第十一章　曲线积分与曲面积分

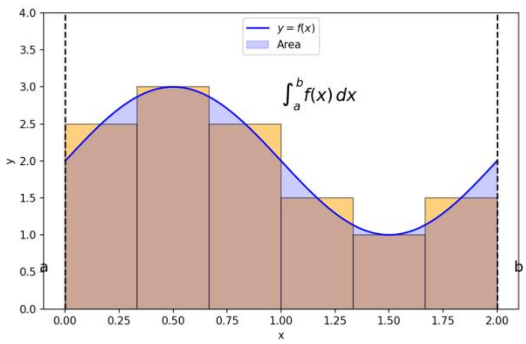
GUET-Support-Program　　穆天宇(MU-ty)

一、对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

1、概念与性质

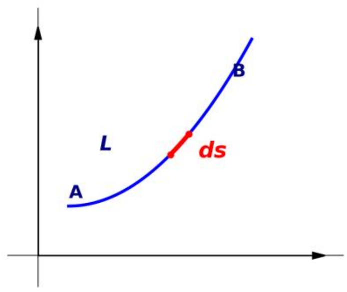
①定积分：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{S_{\text{曲边梯形}}}{\Longleftrightarrow} ds = f(x)dx$$



②定义：对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi i,\eta i)\Delta s_i$，又称为第一类曲线积分

$$\overset{\text{背景}}{\Longleftrightarrow} \text{线密度为}\mu = f(x,y)\text{的曲线构件的质量，质量元 } dM = f(x,y)ds$$



注：$\begin{cases} \text{若 } f(x,y)\text{在光滑曲线 } L \text{ 上连续} \Rightarrow \text{则} \int_L f(x,y)ds \text{ 存在} \\ \text{推广：若}\Gamma\text{为空间光滑曲线，三元函数 } f(x,y,z)\text{在}\Gamma\text{上对弧长积分：} \int_\Gamma f(x,y,z)ds \end{cases}$

③性质：

Ⅰ、可加性：$\int_{L_1+L_2} f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds$

Ⅱ、若 $f(x,y) = 1 \Rightarrow \int_L 1ds = L$ 的弧长

Ⅲ、$\int_L f(x,y) + g(x,y)ds = \int_L f(x,y)ds + \int_L g(x,y)ds$；$\int_L kf(x,y)ds = k\int_L f(x,y)ds$

Ⅳ、不等式性质：在 L 上若 $f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \int_L f(x,y)ds \le \int_L g(x,y)ds$

2、$\int_L f(x,y)ds$ 的计算方法（三公式三手段）

①若 L 为直角坐标方程：$y=y(x), a\le x\le b$, 由弧长元 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$

$$\Rightarrow \int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\cdot\sqrt{1+y'^2}dx \text{（公式 1）}$$

②若 L 为参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，$\alpha\le t\le\beta$，由弧长元 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt$

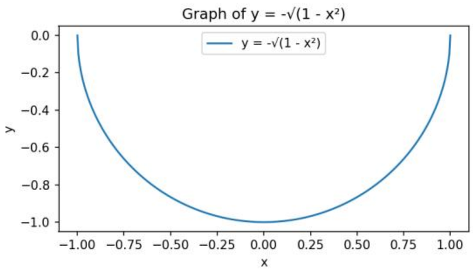
$$\Rightarrow \int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt \text{（公式 2）}$$

③若 L 为极坐标方程：$r=r(\theta), \alpha\le\theta\le\beta$, 由弧长元：$ds=\sqrt{r_{(\theta)}^2+r_{(\theta)}'^2}d\theta$

$$\Rightarrow \int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\sqrt{r_{(\theta)}^2+r_{(\theta)}'^2}d\theta \text{（公式 3）}$$

④化简手段Ⅰ：“先代后算”，将 L 方程带入 $f(x,y)$ 化简

例：设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，求 $\int_L(x^2+y^2)ds$



解：

法一：“先代后算”

$$\text{由草图可知，}\int_L(x^2+y^2)ds=\int_L 1ds=\text{弧长}=\pi$$

法二：利用参数方程: 令 $\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$，$\pi\le t\le 2\pi$，$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=1\cdot dt$

$$\Rightarrow \int_L(x^2+y^2)ds=\int_\pi^{2\pi}1\cdot 1dx=\pi$$

法三：利用直角方程：$y=-\sqrt{1-x^2}$，$-1\le x\le 1$，$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\Rightarrow \int_L(x^2+y^2)ds=\int_{-1}^{1}1\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin\Big|_{-1}^{1}=\pi$$

⑤化简手段Ⅱ：“偶倍奇 0”

类似于定积分：$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}0，\text{当 } f(x)\text{为奇}\\2\int_0^a f(x)dx，\text{当 } f(x)\text{为偶}\end{cases}$

$$\int_L f(x,y)ds \xRightarrow{\text{当 L 关于 y 轴对称}} \begin{cases}0，\text{当 } f(x,y)\text{是 x 的奇函数}\\2\int_{L_{\text{半}}}f(x,y)ds，\text{当 } f(x,y)\text{是 x 的偶函数}\end{cases}$$

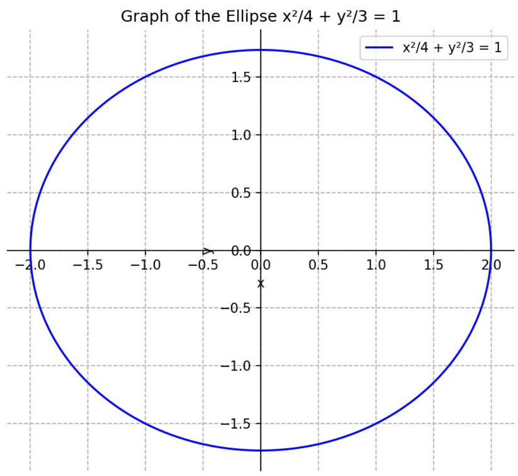
⑥化简手段III：轮换对称性

$$\int_L f(x,y)ds \xRightarrow{当L方程具有轮换性} \int_L f(y,x)ds = \frac{1}{2}\int_L [f(x,y)+f(y,x)]ds$$

特别地，$\int_L x^2ds = \int_L y^2ds = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\,ds$，其中 L 方程具有轮换性

例 1：设 L 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，求$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,ds$

解：L 为封闭曲线，关于 x 轴、y 轴对称



$$\oint_L 2xy+3x^2+4y^2ds = \oint_L 2xyds + \oint_L (3x^2+4y^2)ds$$

$\oint_L 2xyds$ 是关于 x 的奇函数，所以为 0

$\oint_L (3x^2+4y^2)ds$ 使用先代后算， $3x^2+4y^2=12$，*所以*$\oint_L (3x^2+4y^2)ds = \oint_L 12ds$

$\oint_L 12ds = 12$ *周长* $= 12a$

$\therefore \oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,ds = 12a$

变型题：求$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,ds$，其中$x^2+y^2=a^2$

解：$\oint_L 2xy\,ds \xRightarrow{奇函数} 0$

$\oint_L (3x^2+4y^2)\,ds = 3\oint_L x^2ds + 4\oint_L y^2ds = 7\oint_L x^2ds = \frac{7}{2}\oint_L (x^2+y^2)ds = \frac{7}{2}a^2\cdot 2\pi a = 7\pi a^3$

$\therefore \oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,ds = 7\pi a^3$

例 2：计算$\oint_\Gamma (z+y^2)ds$，其中Γ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与 $x+y+z=0$ 的交线

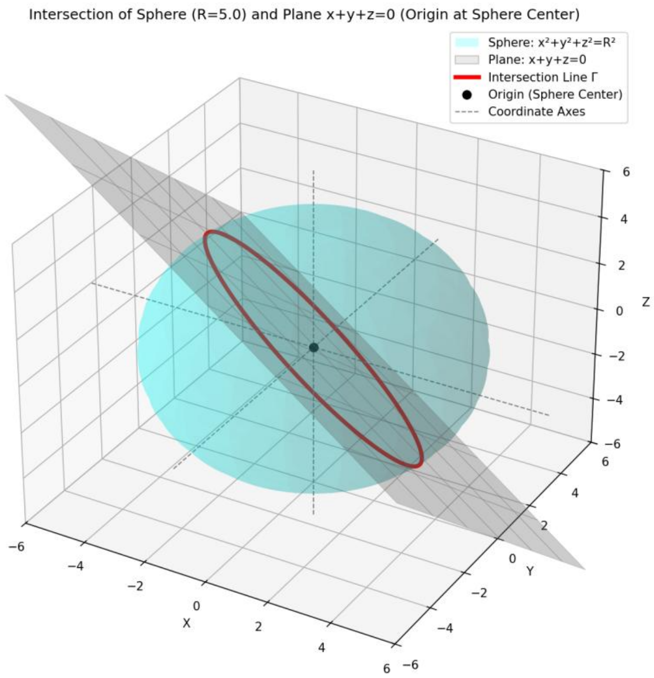
解：Γ方程具有轮换性，原式 $= \oint_\Gamma zds + \oint_\Gamma y^2ds$

$\oint_\Gamma zds = \oint_\Gamma yds = \oint_\Gamma xds = \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x+y+z)ds \xRightarrow{先代后算} 0$

$$\oint_{\Gamma} y^2 ds = \oint_{\Gamma} x^2 ds = \oint_{\Gamma} z^2 ds = \frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds \xRightarrow{\text{先代后算}} \frac{1}{3}\oint_{\Gamma} R^2\, ds = \frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R$$

$$\therefore \oint_{\Gamma}(z+y^2)ds = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Γ的草图如下

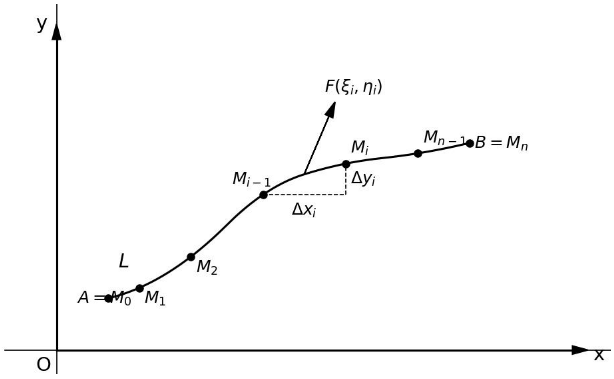


二、对坐标的曲线积分（第二类曲线积分）

1、概念与性质

①复习：对弧长的曲线积分： $\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi i,\eta i)\Delta s_i$

②定义：对坐标的曲线积分：



$$\left.\begin{aligned} &\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi i,\eta i)\Delta x_i \\ &\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi i,\eta i)\Delta y_i \\ &\xRightarrow{\text{合并}} \int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy \text{（第二类曲线积分）} \end{aligned}\right\} \underset{\text{背景}}{\Longleftrightarrow} \text{变力做功} = \text{力}\cdot\text{距离}$$

解释背景：

$$设\vec{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\},d\vec{s}=\{dx,dy\},则功元\ dw=\vec{F}\cdot d\vec{s}=\{P,Q\}\cdot\{dx,dy\}$$

$$\Rightarrow dw=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

③性质：

Ⅰ、L 为有向弧段，L^{-}是与 L 方向 1 相反的弧段，则 $\int_{L^{-}} Pdx+Qdy=-\int_{L} Pdx+Qdy$

Ⅱ、可加性：$\int_{L_1+L_2} Pdx+Qdy=\int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{L_2} Pdx+Qdy$

2、$\int_{L} Pdx+Qdy$ 的计算（三公式一手段）

①若有向曲线 L 为参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，L 起点对应 $t=\alpha$，终点对应 $t=\beta$

$$\Rightarrow\int_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t),y(t))\cdot x'_{(t)}+Q(x(t),y(t))\cdot y'_{(t)}]\,dt \text{（公式一）}$$

推广：空间有向曲线Γ: $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\\z=z(t)\end{cases}$ $\int_{L} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\alpha}^{\beta} P\cdot x'_{(t)}+Q\cdot y'_{(t)}+R\cdot z'_{(t)}dt$

②若有向曲线 L 的方程为直角方程: $y=y(x)$, L 起点对应 $x=a$，终点对应 $x=b$

$$\Rightarrow\int_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{a}^{b}[P(x,y(x))+Q(x,y(x))\cdot y'_{(x)}]\,dx \text{（公式二）}$$

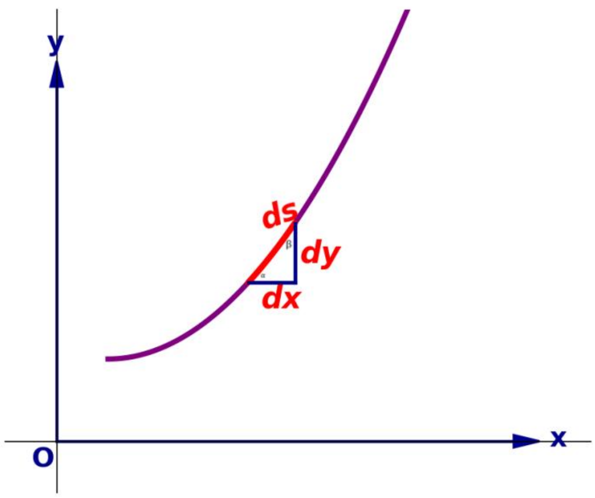
③一个化简手段：“先代后算”：把 L 方程代入 $P(x,y)$、$Q(x,y)$化简

④利用两类曲线积分的关系：

$$\int_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{L}[P(x,y)\cdot cos\alpha+Q(x,y)\cdot cos\beta]ds \text{（公式三）}$$

（其中 cosα、cosβ为曲线 L 切向量的方向余弦）

解释：

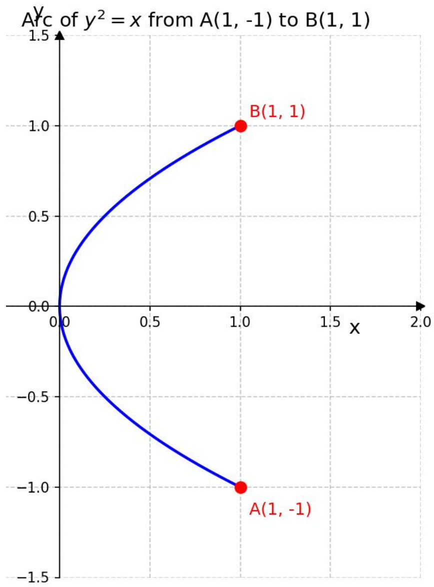


$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},cos\beta=\frac{dy}{ds}$$

$$右=\int_{L}[P(x,y)\cdot\frac{dx}{ds}+Q(x,y)\cdot\frac{dy}{ds}]ds=\int_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=左$$

例 1：计算 $\int_L xydx$，其中 L：$y^2=x$ 从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧

解：对单个坐标的曲线积分



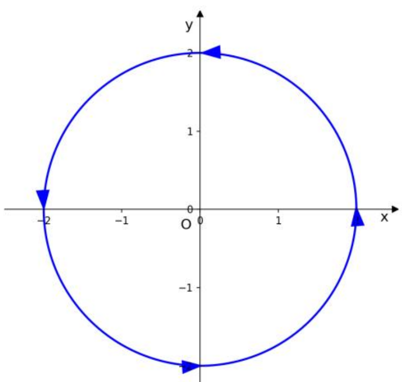
法一：L 方程看成以 y 为自变量：$x=y^2$，y 从 -1 到 1

$$\int_L xydx=\int_{-1}^{1} y^2\cdot y\cdot dy^2=\int_{-1}^{1} 2y^4dy=\frac{4}{5}$$

法二：L 方程看成 x 为自变量：$y=\pm\sqrt{x}$ 即：$\widehat{AO}: y=-\sqrt{x}$; $\widehat{OB}: y=\sqrt{x}$

原式 $=\int_{\widehat{AO}+\widehat{OB}} xydx=\int_{\widehat{AO}} xydx+\int_{\widehat{OB}} xydx=\int_1^0 x\cdot(-\sqrt{x})dx+\int_0^1 x\cdot\sqrt{x}dx=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}$

例 2：计算 $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L：$x^2+y^2=a^2$（方向为逆时针）



解：本题为对两个坐标的曲线积分

法一：首先："先代后算"

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(a\cos t+a\sin t)da\cos t+(a\sin t-a\cos t)da\sin t\\&=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}a^2(-\cos t\sin t-\sin^2 t)+a^2(\sin t\cos t-\cos^2 t)dt=\int_0^{2\pi}(-1)dt=-2\pi\end{aligned}$$

法二：格林公式

三、格林公式及其应用

1、格林公式：如果：①区域D由分段光滑的闭曲线L围成；

②函数 $P(x,y),Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数 ⇒则：

$$\oint_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\pm\iint_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

（当 L 为正向时，右端取“＋”号，否则取“－”号）

注：

要求Ⅰ：L 为封闭曲线（若 L 不封闭，需要加线使它封闭）

要求Ⅱ：P、Q 在 D 上具有一阶连续偏导(如$\oint_{L}\frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, $L: x^2+y^2=R^2$,需要挖去奇点)

一个应用：若 $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 则 $\oint_{L_{正}}-ydx+xdy=\iint_{D}2dxdy=2\cdot S_D$

$$\Rightarrow S_D=\frac{1}{2}\oint_{L}-ydx+xdy \text{（面积公式）}$$

例 1：$\oint_{L} x^2ydx-xy^2dy$，其中 L 为$x^2+y^2=a^2$（取逆时针）

解：L 草图：方向为逆时针，用格林公式：

$$\oint_{L} x^2ydx-xy^2dy\overset{格林}{\Longrightarrow}+\iint_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\iint_{D}-x^2-y^2dxdy$$

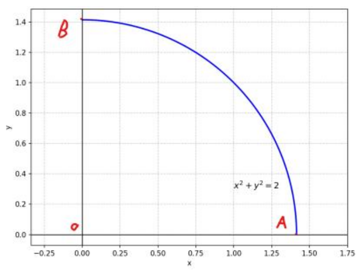
$$=-\iint_{D}x^2+y^2dxdy \text{（二重积分不能先代后算）}$$

$$\overset{极坐标}{\Longrightarrow}-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=-\frac{\pi}{2}a^4$$

例 2：设 L 为正向圆周$x^2+y^2=2$ 在第一象限部分，求 $\int_{L}xdy-2ydx$.

解：L 不封闭，2 种思路：加线用格林公式；化为定积分

法一：L 的草图如右



$A(\sqrt{2},0)$ $B(0,\sqrt{2})$添加$\overrightarrow{BO}$、$\overrightarrow{OA}$（一般添加折线）

$$\int_{L}xdy-2ydx=\oint_{L+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}}xdy-2ydx-\int_{\overrightarrow{BO}}xdy-2ydx-\int_{\overrightarrow{OA}}xdy-2ydx$$

$$\overset{格林}{\Longrightarrow}+\iint_{D}1-(-2)dxdy-0-0=3\iint_{D}dxdy=3\cdot\tfrac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2=\frac{3\pi}{2}$$

法二：利用参数法化为定积分

令$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$, t 从 0 变化到$\frac{\pi}{2}$

$$\int_{L}xdy-2ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos t\cdot(\sqrt{2}\sin t)'-2\sqrt{2}\sin t\cdot(\sqrt{2}\cos t)'dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta+4\sin^2\theta d\theta=\frac{3\pi}{2}$$

2、曲线积分与路径无关的条件

设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数，则：

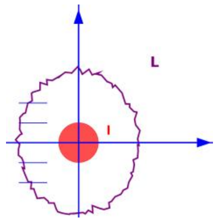
①$\int_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与积分路径无关 ⇔②在 D 内恒有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

⇔③对 D 内任意封闭曲线 C，均有$\oint_{C}Pdx+Qdy=0$

$\Leftrightarrow$ ④存在二元函数 $u(x,y)$，使得 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, 且:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \text{（折线法）}$$

注：若 D 为复连通区域（含奇点，含“洞”），若 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则：



$$\oint_L Pdx+Qdy=\oint_l Pdx+Qdy$$

（逆时针）　　　（逆时针）

例 1. 计算 $\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$, 其中 L 是 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由(0,0)到(1,1)的圆弧。

解：当 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 时，利用积分与路径无关（“折线法”）

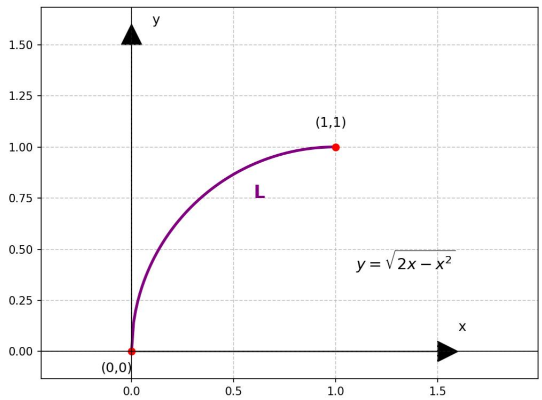
$\frac{\partial P}{\partial y}=-1$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$，取 $l_1:(0,0)\to(0,1)$ 和 $l_2:(0,1)\to(1,1)$ 两段折线

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{l_1}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy+\int_{l_2}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$$

（标红的 y 等于 0，标蓝的 x 等于 1）

$$=\int_0^1 (x^2-0)dx+\int_0^1 -(1+\sin^2 y)dy$$

$$=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2$$



例 2. 计算曲线积分：$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以(1,0)为中心，2 为半径的圆周，取逆时针

解：若 D 含有奇点（“洞”）——用“挖洞法”+“先代后算”+ 格林公式

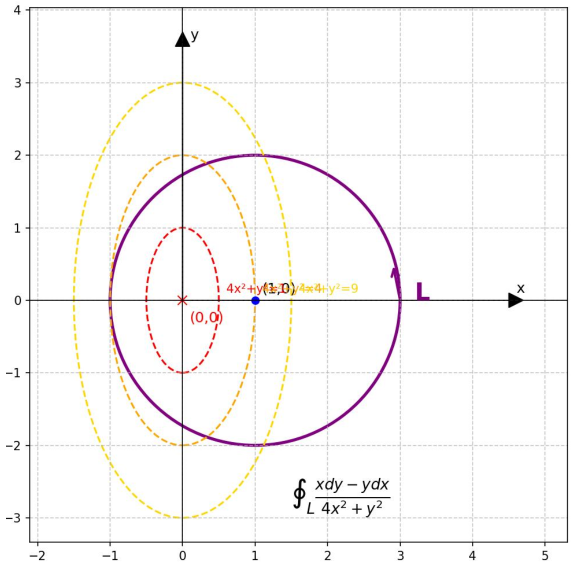
L 草图如下，D 含有奇点(0,0)使 P、Q 不连续

首先，挖洞，取 l_1：$4x^2+y^2=\varepsilon^2$（ε充分小），取逆时针

然后，由 $Q(x,y)=\frac{x}{4x^2+y^2}, P(x,y)=\frac{-y}{4x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$$\Rightarrow\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{l_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{l_1}\frac{xdy-ydx}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{l_1} xdy-ydx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D 1-(-1)dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_D 1\cdot dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot S_D=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$$



例 3.验证 $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求一个 $u(x,y)$

分析：在单连通区域 D 内 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Leftrightarrow Pdx+Qdy$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，且：

$$u(x,y)=\int_{(x_0+y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy \text{（折线法）}$$

解：设 $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\Rightarrow$ *存在二元函数* $u(x,y)$，*使得*：$du(x,y)=Pdx+Qdy=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}\overset{\text{折线法}}{\Longrightarrow}\int_{(1,0)}^{(x,0)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

（标红部分为 0）

$$=0+\int_0^y\frac{xdy}{x^2+y^2}$$

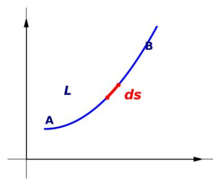
$$=x\cdot\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\Big|_0^y=\arctan\frac{y}{x}$$

四、对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

1、概念与性质：

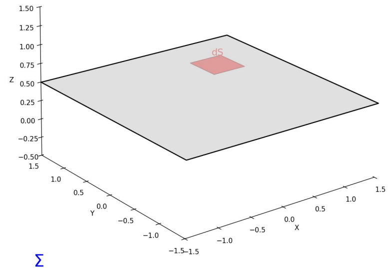
①回顾：对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi i,\eta i)\Delta s_i$，又称为第一类曲线积分

$\overset{背景}{\Longleftrightarrow}$线密度为 $\mu=f(x,y)$ 的曲线构件的质量，质量元 $dM=f(x,y)ds$



②定义：对面积的曲面积分：$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$，又称为第一类曲面积分

$\overset{背景}{\Longleftrightarrow}$ 面密度为$\mu = f(x,y,z)$的曲面Σ的质量：质量元：$dM = f(x,y,z)dS$



Σ

注：若 $f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续 ⇒ 则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 存在

③性质：

Ⅰ、可加性：$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$

Ⅱ、当 $f(x,y,z) = 1$ 时，$\iint\limits_{\Sigma} 1dS =$ 曲面Σ的面积

Ⅲ、$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z) \pm g(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS \pm \iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)dS$

$\iint\limits_{\Sigma} kf(x,y,z)dS = k\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

2、$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 的计算（投影法）

①若曲面Σ的方程为：$z = z(x,y)$，则面积元 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$（其中$D_{xy}$为曲面在 xoy 面上的投影）

解释

②若曲面Σ的方程为：$y = y(x,z)$，则面积元 $dS = \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}dxdz$

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}dxdz$（其中$D_{xz}$为曲面在 xoz 面上的投影）

③若曲面Σ的方程为：$x = x(y,z)$，则面积元 $dS = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}dydz$

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}dydz$（其中$D_{yz}$为曲面在 yoz 面上的投影）

例：计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z}dS$，其中Σ为球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$被平面 $z = h(0 < h < a)$所截的顶部

解: 首先 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$z_x'=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, z_y'=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

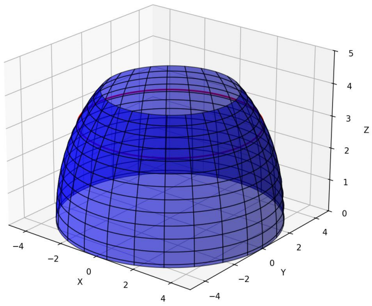
$$\Rightarrow \text{面积元：} dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

其次，联立 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ z=h\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=a^2-h^2$

$$\text{则}\Sigma\text{在 xoy 面的投影为}D_{xy}=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2-h^2\}$$

最后，原式 $=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{z}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{1}{a^2-x^2-y^2}dxdy$

$$\xRightarrow{\text{极坐标}} a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{1}{a^2-r^2}rdr=2\pi a\cdot ln\frac{a}{h}$$



2、$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$ 化简手段

①手段一：“先代后算”，把曲面Σ方程代入到 f(x,y,z)化简
②手段二：“偶倍奇 0”

$$\text{若}\Sigma\text{关于 xoy 对称}\Rightarrow\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & \text{，当 } f(x,y,z)\text{是 z 的奇函数}\\ 2\iint\limits_{\Sigma_{\text{半}}}f(x,y,z)dS & \text{，当 } f(x,y,z)\text{是 z 的偶函数}\end{cases}$$

③手段三：“轮换对称性”：若Σ的方程关于 x,y,z 具有轮换对称性

$$\Rightarrow\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(y,z,x)dS=\iint\limits_{\Sigma}f(z,x,y)dS$$

$$\text{特别地：}\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}x^2+y^2+z^2dS\text{（当}\Sigma\text{具有轮换性）}$$

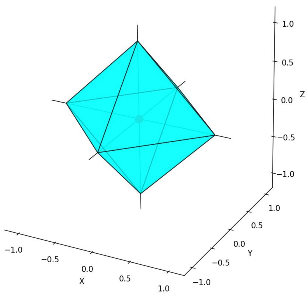
例：设曲面Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，求 $\oiint\limits_{\Sigma}x+|y|\,dS$

解：显然曲面Σ关于 yoz 面对称，则：$\oiint\limits_{\Sigma}xdS=0$（偶倍奇 0）

$$\therefore 原式 = \oiint\limits_{\Sigma} |y|\,dS$$

又Σ：$|x| + |y| + |z| = 1$ 具有轮换对称性，则：

$$\oiint\limits_{\Sigma} |x|\,dS = \oiint\limits_{\Sigma} |y|\,dS = \oiint\limits_{\Sigma} |z|\,dS = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} |x| + |y| + |z| dS = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} 1dS = \frac{1}{3}\cdot 8\cdot S_{\Delta} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$



五、对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

1、概念与性质

Ⅰ回顾：对面积的曲面积分：$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，又称为第一类曲面积分

$$\overset{背景}{\Longleftrightarrow} 面密度为\mu = f(x,y,z)的曲面\Sigma的质量：质量元：dM = f(x,y,z)dS$$

Ⅱ、定义：对坐标轴的曲面积分

$$\left.\begin{array}{l}
① \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} \\
② \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \\
③ \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz} \\
\overset{合并}{\Longrightarrow} \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy（第二类曲面积分）
\end{array}\right\} \overset{背景}{\Longleftrightarrow} 流量\phi = 速度\times 面积$$

Ⅲ、性质

①可加性：

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

②设Σ为有向曲面，Σ^-表示与Σ相反的曲面，则：

$$\iint\limits_{\Sigma^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

比如：上半球外侧Σ与上半球内侧Σ^-就相反

2、第二类曲面积分的计算方法（投影法）

①对于$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$，若Σ的方程为$z = z(x,y)$，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$（上侧为正，下侧为负）

D_{xy}是Σ在 xOy 面上的投影

②对于 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$，若Σ的方程为 $x = x(y,z)$，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$$（前侧为正，后侧为负）

D_{yz}是Σ在 yOz 面上的投影

③对于 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdy$，若Σ的方程为 $y = y(x,z)$，则：

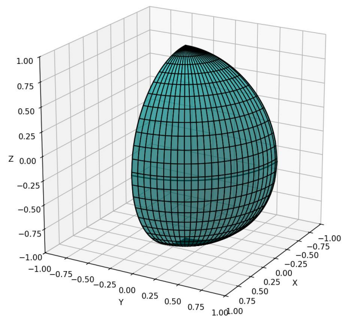
$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdy$$（右侧为正，左侧为负）

D_{xz}是Σ在 xOz 面上的投影

例：求 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$，其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在 $x \geq 0$，$y \geq 0$ 部分

设 xoy 平面上半部分为Σ_1，下半部分为Σ_2

Σ的草图如右，$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$



$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy \xRightarrow{\text{投影法}} - \iint\limits_{D_{xy}} xy\cdot\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} xy\cdot\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy \xRightarrow{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2\cdot\cos\theta\sin\theta\cdot\sqrt{1-r^2}\cdot rdr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^1 r^3\cdot\sqrt{1-r^2}dr = \frac{1}{15}$$

（注：$\int_0^1 r^3\cdot\sqrt{1-r^2}dr \xRightarrow{r=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t - \sin^5 t dt = \frac{2}{15}$）

$$\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy = + \iint\limits_{D_{xy}} xy\cdot\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy = \frac{1}{15}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$$

3、第二类曲面积分化简手段

①“先代后算”：有时把曲面Σ的方程代入到被积函数化简

②利用两类曲面积分的关系

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{Pdydz} + \mathrm{Qdzdx} + \mathrm{Rdxdy} = \iint_{\Sigma} (\mathrm{Pcos\alpha} + \mathrm{Qcos\beta} + \mathrm{Rcos\gamma})\mathrm{dS}$$

（其中$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为Σ在$(x, y, z)$处法向量的方向余弦）

解释：

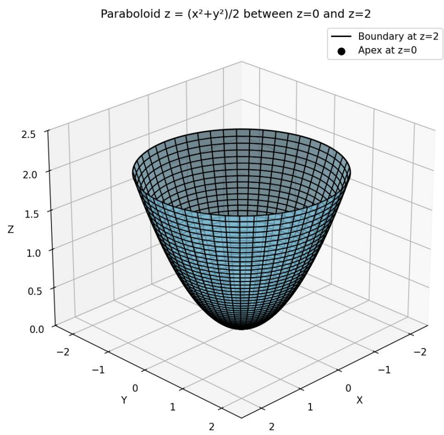
③利用“转换投影法”

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{Pdydz} + \mathrm{Qdzdx} + \mathrm{Rdxdy} = \iint_{D_{xy}} \{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\, \mathrm{dxdy}$$

（其中$\vec{n} = \pm\{-z_x, -z_y, 1\}$上侧为正，下侧为负）

解释：

例：设 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x)\mathrm{dydz} - z\mathrm{dxdy}$，其中Σ是 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$介于 $z = 0, z = 2$ 之间部分的下侧



由Σ方程：$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 取下侧，则法向量$\vec{n} = -\{-z_x, -z_y, 1\} = \{x, y, -1\}$

用转换投影法：

$$原式 = \iint_{\Sigma} \{P, Q, R\}\vec{n}\mathrm{dxdy} = \iint_{D_{xy}} \{z^2 + x, 0, -z\} \cdot \{x, y, -1\}\mathrm{dxdy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{x^2 + y^2}{4}x + x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}dxdy = \iint_{D_{xy}} x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}dxdy$$

$$\xRightarrow{极坐标} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 (r^2 cos^2\theta + \frac{r^2}{2})rdr = 8\pi$$

六、高斯公式

定理:如果①空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成;②函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在Ω上具有一阶连续偏导数，则：

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$ （高斯公式）

（当Σ取外侧时为正，取内侧时为负）

证明过程 P223-224

注：$\begin{cases}\text{要求一：}\Sigma\text{为封闭曲面（若不封闭，要加面使封闭）}\\ \text{要求二：}P,Q,R\text{ 要具有一阶连续偏导数（如}\oiint_{\Sigma_{球}}\dfrac{xdxdz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\text{要}\textbf{挖洞}\text{）}\end{cases}$

例：求 $\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为：$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$上侧

解：Σ不封闭，加Σ_1使它封闭Σ_1：$\begin{cases}x^2+y^2\leq a^2\\ z=0\end{cases}$（取下侧）

$$\text{则}\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$\xrightarrow{\text{高斯公式}}+\iiint_{\Omega} 1+1+1dxdydz-0\ \ (dz\text{ 和 }z\text{ 都是 }0)$$

$$=3\iiint_{\Omega} 1dxdydz=3\cdot V_{半球}=2\pi a^3$$

例：设Σ为$x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 的外侧，求积分：$I=\oiint_{\Sigma}\dfrac{xdxdz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

解：Σ内含奇点，需要挖洞

取$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$（内侧，$\varepsilon$很小）

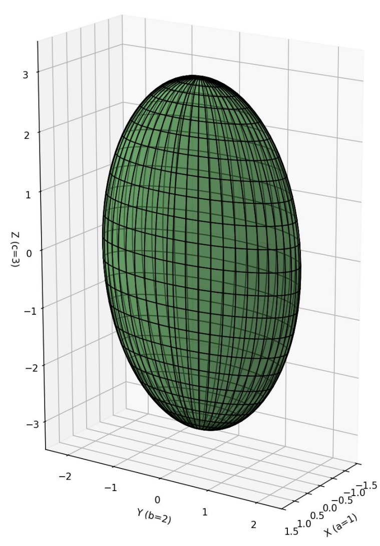
$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\therefore\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

$$\therefore\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\xRightarrow{\text{高斯}}\iiint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}dV=0$$

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{\Sigma^-} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$



$$=\oiint_{\Sigma^-}\frac{xdxdz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\xRightarrow{\text{先代后算}}\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma^-}xdxdz+ydzdx+zdxdy\xRightarrow{\text{高斯}}\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot\iiint_{\Omega_1}1+1+1dV$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot 3\cdot V_{\text{球}}=4\pi$$

七、斯托克斯公式（格林公式推广）、散度，旋度，通量

1、回顾：格林公式：如果：①区域D由分段光滑的闭曲线L围成；

②函数 $P(x,y),Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数 ⇒则：

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\pm\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

2、斯托克斯公式：

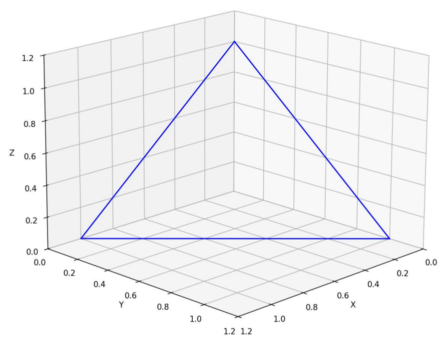
若①曲线Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的有向曲面（其中Γ的正向与Σ的侧符合右手规则）；②函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在Σ上具有一阶连续偏导数，则：

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx-(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

证明 P231

例：计算$\oint_\Gamma zdx+xdy+ydz$,其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被坐标面所截三角形的整个边界，Γ的正向与三角形上侧的法向量符合右手规则。



[法一]用斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma zdx+xdy+ydz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma 1dydz+1dzdx+1dxdy$$

$$\xRightarrow{\text{转换投影}}\iint_{D_{xy}}\{1,1,1\}\cdot\vec{n}dxdy=\iint_{D_{xy}}3\,dxdy=3\times\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{3}{2}$$

（其中$\vec{n}$={1,1,1}）

[法二]用格林公式:显然Γ在 xOy 面上投影为 $L:x+y=1$

$$\oint_{\Gamma} \mathrm{zdx}+\mathrm{xdy}+\mathrm{ydz}=\oint_{\Gamma}(1-\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathrm{dx}+\mathrm{xdy}+\mathrm{yd}(1-\mathrm{x}-\mathrm{y})$$

$$=\oint_{\mathrm{L}}(1-\mathrm{x}-2\mathrm{y})\mathrm{dx}+(\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathrm{dy} \xRightarrow{\text{格林公式}} \iint_{D_{xy}} 1+2\,dxdy=3\iint_{D_{xy}} 1\,dxdy=\frac{3}{2}$$

3、散度、旋度、通量

①设向量$\vec{\mathrm{A}}=\mathrm{P}\vec{\mathrm{i}}+\mathrm{Q}\vec{\mathrm{j}}+\mathrm{R}\vec{\mathrm{k}} \Rightarrow$ 称 $\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$为$\vec{\mathrm{A}}$的散度

②称 $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}}=\begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix}$为向量场$\vec{\mathrm{A}}$的旋度

③通量：设$\vec{\mathrm{A}}=\{\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}\}$，$\overrightarrow{\mathrm{n}^{\circ}}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为曲面$\Sigma$的单位法向量，

称$\oiint_{\Sigma}\vec{\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{n}^{\circ}}\mathrm{dS}=\oiint_{\Sigma}(\mathrm{P}\cos\alpha+\mathrm{Q}\cos\beta+\mathrm{R}\cos\gamma)\mathrm{dS}$ 为$\vec{\mathrm{A}}$通过Σ的通量