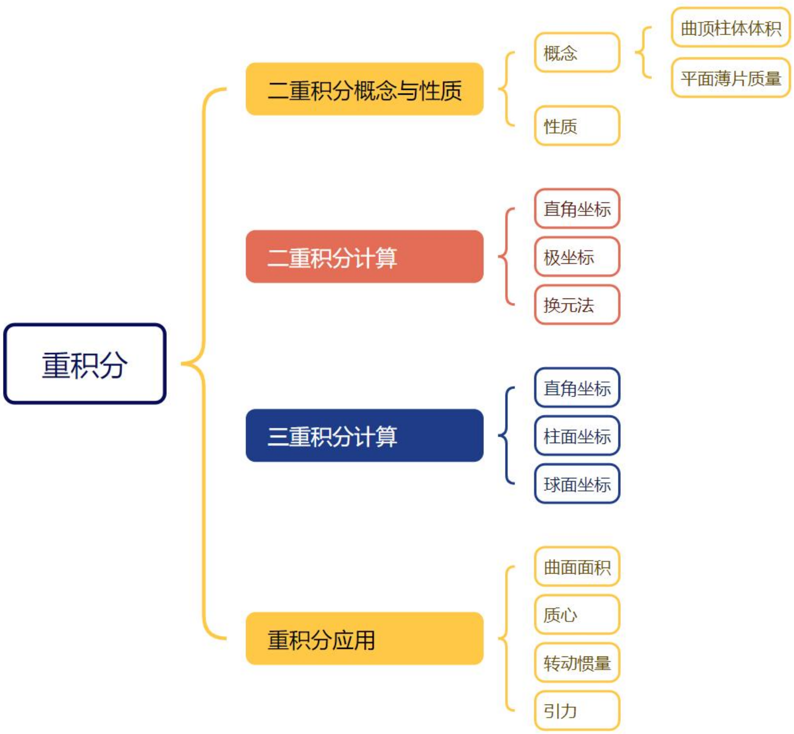
第十章 重积分

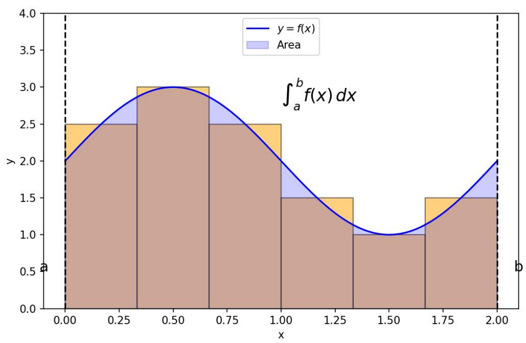
GUET-Support-Program　　　穆天宇(MU-ty)



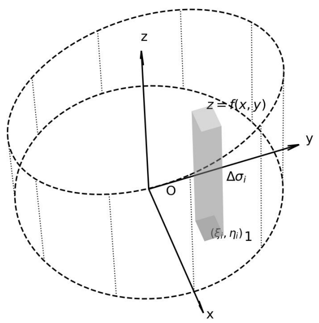
一、二重积分概念与性质

1、二重积分背景

①定积分背景：曲线梯形的面积



②二重积分背景：曲顶柱体的体积（先分割，再近似）



用一组网格线把底面划分成 n 个小区域（n 个 $S_{底}$），小体积近似于 $S_{底}$×高

$$\xRightarrow{\text{求和}} V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta Vi = \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i \xRightarrow{\text{取极限}} \text{取}\lambda = \max\{d1, d2, d3 \ldots dn\}, V = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$$

③平面薄片的质量

$$m = \iint_{D} \mu(x, y) d\sigma（\mu\text{是面密度}）$$

2、二重积分概念

设 f(x,y)是有界闭区域 D 上的有界函数，①分割：把 D 分割成 n 个小区域$\Delta\sigma 1$，$\Delta\sigma 2 \ldots \Delta\sigma i$；②作积：任取点$(\xi i, \eta i) \in \Delta\sigma i$，作乘积 $f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$；③求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$；④取极限：令$\lambda = \max\{d1, d2, d3 \ldots dn\}$，如果$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$存在，则称此极限为 f(x,y)在 D 区域上的二重积分，记为$\iint_{D} f(x, y) d\sigma$或$\iint_{D} f(x, y) dxdy$，即：

$$\iint_{D} f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$$

注：面积元：$\Delta\sigma i = d\sigma = dxdy$

3、性质：

①$\iint_{D} f(x, y) \pm g(x, y) dxdy = \iint_{D} f(x, y) dxdy \pm \iint_{D} g(x, y) dxdy;$

$$\iint_{D} kf(x, y) dxdy = k \iint_{D} f(x, y) dxdy$$

②若 D=D1∪D2（其中 D1∩D2≠ ∅），则：

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy = \iint_{D1} f(x, y) dxdy + \iint_{D2} f(x, y) dxdy$$

③$\iint_{D} 1dxdy = S_{D}$（区域 D 的面积）

类似于$\int_{a}^{b} 1dx = b - a$

④若在区域 D 上，$f(x, y) \leq g(x, y)$则：

$$\iint_{D} f(x, y) dxdy \leq \iint_{D} g(x, y) dxdy$$

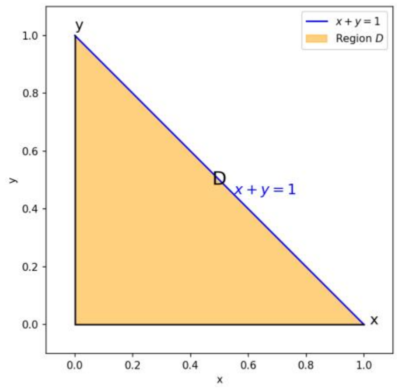
⑤估值定理：若在 D 上有 $m \leq f(x, y) \leq M$,则：

$$mS_{D} \leq \iint_{D} f(x, y) dxdy \leq MS_{D}$$

⑥积分中值定理：若 f(x,y)在 D 上连续，则：

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\cdot S_D \quad (其中(\xi,\eta)\in D)$$

类似于：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \xi \in [a,b]$



例 1：比较 $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$ 的大小，其中：

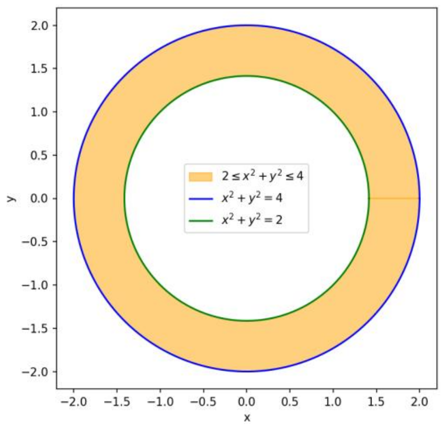
区域 D 是 x + y = 1 与 x 轴、y 轴所围成的部分；

解：

Ⅰ：$0 \le x+y \le 1 \Rightarrow (x+y)^3 \le (x+y)^2$

$$\therefore \iint\limits_D (x+y)^2 dxdy \ge \iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$$

例 2：估计 $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ 的大小，其中 D 为$\{(x,y)|2 \le x^2+y^2 \le 4\}$



解：用估值定理 $2 \le f(x,y) = x^2+y^2 \le 4$

$$\therefore 2\cdot S_D \le \iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy \le 4\cdot S_D$$

其中，S_D为环形区域面积：$\pi(2^2-(\sqrt{2})^2) = 2\pi$

$$\therefore 4\pi \le \iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy \le 8\pi$$

二、二重积分计算

1、利用直角坐标系求 $\iint_D f(x,y)dxdy$（两种方法）

①定 x 穿 y

X-型区域 D 上的二重积分

$$D_x = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\end{matrix}\right\}$$

则：

$$\iint\limits_{D_x} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

②定 y 穿 x

Y-型区域 D 上的二重积分

$$D_Y = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\end{matrix}\right\}$$

则：

$$\iint\limits_{D_Y} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

2、利用对称性化简二重积分（一种手段）

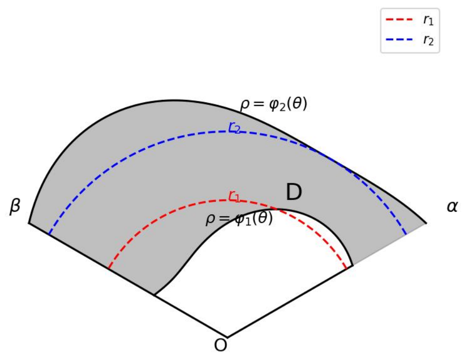
类似于定积分：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0，当 f(x)为奇 \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx，当 f(x)为偶 \end{cases}$

① $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \xrightarrow{\text{D 关于 x 轴对称}} \begin{cases} 0，当 f(x,y)是 y 的奇函数 \\ 2\iint\limits_{D_{半}} f(x,y)dxdy，当 f(x,y)是 y 的偶函数 \end{cases}$

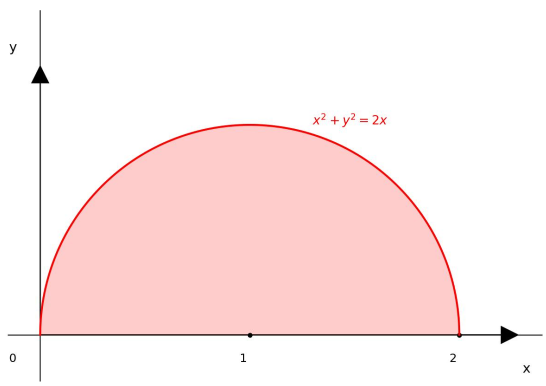
② $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \xrightarrow{\text{D 关于 y 轴对称}} \begin{cases} 0，当 f(x,y)是 x 的奇函数 \\ 2\iint\limits_{D_{半}} f(x,y)dxdy，当 f(x,y)是 x 的偶函数 \end{cases}$

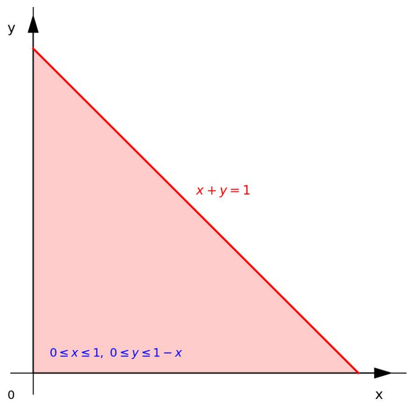
3、利用极坐标计算二重积分（一种方法） $x = \rho cos\theta，y = \rho sin\theta$

①$D_{极} = \begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \end{cases}$，*定θ穿r*



例如：





$r^2 = 2rcos\theta \Rightarrow r = 2cos\theta$

$rcos\theta + rsin\theta = 1$

$D_{极} = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2cos\theta \end{cases}$

$D_{极} = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \frac{1}{sin\theta + cos\theta} \end{cases}$

②极坐标下的二次积分公式

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{极}} f(rcos\theta, rsin\theta) \cdot r drd\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r1(\theta)}^{r2(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta) \cdot r dr$$

即：面积元$= dxdy = rdrd\theta$

解释面积元：

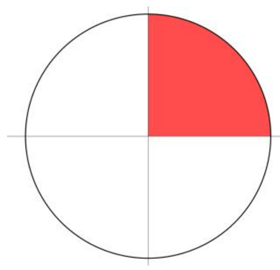
法一：面积元= $d\sigma = r d\theta \cdot dr$($rd\theta$相当于一个小面积的长，dr 相当于小面积的宽)

法二：雅可比行列式：

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \Rightarrow \text{面积元 } d\sigma = r dr d\theta$$

极坐标下的二次积分公式使用场景$\begin{cases} \text{当积分区域 D 与圆域、圆环有关时} \\ \text{当 } f(x,y) \text{ 中含有} x^2+y^2\text{，} (x^2+y^2)^k, \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \text{时} \end{cases}$

例 1：求 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dx$



解：$x = \sqrt{a^2-y^2}$

$\rho\cos\theta = \sqrt{a^2 - \rho\sin\theta}$

$\therefore \rho = a$

$\therefore \mathbf{0 \le \rho \le a}$

化简 $x = \sqrt{a^2-y^2}$ 得 $x^2+y^2=a^2$

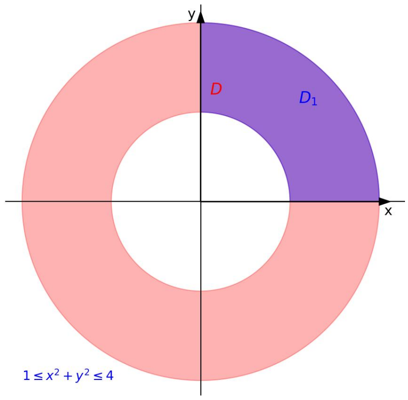
将 $0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$ 化简，$0 \le x \le a$

又因 $0 \le y \le a$，画出图

$\therefore \mathbf{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$

$\therefore$ 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2\, \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{8} a^4$

例 2：求 $\iint\limits_D x^2 dxdy$，其中 D：$\{1 \le x^2+y^2 \le 4\}$



$$\iint\limits_D x^2 dxdy = 4\iint\limits_{D_1} x^2 dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 (r\cos\theta)^2\, r dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \cdot \int_1^2 r^3 dr = \frac{15}{4}\pi$$

注：高数 A1 结论

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}, & n\text{为大于 1 的正奇数} \end{cases}}$$

例 3：使用分部积分：$\int u dv = uv - \int v du$

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma\text{，其中}D\text{是由圆周}x^2+y^2=1\text{ 及坐标轴所围成在第一象限内闭区域}$$

解：$0 \le \rho \le 1$，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\iint_D ln(1+x^2+y^2)d\sigma = \iint_D ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 ln(1+\rho^2)d(1+\rho^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left[(1+\rho^2)ln(1+\rho^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1+\rho^2)dln(1+\rho^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left[(1+\rho^2)ln(1+\rho^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 2\rho d\rho\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1)$$

三、三重积分计算

1、定义

定积分：曲边梯形面积

二重积分：曲顶柱体体积

三重积分：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta V_i$$

Ω：积分区域　　$f(x,y,z)$：被积函数　　$dxdydz$：积分变量

注：

①体积元：$\mathrm{dv} = \mathrm{dxdydz}$

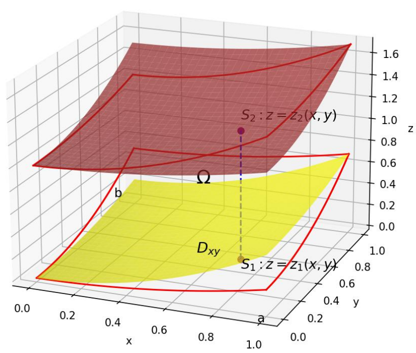
② $\iiint_\Omega 1\mathrm{dv} = \mathrm{V}_\Omega$，（*Ω的体积*）

③物理意义：$\iiint_\Omega \mathrm{f(x,y,z)dv}$ 表示以 f(x,y,z)为密度的立体物件*Ω的质量*

2、三重积分的计算

①利用直角坐标计算 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$

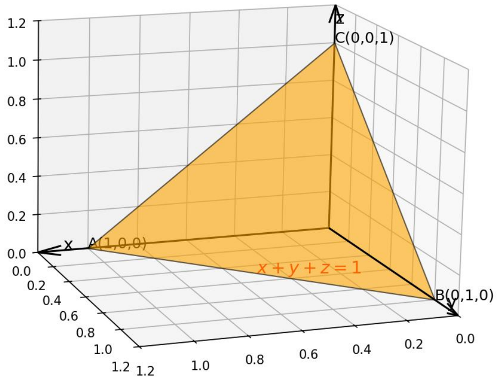
Ⅰ、投影法（先一后二）



先把Ω表示出来：

$$\Omega \xrightarrow{\text{定}D_{xy}\text{穿}z} \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

比如：$x + y + z = 1$

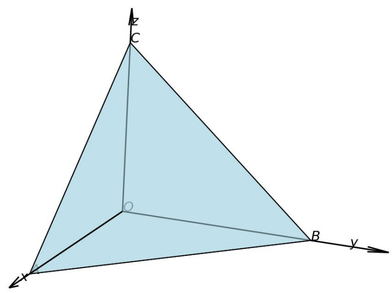


$$\Omega \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$$

再求解： $\boldsymbol{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \cdot \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz}$ **（先一后二）**

例：求 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，*其中*Ω为三个平面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的区域

解：Ω如图所示



把Ω表示出来 $\xrightarrow{\text{定}D_{xy}\text{穿}z} \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$

用先一后二法：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \cdot \int_0^{1-x-2y} xdz$$

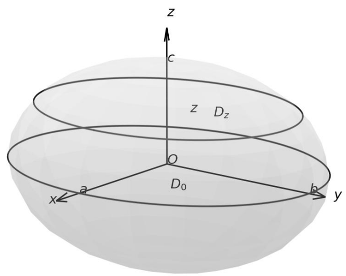
$$= \iint\limits_{D_{xy}} xdxdy \cdot \int_0^{1-x-2y} 1dz$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} x(1 - x - 2y)\, dxdy$$

$$\xRightarrow{\text{定}x\text{穿}y} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1 - x - 2y)dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\, dx = \frac{1}{48}$$

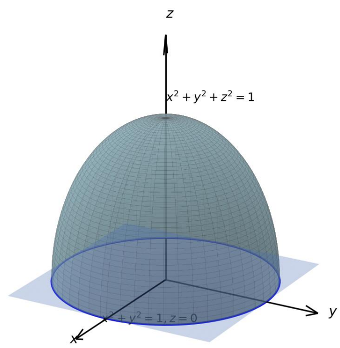
Ⅱ、平面截割法（先二后一）



先把Ω表示出来

$$\Omega \xRightarrow{定z穿D_z} \begin{cases} c \le z \le d \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases}$$

比如：



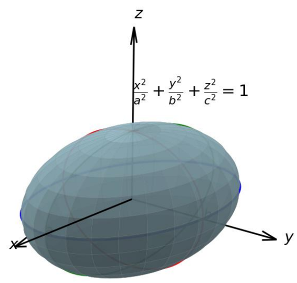
$$\Omega \xRightarrow{定z穿D_z} \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ (x,y) \in D_z \end{cases}$$

再求解：$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{f(x,y,z)dxdydz} = \int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \mathrm{dz} \iint\limits_{\mathrm{D_z}} \mathrm{f(x,y,z)dxdy}$（先二后一）

截割法使用前提：$\begin{cases} ①当被积函数\ f\ 是\ z\ 的一元函数 \\ ②截面\mathrm{D_Z}的面积好求 \end{cases}$

例：求 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{z^2dxdydz}$，其中$\Omega$*是由椭球面*:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *所围成*

解：Ω如图



用一个平行于 xoy 面的平面截割Ω:

$$\Omega \xRightarrow{定z穿D_z} \begin{cases} -c \le z \le c \\ (x,y) \in D_z \end{cases}，\ 其中D_z: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{z^2dxdydz} \xRightarrow{先二后一} \int_{-\mathrm{c}}^{\mathrm{c}} \mathrm{dz} \iint\limits_{D_z} \mathrm{z^2dxdy} = \int_{-\mathrm{c}}^{\mathrm{c}} \mathrm{z^2dz} \iint\limits_{D_z} \mathrm{1dxdy}$$

$$= \mathrm{\pi ab} \int_{-\mathrm{c}}^{\mathrm{c}} \mathrm{z^2 \cdot (1-\frac{z^2}{c^2})dz} = \frac{4}{15}\mathrm{\pi abc^3}$$

$$\boxed{椭圆面积 = \mathrm{\pi ab}，\ \therefore \iint\limits_{D_z} \mathrm{1dxdy} = \mathrm{S_{D_z}} = \mathrm{\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})}}$$

②利用柱面坐标计算 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$

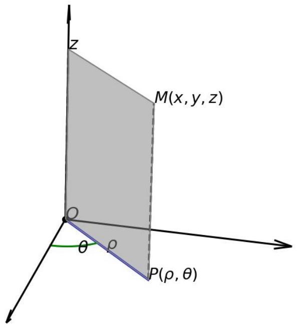
方法:

Ⅰ、直角坐标化为柱面坐标

直角坐标 $M(x,y,z)$，得$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$（换元法）

柱面坐标 $M(r,\theta,z)$

注：体积元 $= dxdydz = rdrd\theta dz$



Ⅱ、$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow[]{\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\text{换元}} \iiint\limits_{\Omega_{柱}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\cdot drd\theta dz$（柱面坐标公式）

使用柱面坐标公式的前提$\begin{cases} \text{①积分区域}\Omega\text{与圆柱体、圆锥、旋转抛物面有关} \\ \text{②被积函数含有}(x^2+y^2)^2 \end{cases}$

例：求 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中$\Omega$是由曲面 $z = x^2 + y^2$与平面 $z = 4$ 所围成

解：因与Ω与旋转抛物面有关，可用“柱面坐标公式”；因被积函数是 z 的一元函数，且截面面积好求，可用“平面截割法”。

<法一>柱面坐标法

先把Ω投影到 xoy 面得：$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 4$

再表示$\Omega_{柱} = \begin{cases} (r,\theta) \in D_{xy} \\ x^2 + y^2 \le z \le 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ r^2 \le z \le 4 \end{cases}$

最后 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{柱}} z\cdot rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_{r^2}^4 zdz = \frac{64}{3}\pi$

<法二>平面截割法

先用平行于 xoy 面的平面截割Ω得：$D_z: x^2 + y^2 \le z$

再表示$\Omega \xRightarrow{\text{定}z\text{穿}D_z} \begin{cases} 0 \le z \le 4 \\ (x,y) \in D_z \end{cases}$

最后 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \int_0^4 zdz \iint\limits_{D_z} 1dxdy = \pi\int_0^4 z^2dz = \frac{64}{3}\pi$

（其中 $\displaystyle\iint\limits_{D_z} 1dxdy = S_{D_z} = \pi\cdot z$）

③利用对称性化简三重积分

类似于定积分：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{为奇} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{当 } f(x) \text{为偶} \end{cases}$

$$① \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow{\Omega\text{关于 xoy 面对称}} \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x,y,z)\text{是 z 的奇函数} \\ 2\iiint\limits_{\Omega_{半}} f(x,y,z)dxdydz, & \text{当 } f(x,y,z)\text{是 z 的偶函数} \end{cases}$$

$$② \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow{\Omega\text{关于 xoz 面对称}} \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x,y,z)\text{是 y 的奇函数} \\ 2\iiint\limits_{\Omega_{半}} f(x,y,z)dxdydz, & \text{当 } f(x,y,z)\text{是 y 的偶函数} \end{cases}$$

$$③ \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow{\Omega\text{关于 yoz 面对称}} \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x,y,z)\text{x 的奇函数} \\ 2\iiint\limits_{\Omega_{半}} f(x,y,z)dxdydz, & \text{当 } f(x,y,z)\text{是 x 的偶函数} \end{cases}$$

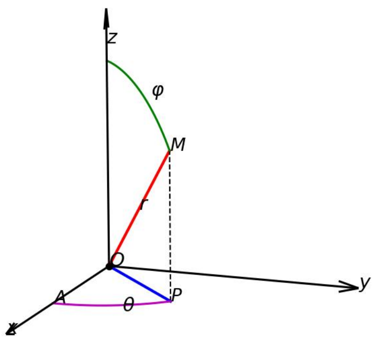
例：

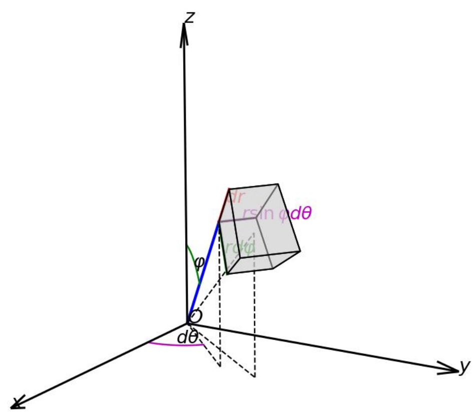
$$\text{计算} \iiint\limits_{\Omega} xzdxdydz\text{，其中}\Omega\text{是由}z=0, z=y, y=1, y=x^2\text{围成的闭区域}$$

解：由于Ω关于 yOz 面对称，且被积函数 xz 关于 x 是奇函数因此等于 0

④利用球面坐标计算 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$

Ⅰ、直角坐标与球面坐标的关系





直角坐标：M(x,y,z)，如图，$r = |OM| \Rightarrow 0 \le r < +\infty$

θ表示从 x 轴到 OP 的夹角$\Rightarrow 0 \le \theta \le 2\pi$

注：$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$；体积元 $dv = r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$\text{Ⅱ、} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{球}} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \cdot r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$$

（球面坐标公式）

球面坐标公式使用前提$\begin{cases} \text{当积分区域}\Omega\text{与球有关} \\ \text{当积分函数含有}(x^2+y^2+z^2)^2 \end{cases}$

例：求 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2 zdv$，其中$\Omega=\{(\mathrm{x,y,z})|x^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2\le 4,\mathrm{z}\ge 0\}$

解：

先画Ω：上半球体（略）

然后可以利用对称性化简$f(x,y,z)=(x+y)^2z=x^2z+y^2z+2xyz$

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}[(x^2+\mathrm{y}^2)\mathrm{z}+2\mathrm{xyz}]\mathrm{dV}\xRightarrow{\text{下面括号解释}}\iiint\limits_{\Omega}[(x^2+\mathrm{y}^2)\mathrm{zdV}$$

（其中Ω关于 yoz 面对称，2xyz 是 x 的奇函数，即奇+对称为 0）

$$再表示\Omega_{球}\xRightarrow{代入f(rsin\varphi cos\theta,rsin\varphi sin\theta,rcos\varphi)}\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le \mathrm{r}\le 2\end{cases}，体积元\ \mathrm{dV}=\mathrm{r}^2\sin\varphi\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$最后：用球坐标公式：\iiint\limits_{\Omega_{球}}(\mathrm{r}^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\mathrm{r}^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)\cdot \mathrm{r}\cos\varphi\cdot \mathrm{r}^2\sin\varphi\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\mathrm{r}^5\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{dr}=\frac{16\pi}{3}$$

四、重积分计算

1、求曲顶柱体的体积

$$公式一：二重积分：\mathrm{V}_{柱}=\iint\limits_{\mathrm{D}}\mathrm{f(x,y)dxdy}$$

$$公式二：三重积分：\mathrm{V}_{\Omega}=\iiint\limits_{\Omega}1\mathrm{dxdydz}$$

2、求曲面的面积

设曲面 S 由方程 $\mathrm{z}=\mathrm{f(x,y)}$给定，$\mathrm{D_{xy}}$为 S 在 xoy 面的投影，则：曲面 S 的面积为：

$$\mathrm{A}=\iint\limits_{\mathrm{D_{xy}}}\sqrt{1+\mathrm{z}_x^2+\mathrm{z}_y^2}\mathrm{dxdy}=\iint\limits_{\mathrm{D_{xy}}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2\mathrm{z}_y^2}\mathrm{dxdy}$$

注：在 yoz 面、xoz 面类似

3、质心

①平面薄片 D 的密度为$\rho(\mathrm{x,y})$，则质心坐标$(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}})$，其中：

$$\bar{\mathrm{x}}=\frac{\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{x}\rho(\mathrm{x,y})\mathrm{dxdy}}{\iint_{\mathrm{D}}\rho(\mathrm{x,y})\mathrm{dxdy}},\bar{\mathrm{y}}=\frac{\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{y}\rho(\mathrm{x,y})\mathrm{dxdy}}{\iint_{\mathrm{D}}\rho(\mathrm{x,y})\mathrm{dxdy}},若均匀薄片，则\rho(\mathrm{x,y})=常数\triangleq 1$$

②平面薄片 D 的密度为$\rho(\mathrm{x,y,z})$，则质心坐标$(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}},\bar{\mathrm{z}})$，其中：

$$\bar{\mathrm{x}}=\frac{\iiint_{\Omega}\mathrm{x}\rho(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dV}}{\iiint_{\Omega}\rho(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dV}},\bar{\mathrm{y}}=\frac{\iiint_{\Omega}\mathrm{y}\rho(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dV}}{\iiint_{\Omega}\rho(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dV}},\bar{\mathrm{z}}=\frac{\iiint_{\Omega}\mathrm{z}\rho(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dV}}{\iiint_{\Omega}\rho(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dV}}$$

$$若均匀立体，则\rho(\mathrm{x,y,z})=常数\triangleq 1$$

4、转动惯量

设空间立体Ω的密度为ρ(x, y, z)，则立体对 x 轴，y 轴，z 轴的转动惯量：

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

$$I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

例：求均匀半球体的质心

解：建立坐标系，设半球体以 z 轴为对称轴

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le a^2，z \ge 0\}$$

则质心在 x 轴上，设为$(0,0,\bar{z})$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\mathrm{d}V} \xlongequal{均匀体\rho=1} \frac{\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega} 1\mathrm{d}V} \xlongequal{下面解释} \frac{3\pi}{8}$$

其中：

$$\iiint\limits_{\Omega} 1\mathrm{d}V = V_{\Omega} = V_{半球} = \frac{2\pi a^2}{3}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V \xlongequal{代入f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)} \iiint\limits_{\Omega_{球}} r\cos\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a} r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}a^4$$