НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Дисциплина: «Дискретная математика»

Домашнее задание 1

Исследование комбинационных схем
Вариант 181

Выполнил: Мартиросян Тигран Оганнесович,
студент гр. 176

Преподаватель: Авдошин С.М.,
профессор департамента
программной инженерии
факультета компьютерных наук

Москва 2017

№1

$$7X_7 \oplus 186X_6 \oplus 213X_5 \oplus 21X_4 \oplus 238X_3 \oplus 142X_2 \oplus 30X_1 \oplus 191X_0 = 183$$

Переведем коэффициенты уравнения в двоичную систему счисления.
$7_{10} = 00000111_2, 186_{10} = 10111010_2, 213_{10} = 11010101_2, 21_{10} = 00010101_2, 238_{10} = 11101110_2, 142_{10} = 10001110_2, 30_{10} = 00011110_2, 191_{10} = 10111111_2, 183_{10} = 10110111_2.$
Составим расширенную матрицу коэффициентов соответствующей системы линейных уравнений в $GF(2)$ и решим систему.

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&1&1&0&0&1&1&1\\
0&1&0&0&1&1&1&1&0\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&0&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&0&0&0&1&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(6)\oplus=(5)\\(7)\oplus=(5)\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&1&1&0&0&1&1&1\\
0&1&0&0&1&1&1&1&0\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(2)\oplus=(0)\\(3)\oplus=(0)\\(4)\oplus=(0)\\(6)\oplus=(0)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(0)\oplus=(1)\\(2)\oplus=(1)\\(4)\oplus=(1)\\(5)\oplus=(1)\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
1&0&0&1&0&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(5)\oplus=(3)\\(6)\oplus=(3)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(1)\oplus=(2)\\(3)\oplus=(2)\\(4)\oplus=(2)\\(5)\oplus=(2)\\(7)\oplus=(2)\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&1\\
1&0&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(0)\oplus=(4)\\(1)\oplus=(4)\\(2)\oplus=(4)\\(5)\oplus=(4)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(0)\oplus=(6)\\(1)\oplus=(6)\\(2)\oplus=(6)\\(3)\oplus=(6)\\(4)\oplus=(6)\\(5)\oplus=(6)\\(7)\oplus=(6)\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}(1)\oplus=(7)\\(2)\oplus=(7)\\(3)\oplus=(7)\\(4)\oplus=(7)\\(6)\oplus=(7)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1
\end{array}\right)$$

В описаниях преобразований строки обозначены как (1), (2), ..., (8), а выражение (i)⊕=(j) обозначает «заменить все числа в строке (i) на их сумму по модулю 2 с соответствующими числами строки (j)».

Получаем решение: X7 = 1, X6 = 1, X5 = 1, X4 = 0, X3 = 1, X2 = 1, X1 = 0, X0 = 1. Составим таблицу истинности функции F.

A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1
F	1	1	1	0	1	1	0	1

Десятичный номер функции F равен $2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 237$.

№2

Представим таблицу листинности логической функции F в виде карты Карно.

F	0	0	1	1	A
	0	1	1	0	B
0	1	1	0	1	
1	1	0	1	1	
C					

№3

Выполним дизъюнктивны разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{A} \cdot (B \mid C) + A \cdot (B \Rightarrow C)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{B} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{B} + B \cdot (A \equiv C)$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{C} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \overline{C} \cdot (A \mid B) + C \cdot (A \Leftarrow B)$$

№4

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC \tag{1}$$

№5

Минимальные дизъюнктивные формы

$$F(A,B,C) = \overline{B} + AC + \overline{AC} \tag{2}$$

№6

Из дизъюнктивных разложений получаем новые представления

$$F(A,B,C) = \overline{A} \cdot (B \mid C) \oplus A \cdot (B \Rightarrow C)$$
$$F(A,B,C) = \overline{B} \oplus B \cdot (A \equiv C)$$
$$F(A,B,C) = \overline{C} \cdot (A \mid B) \oplus C \cdot (A \Leftarrow B)$$
$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \oplus \bar{A}\bar{B}C \oplus \bar{A}B\bar{C} \oplus A\bar{B}\bar{C} \oplus A\bar{B}C \oplus ABC$$

№7

Выполним конъюнктивные разложения Шеннона логической функции F.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(A + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\overline{A} + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (A + (B \mid C)) \cdot (\overline{A} + (B \Rightarrow C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(B + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\overline{B} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = B \cdot (\overline{B} + (A \equiv C))$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(C + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\overline{C} + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (C + (A \mid B)) \cdot (\overline{C} + (A \Leftarrow B))$$

№8

Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

$$F(A,B,C) = (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \tag{3}$$

№9

Минимальные конъюнктивные нормальные формы.

$$F(A,B,C) = (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \tag{4}$$

№10

Из конъюнктивных разложений, используя ортогональность, получаем новые представления функции

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= (A + (B \mid C)) \equiv (\overline{A} + (B \Rightarrow C)) \\ F(A,B,C) &= B \equiv (\overline{B} + (A \equiv C)) \\ F(A,B,C) &= (C + (A \mid B)) \equiv (\overline{C} + (A \Leftarrow B)) \\ F(A,B,C) &= (A + \overline{B} + \overline{C}) \equiv (\overline{A} + \overline{B} + C) \end{aligned}$$

№11

Вычислим производные логической функции F.

$$F_A^{'}(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_A^{'} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$F_B^{'}(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B^{'} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A + C$$

$$F_C^{'}(A,B,C) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_C^{'} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 1 & 1 \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ F & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

№12

Разложения Рида логической функции F.

$$F(A,B,C) = F(0,B,C) \oplus A \cdot F_A^{'}(A,B,C) = (B \mid C) \oplus A \cdot B$$
$$F(A,B,C) = F(1,B,C) \oplus \overline{A} \cdot F_A^{'}(A,B,C) = (B \Rightarrow C) \oplus \overline{A} \cdot B$$
$$F(A,B,C) = F(A,0,C) \oplus B \cdot F_B^{'}(A,B,C) = (1 \oplus B) \cdot (A + C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,1,C) \oplus \overline{B} \cdot F_B^{'}(A,B,C) = (A \equiv C) \oplus \overline{B} \cdot (A + C)$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,0) \oplus C \cdot F_C^{'}(A,B,C) = (A \mid B) \oplus C \cdot B$$
$$F(A,B,C) = F(A,B,1) \oplus \overline{C} \cdot F_C^{'}(A,B,C) = (A \Leftarrow B) \oplus \overline{C} \cdot B$$

$ssssss$