BBM 205 - Discrete Structures: Final Exam Date: 12.1.2017, Time: 15:00 - 17:00

Ad Soyad / Name:

Ögrenci No /Student ID:

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Points:	6	16	8	8	10	9	6	8	14	5	10	100
Score:												

1. (6 points) The complementary graph \bar{G} of a simple graph G has the same vertices as G. Two vertices are adjacent in \bar{G} if and only if they are not adjacent in G. A simple graph G is called self-complementary if G and \bar{G} are isomorphic. Show that if G is a self-complementary simple graph with n vertices, then $n \equiv 0$ or $1 \mod 4$.

(Bir G çizgesinin tersi \bar{G} aynı köşe kümesine sahip olup, \bar{G} 'de kenar olan çiftler sadece ve sadece G'de kenar olmayan köşe çiftleridir. Bir G çizgesinin kendini-tamamlayan olması, G ve \bar{G} 'nin birbirine izomorf olmasıdır. Eğer G kendini-tamamlayan n köşeli bir çizgeyse, $n \equiv 0$ veya $1 \mod 4$ olduğunu gösterin.)

- 2. (a) (2 points) Write a necessary and sufficient condition for a graph G to have an Eulerian circuit. (Bir G çizgesinin Euler döngüsüne sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşul yazın.)
 - (b) (2 points) Write a necessary and sufficient condition for a graph G to have an Eulerian path. (Bir G çizgesinin Euler yoluna sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşul yazın.)
 - (c) (2 points) Write a necessary and sufficient condition for a bipartite graph G with parts V_1 and V_2 to have a complete matching with respect to V_1 . (Iki-parçalı olup parçaları V_1 ve V_2 olan bir G çizgesinin, V_1 'i tamamlayan bir eşleştirmeye sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşul yazın.)
 - (d) (6 points) Use Euclidean algorithm to find $\gcd(210,648)$. (Euclid algoritmasını kullanarak $\gcd(210,648)$ 'i bulun.)

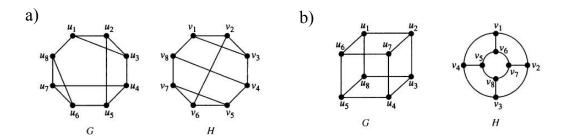
(e) (4 points) Draw the graph represented by the adjacency matrix below. (Asağıdaki komşuluk matrisi ile temsil edilen çizgeyi çizin.)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (8 points) Show that for every simple graph G, if |E(G)| > (n-1)(n-2)/2, then G is connected. (Her basit G çizgesi için, eğer |E(G)| > (n-1)(n-2)/2 ise, G'nin bağlı olacağını gösterin.)

4. (8 points) Draw these graphs: a) K_6 , b) $K_{2,3}$, c) C_6 , d) Q_3 . (Verilen çizgeleri çizin.)

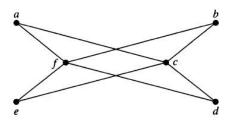
5. (10 points) Either show that the pairs of graphs in the figure are isomorphic by finding an isomorphism function or explain why they cannot be isomorphic. (Asağıda verilen çizge çiftlerinin izomorfizma fonksiyonunu bularak izomorf olduğunu gösterin ya da neden izomorf olamayacaklarını açıklayın.)

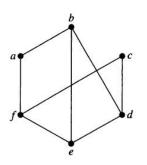


6. (9 points) Show by using induction that every m-ary tree with height h has at most m^h leaves. (Tümevarım yöntemi kullanarak, her m-lik ve yüksekliği h olan ağacın en fazla m^h yaprağı olacağını gösterin.)

7. (6 points) Let T be a full m-ary tree with n vertices, i internal vertices and ℓ leaves. Show that $\ell = (m-1)i + 1$. (T, dolu m-lik, n köşeli, i internal köşeli ve ℓ yapraklı bir ağaç ise, $\ell = (m-1)i + 1$ olduğunu gösterin.)

8. (8 points) Determine whether the following two graphs are bipartite or not. Justify your answer. (Asağıda verilen iki çizgenin iki-parçalı olup olmadığına karar verin. Cevabınızı açıklayın.)





- 9. A computer system considers a string of decimal digits a valid codeword if it contains an even number of 0 digits. For instance, 1230407869 is valid, whereas 1209805608 is not valid. Let a_n be the number of valid n-digit codewords. (Bir bilgisayar sisteminde, geçerli olan şifre tanımı her basamağı 0'dan 9'a kadar olan rakamlardan oluşan ve çift sayıda 0 içeren sayı dizisidir. Örnek olarak 1230407869 geçerli olup, 1209805608 geçerli olmayan bir şifredir. a_n , n uzunluğundaki geçerli tüm şifrelerin sayısı olsun.)
 - (a) (8 points) Find a recurrence relation and initial conditions for a_n . (a_n dizisi için rekürsif bir ilişki ve başlangıç koşulları bulun.)

(b) (6 points) Solve this recurrence relation. (Bu rekürsif ilişkiyi çözün.)

10. (5 points) Determine the number of multiplications used to find x^{2^i} starting with x and successively squaring (to find x^2 , x^4 , and so on). (Verilen bir x için x^{2^i} değerini hesaplarken x'den başlayıp arka arkaya kare alınarak x^{2^i} 'in bulunmasında kaç defa kare alındığını bulun.)

11. Give as good a big-Omega estimate as possible for each of these functions. A good estimate means, for example, if you know a function is both $\Omega(n^3)$ and $\Omega(n^{3.5})$, then $\Omega(n^{3.5})$ is a better estimate than $\Omega(n^3)$. (Asağıdaki fonksiyonlar için olabileceğinin en iyisi büyük-Omega tahmininde bulunun. En iyi tahmin ile anlatılmak istenen, örneğin bir fonksiyon hem $\Omega(n^3)$ hem $\Omega(n^{3.5})$ ise, o zaman $\Omega(n^{3.5})$ 'nin daha iyi bir tahmin olmasıdır.)

(a) (2 points)
$$(n! + 5^n)(n^3 + 2)$$

(b) (2 points)
$$(n \log n + n^2)(n+1)$$

(c) (2 points)
$$(n! + 2^n)(17 \log n + 19)$$

(d) (2 points)
$$(n^3 + n^2 \log n)(n^3 \log n + 1) + (n^3 + \log(n^2 + 1))(n^3 + 2)$$

(e) (2 points)
$$(n^n + n2^n + 5^n)(n^2 + 8)$$