НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Дисциплина: «Дискретная математика»

Домашнее задание 1

Исследование комбинационных схем
Вариант 181

Выполнил: Мартиросян Тигран Оганнесович,
студент гр. 176

Преподаватель: Авдошин С.М.,
профессор департамента
программной инженерии
факультета компьютерных наук

Москва 2017

№1

$$7X_7 \oplus 186X_6 \oplus 213X_5 \oplus 21X_4 \oplus 238X_3 \oplus 142X_2 \oplus 30X_1 \oplus 191X_0 = 183$$

Переведем коэффициенты уравнения в двоичную систему счисления.
$7_{10} = 00000111_2, 186_{10} = 10111010_2, 213_{10} = 11010101_2, 21_{10} = 00010101_2, 238_{10} = 11101110_2, 142_{10} = 10001110_2, 30_{10} = 00011110_2, 191_{10} = 10111111_2, 183_{10} = 10110111_2$.
Составим расширенную матрицу коэффициентов соответствующей системы линейных уравнений в $GF(2)$ и решим систему.

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&1&1&1&0\\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (6)\oplus=(5)\\ (7)\oplus=(5) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&1&1&1&0\\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (2)\oplus=(0)\\ (3)\oplus=(0)\\ (4)\oplus=(0)\\ (6)\oplus=(0) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (0)\oplus=(1)\\ (2)\oplus=(1)\\ (4)\oplus=(1)\\ (5)\oplus=(1) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (5)\oplus=(3)\\ (6)\oplus=(3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (1)\oplus=(2)\\ (3)\oplus=(2)\\ (4)\oplus=(2)\\ (5)\oplus=(2)\\ (7)\oplus=(2) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (0)\oplus=(4)\\ (1)\oplus=(4)\\ (2)\oplus=(4)\\ (5)\oplus=(4) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (0)\oplus=(6)\\ (1)\oplus=(6)\\ (2)\oplus=(6)\\ (3)\oplus=(6)\\ (4)\oplus=(6)\\ (5)\oplus=(6)\\ (7)\oplus=(6) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (1)\oplus=(7)\\ (2)\oplus=(7)\\ (3)\oplus=(7)\\ (4)\oplus=(7)\\ (6)\oplus=(7) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

В описаниях преобразований строки обозначены как (1), (2), …, (8),
а выражение (i)⊕=(j) обозначает «заменить все числа в строке (i)
на их сумму по модулю 2 с соответствующими числами строки (j)».

Получаем решение: X7 = 1, X6 = 1, X5 = 1, X4 = 0, X3 = 1, X2 = 1, X1 = 0, X0 = 1.
Составим таблицу истинности функции F.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	1	0	1	1	0	1

Десятичный номер функции F равен $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 237$.

№2

Представим таблицу истинности логической функции F в виде карты Карно.

F	0	0	1	1	A
	0	1	1	0	B
0	1	1	0	1	
1	1	0	1	1	
C					

№3

Выполним дизъюнктивны разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{A} \cdot (B \mid C) + A \cdot (B \Rightarrow C)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{B} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{B} + B \cdot (A \equiv C)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{C} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \overline{C} \cdot (A \mid B) + C \cdot (A \Leftarrow B)$$

№4

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC \tag{1}$$

№5

Минимальные дизъюнктивные формы

$$F(A, B, C) = \overline{B} + AC + \overline{AC} \tag{2}$$

№6

Из дизъюнктивных разложений получаем новые представления

$$F(A, B, C) = \overline{A} \cdot (B \mid C) \oplus A \cdot (B \Rightarrow C)$$
$$F(A, B, C) = \overline{B} \oplus B \cdot (A \equiv C)$$
$$F(A, B, C) = \overline{C} \cdot (A \mid B) \oplus C \cdot (A \Leftarrow B)$$
$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \oplus \bar{A}\bar{B}C \oplus \bar{A}B\bar{C} \oplus A\bar{B}\bar{C} \oplus A\bar{B}C \oplus ABC$$

№7

Выполним конъюнктивные разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(A + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\overline{A} + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (A + (B \mid C)) \cdot (\overline{A} + (B \Rightarrow C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(B + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\overline{B} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = B \cdot (\overline{B} + (A \equiv C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(C + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\overline{C} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = (C + (A \mid B)) \cdot (\overline{C} + (A \Leftarrow B))$$

№8

Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

$$F(A,B,C) = (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \tag{3}$$

№9

Минимальные конъюнктивные нормальные формы.

$$F(A,B,C) = (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \tag{4}$$

№10

Из конъюнктивных разложений, используя ортогональность, получаем новые представления функции

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= (A + (B \mid C)) \equiv (\overline{A} + (B \Rightarrow C)) \\ F(A,B,C) &= B \equiv (\overline{B} + (A \equiv C)) \\ F(A,B,C) &= (C + (A \mid B)) \equiv (\overline{C} + (A \Leftarrow B)) \\ F(A,B,C) &= (A + \overline{B} + \overline{C}) \equiv (\overline{A} + \overline{B} + C) \end{aligned}$$

№11

Вычислим производные логической функции F.

$$F'_A(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'_A = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$F'_B(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'_B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \oplus C$$

$$F'_C(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'_C = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

№12

Разложения Рида логической функции F.

$$F(A,B,C) = F(0,B,C) \oplus A \cdot F_A^{'}(A,B,C) = (B \mid C) \oplus A \cdot B$$
$$F(A,B,C) = F(1,B,C) \oplus \overline{A} \cdot F_A^{'}(A,B,C) = (B \Rightarrow C) \oplus \overline{A} \cdot B$$
$$F(A,B,C) = F(A,0,C) \oplus B \cdot F_B^{'}(A,B,C) = (1 \oplus B) \cdot (A \oplus C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,1,C) \oplus \overline{B} \cdot F_B^{'}(A,B,C) = (A \equiv C) \oplus \overline{B} \cdot (A \oplus C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,0) \oplus C \cdot F_C^{'}(A,B,C) = (A \mid B) \oplus C \cdot B$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,1) \oplus \overline{C} \cdot F_C^{'}(A,B,C) = (A \Leftarrow B) \oplus \overline{C} \cdot B$$

№13

Двойственные разложения Рида логической функции F.

$$F(A,B,C) = F(0,B,C) \equiv (\overline{A} + \overline{F_A'(A,B,C)}) = (B \mid C) \equiv (\overline{A} + \overline{B})$$
$$F(A,B,C) = F(1,B,C) \equiv (A + \overline{F_A'(A,B,C)}) = (B \Rightarrow C) \equiv (A + \overline{B})$$
$$F(A,B,C) = F(A,0,C) \equiv (\overline{B} + \overline{F_B'(A,B,C)}) = 1 \equiv (\overline{B} + (A \equiv C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,1,C) \equiv (B + \overline{F_B'(A,B,C)}) = (A \equiv C) \equiv (B + (A \equiv C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,0) \equiv (\overline{C} + \overline{F_C'(A,B,C)}) = (A \mid B) \equiv (\overline{C} + B)$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,1) \equiv (C + \overline{F_C'(A,B,C)}) = (A \Leftarrow B) \equiv (C + B)$$

№14-15

Смешанные производные в табличном и аналитическом виде.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	1	0	1	1	0	1
F'_A	0	0	1	1	0	0	1	1
F'_B	0	1	0	1	1	0	1	0
F'_C	0	0	1	1	0	0	1	1
F''_{AB}	1	1	1	1	1	1	1	1
F''_{AC}	0	0	0	0	0	0	0	0
F''_{BC}	1	1	1	1	1	1	1	1
F'''_{ABC}	0	0	0	0	0	0	0	0

$$F'_A = B$$
$$F'_B = A \oplus C$$
$$F'_C = B$$
$$F''_{AB} = 1$$
$$F''_{AC} = 0$$
$$F''_{BC} = 1$$
$$F'''_{ABC} = 0$$

№16

Разложим функцию F в ряд Маклорена в базисе $\{1, \oplus, \cdot\}$.
Получим полином Жегалкина.

$$F(A,B,C) = 1 \oplus BC \oplus AB \tag{5}$$

№17

Разложим функцию F в ряд Тейлора в базисе $\{1, \oplus, \cdot\}$.

При разложении будем использовать сокращенную запись $\overline{A} = A \oplus 1, \overline{B} = B \oplus 1, \overline{C} = C \oplus 1$.

$$(0,0,0) : F(A,B,C) = 1 \oplus BC \oplus AB$$
$$(0,0,1) : F(A,B,C) = 1 \oplus B \oplus AB \oplus B\overline{C}$$
$$(0,1,0) : F(A,B,C) = 1 \oplus A \oplus C \oplus A\overline{B} \oplus \overline{B}C$$
$$(0,1,1) : F(A,B,C) = A \oplus \overline{B} \oplus \overline{C} \oplus A\overline{B} \oplus \overline{B}\,\overline{C}$$
$$(1,0,0) : F(A,B,C) = 1 \oplus B \oplus \overline{A}B \oplus BC$$
$$(1,0,1) : F(A,B,C) = 1 \oplus \overline{A}B \oplus B\overline{C}$$
$$(1,1,0) : F(A,B,C) = \overline{A} \oplus \overline{B} \oplus C \oplus \overline{A}\,\overline{B} \oplus \overline{B}C$$
$$(1,1,1) : F(A,B,C) = 1 \oplus \overline{A} \oplus \overline{C} \oplus \overline{A}\,\overline{B} \oplus \overline{B}\,\overline{C}$$

№18

Разложим функцию F в ряд Маклорена в базисе $\{0, \equiv, +\}$.