浙大考试周资料分享项目

郁林ZJU 出品

《微积分》

2014年创立于浙大

作为学生和机构间的纽带

〖筛选优质课程，提供全程保障〗

概率论与数理统计学习心得

一、课程总体概况

概率论与数理统计主要面向大二的同学，整门课程时间持续一个学年。主要内容包括：概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、统计量及其概率分布、参数估计和假设检验、回归分析、方差分析、马尔科夫链等内容。

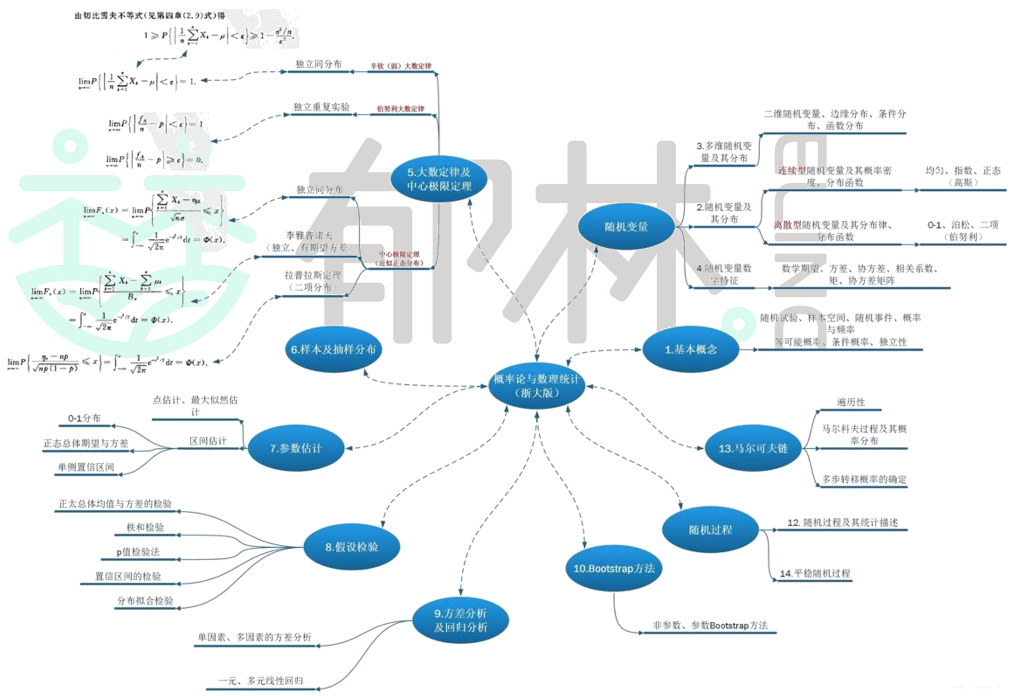
二、个人情况

（该大佬不希望透露自己的信息）

三、学习心得

a) 理清框架，熟悉脉络。

初学概统的时候，我也感觉很迷茫，觉得细碎的知识点与公式有很多，但也很分散。往往是学了下个知识点就忘记上个知识点。我觉得这样不行，便抽了一个下午的时间，粗读了一遍课本。注意是粗读，我着重看了目录和每个章节前的章节概述。目录可以更好地帮我搭建知识的框架，而章节概述里有很多承上启下的内容，能帮我更好地理清章节前后的逻辑。同时，我也在网上搜索了相关资料、思维导图（类似于下图这种）。图是知乎上找到的，当然也建议有时间的同学可以自己画一个，有助于更清晰地理解。



b) 认真听课，确保效率。

大二学习概统的时候，身边有很多同学都采取了平时翘课，考试前一个月疯狂刷题的“学习方法”。不可否认的是，这样也许能考出一个不错的成绩，因为概统的公式性很强，考题的类型和解题思路相对固定。但我个人不太认同这么做。因为考前突击对于深入理解知识点是没有什么帮助的。也许你考了一个不错的成绩，但并没有真正吃透其中的本质。概统是一门相对基础的学科，理工类经管类的很多专业课都会运用到概统的知识点。所以我建议同学们认认真真去上每一堂课，在平时就打牢基础。

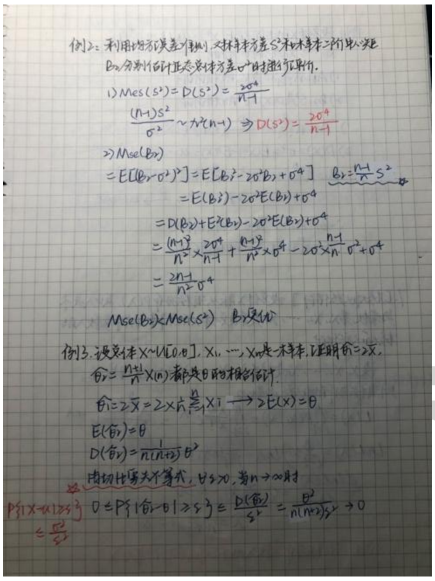
c) 多读课本，搞懂例题。

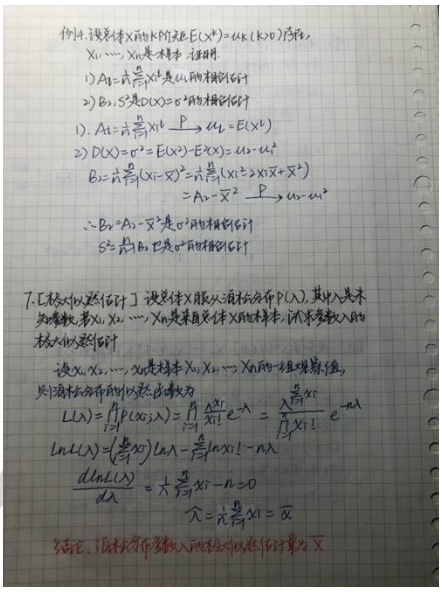
学习概统，很多同学都会陷入一个误区，就是只刷题，不看书。我个人的建议是大

家回归课本，争取搞懂书上的每一道例题。前面也有提到，概统的题型相对固定，搞懂一道经典的题目有助于举一反三，达到事半功倍的效果。我当时学概统时，把书上的例题前后完整做了两遍，再在期末考试时配套做两三份卷子，就觉得差不多了。同时，对于概统里的很多公式，大家也不能死记硬背，也一定要回归课本，看看公式都是怎么一步步推导出来的。

d) 备一本错题本

错题本相信不少同学都会有。这里介绍一下我做概统错题本的习惯。我不会一碰到错题就立刻做，而是每隔一段时间觉得自己积累了一定的错题量后，抽一个整块的时间对错题进行归类摘抄，相似的题型可以归纳到一起，方便期末的复习。这里贴两张我以前做的概统错题本。





以下为真题：

浙江大学2018－2019学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.9772$, $t_{0.05}(15)=1.75$, $t_{0.025}(15)=2.13$, $t_{0.01}(15)=2.60$, $t_{0.05}(25)=1.71$, $t_{0.025}(25)=2.06$, $\chi^2_{0.05}(5)=11.1$, $\chi^2_{0.05}(4)=9.49$.

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分）

1. 某小区有 a 个人申请小区停车位，($a\geqslant 3$)，而小区的停车位只有 b 个，($0<b\leqslant a-2$)。管理者决定采用随机抽签方法确定停车位使用权。则排在第 3 位的抽签者抽中停车位的概率为__________；前三个人中恰好有一人抽中停车位的概率为____________.

2. 设 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $P(X\le E(X))=$ ____________；现对 X 独立重复观察 200 次，结果记为 $X_1,\ldots,X_{200}$，则 $P(X_1=0|X_1+X_2\ge 1)=$ ____________，$P(\sum_{i=1}^{200}X_i>380)\approx$ ____________.

3. 设 (X,Y) 在区域 $\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 上均匀分布，则 $P(X^2+Y^2\le 1)=$______.

4. 设 $(X,Y)\sim N(1,2,4,1,-0.8)$，则 $Var(X-2Y-1)=$ __________；当 $a=$ __________时，$X+Y$ 与 $aX-Y$ 相互独立.

5. 设总体 X 的分布律为 $P(X=-1)=\dfrac{\theta}{3},P(X=0)=\dfrac{2\theta}{3},P(X=1)=\dfrac{2(1-\theta)}{3}$，$P(X=2)=\dfrac{1-\theta}{3}$，未知参数 $\theta\in(0,1)$．$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则 $E(X)=$__________，θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$________；当 $n\to+\infty$ 时，$(\bar{X}-\dfrac{4}{3})^2\xrightarrow{P}$______.

二．（15 分）将一枚硬币独立抛 2 次，X 表示正面朝上的次数；Y 服从 $(0,2)$ 区间上的均匀分布，设 X 与 Y 相互独立，$M=\max(X,Y)$，$Z=X+Y$．分别求 X，Y，M，Z 的分布函数.

三．（15 分）设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2}, & |y|<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (1) 求 $P(X+Y\le 1)$；(2)求条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $P(X>0.5|Y=0)$；(3) 判断 X 与 Y 是否相关？说明理由.

四．（10 分）为验证某汽车厂生产的汽车平均每公升汽油行驶里程是否达到 15km 以上，随机选取 16 辆车，记录下每辆车每公升汽油行驶的千米数，得到样本均值 $\bar{x}=14.22$，样本方差 $s^2=1.2^2$，假设数据来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。(1) 对于假设 $H_0:\mu\geq 15, H_1:\mu<15$，求 P_值并进行检验(取 $\alpha=0.05$)；(2)现有另一汽车厂生产的同类型汽车，其每公升汽油行驶的千米数 $Y\sim N(\mu_Y,\sigma^2)$，随机选取该类型汽车 11 辆车，测得样本均值 $\bar{y}=14.97$，样本方差 $s_y^2=1.4^2$，求 $\mu-\mu_Y$ 的置信度为 95%的双侧置信区间。（保留两位小数）

五．（12 分）设总体 $X\sim N(\theta,\theta)$，未知参数 $\theta\in(0,\frac{1}{4})$，从总体中抽取容量为 $n(n>2)$的简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$，　$\bar{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差，记 $T_k=k\bar{X}+(1-k)S^2$. (1) 判断 T_k 是否为 θ 的无偏估计量？说明理由；(2)求 $Var(T_k)$，并比较 T_0 与 T_1 哪个更有效？说明理由.

六．（15 分）设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}2x/\theta^2, 0<x\leq\theta,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$，未知参数 $\theta>0$，$X_1,\dots,X_{400}$ 是总体 X 的简单随机样本，求 θ 的极大似然估计；若已知 400 个观察值中最小值为 0.48，最大值为 3.92，平均值为 2.72，数据统计如下：

X 取值	$(0, 0.98]$	$(0.98, 1.96]$	$(1.96, 2.45]$	$(2.45, 2.94]$	$(2.94, 3.43]$	$\{x>3.43\}$
频数	30	62	48	77	85	98

请在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设 H_0: X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2x/\theta^2, 0<x\leq\theta,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

作业编号：____________ 上课时间：____________

浙江大学 2018－2019 学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：______________

考试试卷：A 卷、B 卷√（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2019 年 1 月 20 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：____________ 学号：____________ 专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2)=0.9772$，$t_{0.10}(8)=1.40$，$t_{0.05}(8)=1.86$，$t_{0.025}(8)=2.31$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.49$，$\chi^2_{0.05}(3)=7.82$.

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分，各分布要写出参数）：

1. 设事件 A,B,C 两两不相容，$P(A)=P(B)=0.4$，$P(C)=0.2$，则 $P(A\cup B\mid B\cup C)=$________；$P(A\cup B-C)=$____________.

2. 设 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $P(X\le 2|X\ge 1)=$ _______，$\mathrm{Var}(X-2)=$________，现对 X 独立重复观察 100 次，记为 $X_1,\ldots,X_{100}$，则根据中心极限定理，$P(\sum_{i=1}^{100}X_i\ge 45)\approx$__________.

3. 设 X 与 Y 相互独立，$X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,2)$，则 $P(X>Y)=$______.

4. 设 $(X,Y)\sim N(1,2,4,4,-0.5)$，则 $Var(2X-Y-1)=$ __________；当 $a=$ _______ 时，$X+Y$ 与 $aX-Y$ 相互独立.

5. 设总体 X 的分布律为 $P(X=-1)=\frac{\theta}{3},P(X=0)=\frac{2\theta}{3},P(X=1)=1-\theta$，未知参数

$\theta \in (0,1)$. $X_1,\ldots,X_n$是 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则 $E(X)=$__________, θ的矩估计量 $\hat{\theta}=$__________；当 $n\to\infty$时，$\hat{\theta}\xrightarrow{P}$_______.

二.（15 分）设 $X\sim U(0,1)$， $Y\sim B(1,0.7)$, 且 X 与 Y 独立， $M=\max(X,Y)$, $Z=X+Y$. 分别求 X，Y，M，Z 的分布函数.

三.（15 分）设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ (1) 求 (X,Y) 的分布函数值 $F(1,0.5)$；(2)求条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $P(X>0.5|Y=0.25)$；(3) 判断 X 与 Y 是否相关？说明理由.

四．(15 分) 设总体 $X \sim U(0,\theta]$，未知参数 $\theta>0$， $X_1,\dots,X_{400}$ 是总体 X 的简单随机样本，求 θ 的极大似然估计；若已知 400 个观察值中最小值为 0.48，最大值为 4.90，平均值为 2.52，数据统计如下：

X 取值	$(0, 0.98]$	$(0.98, 1.96]$	$(1.96, 2.94]$	$(2.94, 3.92]$	$\{x>3.92\}$
频数	72	62	88	97	81

请在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设 $H_0: X \sim U(0,\theta]$.

五．(12 分) 设总体 $X \sim N(\theta,\theta)$，未知参数 $\theta \in (\frac{1}{7},\frac{1}{4})$，从总体中抽取容量为 3 的简单随机样本 X_1,X_2,X_3， $\bar{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差，记 $T_1=\bar{X}, T_2=S^2$， $T_3=\frac{3}{5}\bar{X}+\frac{2}{5}S^2$ ．(1)判断 T_1,T_2,T_3 是否为 θ 的无偏估计量？说明理由；(2)在无偏估计量中问哪个最有效？说明理由.

六．(10 分) 为验证某汽车厂生产的汽车平均每公升汽油行驶里程是否达到 15km 以上，随机选取 9 辆车，记录下每辆车每公升汽油行驶的千米数，得到样本均值 $\bar{x}=14.426$，样本方差 $s^2=1.23^2$，假设数据来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。(1) 对于假设 $H_0:\mu\geq 15, H_1:\mu<15$，求 P _ 值并进行检验(取 $\alpha=0.05$)；(2)求总体均值 μ 的置信度为 95%的双侧置信区间。

浙江大学 2018－2019 学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷解答

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：

考试试卷：A卷、B卷✓（请在选定项上打✓）

考试形式：闭✓、开卷（请在选定项上打✓），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2019 年 1 月 20 日，考试时间：120 分钟

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分，各分布要写出参数）：

1. 2/3，0.8.

2. $1-e^{-1/2}$，1/4，0.8413.

3. 1/4.

4. (1) −4；(2) 1.

5. $1-\dfrac{4\theta}{3}$，$\dfrac{3-3\bar{X}}{4}$，θ.

二．(15 分)解：$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ 3分 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.3, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$ 4分

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 0.3z, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$ 4分

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=0.3F_X(z)+0.7F_X(z-1)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 0.3z, & 0\le z<1,\\ 0.7z-0.4, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$ 4分

三．(15 分)解：(1) $F(1,0.5)=3/4$； 3分

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 2dx=2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 3分

所以，当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 2分

特别地，$f_{X|Y}(x|0.25)=\begin{cases}4/3, & 0.25<x<1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ $P(X>0.5|Y=0.25)=2/3$；　　3 分

(3) X 与 Y 正相关。因为 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{36}>0$.　　4 分

其中 $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xdy=\dfrac{2}{3}$, $E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x 2ydy=\dfrac{1}{3}$, $E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xydy=\dfrac{1}{4}$.

四．(15 分) 解：似然函数 $L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^{400}}, 0<x_i\le\theta, i=1,\ldots,400$　　3 分

$L(\theta)$ 是 θ 的单调减函数，且 $\theta\ge\max\{x_1,\ldots x_{400}\}$，所以

θ 的极大似然估计值是 $\hat{\theta}=\max\{x_1,\ldots x_{400}\}=4.90$　　3 分

为了检验假设 H_0，需要计算 $P(a<X\le b)=\dfrac{b-a}{\theta}$ 的估计值 $\dfrac{b-a}{\hat{\theta}}$，见下表：

X 取值	(0, 0.98]	(0.98, 1.96]	(1.96, 2.94]	(2.94, 3.92]	$\{x>3.92\}$
频数	72	62	88	97	81
概率估计	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
理论频数	80	80	80	80	80

4 分

$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\dfrac{n_i^2}{n\hat{p}_i}-400=9.275>\chi^2_{0.05}(3)=7.82$，拒绝原假设.　　5 分

五．(12 分) 解：$E(X)=\theta$,　$Var(X)=\theta$；

$E(\bar{X})=E(X)=\theta$,　$Var(\bar{X})=\dfrac{Var(X)}{n}=\dfrac{\theta}{n}$

$E(S^2)=Var(X)=\theta$,　$Var(S^2)=\dfrac{2(Var(X))^2}{n-1}=\dfrac{2\theta^2}{n-1}$，且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立，所以，

(1) $E(T_1)=E(T_2)=E(T_3)=\theta$，都是 θ 的无偏估计量；　　4 分

(2) $Var(T_1)=Var(\bar{X})=\dfrac{\theta}{3}, Var(T_2)=Var(S^2)=\theta^2, Var(T_3)=\dfrac{3\theta}{25}+\dfrac{4\theta^2}{25}$，　　4 分

$Var(T_1)>Var(T_2)>Var(T_3)$.　T_3 最有效.　　4 分

六．(10 分) 解：(1) $H_0:\mu\ge 15, H_1:\mu<15$

拒绝域为 $T=\dfrac{\bar{X}-15}{S/\sqrt{n}}<-t_{0.05}(n-1)$ ，

计算得 $t=\dfrac{14.426-15}{1.23/\sqrt{9}}=-1.40$ ， 2分

$P_{-}=P(t(8)<-1.40)=P(t(8)>1.4)=0.10$ 2分

$t>-t_{0.05}(8)=-1.86$ 或 $P_{-}>0.05$ ，所以接受原假设. 3分

(2) 总体均值 μ 的置信度为 95%的双侧置信区间为

$(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1))$ 计算得 $(13.4789,\quad 15.3731)$. 3分

作业编号：____________ 上课时间：____________

浙江大学 2017－2018 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：______________

考试试卷：A 卷✓、B 卷（请在选定项上打✓）

考试形式：闭✓、开卷（请在选定项上打✓），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2018 年 7 月 7 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：____________学号：____________专业：____________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.84, \Phi(1.645)=0.95, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(2)=0.98$,

$t_{0.05}(15)=1.75$, $t_{0.025}(15)=2.13$, $\chi^2_{0.05}(15)=25.0$, $\chi^2_{0.025}(15)=27.5$,

$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$, $\chi^2_{0.95}(15)=7.26$, $\chi^2_{0.05}(5)=11.07$, $\chi^2_{0.05}(4)=9.49$.

一. 填空题（每小格 3 分，共 39 分）：

1. 一个教室里有 6 名一年级女生，8 名一年级男生，9 名二年级女生，a 名二年级男生，从该教室内随机选一名学生，若已知选到的是一年级学生，则他是男生的概率为________；若选到学生的性别与年级相互独立，则 a=____________.

2. 设 $X\sim U(1,c)$（均匀分布），$E(X)=2$，则 $c=$______，$\mathrm{Var}(X)=$__________.

3. 设 (X,Y) 服从正态分布，$X\sim N(2,1), Y\sim N(1,4)$，$X$ 与 Y 的相关系数为 0.75，则

$P(X>Y+1)=$ ______，$X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为__________.

4. 设 $X_1,\dots,X_n(n>2)$ 相互独立，均服从参数 $\lambda=0.5$ 的指数分布，则 $P(\min(X_1,X_2)\le 1)=$

_____，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-2X_i}\xrightarrow{P}$ ______；若 $n=180$，则 $P(\sum_{i=1}^{180}\mathrm{e}^{-X_i}>52)\approx$ _______.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_{16}$ 是总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，(1)若

$\mu=0$，用$T=16(\bar{X})^2$估计σ^2，则均方误差$\mathrm{Mse}(T)=$_______；(2)若μ,σ^2均未知，计算得 $\bar{x}=5.8$ ，$\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2=6.26$ ，则 μ 的置信度为 95% 的置信区间为____________________(数据保留 3 位小数)，为检验假设$H_0:\sigma^2\ge 1, H_1:\sigma^2<1$，

$P_=$_______，若显著水平$\alpha=0.05$，应该拒绝还是接受原假设？答：______________.

二．(12分) 小王喜欢玩某款一对一对战游戏，该游戏会根据玩家自身的等级分随机匹配等级分相近的玩家。假设在一局中小王遇到等级分高于，等于，低于自己的玩家的概率分别为 0.4，0.2，0.4，遇到等级分高的玩家，小王胜，平，负的概率分别为 0.3，0.3，0.4，遇到等级分相同的玩家，小王胜，平，负的概率分别为 0.4，0.4，0.2，遇到等级分低的玩家，小王胜，平，负的概率分别为 0.5，0.3，0.2. (1)求在一局中小王胜的概率；(2)若已知小王胜了一局，求此局对手是等级分高的玩家的概率；(3)若小王独立玩了 5 局，问他恰好胜 2 局的概率是多少？第 5 局是第 2 次胜的概率又是多少？

三．(12分)设(X,Y)的联合分布律如右表所示.已知$E(X)=0.6$，$E(Y)=0$，(1) 若$a_6=0.1$，且X与Y不相关，求(X,Y)的联合分布律；(2) 若X与Y相互独立，求(X,Y)的联合分布律.

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	a_2	a_3
1	a_4	a_5	a_6

四．(13 分) 设(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}4x, & 0<y<x^2, 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (1) 求(X,Y)的联合分布函数值$F(0.5,0.5)$；(2)分别求X与Y的边际概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$，并判断X与Y是否相互独立；(3)求$\mathrm{Cov}(X,Y)$，并判断X与Y是否相关.

五．(8 分)设总体X取值在区间$(0,1)$，对总体进行 128 次观察，数据统计如下：

X的取值	(0, 0.25]	(0.25, 0.5]	(0.5, 0.625]	(0.625, 0.75]	(0.75, 0.875]	(0.875, 1)
频数	6	28	20	26	24	24

在显著水平$\alpha=0.05$下，用χ^2拟合优度检验法检验假设H_0：X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1,\\ 0, \ 其他.\end{cases}$$

六．(16 分) 设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\lambda,\theta)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}/\theta^{\lambda}, & 0<x<\theta, \\ 0, & 其他.\end{cases}$ 未知参数 $\lambda>1, \theta>0$，$X_1,\dots,X_n$为 X 的简单随机样本，(1)若 $\lambda=2$，求θ的矩估计量$\hat{\theta}$，并判断$\hat{\theta}$是否为θ的无偏估计量，说明理由；(2) 若 $\theta=2$，求λ的极大似然估计量$\hat{\lambda}$，并判断$\hat{\lambda}$是否为λ的相合估计量，说明理由.

浙江大学2017－2018学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷B

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________

考试试卷：A卷、B卷√（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2018年7月7日，考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：________学号：________专业：________

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.84$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2)=0.98$，
$t_{0.10}(15)=1.34$，$t_{0.05}(15)=1.75$，$t_{0.025}(15)=2.13$，$\chi^2_{0.05}(15)=25.0$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.5$，
$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$，$\chi^2_{0.95}(15)=7.26$，$\chi^2_{0.05}(5)=11.07$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.49$，$\chi^2_{0.05}(3)=7.82$.

一．填空题（每小格3分，共39分）：

1．设 A，B 是两个随机事件，已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.58$，则 $P(A|A\cup B)=$ ________；A 与 B 相互独立吗？答：________.

2．设 $X\sim P(\lambda)$（泊松分布），$\mathrm{Var}(X)=2$，则 $\lambda=$ ______，$P(X=1|X\ge 1)=$ ________.

3．设 (X,Y) 服从正态分布，$X\sim N(2,4), Y\sim N(1,4)$，$X$ 与 Y 的相关系数为 0.75，则 $P(X-1>Y)=$ ______，$2X+Y$ 与 $2X-Y$ 的相关系数为________.

4．设总体 $X\sim U(1,3)$（均匀分布），$X_1,\dots,X_n$ ($n>2$) 是 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $P(\max(X_1,X_2)>2)=$ ______，当 $n\to\infty$ 时，$A_2\xrightarrow{P}$ ______；若 $n=192$，则 $P(\bar{X}>49/24)\approx$ ________.

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \ldots, X_{16}$ 是总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，(1)设 $\mu = 0$，若 $a\bar{X}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$，则 $a=$ ________；(2)若 μ, σ^2 均未知，计算得 $\bar{x} = 5.464$，样本标准差 $s = 1.6$，则 σ^2 的置信度为 95%的双侧置信区间为________________，为检验假设 $H_0: \mu \geq 6, H_1: \mu < 6$，$P\_ =$ ______，若显著水平 $\alpha = 0.05$，应该拒绝还是接受原假设？答：____________.

二.（12 分）设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1, \\ a(x-1), & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (1)求常数 a；(2)求 X 的分布函数 $F(x)$；(3)若 $P(X>c)=0.68$，求 c 的值；(4)求 $E[(X-1)^2]$.

三.（12 分）设 $X \sim B(1, 0.4)$，$Y \sim B(2, 0.4)$，已知 $P(X = 1, Y = 2) = 0$，且 X 与 Y 不相关，求 (X, Y) 的联合分布律；并判断 X 与 Y 是否相互独立？说明理由.

四．(13 分) 设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 1-x<y<1, 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (1) 求 (X,Y) 的联合分布函数值 $F(1,0.5)$；(2)分别求 X 与 Y 的边际概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 是否相互独立；(3)求 $Cov(X,Y)$，并判断 X 与 Y 是否相关.

五．(8 分)设总体 X 取值在区间 $(0,3)$，对总体进行 216 次观察，数据统计如下：

X 的取值	(0, 1]	(1, 1.5]	(1.5, 2]	(2, 2.5]	(2.5, 3)
频数	15	27	36	56	82

在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设 H_0: X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x^2/9, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

六.(16 分) 设总体 $X \sim U[0,\theta]$，未知参数 $\theta > 0$，从总体中抽取容量为 $n(n>2)$的简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$， (1)分别求 θ 的矩估计量和极大似然估计量；(2)逐个判断 $\hat{\theta}_1 = 2X_1$，$\hat{\theta}_2 = X_1 + X_2$，$\hat{\theta}_3 = 1.5\max(X_1, X_2)$ 是否为 θ 的无偏估计量；(3)对于 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，$\hat{\theta}_3$ 中的无偏估计量，比较哪个最有效？说明理由.

浙江大学 2017－2018 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷 B 解答

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：

考试试卷：A 卷、B 卷√（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2018 年 7 月 7 日，考试时间：120 分钟

一．填空题（每小格 3 分，共 39 分）：

1. 20/29，独立.

2. 2，$\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}=\dfrac{2}{e^2-1}=0.313$.

3. 0.5，3/4.

4. 3/4，13/3，0.16.

5. 16，　(1.396, 6.134)，　0.1，　接受.

二．(12 分)

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 ax\mathrm{d}x+\int_1^2 a(x-1)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}=a$；　4 分

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/2, & 0\le x<1,\\ x^2/2-x+1, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$；　6 分

(3) $F(c)=P(X\le c)=0.32,\Rightarrow 0<c<1,\therefore F(c)=c^2/2=0.32, c=0.8$；　10 分

(4) $E[(X-1)^2]=\int_0^1 x(x-1)^2\mathrm{d}x+\int_1^2 (x-1)^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.　12 分

三．(12 分)

解：$P(X=0)=0.6, P(X=1)=0.4$

$P(Y=0)=0.36, P(Y=1)=0.48, P(Y=2)=0.16$　　　　3 分

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0, \Rightarrow E(XY)=0.32$

所以，$E(XY)=P(X=1,Y=1)+2P(X=1,Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.32$，

$P(X=0,Y=1)=P(Y=1)-P(X=1,Y=1)=0.16$，，

$P(X=0,Y=2)=P(Y=2)=0.16$，

$P(X=1,Y=0)=P(X=1)-P(X=1,Y=1)-P(X=1,Y=2)=0.08$

$P(X=0,Y=0)=0.28$　　　　8 分

X \ Y	0	1	2
0	0.28	0.16	0.16
1	0.08	0.32	0
P(Y=j)	0.36	0.48	0.16

$P(X=1,Y=2)=0 \neq P(X=1)P(Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.064$，所以，$X$与 Y不独立。

12 分

四．(13 分)

解：(1) $F(1,0.5)=\int_{0.5}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0.5}3x\mathrm{d}y=\frac{5}{16}$，　　　　3 分

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{1-x}^{1}3x\mathrm{d}y=3x^2, 0<x<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{1-y}^{1}3x\mathrm{d}x=3y-3y^2/2, 0<y<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

X与Y不相互独立，因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，　$0<x,y<1$.　　　　9 分

(3)

$E(XY)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{1}3x^2y\mathrm{d}y=\frac{9}{20}, E(X)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{1}3x^2\mathrm{d}y=\frac{3}{4}, E(Y)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{1}3xy\mathrm{d}y=\frac{5}{8}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{-3}{160}<0$，$X$与$Y$(负)相关。　　　　13 分

五.（8分）

X 的取值	(0, 1]	(1, 1.5]	(1.5, 2]	(2, 2.5]	(2.5, 3)
频数	15	27	36	56	82
理论概率	8/216	19/216	37/216	61/216	91/216
理论频数	8	19	37	61	91

4分

$\chi^2=\sum_{k=1}^{5}\frac{n_k^2}{np_k}-n=10.82>\chi^2_{0.05}(4)=9.49$，拒绝原假设。 8分

六.（16分）

解：(1)矩估计法：$\mu_1=E(X)=\theta/2$，$\hat{\mu}_1=\bar{X}$，所以θ的矩估计量$\hat{\theta}=2\bar{X}$， 4分

极大似然估计：似然函数$L(\theta)=\theta^{-n}$，$0\le x_i\le\theta, i=1,\dots,n$，

似然函数是θ的单调减函数，且$\theta\ge\max\{X_1,\dots,X_n\}$，所以$\theta$的极大似然估计量

$\hat{\theta}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$. 8分

(2) $E(\hat{\theta}_1)=E(2X_1)=\theta$，$E(\hat{\theta}_2)=\theta$，$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$均是$\theta$的无偏估计，

计算得$M=\max\{X_1,X_2\}$的密度函数为$f_M(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_3)=\frac{3}{2}\int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{3}{2}\times\frac{2\theta}{3}=\theta$； $\hat{\theta}_3$也是θ的无偏估计， 12分

(3) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=\mathrm{Var}(2X_1)=\theta^2/3$，$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)=2\mathrm{Var}(X_1)=\theta^2/6$，

$E(\hat{\theta}_3^2)=9\theta^2/8, \mathrm{Var}(\hat{\theta}_3)=\theta^2/8$，所以$\hat{\theta}_3$最有效. 16分