增加(或减少)的事件序列, 具有极限A, 那么

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

证明: 只证单调增加情形, 单调减少情形类似可证. 令

$$B_k = A_k - A_{k-1}, k \geq 2.$$

则

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + B_2 + B_3 + \cdots .$$

证明: 只证单调增加情形, 单调减少情形类似可证. 令

$$B_k = A_k - A_{k-1}, k \geq 2.$$

则

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + B_2 + B_3 + \cdots .$$

由可列可加性,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(B_2) + \mathsf{P}(B_3) + \cdots = \mathsf{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \mathsf{P}(B_k).$$

证明: 只证单调增加情形, 单调减少情形类似可证. 令

$$B_k = A_k - A_{k-1}, k \geq 2.$$

则

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + B_2 + B_3 + \cdots .$$

由可列可加性,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(B_2) + \mathsf{P}(B_3) + \cdots = \mathsf{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\mathsf{P}(B_k).$$

又因为$\mathsf{P}(B_k) = \mathsf{P}(A_k) - \mathsf{P}(A_{k-1})$, 所以

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}[\mathsf{P}(A_k) - \mathsf{P}(A_{k-1})] = \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(A_n).$$

证毕.

对于一列单调增加的事件序列$A_1, A_2, \cdots$，记

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

那么上述定理说明

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n),$$

我们称之为概率的上连续性.

对于一列单调增加的事件序列$A_1, A_2, \cdots$, 记

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

那么上述定理说明

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n),$$

我们称之为概率的上连续性.

对于一列单调减少的事件序列$A_1, A_2, \cdots$, 记

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

那么上述定理说明

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n),$$

我们称之为概率的下连续性.

*一般地, 对一列事件$A_1, A_2, \cdots$, 记

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,\quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

容易验证$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$. 如果$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$, 我们称$A_n$的极限存在, 并记作$\lim_{n\to\infty} A_n$. 若极限$\lim_{n\to\infty} A_n$存在, 那么同样有

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n).$$

*性质2和上述的讨论说明概率的可列可加性可以导出有限可加性和连续性. 反过来, 如果一个非负函数$Q:\mathscr{F}\to[0,1]$具有有限可加性, 并且

$$A_n \searrow \Phi \Rightarrow Q(A_n) \searrow 0, \tag{1.3.1}$$

则Q具有可列可加性. 这说明可列可加性等价于有限可加性与下连续性.

*性质2和上述的讨论说明概率的可列可加性可以导出有限可加性和连续性. 反过来, 如果一个非负函数$Q:\mathscr{F}\to[0,1]$具有有限可加性, 并且

$$A_n \searrow \Phi \Rightarrow Q(A_n) \searrow 0, \tag{1.3.1}$$

则Q具有可列可加性. 这说明可列可加性等价于有限可加性与下连续性.

事实上, 设$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$互不相容, 记$B_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} A_j$, 则$A_1, \cdots, A_n, B_n$互不相容, 由有限可加性得

$$Q(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = Q(A_1 + \cdots + A_n + B_n) = \sum_{j=1}^{n} Q(A_j) + Q(B_n).$$

另一方面, $B_n \searrow \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \phi$. 由(1.3.1)得$Q(B_n) \searrow 0$. 因此

$$Q(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Q(A_j) + \lim_{n\to\infty} Q(B_n) = \sum_{j=1}^{\infty} Q(A_j).$$

可列可加性得证.

例5 独立投掷一枚均匀硬币无穷多次, 证明: 一次正面都没出现的概率为0.

例5 独立投掷一枚均匀硬币无穷多次, 证明: 一次正面都没出现的概率为0.

证明: 令A_n表示前n次投掷中至少出现正面一次,

例5 独立投掷一枚均匀硬币无穷多次，证明：一次正面都没出现的概率为0.

证明：令A_n表示前n次投掷中至少出现正面一次，那么

$$A_n \subset A_{n+1}.$$

记

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

则

$$A = \{\text{正面最终会出现}\}.$$

所求概率为$\mathrm{P}(\bar{A})$.

例5 独立投掷一枚均匀硬币无穷多次, 证明: 一次正面都没出现的概率为0.

证明: 令A_n表示前n次投掷中至少出现正面一次, 那么

$$A_n \subset A_{n+1}.$$

记

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

则

$$A = \{\text{正面最终会出现}\}.$$

所求概率为$\mathsf{P}(\bar{A})$. 注意到

$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1,$$

所证结果成立.

条件概率与事件的独立性

1.4.1 条件概率(conditional probability)

取定概率空间后, A发生的概率为$\mathsf{P}(A)$. 若事件B发生, 在这一前提下A发生的概率就不一定是$\mathsf{P}(A)$了, 因为样本空间发生了变化. 其实这时样本空间已经被压缩(变小)了, 只由B中的样本点所组成.

我们记在B发生的条件下A发生的概率为$\mathsf{P}(A|B)$.

例1 考虑有两个孩子的家庭, 假定男女出生率相等. 则两个孩子(依大小排列)的性别为$(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)$的可能性是一样的. 记

$A=\{$选取的这个家庭的两个孩子为一男一女$\}$,

$B=\{$这个家庭的两个孩子至少有一个是女孩$\}$.

则

例1 考虑有两个孩子的家庭, 假定男女出生率相等. 则两个孩子(依大小排列)的性别为$(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)$的可能性是一样的. 记

$A=\{$选取的这个家庭的两个孩子为一男一女$\}$,

$B=\{$这个家庭的两个孩子至少有一个是女孩$\}$.

则

$$\mathsf{P}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \ \mathsf{P}(B)=\frac{3}{4},\ \ \mathsf{P}(AB)=\mathsf{P}(A)=\frac{2}{4}.$$

而

$$\mathsf{P}(A|B)=\frac{2}{3}.$$

例1 考虑有两个孩子的家庭, 假定男女出生率相等. 则两个孩子(依大小排列)的性别为$(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)$的可能性是一样的. 记
$A=\{$选取的这个家庭的两个孩子为一男一女$\}$,
$B=\{$这个家庭的两个孩子至少有一个是女孩$\}$.
则

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4},\ \ \mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{4}.$$

而

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{3}.$$

同时可知

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{2/4}{3/4}=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}.$$

可以通过压缩后的样本空间求条件概率, 也可以通过原来的样本空间求条件概率.

事实上, 在古典概型中当$\mathsf{P}(B) \neq 0$时,

事实上, 在古典概型中当$\mathsf{P}(B)\neq 0$时,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A|B) =& \frac{\text{在}B\text{发生的条件下}A\text{包含的样本点数}}{\text{在}B\text{发生的条件下样本点总数}} \\
=& \frac{AB\text{包含的样本点数}}{B\text{包含的样本点数}} \\
=& \frac{AB\text{发包含的样本点数}/\text{总数}}{B\text{包含的样本点数}/\text{总数}} \\
=& \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.
\end{aligned}$$

定义（条件概率）

对任一事件A和B, 若$P(B) \neq 0$, 则“在事件B发生的条件下A发生的概率”记作$P(A|B)$, 定义为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

定义（条件概率）

对任一事件A和B, 若$P(B) \neq 0$, 则“在事件B发生的条件下A发生的概率”记作$P(A|B)$, 定义为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

容易验证: 这样定义的条件概率满足非负性, 规范性和可列可加性. 即条件概率具有概率的一切性质.

概率的乘法公式:

概率的乘法公式:

- 若$\mathsf{P}(B) \neq 0$, 则$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A|B)$;

概率的乘法公式:

- 若$\mathsf{P}(B) \neq 0$, 则$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A|B)$;
- 若$\mathsf{P}(A) \neq 0$, 则$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A)$;

概率的乘法公式:

- 若$\mathsf{P}(B) \neq 0$, 则$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A|B)$;
- 若$\mathsf{P}(A) \neq 0$, 则$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A)$;
- 若$\mathsf{P}(A_1A_2\cdots A_{n-1}) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(A_1A_2\cdots A_n)\\ =&\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2|A_1)\mathsf{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathsf{P}(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).\end{aligned}$$

例2 n张彩票中有一张中奖票. (1) 已知前面$k-1$个人没摸到中奖票, 求第k人摸到中奖票的概率. (2) 第k人摸到中奖票的概率.

解: 记$A_i = \{第i人摸到中奖票\}$.

例2 n张彩票中有一张中奖票. (1) 已知前面$k-1$个人没摸到中奖票, 求第k人摸到中奖票的概率. (2) 第k人摸到中奖票的概率.

解: 记$A_i=\{第i人摸到中奖票\}$.
(1) 这是求条件概率P$(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})$. 在压缩后的样本空间里进行计算, 可得

例2 n张彩票中有一张中奖票. (1) 已知前面$k-1$个人没摸到中奖票, 求第k人摸到中奖票的概率. (2) 第k人摸到中奖票的概率.

解: 记$A_i=\{第i人摸到中奖票\}$.
(1) 这是求条件概率$\mathsf{P}(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})$. 在压缩后的样本空间里进行计算, 可得

$$\mathsf{P}(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})=\frac{1}{n-k+1}.$$

例2 n张彩票中有一张中奖票. (1) 已知前面$k-1$个人没摸到中奖票, 求第k人摸到中奖票的概率. (2) 第k人摸到中奖票的概率.

解: 记$A_i = \{第i人摸到中奖票\}$.
(1) 这是求条件概率$\mathsf{P}(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})$. 在压缩后的样本空间里进行计算, 可得

$$\mathsf{P}(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}) = \frac{1}{n-k+1}.$$

(2) 根据"摸球与顺序无关"这一结论, 马上可知所求为$\mathsf{P}(A_k) = \frac{1}{n}$.

例2 n张彩票中有一张中奖票. (1) 已知前面$k-1$个人没摸到中奖票, 求第k人摸到中奖票的概率. (2) 第k人摸到中奖票的概率.

解: 记$A_i=\{$第i人摸到中奖票$\}$.
(1) 这是求条件概率$\mathrm{P}(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})$. 在压缩后的样本空间里进行计算, 可得

$$\mathrm{P}(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})=\frac{1}{n-k+1}.$$

(2) 根据"摸球与顺序无关"这一结论, 马上可知所求为$\mathrm{P}(A_k)=\frac{1}{n}$. 或利用乘法公式得:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_k)=&\mathrm{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)\\=&\mathrm{P}(\bar{A}_1)\mathrm{P}(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\cdots\mathrm{P}(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})\\=&\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{1}{n-k+1}\\=&\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

例3 罐中有b只黑球及r只红球, 随机取出一只, 把原球放回, 并加进与抽出球同色的球c只, 再摸第二次, 这样下去共摸了n次. 问前面的n_1次出现黑球, 后面的$n_2 = n - n_1$次出现红球的概率是多少($c = 0$表示有放回摸球, $c = -1$表示不放回摸球)?

解: A_1表示第一次摸出黑球, $\cdots$, A_{n_1}表示第n_1次摸出黑球, A_{n_1+1}表示第n_1+1次摸出红球, $\cdots$, A_n表示第n次摸出红球. 则

例3 罐中有b只黑球及r只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与抽出球同色的球c只，再摸第二次，这样下去共摸了n次. 问前面的n_1次出现黑球，后面的$n_2 = n - n_1$次出现红球的概率是多少($c = 0$表示有放回摸球，$c = -1$表示不放回摸球)?

解: A_1表示第一次摸出黑球，$\cdots$，A_{n_1}表示第n_1次摸出黑球，A_{n_1+1}表示第n_1+1次摸出红球，$\cdots$，A_n表示第n次摸出红球. 则

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{b}{b+r}, \mathrm{P}(A_2|A_1) = \frac{b+c}{b+r+c},$$

$$\mathrm{P}(A_3|A_1A_2) = \frac{b+2c}{b+r+2c}, \cdots,$$

$$\mathrm{P}(A_{n_1}|A_1\cdots A_{n_1-1}) = \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c},$$

$$\mathrm{P}(A_{n_1+1}|A_1\cdots A_{n_1}) = \frac{r}{b+r+n_1c},$$

$$\mathsf{P}(A_{n_1+2}|A_1\cdots A_{n_1+1})=\frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c},\cdots,$$

$$\mathsf{P}(A_n|A_1\cdots A_{n-1})=\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

$$\mathrm{P}(A_{n_1+2}|A_1\cdots A_{n_1+1}) = \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}, \cdots,$$

$$\mathrm{P}(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) = \frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1A_2\cdots A_n) =& \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{b+2c}{b+r+2c} \\ & \cdots\frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}\cdot\frac{r}{b+r+n_1c} \\ & \cdot\frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}\cdots\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.\end{aligned}$$

例4 在上一节的匹配问题中，我们求得了n个士兵中至少有一个人拿对了他自己的枪的概率. 现求恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率$(0 \leq k \leq n)$.

例4 在上一节的匹配问题中，我们求得了n个士兵中至少有一个人拿对了他自己的枪的概率. 现求恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率$(0 \leq k \leq n)$.

解: 记n个士兵中恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率为$P_k^{(n)}$.

例4 在上一节的匹配问题中，我们求得了n个士兵中至少有一个人拿对了他自己的枪的概率. 现求恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率$(0 \leq k \leq n)$.

解: 记n个士兵中恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率为$P_k^{(n)}$. 则由匹配问题知

$$P_0^{(n)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

例4 在上一节的匹配问题中，我们求得了n个士兵中至少有一个人拿对了他自己的枪的概率. 现求恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率$(0 \le k \le n)$.

解: 记n个士兵中恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率为$P_k^{(n)}$. 则由匹配问题知

$$P_0^{(n)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

记A_i表示第i个士兵拿对了自己的枪. 为了计算恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率，我们考察任何一组k个士兵，如第i_1,i_2,$\cdots$, i_k个士兵. 只有他们拿对了自己的枪的概率为

例4 在上一节的匹配问题中，我们求得了n个士兵中至少有一个人拿对了他自己的枪的概率. 现求恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率$(0 \le k \le n)$.

解: 记n个士兵中恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率为$P_k^{(n)}$. 则由匹配问题知

$$P_0^{(n)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

记A_i表示第i个士兵拿对了自己的枪. 为了计算恰好有k个士兵拿对了自己的枪的概率, 我们考察任何一组k个士兵, 如第i_1,i_2,$\cdots$, i_k个士兵. 只有他们拿对了自己的枪的概率为

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k}\bar{A}_{i_{k+1}}\cdots\bar{A}_{i_n})\\
=&\mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2}|A_{i_1})\cdots\mathsf{P}(A_{i_k}|A_{i_1}\cdots A_{i_{k-1}})\cdot\mathsf{P}(\bar{A}_{i_{k+1}}\cdots\bar{A}_{i_n}|A_{i_1}\cdots A_{i_k})\\
=&\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{n-(k-1)}q_{n-k},
\end{aligned}$$

其中q_{n-k}是在已知这k个士兵拿对了自己的枪的条件下其他$n-k$个士兵都没有拿对自己的枪的概率. 因此

$$q_{n-k} =$$

其中q_{n-k}是在已知这k个士兵拿对了自己的枪的条件下其他$n-k$个士兵都没有拿对自己的枪的概率. 因此

$$q_{n-k} = P_0^{(n-k)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

其中q_{n-k}是在已知这k个士兵拿对了自己的枪的条件下其他$n-k$个士兵都没有拿对自己的枪的概率. 因此

$$q_{n-k}=P_0^{(n-k)}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

由于从n个士兵选k个士兵共有$\binom{n}{k}$种选法, 所以所求的概率为

$$\begin{aligned}
P_k^{(n)}&=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\mathsf{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k}\bar{A}_{i_{k+1}}\cdots\bar{A}_{i_n})\\
&=\binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}q_{n-k}\\
&=\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right).
\end{aligned}$$

其中q_{n-k}是在已知这k个士兵拿对了自己的枪的条件下其他$n-k$个士兵都没有拿对自己的枪的概率. 因此

$$q_{n-k} = P_0^{(n-k)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

由于从n个士兵选k个士兵共有$\binom{n}{k}$种选法, 所以所求的概率为

$$\begin{aligned}
P_k^{(n)} &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathsf{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_k} \bar{A}_{i_{k+1}} \cdots \bar{A}_{i_n}) \\
&= \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} q_{n-k} \\
&= \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right).
\end{aligned}$$

容易看出当$n \to \infty$时, $P_k^{(n)}$的极限为$e^{-1}/k!$.

1.4.2 全概率(total probability)公式, 贝叶斯(Bayes)公式

1.4.2 全概率(total probability)公式, 贝叶斯(Bayes)公式

先介绍一个概念: **完备事件组**(或叫Ω的分割、分划、划分)

定义

若事件组$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$满足下列两个条件:

- $A_i, i = 1, 2, \cdots$两两互不相容, 且$P(A_i) > 0$; (不交)
- $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. (不漏)

则称$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是$\Omega$的一个完备事件组.

1.4.2 全概率(total probability)公式, 贝叶斯(Bayes)公式

先介绍一个概念: **完备事件组**(或叫Ω的分割、分划、划分)

定义

若事件组$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$满足下列两个条件:

- $A_i, i = 1, 2, \cdots$两两互不相容, 且$P(A_i) > 0$; (不交)
- $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. (不漏)

则称$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是$\Omega$的一个完备事件组.

注: 最简单的完备事件组: $A, \bar{A}$.

全概率公式:

全概率公式: 若$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是$\Omega$的一个完备事件组, 则对任意事件$B$, 有

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i).$$

全概率公式: 若$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是$\Omega$的一个完备事件组, 则对任意事件$B$, 有

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i).$$

证明: 因为$A_iB \subset A_i$且$\{A_iB, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 是两两互不相容的, 所以由可列可加性得

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B\Omega) = \mathsf{P}(B\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathsf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_iB)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_iB) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i).$$

全概率公式: 若$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是$\Omega$的一个完备事件组, 则对任意事件$B$, 有

$$\mathsf{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i).$$

证明: 因为$A_iB \subset A_i$且$\{A_iB, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 是两两互不相容的, 所以由可列可加性得

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B\Omega) = \mathsf{P}(B\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathsf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_iB)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_iB) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i).$$

注: 若直接求$\mathsf{P}(B)$比较困难, 而B总是随某些A_i伴出, 则可通过全概率公式解决问题(化整为零, 分块计算).

例5 有5个乒乓球, 其中3个新的2个旧的. 每次取1个, 不放回地取两次. 求第二次取时得新球的概率.

解: 记$A=\{$第一次取时得新球$\}$, $B=\{$第二次取时得新球$\}$.

例5 有5个乒乓球，其中3个新的2个旧的．每次取1个，不放回地取两次．求第二次取时得新球的概率．

解：记$A = \{第一次取时得新球\}$, $B = \{第二次取时得新球\}$. B随$A, \bar{A}$伴出，且$A, \bar{A}$是完备事件组．所以可尝试用全概率公式解决问题．又

$$\mathsf{P}(A) = \frac{3}{5},\ \ \mathsf{P}(\bar{A}) = \frac{2}{5},\ \ \mathsf{P}(B|A) = \frac{2}{4},\ \ \mathsf{P}(B|\bar{A}) = \frac{3}{4}.$$

例5 有5个乒乓球，其中3个新的2个旧的. 每次取1个，不放回地取两次. 求第二次取时得新球的概率.

解: 记$A=\{$第一次取时得新球$\}$, $B=\{$第二次取时得新球$\}$. B随$A,\bar{A}$伴出，且$A,\bar{A}$是完备事件组. 所以可尝试用全概率公式解决问题. 又

$$\mathsf{P}(A)=\frac{3}{5},\ \ \mathsf{P}(\bar{A})=\frac{2}{5},\ \ \mathsf{P}(B|A)=\frac{2}{4},\ \ \mathsf{P}(B|\bar{A})=\frac{3}{4}.$$

所以

$$\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A)+\mathsf{P}(\bar{A})\mathsf{P}(B|\bar{A})=\frac{3}{5}.$$

例5 有5个乒乓球, 其中3个新的2个旧的. 每次取1个, 不放回地取两次. 求第二次取时得新球的概率.

解: 记$A=\{第一次取时得新球\}$, $B=\{第二次取时得新球\}$. B随$A,\bar{A}$伴出, 且$A,\bar{A}$是完备事件组. 所以可尝试用全概率公式解决问题. 又

$$\mathsf{P}(A)=\frac{3}{5},\ \ \mathsf{P}(\bar{A})=\frac{2}{5},\ \ \mathsf{P}(B|A)=\frac{2}{4},\ \ \mathsf{P}(B|\bar{A})=\frac{3}{4}.$$

所以

$$\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A)+\mathsf{P}(\bar{A})\mathsf{P}(B|\bar{A})=\frac{3}{5}.$$

注: 其实, 由 “摸球与顺序无关” 这一结论, 直接可得$\mathsf{P}(B)=\frac{3}{5}$.

贝叶斯公式:

贝叶斯公式: 若$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是$\Omega$的一个完备事件组, 则

$$\mathsf{P}(A_i|B) = \frac{\mathsf{P}(A_iB)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_k)\mathsf{P}(B|A_k)}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

贝叶斯公式: 若$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$是$\Omega$的一个完备事件组, 则

$$\mathsf{P}(A_i|B) = \frac{\mathsf{P}(A_iB)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_k)\mathsf{P}(B|A_k)}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

$\mathsf{P}(A_i)$是在没有进一步的信息(不知B是否发生)的情况下人们对于A_i发生的可能性大小的认知, 称为**先验(priori)概率**; 现在有了新的信息(知道B发生), 人们对A_i发生的可能性大小有了新的认知, 得到条件概率$\mathsf{P}(A_i|B)$, 称为**后验(posteriori)概率**.

例6 用血清甲胎蛋白法诊断肝癌，用C表示被检验者确实患有肝癌的事件，A表示判断被检验者患有肝癌的事件，已知

$$\mathsf{P}(A|C)=0.95,\ \ \mathsf{P}(\bar{A}|\bar{C})=0.90,\ \ \mathsf{P}(C)=0.0004.$$

现若有一人被此法诊断患有肝癌，求此人真正患有肝癌的概率.

例6 用血清甲胎蛋白法诊断肝癌，用C表示被检验者确实患有肝癌的事件，A表示判断被检验者患有肝癌的事件，已知

$$\mathsf{P}(A|C)=0.95,\ \ \mathsf{P}(\bar{A}|\bar{C})=0.90,\ \ \mathsf{P}(C)=0.0004.$$

现若有一人被此法诊断患有肝癌，求此人真正患有肝癌的概率.

解：所求为$\mathsf{P}(C|A)$，可利用贝叶斯公式来求解. 因为

$$\mathsf{P}(\bar{C})=1-\mathsf{P}(C)=0.9996,\ \ \mathsf{P}(A|\bar{C})=1-\mathsf{P}(\bar{A}|\bar{C})=0.10.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(C|A)&=\frac{\mathsf{P}(C)\mathsf{P}(A|C)}{\mathsf{P}(C)\mathsf{P}(A|C)+\mathsf{P}(\bar{C})\mathsf{P}(A|\bar{C})}\\&=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.10}\\&=0.0038.\end{aligned}$$

在这个例子里, $\mathsf{P}(C|A)$的值之所以这么小, 主要是因为$\mathsf{P}(C)$太小(人群中真正患有肝癌的比例非常小). 由于检验方法并不完全正确, 在大批健康人中还会有一定数量的人被误诊为肝癌. 另一方面, 真正肝癌患者在全人口中占比例很小, 即使这部分人全部被检出, 在所有被检验为患肝癌的总人数中也只占很小的比例.

例7(贝叶斯决策) 某工厂有四条流水线生产同一种产品，其中每条流水线产量分别占总产量的$12\%, 25\%, 25\%, 38\%$. 根据经验，每条流水线的不合格率分别为$0.06, 0.05, 0.04, 0.03$. 某客户购买该产品后，发现是不合格品，向厂家提出索赔10000元. 按规定，工厂要求四条流水线共同承担责任. 问每条流水线应该各赔付多少?

解: 记$B=\{$任取一件产品,其是不合格品$\}$, $A_i=\{$任取一产品，是第i条流水线生产的$\}, i=1,2,3,4$. 则

例7(贝叶斯决策) 某工厂有四条流水线生产同一种产品, 其中每条流水线产量分别占总产量的12%, 25%, 25%, 38%. 根据经验, 每条流水线的不合格率分别为0.06, 0.05, 0.04, 0.03. 某客户购买该产品后, 发现是不合格品, 向厂家提出索赔10000元. 按规定, 工厂要求四条流水线共同承担责任. 问每条流水线应该各赔付多少?

解: 记$B = \{$任取一件产品,其是不合格品$\}$, $A_i = \{$任取一产品, 是第i条流水线生产的$\}, i = 1, 2, 3, 4$. 则由全概率公式得

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B) &= \sum_{i=1}^{4} \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B|A_i)\\ &= 0.12 \times 0.06 + 0.25 \times 0.05 + 0.25 \times 0.04 + 0.38 \times 0.03\\ &= 0.0411.\end{aligned}$$

再由贝叶斯公式得

$$\mathsf{P}(A_1|B)=\frac{\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(B|A_1)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.12\times 0.06}{0.0411}\doteq 0.175;$$

$$\mathsf{P}(A_2|B)=\frac{\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(B|A_2)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.25\times 0.05}{0.0411}\doteq 0.304;$$

$$\mathsf{P}(A_3|B)=\frac{\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}(B|A_3)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.25\times 0.04}{0.0411}\doteq 0.243;$$

$$\mathsf{P}(A_4|B)=\frac{\mathsf{P}(A_4)\mathsf{P}(B|A_4)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.38\times 0.03}{0.0411}\doteq 0.278.$$

再由贝叶斯公式得

$$\mathsf{P}(A_1|B)=\frac{\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(B|A_1)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.12\times 0.06}{0.0411}\doteq 0.175;$$

$$\mathsf{P}(A_2|B)=\frac{\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(B|A_2)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.25\times 0.05}{0.0411}\doteq 0.304;$$

$$\mathsf{P}(A_3|B)=\frac{\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}(B|A_3)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.25\times 0.04}{0.0411}\doteq 0.243;$$

$$\mathsf{P}(A_4|B)=\frac{\mathsf{P}(A_4)\mathsf{P}(B|A_4)}{\mathsf{P}(B)}=\frac{0.38\times 0.03}{0.0411}\doteq 0.278.$$

所以，每条生产线应分别赔付1750元，3040元，2430元，2780元.

1.4.3 事件的独立性

1.4.3 事件的独立性

1. 两个事件的独立性

1.4.3 事件的独立性

1. 两个事件的独立性

两个事件独立, 是指它们是否发生是互不影响的. 尝试用下列的公式来刻画这种“独立”性质.

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \ (\text{或}\ \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)), \tag{1.4.1}$$

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \tag{1.4.2}$$

(1.4.1)与(1.4.2)在$\mathsf{P}(B) > 0$ (或$\mathsf{P}(A) > 0$)时是等价的. 但(1.4.2)在形式上关于A, B对称, 且便于推广到n个事件. 所以, 今后我们采用(1.4.2)作为两个事件的独立性的定义.

1.4.3 事件的独立性

1. 两个事件的独立性

两个事件独立, 是指它们是否发生是互不影响的. 尝试用下列的公式来刻画这种“独立”性质.

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \ (\text{或 } \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)), \tag{1.4.1}$$

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B). \tag{1.4.2}$$

(1.4.1)与(1.4.2)在$\mathsf{P}(B) > 0$ (或$\mathsf{P}(A) > 0$)时是等价的. 但(1.4.2)在形式上关于A, B对称, 且便于推广到n个事件. 所以, 今后我们采用(1.4.2)作为两个事件的独立性的定义.

注: 由独立性定义可知, 任何事件与ϕ独立, 任何事件与Ω独立.

例8 口袋中有a只黑球b只白球, 连摸两次, 每次一球. 记$A = \{$第一次摸时得黑球$\}$, $B = \{$第二次摸时得黑球$\}$. 问A与B是否独立? 就两种情况进行讨论: (1)有放回; (2)不放回.

解: 因为$\mathrm{P}(A) > 0$, 所以我们可以用$\mathrm{P}(B|A)$是否等于$\mathrm{P}(B)$来检验独立性.

例8 口袋中有a只黑球b只白球, 连摸两次, 每次一球. 记$A=\{$第一次摸时得黑球$\}$, $B=\{$第二次摸时得黑球$\}$. 问A与B是否独立? 就两种情况进行讨论: (1)有放回; (2)不放回.

解: 因为$\mathrm{P}(A)>0$, 所以我们可以用$\mathrm{P}(B|A)$是否等于$\mathrm{P}(B)$来检验独立性.

(1). 易知$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|\bar{A})=\frac{a}{a+b}$. 由全概率公式得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B)=&\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\bar{A})\mathrm{P}(B|\bar{A})\\
=&\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}\\
=&\frac{a}{a+b}.
\end{aligned}
$$

所以$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$, A与B独立. (事实上, 根据“抽签与顺序无关”这一结论马上可知$\mathrm{P}(B)=\frac{a}{a+b}$)

(2). 易知$\mathsf{P}(B|A)=\frac{a-1}{a+b-1}$, $\mathsf{P}(B|\bar{A})=\frac{a}{a+b-1}$. 所以由全概率公式得

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(B)=&\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B|A)+\mathsf{P}(\bar{A})\mathsf{P}(B|\bar{A})\\=&\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}\\=&\frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

所以$\mathsf{P}(B|A)\neq\mathsf{P}(B)$, A与B不独立. (事实上, 根据“抽签与顺序无关”这一结论马上可知$\mathsf{P}(B)=\frac{a}{a+b}$)

例9 已知A与B相互独立, 证明: A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B, $\bar{A}$与$\bar{B}$也独立.

例9 已知A与B相互独立, 证明: A与$\bar{B}$, $\bar{A}$与B, $\bar{A}$与$\bar{B}$也独立.

证明: 因为A与B相互独立, 所以$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$. 进一步, 由

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A\bar{B}) =& \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB) \\
=& \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \\
=& \mathsf{P}(A)\left[1 - \mathsf{P}(B)\right] \\
=& \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(\bar{B}),
\end{aligned}$$

所以A与$\bar{B}$独立. 其它结论类似可证.

注: 在实际问题中, 用(1.4.1)或(1.4.2)来判断两个事件的独立性往往是比较困难的. 这时, 我们只需通过生活常识、生活经验进行判断即可. 例如, 一个电路系统中的两个不同原件是否出现故障常常被认为是相互独立的.

注: 在实际问题中, 用(1.4.1)或(1.4.2)来判断两个事件的独立性往往是比较困难的. 这时, 我们只需通过生活常识、生活经验进行判断即可. 例如, 一个电路系统中的两个不同原件是否出现故障常常被认为是相互独立的.

事件域相互独立:

定义

两个事件域$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$, 被认为关于P独立, 如果对于任意的事件$A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2$都有

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

2. 多个事件的独立性

2. 多个事件的独立性

三个事件的独立性:

2. 多个事件的独立性

三个事件的独立性:

定义

若

$$P(AB) = P(A)P(B);$$
$$P(AC) = P(A)P(C);$$
$$P(BC) = P(B)P(C);$$

且

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

则称A, B, C相互独立.

注: 在定义中, 前三个等式表示A, B, C两两独立. 所以整体的独立性可以推出两两独立性. 但两两独立性不能推出整体的独立性, 因为定义中的最后一个等式是必不可少的(即前三个等式推不出第四个等式). 举例如下:

例10 一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，第四面红白黑三色都有．分别用A, B, C记投一次四面体时底面出现红、白、黑的事件．

例10 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色, 第四面红白黑三色都有. 分别用A, B, C记投一次四面体时底面出现红、白、黑的事件. 易知

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = \frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(BC) = \mathsf{P}(AC) = \mathsf{P}(ABC) = \frac{1}{4}.$$

所以, A, B, C是两两独立的.

例10 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色, 第三面染成黑色, 第四面红白黑三色都有. 分别用A, B, C记投一次四面体时底面出现红、白、黑的事件. 易知

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = \frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(BC) = \mathsf{P}(AC) = \mathsf{P}(ABC) = \frac{1}{4}.$$

所以, A, B, C是两两独立的. 但同时

$$\mathsf{P}(ABC) = \frac{1}{4} \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

n个事件的独立性:

n个事件的独立性:

定义

对于n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$, 若对其中的任意$k(2 \leq k \leq n)$个事件: $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}), \quad (1.4.3)$$

则称n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立.

n个事件的独立性:

定义

对于n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$, 若对其中的任意$k(2 \le k \le n)$个事件: A_{i_1}, A_{i_2}, $\cdots$, A_{i_k}, 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}), \tag{1.4.3}$$

则称n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立.

注: 要说明n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$是相互独立的, 需验证(1.4.3)中的$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$个等式.

例11 设$A_1, \cdots, A_n$相互独立, $\mathsf{P}(A_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 求:
(1) 所有事件全不发生的概率;
(2) 这些事件中至少发生一个的概率;
(3) 恰好发生其中一个事件的概率.

例11 设$A_1,\cdots,A_n$相互独立, $\mathrm{P}(A_i)=p_i, i=1,2,\cdots,n$. 求:
(1) 所有事件全不发生的概率;
(2) 这些事件中至少发生一个的概率;
(3) 恰好发生其中一个事件的概率.

解: (1) 所求概率为$\mathrm{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$. 容易验证$\bar{A}_1,\cdots,\bar{A}_n$相互独立(数学归纳法). 所以

例11 设$A_1,\cdots,A_n$相互独立, $\mathsf{P}(A_i)=p_i, i=1,2,\cdots,n$. 求:
(1) 所有事件全不发生的概率;
(2) 这些事件中至少发生一个的概率;
(3) 恰好发生其中一个事件的概率.

解: (1) 所求概率为$\mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$. 容易验证$\bar{A}_1,\cdots,\bar{A}_n$相互独立(数学归纳法). 所以

$$\mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)=\mathsf{P}(\bar{A}_1)\mathsf{P}(\bar{A}_2)\cdots\mathsf{P}(\bar{A}_n)=\prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

例11 设$A_1, \cdots, A_n$相互独立, $\mathsf{P}(A_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 求:
(1) 所有事件全不发生的概率;
(2) 这些事件中至少发生一个的概率;
(3) 恰好发生其中一个事件的概率.

解: (1) 所求概率为$\mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$. 容易验证$\bar{A}_1, \cdots, \bar{A}_n$相互独立(数学归纳法). 所以

$$\mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n) = \mathsf{P}(\bar{A}_1)\mathsf{P}(\bar{A}_2)\cdots\mathsf{P}(\bar{A}_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

(2) 所求概率为$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$.

例11 设$A_1, \cdots, A_n$相互独立, $\mathsf{P}(A_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 求:
(1) 所有事件全不发生的概率;
(2) 这些事件中至少发生一个的概率;
(3) 恰好发生其中一个事件的概率.

解: (1) 所求概率为$\mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$. 容易验证$\bar{A}_1, \cdots, \bar{A}_n$相互独立(数学归纳法). 所以

$$\mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n) = \mathsf{P}(\bar{A}_1)\mathsf{P}(\bar{A}_2)\cdots\mathsf{P}(\bar{A}_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i).$$

(2) 所求概率为$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$.

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i).$$

(3) 恰好发生一个事件=

$$\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}A_n+\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n+\cdots+A_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n.$$

注意到这n个事件是互不相容的, 且每一项中的各个事件又是相互独立的.

(3) 恰好发生一个事件=

$$\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}A_n+\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n+\cdots+A_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n.$$

注意到这n个事件是互不相容的，且每一项中的各个事件又是相互独立的. 所以所求概率为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\Big(\sum_{k=1}^{n}\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k\bar{A}_{k+1}\cdots\bar{A}_n\Big)\\
=&\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k\bar{A}_{k+1}\cdots\bar{A}_n)\\
=&\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(\bar{A}_1)\mathrm{P}(\bar{A}_2)\cdots\mathrm{P}(\bar{A}_{k-1})\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(\bar{A}_{k+1})\cdots\mathrm{P}(\bar{A}_n)\\
=&\sum_{k=1}^{n}p_k\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(1-p_i).
\end{aligned}$$

3. 试验的独立性

3. 试验的独立性

两个事件A, B是否相互独立是通过等式$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$来判断的, 其中$A, B$来自同一样本空间. 我们可以用类似的方式去定义试验的独立性:

3. 试验的独立性

两个事件A, B是否相互独立是通过等式$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$来判断的, 其中$A, B$来自同一样本空间. 我们可以用类似的方式去定义试验的独立性:

设$E_1, E_2, \cdots, E_n$为n个试验. E_i的样本空间为Ω_i. 构造复合试验$E = (E_1, E_2, \cdots, E_n)$, 对应的样本空间为

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n.$$

我们把E_i的任一事件$A^{(i)}$放到复合的样本空间, 成为复合事件

$$\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A^{(i)} \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n,$$

不妨仍记为$A^{(i)}$. 若对一切的复合事件$A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}$, 有

$$\mathsf{P}(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}) = \mathsf{P}(A^{(1)})\mathsf{P}(A^{(2)})\cdots\mathsf{P}(A^{(n)}),$$

则称试验$E_1, E_2, \cdots, E_n$相互独立.

n个试验相互独立的一个典型例子: n次有放回摸球.

n个试验相互独立的一个典型例子: n次有放回摸球. 这里

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_n,$$

且各次试验中同样事件的概率相同. 我们称这种试验为n次独立重复试验.

n个试验相互独立的一个典型例子: n次有放回摸球. 这里

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_n,$$

且各次试验中同样事件的概率相同. 我们称这种试验为n次独立重复试验.

下面我们研究一种重要的独立重复试验.

4. 伯努里(Bernoulli)试验

4. 伯努里(Bernoulli)试验

若试验E_0只有两个试验结果: $A, \bar{A}$, 则称试验E_0为伯努里试验.

4. 伯努里(Bernoulli)试验

若试验E_0只有两个试验结果: $A, \bar{A}$, 则称试验E_0为伯努里试验.

定义 (伯努里概型)

若试验E满足下列三个条件:

- 是n次独立重复试验;
- 每次试验只有两个结果: $A, \bar{A}$;
- 每次试验中, A发生的概率是固定不变的: $P(A) = p$.

则称这种试验E为伯努里概型(或叫n重伯努里试验).

4. 伯努里(Bernoulli)试验

若试验E_0只有两个试验结果: $A, \bar{A}$, 则称试验E_0为伯努里试验.

定义 (伯努里概型)

若试验E满足下列三个条件:

- 是n次独立重复试验;
- 每次试验只有两个结果: $A, \bar{A}$;
- 每次试验中, A发生的概率是固定不变的: $P(A) = p$.

则称这种试验E为伯努里概型(或叫n重伯努里试验).

注: 在伯努里概型里, 样本点$\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(n)})$, 其中每个$\omega^{(i)}$为$A$或$\bar{A}$. 所以可知样本点总数为$2^n$. 这是有限样本空间, 但不是古典概型.

例12 一个人要开门, 他共有n把钥匙, 其中仅有一把是能开这门的. 他随机地选取一把钥匙开门, 即在每次试开时每一把钥匙都以概率$1/n$被使用. 问: 这人在第s次试开时才首次成功的概率是多少?

解: 记$A_i = \{第i次试开, 开门成功\}, i = 1, 2, \cdots n.$

例12 一个人要开门, 他共有n把钥匙, 其中仅有一把是能开这门的. 他随机地选取一把钥匙开门, 即在每次试开时每一把钥匙都以概率$1/n$被使用. 问: 这人在第s次试开时才首次成功的概率是多少?

解: 记$A_i=\{第i次试开, 开门成功\}, i=1,2,\cdots n$. 显然这是一个伯努里概型. 所求概率为

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{s-1}A_s)\\=&\mathsf{P}(\bar{A}_1)\mathsf{P}(\bar{A}_2)\cdots\mathsf{P}(\bar{A}_{s-1})\mathsf{P}(A_s)\\=&\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s-1}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

例13 求n重伯努里试验中事件$B_k = \{事件A恰好发生k次\}$的概率.

解: 记$A_i = \{第i次试验, A发生\}, i = 1, 2, \cdots n.$

例13 求n重伯努里试验中事件$B_k=\{$事件A恰好发生k次$\}$的概率.

解: 记$A_i=\{$第i次试验, A发生$\}, i=1,2,\cdots n$. 则

$$\begin{aligned}B_k =&A_1A_2\cdots A_k\bar{A}_{k+1}\bar{A}_{k+2}\cdots\bar{A}_n+A_1A_2\cdots\bar{A}_kA_{k+1}\bar{A}_{k+2}\cdots\bar{A}_n\\ &+\cdots+\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-k}A_{n-k+1}A_{n-k+2}\cdots A_n.\end{aligned}$$

上述等式共有$\binom{n}{k}$项, 各项互不相容, 每一项中各事件又是相互独立的. 任一项的概率都是$[\mathsf{P}(A)]^k[1-\mathsf{P}(A)]^{n-k}=p^k(1-p)^{n-k}$.

例13 求n重伯努里试验中事件$B_k=\{$事件A恰好发生k次$\}$的概率.

解: 记$A_i=\{$第i次试验, A发生$\}, i=1,2,\cdots n$. 则

$$\begin{aligned}B_k = & A_1A_2\cdots A_k\bar{A}_{k+1}\bar{A}_{k+2}\cdots\bar{A}_n + A_1A_2\cdots\bar{A}_kA_{k+1}\bar{A}_{k+2}\cdots\bar{A}_n \\ & +\cdots+\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-k}A_{n-k+1}A_{n-k+2}\cdots A_n.\end{aligned}$$

上述等式共有$\binom{n}{k}$项, 各项互不相容, 每一项中各事件又是相互独立的. 任一项的概率都是$[\mathsf{P}(A)]^k[1-\mathsf{P}(A)]^{n-k}=p^k(1-p)^{n-k}$. 所以, 根据概率的有限可加性得

$$b(k;n,p):=\mathsf{P}(B_k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n. \tag{1.4.4}$$

例13 求n重伯努里试验中事件$B_k=\{$事件A恰好发生k次$\}$的概率.

解: 记$A_i=\{$第i次试验, A发生$\}, i=1,2,\cdots n$. 则

$$\begin{aligned}B_k=&A_1A_2\cdots A_k\bar{A}_{k+1}\bar{A}_{k+2}\cdots\bar{A}_n+A_1A_2\cdots\bar{A}_kA_{k+1}\bar{A}_{k+2}\cdots\bar{A}_n\\&+\cdots+\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-k}A_{n-k+1}A_{n-k+2}\cdots A_n.\end{aligned}$$

上述等式共有$\binom{n}{k}$项, 各项互不相容, 每一项中各事件又是相互独立的. 任一项的概率都是$[\mathsf{P}(A)]^k[1-\mathsf{P}(A)]^{n-k}=p^k(1-p)^{n-k}$. 所以, 根据概率的有限可加性得

$$b(k;n,p):=\mathsf{P}(B_k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n. \quad (1.4.4)$$

$b(k;n,p),\ k=0,1,\cdots,n$是二项展开式

$$1=(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}$$

的各项$(q=1-p)$. 所以我们称(1.4.4)为二项分布.

注: 如果每次试验的可能结果不止两种, 就不是伯努里试验, 但可用类似的分析方法处理. 设一次试验的可能结果为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k \ (k \geq 3),$$

它们构成一完备事件组,

$$\mathrm{P}(A_i) = p_i, \ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

则在n次独立重复试验中$A_1, A_2, \cdots, A_k$分别出现$n_1, n_2, \cdots, n_k$次$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$的概率为

注: 如果每次试验的可能结果不止两种, 就不是伯努里试验, 但可用类似的分析方法处理. 设一次试验的可能结果为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k \ (k \geq 3),$$

它们构成一完备事件组,

$$\mathsf{P}(A_i) = p_i, \ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

则在n次独立重复试验中$A_1, A_2, \cdots, A_k$分别出现$n_1, n_2, \cdots, n_k$次$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$的概率为

$$\binom{n}{n_1} p_1^{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} p_2^{n_2} \cdots \binom{n - n_1 - \cdots - n_{k-1}}{n_k} p_k^{n_k}$$
$$= \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}.$$

通常, 称上式为多项分布.