

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»  
Дисциплина: «Дискретная математика»

Домашнее задание 1

# Исследование комбинационных схем Вариант 181

Выполнил: Мартиросян Тигран Оганнесович,  
студент гр. 176

Преподаватель: Авдошин С.М.,  
профессор департамента  
программной инженерии  
факультета компьютерных наук

Москва 2017

$$7X_7 \oplus 186X_6 \oplus 213X_5 \oplus 21X_4 \oplus 238X_3 \oplus 142X_2 \oplus 30X_1 \oplus 191X_0 = 183$$

Переведем коэффициенты уравнения в двоичную систему счисления.

$$7_{10} = 00000111_2, 186_{10} = 10111010_2, 213_{10} = 11010101_2, 21_{10} = 00010101_2, 238_{10} = 11101110_2, 142_{10} = 10001110_2, 30_{10} = 00011110_2, 191_{10} = 10111111_2, 183_{10} = 10110111_2.$$

Составим расширенную матрицу коэффициентов соответствующей системы линейных уравнений в  $GF(2)$  и решим систему.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (6) \oplus = (5) \\ (7) \oplus = (5) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \oplus = (0) \\ (3) \oplus = (0) \\ (4) \oplus = (0) \\ (6) \oplus = (0) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (0) \oplus = (1) \\ (2) \oplus = (1) \\ (4) \oplus = (1) \\ (5) \oplus = (1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (5) \oplus = (3) \\ (6) \oplus = (3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \oplus = (2) \\ (3) \oplus = (2) \\ (4) \oplus = (2) \\ (5) \oplus = (2) \\ (7) \oplus = (2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (0) \oplus = (4) \\ (1) \oplus = (4) \\ (2) \oplus = (4) \\ (5) \oplus = (4) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (0) \oplus = (6) \\ (1) \oplus = (6) \\ (2) \oplus = (6) \\ (3) \oplus = (6) \\ (4) \oplus = (6) \\ (5) \oplus = (6) \\ (7) \oplus = (6) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \oplus = (7) \\ (2) \oplus = (7) \\ (3) \oplus = (7) \\ (4) \oplus = (7) \\ (6) \oplus = (7) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

В описаниях преобразований строки обозначены как (1), (2), ..., (8), а выражение (i)⊕=(j) обозначает «заменить все числа в строке (i) на их сумму по модулю 2 с соответствующими числами строки (j)».

Получаем решение:  $X_7 = 1, X_6 = 1, X_5 = 1, X_4 = 0, X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1$ .  
Составим таблицу истинности функции F.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	1	0	1	1	0	1

Десятичный номер функции F равен  $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 237$ .

№2

Представим таблицу истинности логической функции F в виде карты Карно.

F	0	0	1	1	A
	0	1	1	0	B
0	1	1	0	1	
1	1	0	1	1	
C					

№3

Выполним дизъюнктивные разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{A} \cdot (B \mid C) + A \cdot (B \Rightarrow C)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{B} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{B} + B \cdot (A \equiv C)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{C} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \bar{C} \cdot (A \mid B) + C \cdot (A \Leftarrow B)$$

№4

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC \quad (1)$$

№5

Минимальные дизъюнктивные формы

$$F(A, B, C) = \bar{B} + AC + \bar{A}\bar{C} \quad (2)$$

№6

Из дизъюнктивных разложений получаем новые представления

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= \bar{A} \cdot (B \mid C) \oplus A \cdot (B \Rightarrow C) \\ F(A, B, C) &= \bar{B} \oplus B \cdot (A \equiv C) \\ F(A, B, C) &= \bar{C} \cdot (A \mid B) \oplus C \cdot (A \Leftarrow B) \\ F(A, B, C) &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} \oplus \bar{A}\bar{B}C \oplus \bar{A}B\bar{C} \oplus A\bar{B}\bar{C} \oplus A\bar{B}C \oplus ABC \end{aligned}$$

Выполним конъюнктивные разложения Шеннона логической функции **F**.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( A + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \bar{A} + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (A + (B | C)) \cdot (\bar{A} + (B \Rightarrow C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( B + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \bar{B} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = B \cdot (\bar{B} + (A \equiv C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( C + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \bar{C} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = (C + (A | B)) \cdot (\bar{C} + (A \Leftarrow B))$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

$$F(A, B, C) = (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \quad (3)$$

Минимальные конъюнктивные нормальные формы.

$$F(A, B, C) = (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \quad (4)$$

Из конъюнктивных разложений, используя ортогональность, получаем новые представления функции

$$F(A, B, C) = (A + (B | C)) \equiv (\bar{A} + (B \Rightarrow C))$$

$$F(A, B, C) = B \equiv (\bar{B} + (A \equiv C))$$

$$F(A, B, C) = (C + (A | B)) \equiv (\bar{C} + (A \Leftarrow B))$$

$$F(A, B, C) = (A + \bar{B} + \bar{C}) \equiv (\bar{A} + \bar{B} + C)$$

Вычислим производные логической функции **F**.

$$F'_A(A, B, C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'_A = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$F'_B(A, B, C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'_B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A + C$$

$$F'_C(A, B, C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'_C = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

**Разложения Рунда логической функции F.**

$$F(A, B, C) = F(0, B, C) \oplus A \cdot F'_A(A, B, C) = (B \mid C) \oplus A \cdot B$$

$$F(A, B, C) = F(1, B, C) \oplus \overline{A} \cdot F'_A(A, B, C) = (B \Rightarrow C) \oplus \overline{A} \cdot B$$

$$F(A, B, C) = F(A, 0, C) \oplus B \cdot F'_B(A, B, C)$$

$$F(A, B, C) = F(A, 1, C) \oplus \overline{B} \cdot F'_B(A, B, C)$$

$$F(A, B, C) = F(A, B, 0) \oplus C \cdot F'_C(A, B, C)$$

$$F(A, B, C) = F(A, B, 1) \oplus \overline{C} \cdot F'_C(A, B, C)$$