НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Дисциплина: «Дискретная математика»

Домашнее задание 1

Исследование комбинационных схем

Вариант 0

Выполнил: Иванов Петр,
студент гр. БПИ160.

Преподаватель: Авдошин С.М.,
профессор департамента
программной инженерии
факультета компьютерных наук

Москва 2016

№1.

$82X_7 \oplus 107X_6 \oplus 168X_5 \oplus 62X_4 \oplus 87X_3 \oplus 153X_2 \oplus 84X_1 \oplus 129X_0 = 61$

Переведем коэффициенты уравнения в двоичную систему счисления.

$82_{10}=01010010_2$, $107_{10}=01101011_2$, $168_{10}=10101000_2$, $62_{10}=00111110_2$, $87_{10}=01010111_2$, $153_{10}=10011001_2$,$84_{10}=01010100_2$, $129_{10}=10000001_2$, $61_{10}=00111101_2$

Составим расширенную матрицу коэффициентов соответствующей системы линейных уравнений в GF(2) и решим систему.

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
1&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&1&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&1&1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\substack{(4)\oplus=(6)\\(1)\oplus=(6)}}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&1&0&1&0&0&1\\
0&1&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&1&1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\substack{(6)\oplus=(5)\\(4)\oplus=(5)\\(3)\oplus=(5)\\(0)\oplus=(5)}}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&1&1&1&0&1&0&1\\
0&1&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&1&1&0&1&0
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\substack{(6)\oplus=(7)\\(5)\oplus=(7)\\(4)\oplus=(7)\\(0)\oplus=(7)}}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&1&1&1&1&1&1\\
0&1&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0
\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{(6)\oplus=(2)\\(5)\oplus=(2)\\(1)\oplus=(2)\\(0)\oplus=(2)}}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\substack{(5)\oplus=(1)\\(2)\oplus=(1)}}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\substack{(7)\oplus=(3)\\(6)\oplus=(3)\\(5)\oplus=(3)}}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\substack{(5)\oplus=(0)\\(2)\oplus=(0)}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\substack{(7)\oplus=(4)\\(6)\oplus=(4)\\(5)\oplus=(4)}}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1
\end{array}\right)$$

В описаниях преобразований строки пронумерованы сверху вниз (*7*), (*6*), …, (*1*), (*0*), а выражение (*i*)⊕=(*j*) обозначает «заменить все числа в строке (*i*) на их сумму по модулю 2 с соответствующими числами строки (*j*)».

Получаем решение: $X_7 = 0,\ X_6 = 0,\ X_5 = 0,\ X_4 = 1,\ X_3 = 1,\ X_2 = 0,\ X_1 = 1,\ X_0 = 0.$

Составим таблицу истинности функции F.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0	1	0

Десятичный номер функции F равен $2^4 + 2^3 + 2^1 = 26$.

№2.

Представим таблицу истинности логической функции F в виде карты Карно

F	0	0	1	1	A
	0	1	1	0	B
0	0	0	1	1	
1	0	1	0	0	
C					

№3.

Выполним дизъюнктивные разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{C}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{B} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{B} \cdot (A \nRightarrow C) + B \cdot (A \oplus C)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{C} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{C} \cdot A + C \cdot (A \nLeftarrow B)$$

№4.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

№5.

Минимальные дизъюнктивные нормальные формы

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C}$$

№6.

Из дизъюнктивных разложений, используя ортогональность, получаем новые представления функции

$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot B \cdot C \oplus A \cdot \overline{C}$

$F(A, B, C) = \bar{B} \cdot (A \nRightarrow C) \oplus B \cdot (A \oplus C)$

$F(A, B, C) = \bar{C} \cdot A \oplus C \cdot (A \nLeftarrow B)$

$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot B \cdot C \oplus A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \oplus A \cdot B \cdot \overline{C}$

№7.

Выполним конъюнктивные разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(A + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\bar{A} + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (A + B \cdot C) \cdot \left(\overline{A} + \bar{C} \right)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(B + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\bar{B} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (B + (A \nRightarrow C)) \cdot (\bar{B} + (A \oplus C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(C + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\bar{C} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (C + A) \cdot (\bar{C} + (A \nLeftarrow B))$$

№8.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма

$$F(A,B,C) = (A + B + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

№9.

Минимальные конъюнктивные нормальные формы

$$F(A,B,C) = (A + C) \cdot (\overline{A} + \overline{C}) \cdot (A + B)$$

$$F(A,B,C) = (A + C) \cdot (\overline{A} + \overline{C}) \cdot (B + \overline{C})$$

№10.

Из конъюнктивных разложений, используя ортогональность, получаем новые представления функции

$F(A,B,C) = (A + B \cdot C) \equiv (\overline{A} + \bar{C})$

$F(A,B,C) = (B + (A \nRightarrow C)) \equiv (\bar{B} + (A \oplus C))$

$F(A,B,C) = (C + A) \equiv (\bar{C} + (A \nLeftarrow B))$

$F(A,B,C) = (A + B + C) \equiv (A + B + \overline{C}) \equiv (A + \overline{B} + C) \equiv (\overline{A} + B + \overline{C}) \equiv (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

№11.

Вычислим производные логической функции *F*.

$$F'_A(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}'_A = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B \Leftarrow C$$

$$F'_B(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}'_B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \nLeftarrow C$$

$$F'_C(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}'_C = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A + B$$

№12.

Разложения Рида логической функции *F*.

$F(A,B,C) = F(0,B,C) \oplus A \cdot F'_A(A,B,C) = (B \cdot C) \oplus A \cdot (B \Leftarrow C)$

$F(A,B,C) = F(1,B,C) \oplus \overline{A} \cdot F'_A(A,B,C) = \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot (B \Leftarrow C)$

$F(A,B,C) = F(A,0,C) \oplus B \cdot F'_B(A,B,C) = (A \nRightarrow C) \oplus B \cdot (A \nLeftarrow C)$

$F(A,B,C) = F(A,1,C) \oplus \overline{B} \cdot F'_B(A,B,C) = (A \oplus C) \oplus \overline{B} \cdot (A \nLeftarrow C)$

$F(A,B,C) = F(A,B,0) \oplus C \cdot F'_C(A,B,C) = A \oplus C \cdot (A + B)$

$F(A,B,C) = F(A,B,1) \oplus \overline{C} \cdot F'_C(A,B,C) = (A \nLeftarrow B) \oplus \overline{C} \cdot (A + B)$

№13.

Двойственные разложения Рида логической функции *F*.

$$F(A,B,C) = F(1,B,C) \equiv \left(A + \overline{F'_A(A,B,C)}\right) = \overline{C} \equiv (A + (B \nLeftarrow C))$$

$$F(A,B,C) = F(0,B,C) \equiv \left(\overline{A} + \overline{F'_A(A,B,C)}\right) = (B \cdot C) \equiv (\overline{A} + (B \nLeftarrow C))$$

$$F(A,B,C) = F(A,1,C) \equiv \left(B + \overline{F'_B(A,B,C)}\right) = (A \oplus C) \equiv (B + (A \Leftarrow C))$$

$$F(A,B,C) = F(A,0,C) \equiv \left(\overline{B} + \overline{F'_B(A,B,C)}\right) = (A \nRightarrow C) \equiv (\overline{B} + (A \Leftarrow C))$$

$$F(A,B,C) = F(A,B,1) \equiv \left(C + \overline{F'_C(A,B,C)}\right) = (A \nLeftarrow B) \equiv (C + (A \circ B))$$

$$F(A,B,C) = F(A,B,0) \equiv \left(\overline{C} + \overline{F'_C(A,B,C)}\right) = A \equiv (\overline{C} + (A \circ B))$$

№14-15.

Смешанные производные в табличном и аналитическом виде.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0	1	0
F'_A	1	0	1	1	1	0	1	1
F'_B	0	1	0	1	0	0	0	0
F'_C	0	0	1	1	1	1	1	1
$F''_{A,B}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$F''_{A,C}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$F''_{B,C}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$F'''_{A,B,C}$	1	1	1	1	1	1	1	1

$F'_A = B \Leftarrow C$

$F'_B = A \nLeftarrow C$

$F'_C = A + B$

$F''_{A,B} = C$

$F''_{A,C} = \overline{B}$

$F''_{B,C} = \overline{A}$

$F'''_{A,B,C} = 1$

№16.

Разложим функцию *F* в ряд Маклорена в базисе {1, ⊕, ·}. Получим полином Жегалкина.

$$F(A,B,C) = A \oplus (A \cdot C) \oplus (B \cdot C) \oplus (A \cdot B \cdot C)$$

№17.

Разложим функцию *F* в ряд Тейлора в каждой точке пространства в базисе {1, ⊕, ·}.

При разложении будем использовать сокращенную запись $\overline{A} = A \oplus 1, \overline{B} = B \oplus 1, \overline{C} = C \oplus 1$.

(0,0,0): $F(A,B,C) = A \oplus (A \cdot C) \oplus (B \cdot C) \oplus (A \cdot B \cdot C)$

(0,0,1): $F(A,B,C) = B \oplus (A \cdot B) \oplus (A \cdot \overline{C}) \oplus (B \cdot \overline{C}) \oplus (A \cdot B \cdot \overline{C})$

(0,1,0): $F(A,B,C) = A \oplus C \oplus (\overline{B} \cdot C) \oplus (A \cdot \overline{B} \cdot C)$

(0,1,1): $F(A,B,C) = 1 \oplus A \oplus \overline{B} \oplus \overline{C} \oplus (A \cdot \overline{B}) \oplus (\overline{B} \cdot \overline{C}) \oplus (A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})$

(1,0,0): $F(A,B,C) = 1 \oplus \overline{A} \oplus C \oplus (\overline{A} \cdot C) \oplus (\overline{A} \cdot B \cdot C)$

(1,0,1): $F(A,B,C) = \overline{C} \oplus (\overline{A} \cdot B) \oplus (\overline{A} \cdot \overline{C}) \oplus (\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C})$

(1,1,0): $F(A,B,C) = 1 \oplus \overline{A} \oplus C \oplus (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C)$

(1,1,1): $F(A,B,C) = \overline{A} \oplus \overline{C} \oplus (\overline{A} \cdot \overline{B}) \oplus (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C})$

№18.

Разложим функцию F в ряд Маклорена в базисе $\{0, \equiv, +\}$.

$$F(A,B,C) = 0 \equiv A \equiv C \equiv (A+B) \equiv (A+B+C)$$

№19.

Разложим функцию F в ряд Тейлора в каждой точке пространства в базисе $\{0, \equiv, +\}$.

При разложении будем использовать сокращенную запись $\overline{A} = A \equiv 0, \overline{B} = B \equiv 0, \overline{C} = C \equiv 0$.

(1,1,1): $F(A,B,C) = 0 \equiv A \equiv C \equiv (A+B) \equiv (A+B+C)$

(1,1,0): $F(A,B,C) = A \equiv \overline{C} \equiv (A+B+\overline{C})$

(1,0,1): $F(A,B,C) = 0 \equiv C \equiv (A+\overline{B}) \equiv (A+C) \equiv (A+\overline{B}+C)$

(1,0,0): $F(A,B,C) = A \equiv \overline{C} \equiv (A+\overline{C}) \equiv (A+\overline{B}+\overline{C})$

(0,1,1): $F(A,B,C) = \overline{A} \equiv B \equiv C \equiv (\overline{A}+B) \equiv (B+C) \equiv (\overline{A}+B+C)$

(0,1,0): $F(A,B,C) = 0 \equiv \overline{A} \equiv \overline{C} \equiv (B+\overline{C}) \equiv (\overline{A}+B+\overline{C})$

(0,0,1): $F(A,B,C) = 0 \equiv \overline{B} \equiv (\overline{A}+\overline{B}) \equiv (\overline{A}+C) \equiv (\overline{B}+C) \equiv (\overline{A}+\overline{B}+C)$

(0,0,0): $F(A,B,C) = 0 \equiv \overline{A} \equiv (\overline{A}+\overline{C}) \equiv (\overline{B}+\overline{C}) \equiv (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

№20.

Выразим функцию F с помощью минимального количества операций.

Из первой минимальной конъюнктивной нормальной формы, полученной в №9, выразим функцию Fс помощью трех операций.

$$F(A,B,C) = (A+C)\cdot\left(\overline{A}+\overline{C}\right)\cdot(A+B) = (A\oplus C)\cdot(A+B)$$

Используя законы двойного отрицания и де Моргана, получаем:

$$F(A,B,C) = \overline{\overline{(A\oplus C)\cdot(A+B)}} = \overline{\overline{(A\oplus C)} + \overline{(A+B)}} = (A\equiv C)\circ(A\circ B)$$

$$F(A,B,C) = \overline{\overline{(A\oplus C)}}\cdot(A+B) = \overline{(A\equiv C)}\cdot(A+B) = (A\equiv C) \nLeftarrow (A+B)$$

$$F(A,B,C) = (A\oplus C)\cdot\overline{\overline{(A+B)}} = (A\oplus C)\cdot\overline{(A\circ B)} = (A\oplus C) \nRightarrow (A\circ B)$$

Из второй минимальной конъюнктивной нормальной формы, полученной в №9, выразим функцию Fс помощью трех операций.

$$F(A,B,C) = (A+C)\cdot\left(\overline{A}+\overline{C}\right)\cdot\left(B+\overline{C}\right) = (A\oplus C)\cdot(B\Leftarrow C)$$

Используя законы двойного отрицания и де Моргана, получаем:

$$F(A,B,C) = \overline{\overline{(A\oplus C)\cdot(B\Leftarrow C)}} = \overline{\overline{(A\oplus C)} + \overline{(B\Leftarrow C)}} = (A\equiv C)\circ(B\nLeftarrow C)$$

$$F(A,B,C) = \overline{\overline{(A\oplus C)}}\cdot(B\Leftarrow C) = \overline{(A\equiv C)}\cdot(B\Leftarrow C) = (A\equiv C) \nLeftarrow (B\Leftarrow C)$$

$$F(A,B,C) = (A\oplus C)\cdot\overline{\overline{(B\Leftarrow C)}} = (A\oplus C)\cdot\overline{(B\nLeftarrow C)} = (A\oplus C) \nRightarrow (B\nLeftarrow C)$$

Из разложения Рида в точке A=1, полученного в №12, выразим функцию F с помощью трех операций.

$$F(A,B,C) = \overline{C} \oplus \overline{A} \cdot (B \Leftarrow C) = C \equiv (A \not\Leftarrow (B \Leftarrow C))$$

Используя эквивалентные преобразования, получаем:

$$F(A,B,C) = C \equiv \big(A \not\Leftarrow (B \Leftarrow C)\big) = C \oplus \overline{\big(A \not\Leftarrow (B \Leftarrow C)\big)} = C \oplus (A \Leftarrow (B \Leftarrow C))$$

$$F(A,B,C) = C \oplus \big(A \Leftarrow (B \Leftarrow C)\big) = C \oplus \big(A + (B \not\Leftarrow C)\big)$$

$$F(A,B,C) = C \oplus \big(A + (B \not\Leftarrow \mathrm{C})\big) = C \equiv \overline{\big(A + (B \not\Leftarrow \mathrm{C})\big)} = C \equiv (A \circ (B \not\Leftarrow C))$$

Разложение Рида функции F в точке C=0, полученное в №12, содержит три операции.

$$F(A,B,C) = A \oplus C \cdot (A + B)$$

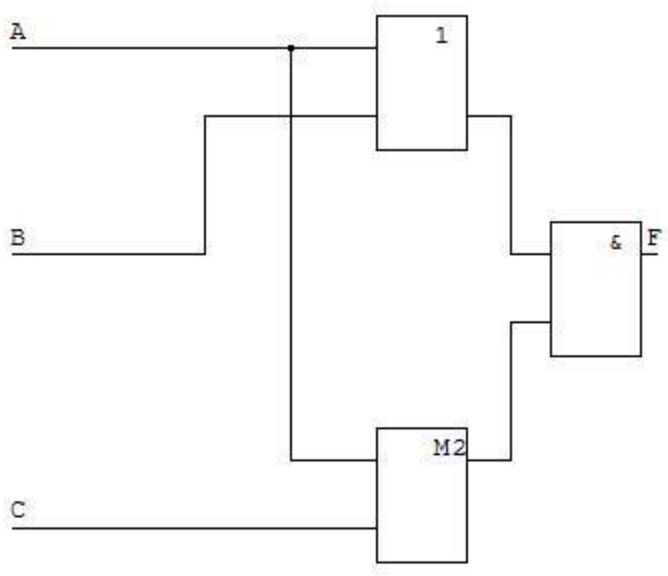
Используя эквивалентные преобразования, получаем:

$$F(A,B,C) = A \oplus \mathrm{C} \cdot (A + B) = A \equiv \overline{C \cdot (A + B)} = A \equiv C | (A + B)$$

$$F(A,B,C) = A \equiv \overline{C \cdot (A + B)} = A \equiv \big(\bar{C} + \overline{(A + B)}\big) = A \equiv (C \Rightarrow (A \circ B))$$

$$F(A,B,C) = A \equiv \big(C \Rightarrow (A \circ B)\big) = A \oplus \overline{\big(C \Rightarrow (A \circ B)\big)} = A \oplus \big(C \not\Rightarrow (A \circ B)\big)$$

Для реализации в программе WiLociga комбинационной схемы используем первое полученное аналитическое представление функции F.



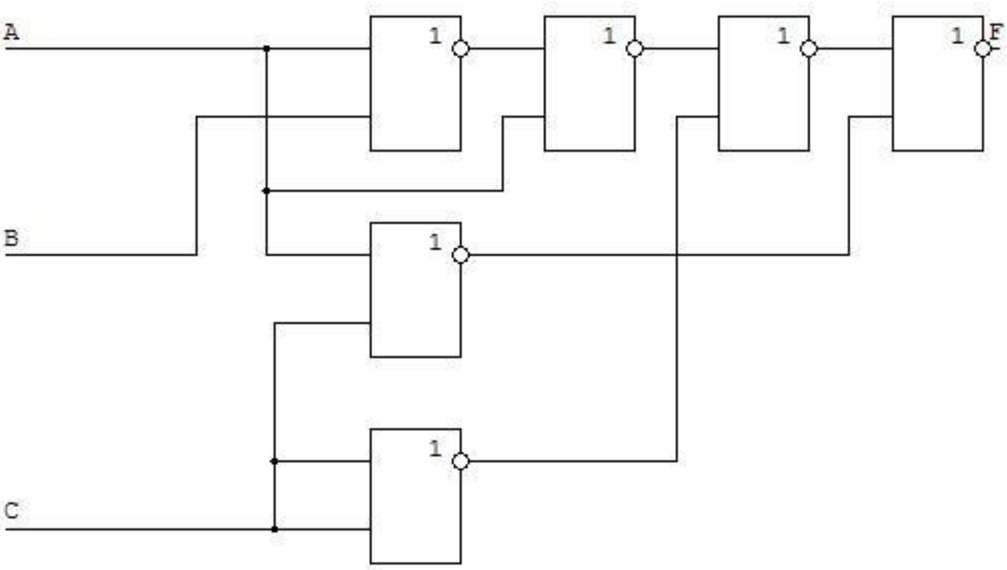
№21.

Получим аналитические представления функции *F* в каждом их семнадцати базисов, соответствующие минимальному количеству блоков комбинационной схемы.

21.1. В базисе {∘} отрицание можно выразить одним блоком, объединив два входа в один. Будем преобразовывать минимальную дизъюнктивную нормальную форму, полученную в №5.

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{C} = \overline{\overline{\left(\overline{A}\cdot B+\overline{C}\right)\cdot(A+C)}} = \overline{\overline{\left(\overline{A}\cdot B+\overline{C}\right)}+\overline{(A+C)}} =$$

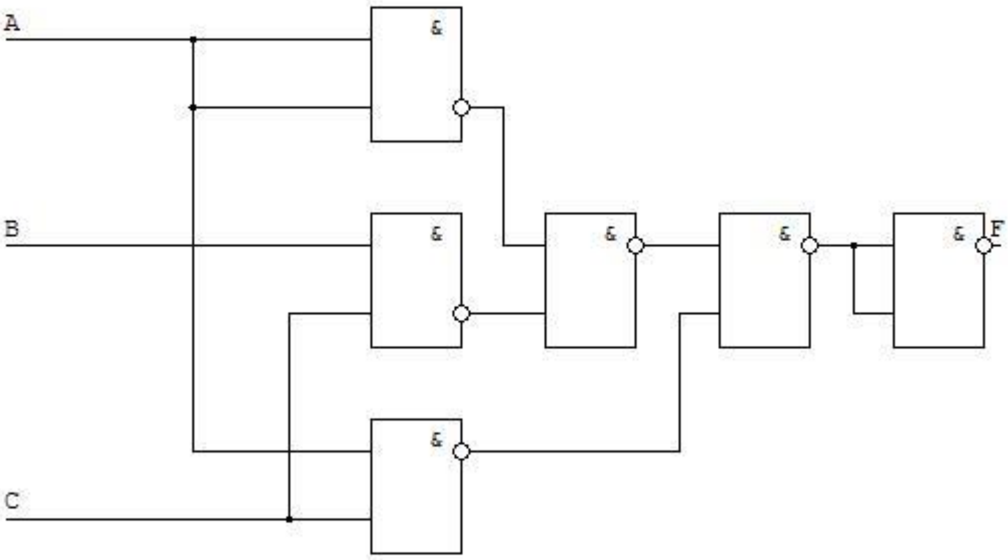
$$\left(\left(\overline{A}\cdot B\right)\circ(\mathrm{C}\circ\mathrm{C})\right)\circ(A\circ C) = ((\overline{\overline{\overline{A}\cdot(A+B)}})\circ(C\circ C))\circ(A\circ C) = ((A\circ(A\circ B))\circ(C\circ C))\circ(A\circ C)$$



21.2. В базисе {|} отрицание можно выразить одним блоком, объединив два входа в один. Будем преобразовывать минимальную дизъюнктивную нормальную форму, полученную в №5.

$$F(A,B,C) = \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{C} = (A+B\cdot C)\cdot(\overline{A}+\overline{C}) = (\overline{\overline{A+B\cdot C}})\cdot(\overline{A\cdot C}) =$$

$$\left(\overline{\overline{A}\cdot\ \overline{B\cdot C}}\right)\cdot\left(\overline{A\cdot C}\right) = \left((A|A)\middle|(B|C)\right)\cdot(A|C) = \overline{\left((A|A)\middle|(B|C)\right)|(A|C)}$$

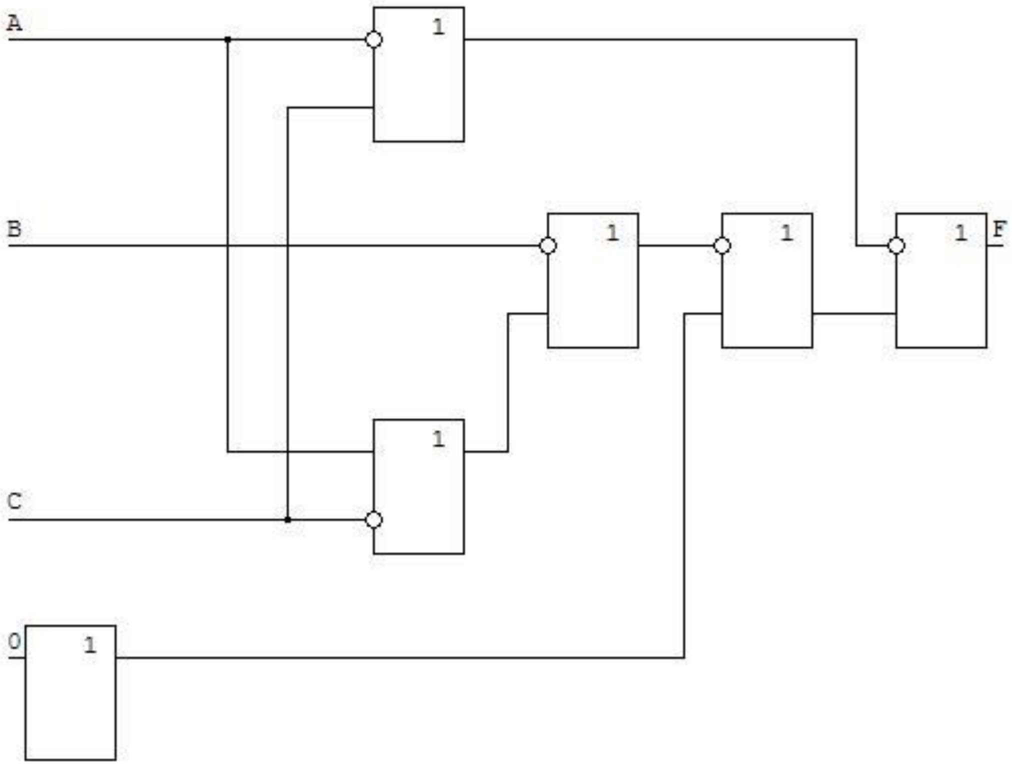


21.3. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{0, \Rightarrow\}$.

Будем преобразовывать минимальную дизъюнктивную нормальную форму, полученную в №5.

$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C} = \overline{\overline{\overline{A} \cdot B \cdot C}} + \overline{\overline{A \cdot \overline{C}}} = \overline{\overline{A} + C} + \overline{A + \overline{B} + \overline{C}} =$$

$$\overline{A \Rightarrow C} + \overline{C \Rightarrow (B \Rightarrow A)} + 0 = (A \Rightarrow C) \Rightarrow (C \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow 0$$



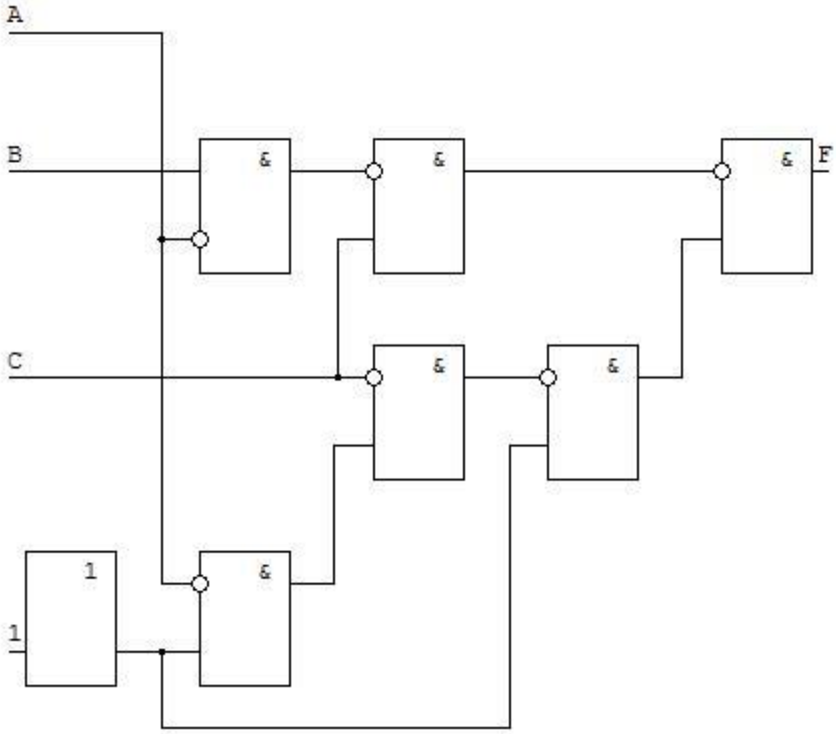
21.4. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{1, \nRightarrow\}$.

Будем преобразовывать минимальную дизъюнктивную нормальную форму, полученную в №6.

$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C} = (A + C) \cdot \left(\overline{A} \cdot B + \overline{C}\right) = \left(\overline{\overline{(1 \Rightarrow A)}} + C\right) \cdot \left(\overline{\overline{C \Rightarrow (B \nRightarrow A)}}\right) =$$

$$\left((1 \nRightarrow A) \Rightarrow C\right) \nRightarrow \left(C \nRightarrow (B \nRightarrow A)\right) = \left(1 \cdot \overline{\overline{((1 \nRightarrow A) \Rightarrow C)}}\right) \nRightarrow \left(C \nRightarrow (B \nRightarrow A)\right) =$$

$$(1 \nRightarrow \left((1 \nRightarrow A) \nRightarrow C\right)) \nRightarrow \left(C \nRightarrow (B \nRightarrow A)\right)$$

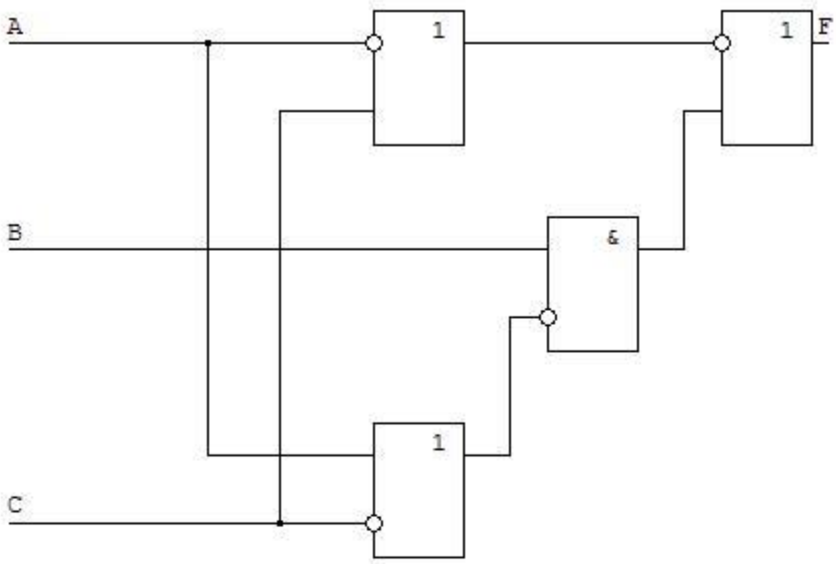


21.5. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{\Rightarrow, \nRightarrow\}$.

Будем преобразовывать минимальную дизъюнктивную нормальную форму, полученную в №5.

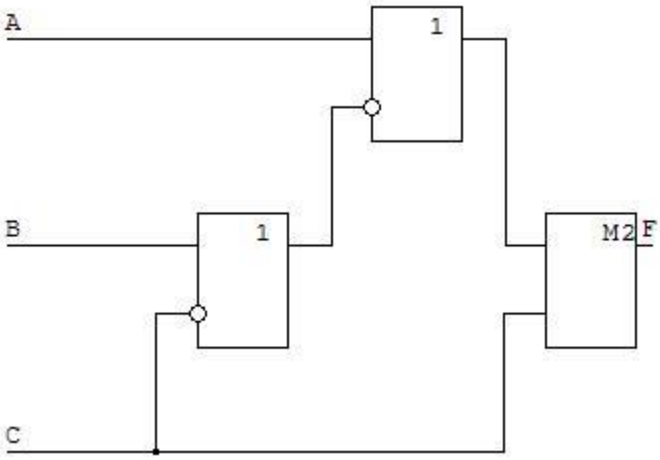
$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C} = \mathrm{A} \nRightarrow C + B \cdot \overline{\overline{\overline{A} \cdot C}} = \mathrm{A} \nRightarrow C + B \cdot \overline{A + \overline{C}} =$$

$$(\mathrm{A} \nRightarrow C) + \left(B \nRightarrow (C \Rightarrow A)\right) = (\mathrm{A} \Rightarrow C) \Rightarrow \left(B \nRightarrow (C \Rightarrow A)\right)$$



21.6. Аналитическое представление функции F в базисе $\{\oplus, \Rightarrow\}$ с минимальным количеством операций найдено из разложения Рида в точке A=1 в №20.

$$F(A,B,C) = C \oplus \big(A \Leftarrow (B \Leftarrow \mathrm{C})\big)$$

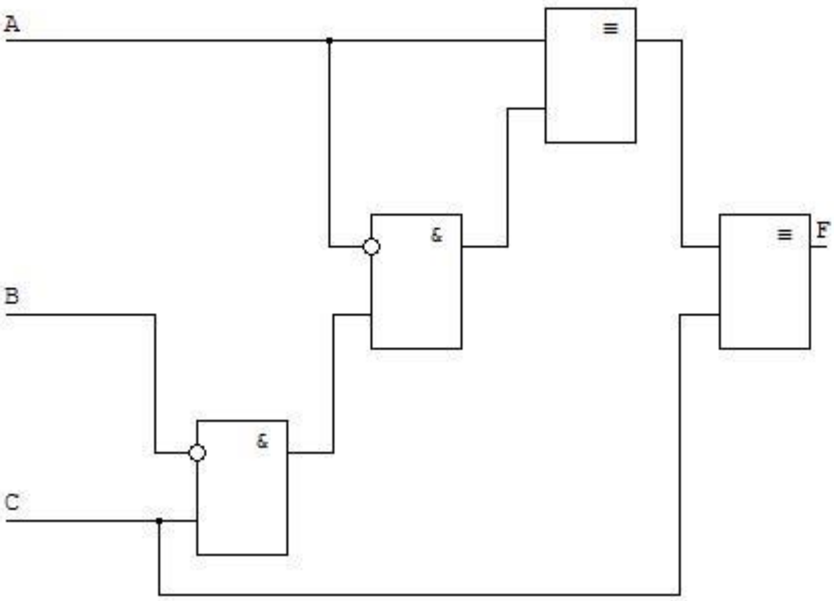


21.7. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{\equiv, \nRightarrow\}$.

Будем преобразовывать аналитическое представление функции F, полученное в №6.

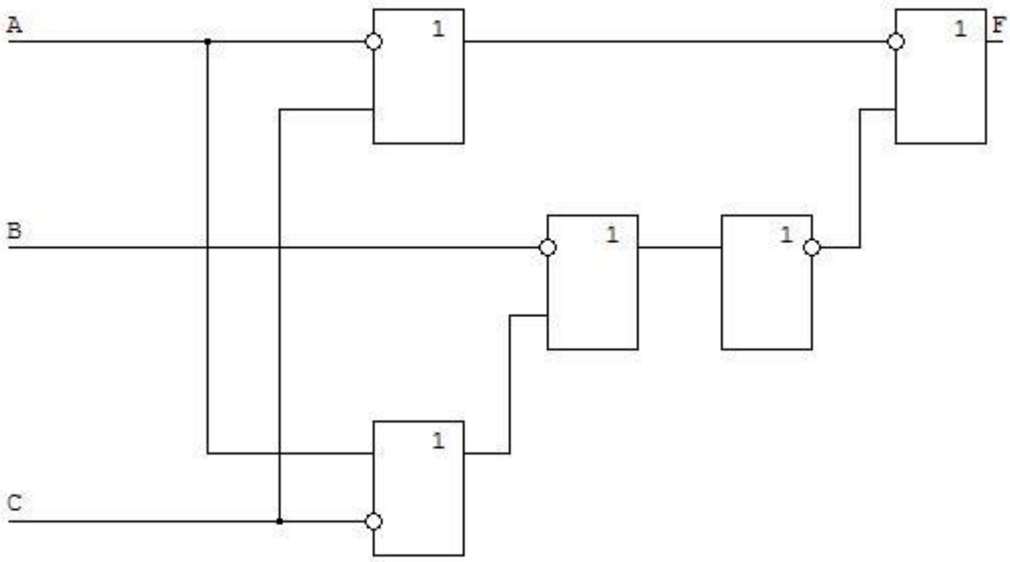
$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C \oplus A \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot (\overline{B} \oplus 1) \cdot C \oplus A \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \oplus \overline{A} \cdot C \oplus A \cdot \overline{C} =$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \oplus \overline{A} \cdot C \oplus A \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \oplus A \oplus C = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \equiv A \equiv C = ((C \nRightarrow B) \nRightarrow A) \equiv A \equiv C$$



21.8. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{\neg, \Rightarrow\}$. Из представления, найденного в 21.5, получим аналитическое представление F в заданном базисе.

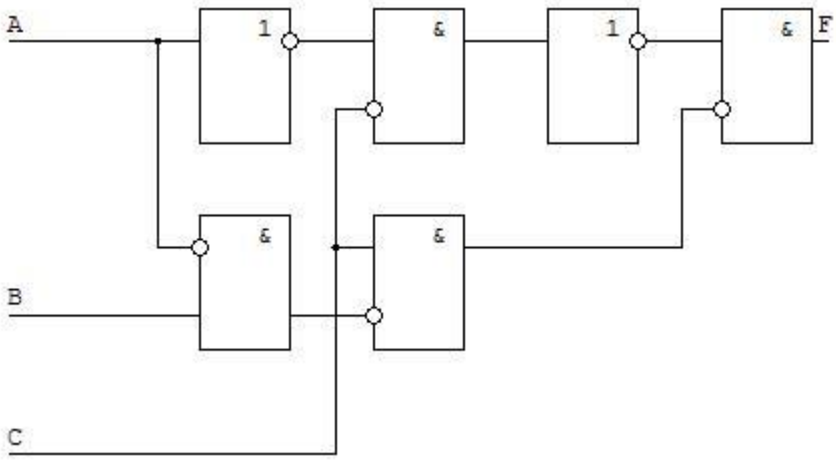
$$F(A,B,C) = (A \Rightarrow C) \Rightarrow \left(B \nRightarrow (C \Rightarrow A)\right) = (A \Rightarrow C) \Rightarrow \overline{\left(B \Rightarrow (C \Rightarrow A)\right)}$$



21.9. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{\neg, \nRightarrow\}$.
Будем преобразовывать минимальную дизъюнктивную нормальную форму, полученную в №5.

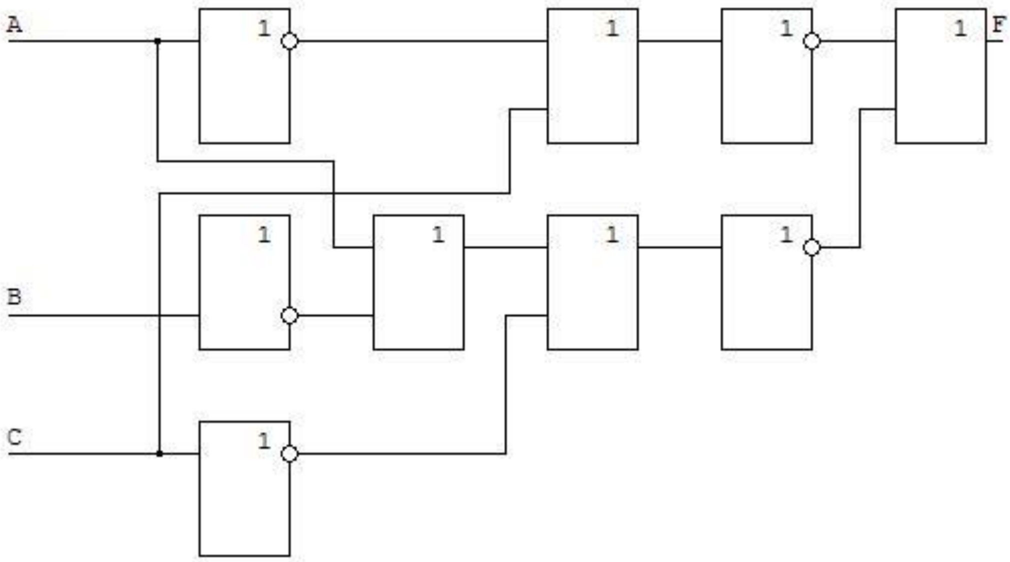
$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C} = (A + C) \cdot \left(\overline{A} \cdot B + \overline{C}\right) = \left(\overline{\overline{A}} + C\right) \cdot \left(C \Rightarrow (B \nRightarrow A)\right) =$$

$$(\overline{\overline{\overline{A} \Rightarrow C}}) \cdot \left(\overline{\overline{C \Rightarrow (B \nRightarrow A)}}\right) = \overline{(\overline{A} \nRightarrow C)} \nRightarrow \left(C \nRightarrow (B \nRightarrow A)\right)$$



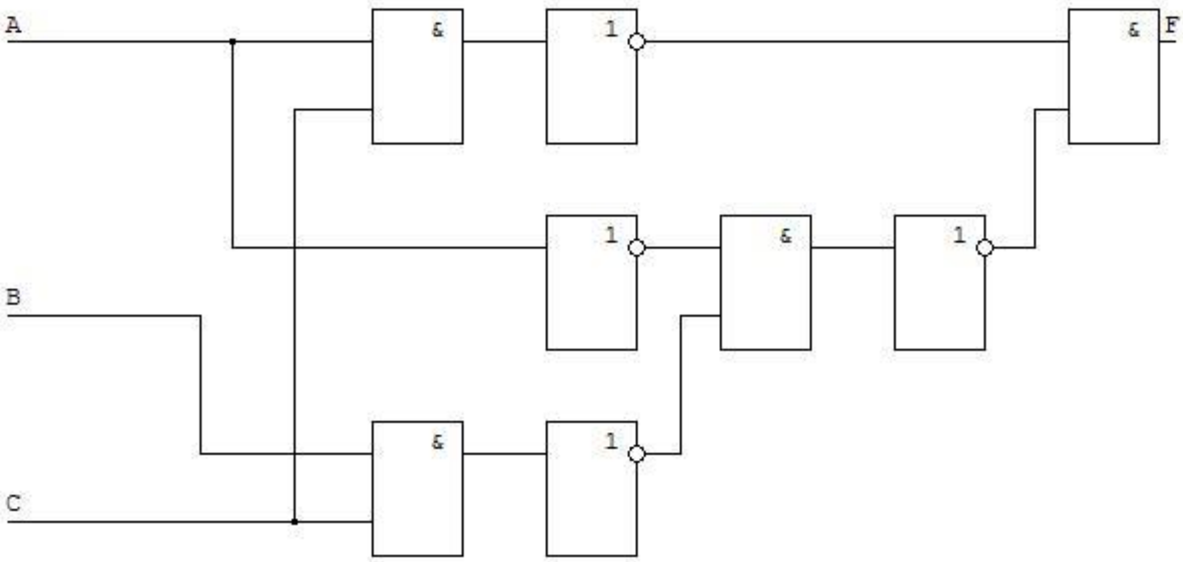
21.10. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{\neg, +\}$.
Будем преобразовывать минимальную дизъюнктивную нормальную форму, полученную в №5.

$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C} = \overline{A + \overline{B} + \overline{C}} + \overline{\overline{A} + C}$$



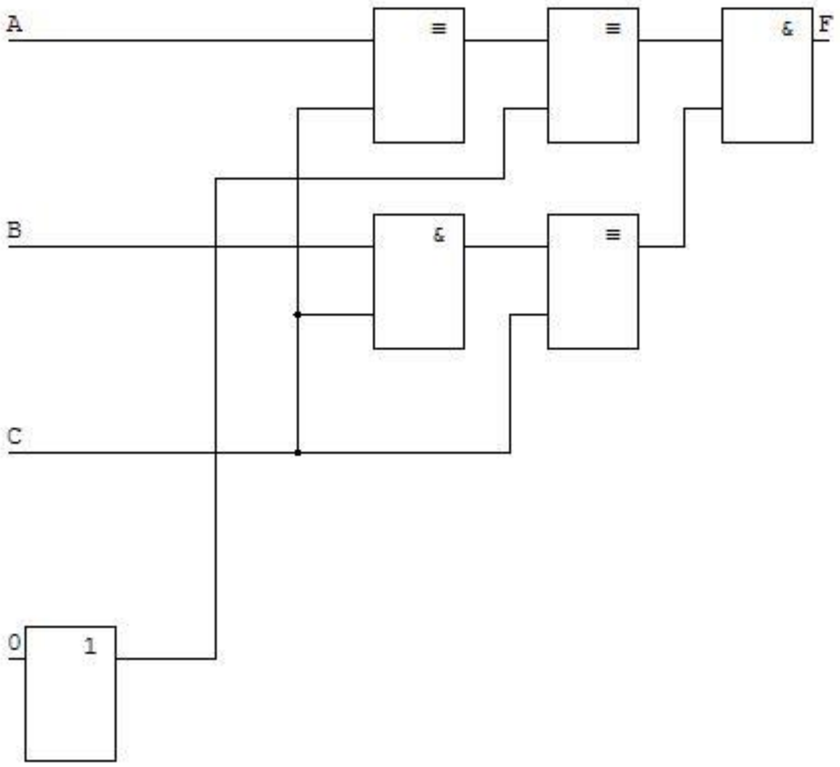
21.11. Аналитическое представление функции F в базисе $\{\neg,\cdot\}$ было найдено в качестве вспомогательного результата в 21.2 при построении аналитического представления функции в базисе Шеффера.

$$F(A,B,C) = \left(\overline{\overline{A} \cdot \overline{B \cdot C}}\right) \cdot \left(\overline{A \cdot C}\right)$$



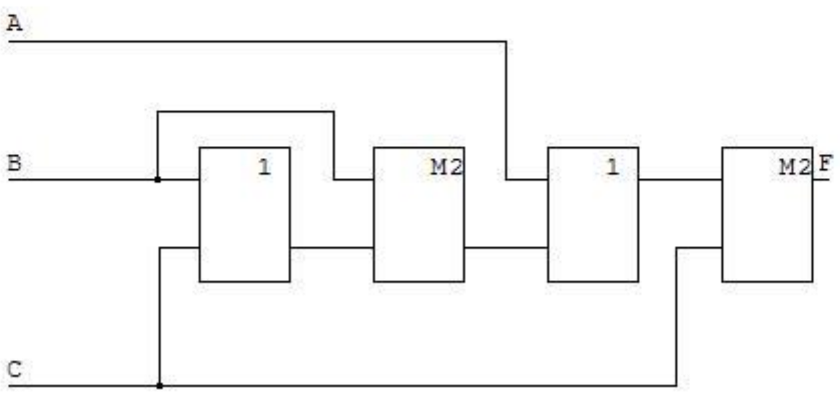
21.12. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{0, \equiv, \cdot\}$.
Будем преобразовывать минимальную конъюнктивную нормальную форму, полученную в №9.

$$F(A,B,C) = (A + C) \cdot \left(\overline{A} + \overline{C}\right) \cdot \left(B + \overline{C}\right) = (A \oplus C) \cdot \overline{\overline{\left(B + \overline{C}\right)}} =$$
$$(A \oplus C \oplus 0) \cdot (B \cdot C \oplus C \oplus 1) = (A \equiv C \equiv 0) \cdot (B \cdot C \equiv C)$$



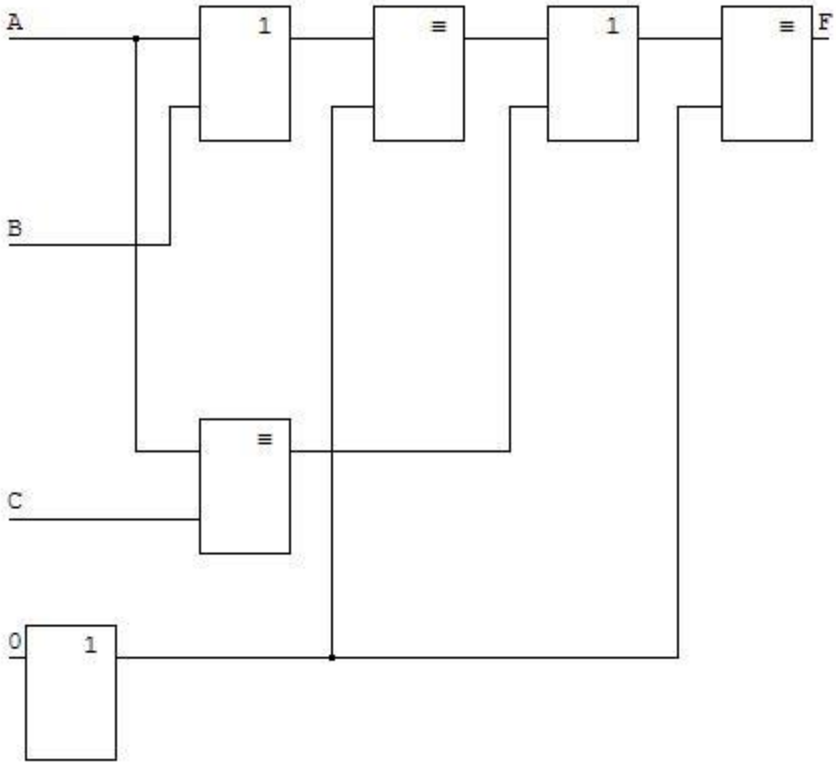
21.13. Аналитическое представление функции F в базисе $\{1, \oplus, +\}$ с минимальным количеством блоков найдем из разложения Рида в №20.

$$F(A,B,C) = C \oplus (A + \left((B \nLeftarrow C)\right) = C \oplus \left(A + (\overline{B} \cdot C)\right) = C \oplus \left(A + (B \cdot C \oplus C \oplus B \oplus B)\right) =$$
$$C \oplus \left(A + ((B \cdot C \oplus C \oplus B) \oplus B)\right) = C \oplus \left(A + ((B + C) \oplus B)\right)$$



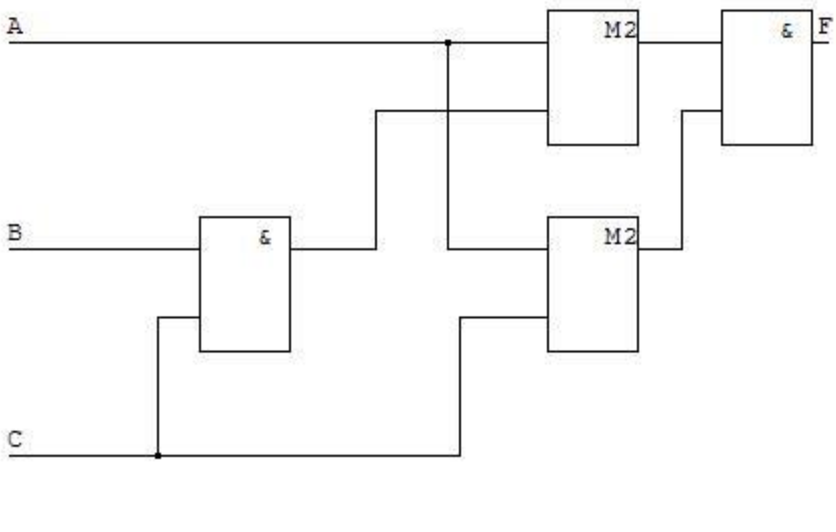
21.14. Аналитическое представление функции F в базисе $\{0, \equiv, +\}$ с минимальным количеством блоков найдем из представления функции, полученного в №20.

$$F(A,B,C) = (A \equiv C) \circ (A \circ B) = 0 \equiv ((A \equiv C) + (0 \equiv (A + B)))$$



21.15. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{1, \oplus, \cdot\}$.
Будем преобразовывать полином Жегалкина, полученный в №16.

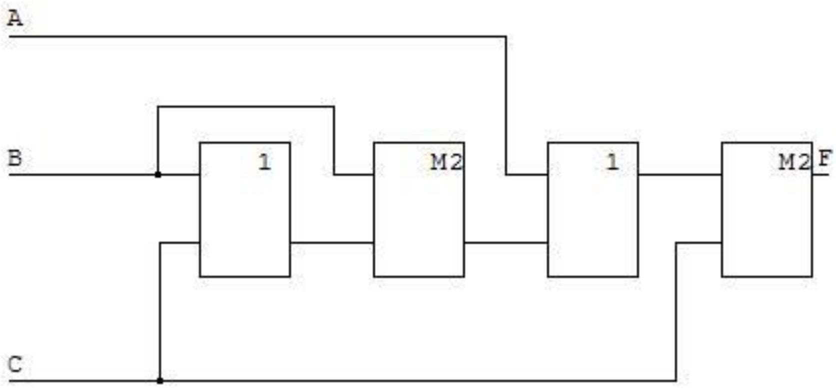
$$F(A,B,C) = A \oplus (A \cdot C) \oplus (B \cdot C) \oplus (A \cdot B \cdot C) = \big(A \oplus (A \cdot B \cdot C)\big) \oplus \big((A \cdot C) \oplus (B \cdot C)\big) =$$
$$A \cdot (A \oplus B \cdot C) \oplus C \cdot (A \oplus B \cdot C) = (A \oplus C) \cdot (A \oplus B \cdot C)$$



21.16. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{+, \oplus, \equiv\}$.

В 2.13 не был использован функциональный блок 1. Поэтому аналитическое представление функции такое же, как и в 2.13.

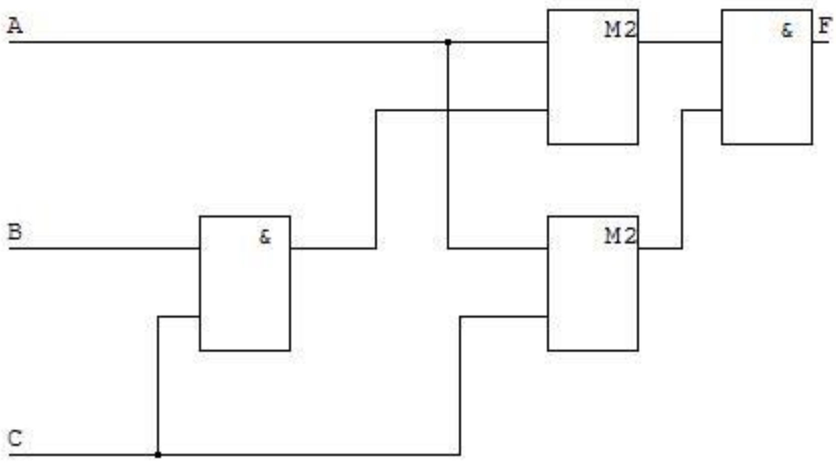
$$F(A,B,C) = C \oplus \big(A + ((B + C) \oplus B)\big)$$



21.17. Найдем аналитическое представление функции F в базисе $\{\cdot, \oplus, \equiv\}$.

В 2.15 не был использован функциональный блок 1. Поэтому аналитическое представление функции такое же, как и в 2.15.

$$F(A,B,C) = (A \oplus C) \cdot (A \oplus B \cdot C)$$



№22-23.

Условия переключения сигнала на выходе схемы, реализующей функцию *F*, при переключении сигналов на каждой паре её входов, в табличном и аналитическом виде.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0	1	0
$F'_{(A,B)}$	1	0	1	1	1	1	1	0
$F'_{(A,C)}$	0	1	0	0	1	0	0	0
$F'_{(B,C)}$	1	0	0	1	1	1	1	1

$$F'_{(A,B)} = (A \oplus B) \Leftarrow C$$
$$F'_{(A,C)} = (A \oplus C) \nRightarrow B$$
$$F'_{(B,C)} = (B \oplus C) \Rightarrow A$$

№24-25.

Условия переключения сигнала на выходе схемы, реализующей функцию *F*, при переключении сигналов на всех её входах, в табличном и аналитическом виде.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	1	1	0	1	0
$F'_{(A,B,C)}$	0	1	0	0	0	0	1	0

$F'_{(A,B,C)} = (A \oplus C) \cdot (B \oplus C)$

№26.

Определим принадлежность функции F к пяти замкнутым классам критерия Поста.

$F \in T_0$, т.к. $F(0,0,0) = 0$.
$F \notin T_1$, т.к. $F(1,1,1) = 0$.
$F \notin T_*$, т.к. $F(0,0,0) = 0$ и $F(1,1,1) = 0$.
$F \notin T_\leq$, т.к. $F(1,0,0) > F(1,0,1)$.
$F \notin T_L$, т.к. $F(A,B,C) = A \oplus (A \cdot C) \oplus (B \cdot C) \oplus (A \cdot B \cdot C)$ содержит нелинейные слагаемые.

№27.

Выразим через функцию *F* функции двух переменных.

Поскольку $F \in T_0$, то из F с помощью операции суперпозиции нельзя получить никакие функции двух переменных $G \notin T_0$, т.е. нельзя получить функции, для которых $G(0,0) = 1$.
$0 = F(A,A,A)$
$A \nRightarrow B = F(A,A,B)$
$A \nLeftarrow B = F(B,B,A)$
$A \oplus B = F(A,B,B)$
$A \cdot B = F(F(A,A,A),A,B)$
$A + B = F\big(F(F(A,A,A),A,B),F(A,B,B),F(A,B,B)\big)$

Две оставшиеся из восьми функции двух переменных, сохраняющих 0, являются тождественными функциями переменных A и B. Их выражать не нужно.