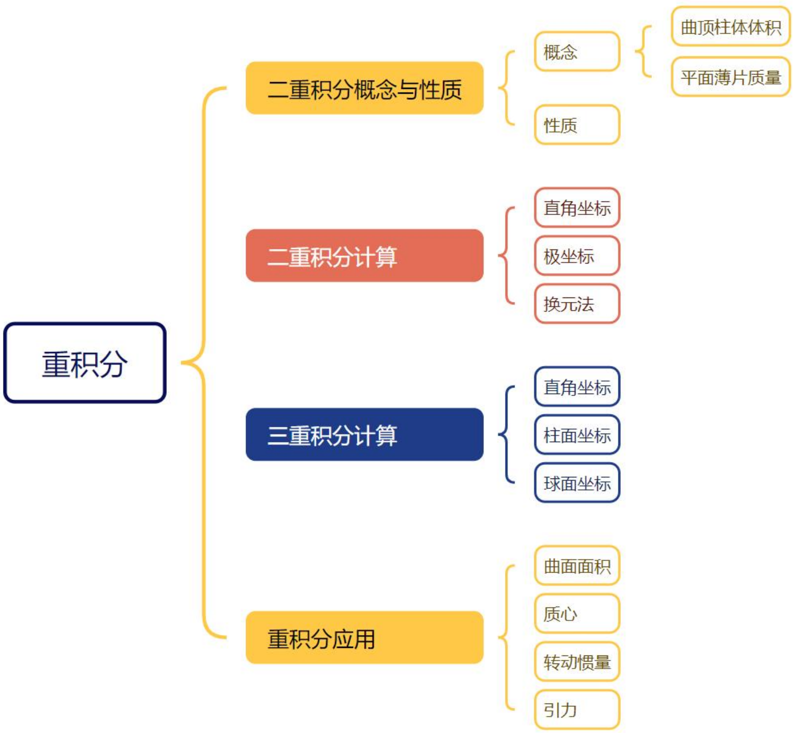
# 第十章 重积分

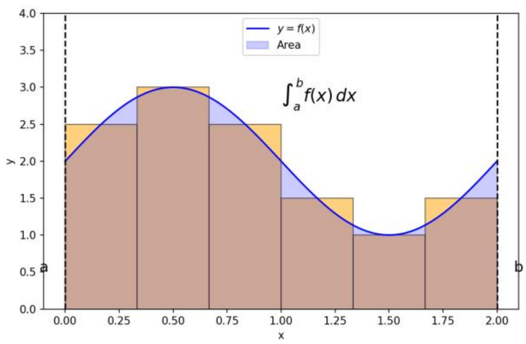
GUET-Support-Program　　　穆天宇(MU-ty)



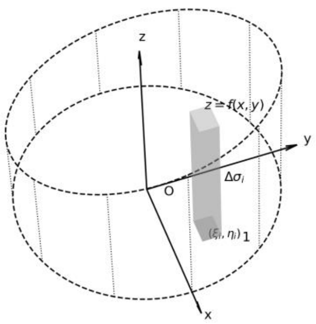

一、二重积分概念与性质

1、二重积分背景

①定积分背景：曲线梯形的面积




②二重积分背景：曲顶柱体的体积（先分割，再近似）




用一组网格线把底面划分成 n 个小区域（n 个 $S_{底}$），小体积近似于 $S_{底}$×高

$$\xrightarrow{\text{求和}} V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta Vi = \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i \xrightarrow{\text{取极限}} \text{取}\lambda = \max\{d1, d2, d3 \ldots dn\}, V = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$$

③平面薄片的质量

$$m = \iint_D \mu(x, y) d\sigma \text{（}\mu\text{是面密度）}$$

2、二重积分概念

设 f(x,y)是有界闭区域 D 上的有界函数，①分割：把 D 分割成 n 个小区域$\Delta\sigma 1$，$\Delta\sigma 2 \ldots \Delta\sigma i$；②作积：任取点$(\xi i, \eta i) \in \Delta\sigma i$，作乘积 $f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$；③求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$；④取极限：令$\lambda = \max\{d1, d2, d3 \ldots dn\}$，如果$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$存在，则称此极限为 f(x,y)在 D 区域上的二重积分，记为$\iint_D f(x, y) d\sigma$或$\iint_D f(x, y) dxdy$，即：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i, \eta i) \cdot \Delta\sigma i$$

注：面积元：$\Delta\sigma i = d\sigma = dxdy$

3、性质：

① $\iint_D f(x, y) \pm g(x, y) dxdy = \iint_D f(x, y) dxdy \pm \iint_D g(x, y) dxdy;$

$$\iint_D kf(x, y) dxdy = k \iint_D f(x, y) dxdy$$

②若 D=D1∪D2（其中 D1∩D2≠ ∅），则：

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D1} f(x, y) dxdy + \iint_{D2} f(x, y) dxdy$$

③ $\iint_D 1 dxdy = S_D$（区域 D 的面积）

类似于$\int_a^b 1 dx = b - a$

④若在区域 D 上，$f(x, y) \le g(x, y)$则：

$$\iint_D f(x, y) dxdy \le \iint_D g(x, y) dxdy$$

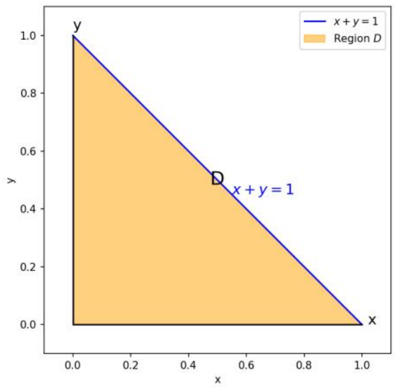
⑤估值定理：若在 D 上有 $m \le f(x, y) \le M$,则：

$$mS_D \le \iint_D f(x, y) dxdy \le MS_D$$

⑥积分中值定理：若 f(x,y)在 D 上连续，则：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\cdot S_D \quad （其中(\xi,\eta)\in D）$$

类似于：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \xi \in [a,b]$




例 1：比较 $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$ 的大小，其中：

区域 D 是 $x+y=1$ 与 x 轴、y 轴所围成的部分；

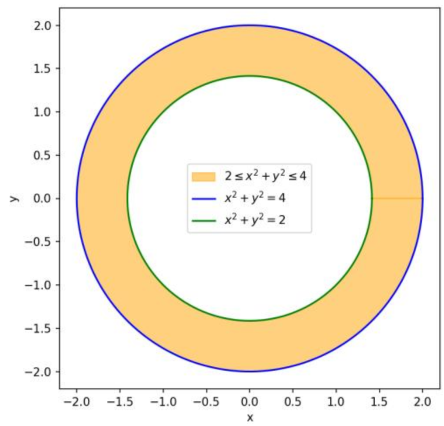
解：

Ⅰ：$0 \le x+y \le 1 \Rightarrow (x+y)^3 \le (x+y)^2$

$$\therefore \iint_D (x+y)^2 dxdy \ge \iint_D (x+y)^3 dxdy$$

例 2：估计 $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ 的大小，其中 D 为$\{(x,y)|2 \le x^2+y^2 \le 4\}$

解：用估值定理 $2 \le f(x,y) = x^2+y^2 \le 4$




$$\therefore 2\cdot S_D \le \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \le 4\cdot S_D$$

其中，$S_D$为环形区域面积：$\pi(2^2-(\sqrt{2})^2) = 2\pi$

$$\therefore 4\pi \le \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \le 8\pi$$

二、二重积分计算

1、利用直角坐标系求 $\iint_D f(x,y)dxdy$（两种方法）

①定 x 穿 y

X-型区域 D 上的二重积分

$$D_x = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\end{matrix}\right\}$$

则：

$$\iint_{D_x} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

②定 y 穿 x

Y-型区域 D 上的二重积分

$$D_Y = \left\{(x,y)\middle|\begin{matrix} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\end{matrix}\right\}$$

则：

$$\iint_{D_Y} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

2、利用对称性化简二重积分（一种手段）

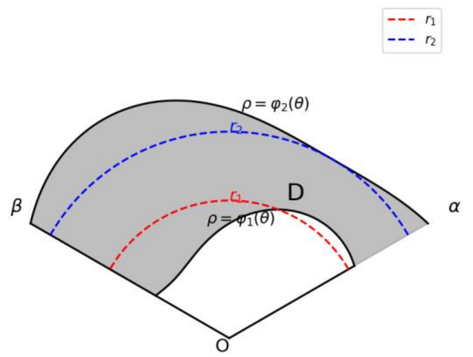
$$\text{类似于定积分：}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0\text{，当 } f(x)\text{为奇} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx\text{，当 } f(x)\text{为偶} \end{cases}$$

$$①\iint_{D} f(x,y)dxdy \xRightarrow{D\text{ 关于 x 轴对称}} \begin{cases} 0\text{，当 } f(x,y)\text{是 y 的奇函数} \\ 2\iint_{D_{半}} f(x,y)dxdy\text{，当 } f(x,y)\text{是 y 的偶函数} \end{cases}$$

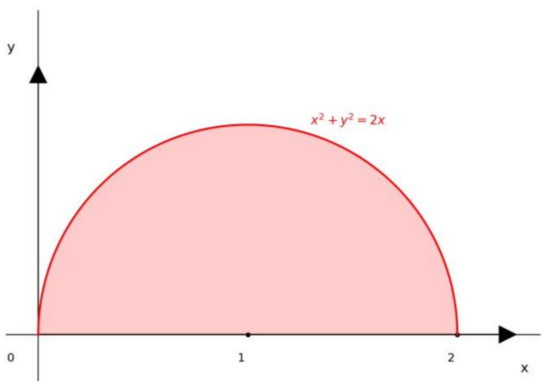
$$②\iint_{D} f(x,y)dxdy \xRightarrow{D\text{ 关于 y 轴对称}} \begin{cases} 0\text{，当 } f(x,y)\text{是 x 的奇函数} \\ 2\iint_{D_{半}} f(x,y)dxdy\text{，当 } f(x,y)\text{是 x 的偶函数} \end{cases}$$

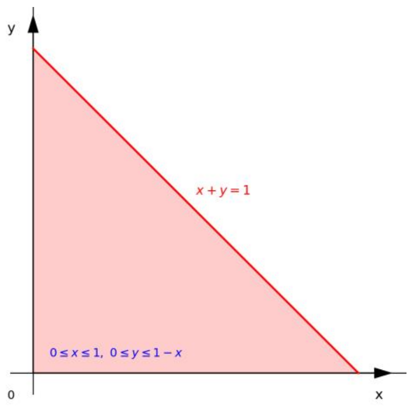
3、利用极坐标计算二重积分（一种方法） $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$

①$D_{极} = \begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \end{cases}$，*定θ穿r*




例如：




$r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta$

$$D_{极} = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \end{cases}$$

$r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

$$D_{极} = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} \end{cases}$$

②极坐标下的二次积分公式

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{极}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r1(\theta)}^{r2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r dr$$

即：面积元$= dxdy = rdrd\theta$

解释面积元：

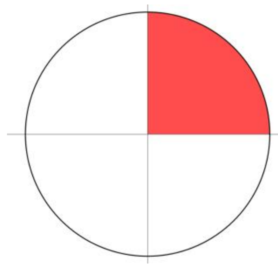
法一：面积元= $d\sigma = rd\theta \cdot dr$($rd\theta$相当于一个小面积的长，dr 相当于小面积的宽)

法二：雅可比行列式：

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \Rightarrow \text{面积元 } d\sigma = rdrd\theta$$

极坐标下的二次积分公式使用场景$\begin{cases} \text{当积分区域 D 与圆域、圆环有关时} \\ \text{当 } f(x,y) \text{ 中含有} x^2+y^2\text{，}(x^2+y^2)^k, \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \text{时} \end{cases}$

例 1：求 $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dx$



解：$x = \sqrt{a^2-y^2}$

$\rho\cos\theta = \sqrt{a^2 - \rho\sin\theta}$

$\therefore \rho = a$

$\therefore \mathbf{0 \le \rho \le a}$

化简 $x = \sqrt{a^2-y^2}$得$x^2+y^2=a^2$

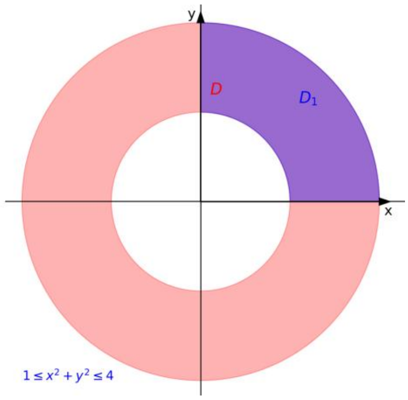
将 $0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$化简，$0 \le x \le a$

又因 $0 \le y \le a$，画出图

$\therefore \mathbf{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$

$\therefore$ 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2\, \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{8}a^4$

例 2：求 $\iint\limits_D x^2 dxdy$，其中 D：$\{1 \le x^2+y^2 \le 4\}$




$$\iint\limits_D x^2 dxdy = 4\iint\limits_{D_1} x^2 dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 (r\cos\theta)^2\, rdr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \cdot \int_1^2 r^3 dr = \frac{15}{4}\pi$$

注：高数 A1 结论

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n\text{为大于 1 的正奇数} \end{cases}}$$

例 3：使用分部积分：$\int udv = uv - \int vdu$

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma\text{，其中}D\text{是由圆周}x^2+y^2=1\text{ 及坐标轴所围成在第一象限内闭区域}$$

解：$0 \le \rho \le 1$，$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\iint_D ln(1+x^2+y^2)d\sigma = \iint_D ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 ln(1+\rho^2)\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 ln(1+\rho^2)d(1+\rho^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\left[(1+\rho^2)ln(1+\rho^2)\Big|_0^1-\int_0^1(1+\rho^2)dln(1+\rho^2)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\left[(1+\rho^2)ln(1+\rho^2)\Big|_0^1-\int_0^1 2\rho d\rho\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$$

三、三重积分计算

1、定义

定积分：曲边梯形面积

二重积分：曲顶柱体体积

三重积分：

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta V_i$$

$\Omega$*：积分区域*　　$f(x,y,z)$*：被积函数*　　$dxdydz$*：积分变量*

注：

①体积元：$\mathrm{dv}=\mathrm{dxdydz}$

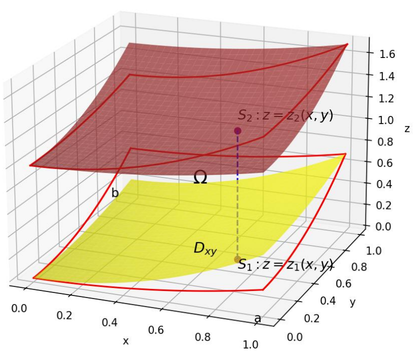
② $\iiint_\Omega 1\mathrm{dv}=\mathrm{V}_\Omega$，（*Ω的体积*）

③物理意义：$\iiint_\Omega \mathrm{f(x,y,z)dv}$ 表示以 $\mathrm{f(x,y,z)}$为密度的立体物件*Ω的质量*

2、三重积分的计算

①利用直角坐标计算 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$

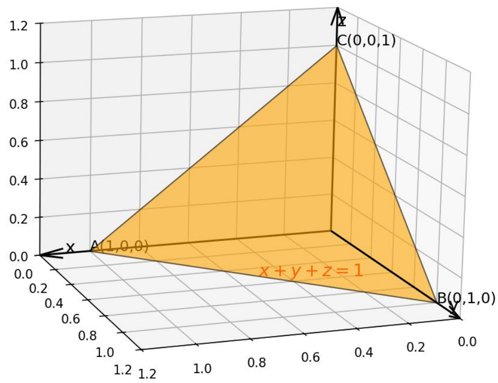
Ⅰ、投影法（先一后二）




**先把$\Omega$表示出来：**

$$\Omega \xRightarrow{定D_{xy}穿z} \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

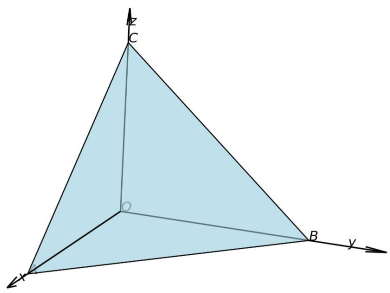
比如：$\mathrm{x+y+z=1}$




$$\Omega \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{(x,y) \in D_{xy}} \\ \mathrm{0 \le z \le 1-x-y} \end{cases}$$

**再求解：** $\boldsymbol{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{f(x,y,z)dxdydz} = \iint\limits_{\mathrm{D_{xy}}} \mathrm{dxdy} \cdot \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{f(x,y,z)dz}}$ **（先一后二）**

例：求 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，*其中*Ω为三个平面及平面 $\mathrm{x+2y+z=1}$ 所围成的区域




解：Ω如图所示

把Ω表示出来 $\xRightarrow{定D_{xy}穿z} \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ \mathrm{0 \le z \le 1-x-y} \end{cases}$

用先一后二法：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{\mathrm{D_{xy}}} \mathrm{dxdy} \cdot \int_0^{\mathrm{1-x-2y}} \mathrm{xdz}$$

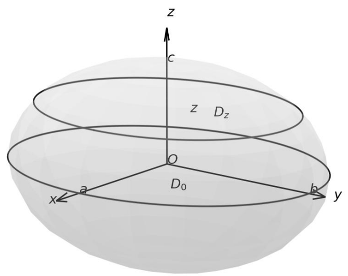
$$= \iint\limits_{\mathrm{D_{xy}}} \mathrm{xdxdy} \cdot \int_0^{\mathrm{1-x-2y}} \mathrm{1dz}$$

$$= \iint\limits_{\mathrm{D_{xy}}} \mathrm{x(1-x-2y)\,dxdy}$$

$$\xRightarrow{定x穿y} \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} x(1-x-2y)dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (\mathrm{x} - 2x^2 + x^3)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{48}$$

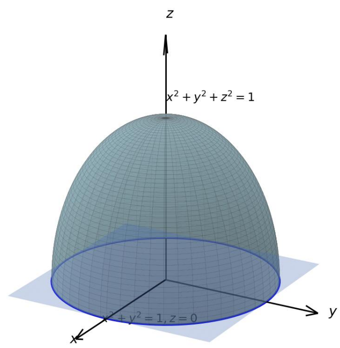
Ⅱ、平面截割法（先二后一）




先把$\Omega$表示出来

$$\Omega \xRightarrow{定z穿D_z} \begin{cases} c \le z \le d \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases}$$

比如：




$$\Omega \xRightarrow{定z穿D_z} \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ (x,y) \in D_z \end{cases}$$

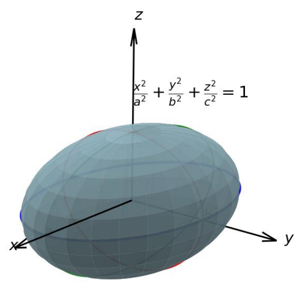
再求解：$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{f(x,y,z)dxdydz} = \int_{c}^{d} \mathrm{dz} \iint\limits_{D_z} \mathrm{f(x,y,z)dxdy}$（先二后一）

截割法使用前提：$\begin{cases} ①当被积函数\ f\ 是\ z\ 的一元函数 \\ ②截面D_Z的面积好求 \end{cases}$

例：求 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{z^2dxdydz}$，其中$\Omega$*是由椭球面*$:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *所围成*

解：Ω如图

用一个平行于 xoy 面的平面截割$\Omega$：




$$\Omega \xRightarrow{定z穿D_z} \begin{cases} -c \le z \le c \\ (x,y) \in D_z \end{cases}，其中D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1-\frac{z^2}{c^2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{z^2dxdydz} \xRightarrow{先二后一} \int_{-c}^{c} \mathrm{dz} \iint\limits_{D_z} \mathrm{z^2dxdy} = \int_{-c}^{c} \mathrm{z^2dz} \iint\limits_{D_z} \mathrm{1dxdy}$$

$$= \pi ab \int_{-c}^{c} z^2 \cdot (1-\frac{z^2}{c^2})dz = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

$$\boxed{椭圆面积 = \pi ab，\ \therefore \iint\limits_{D_z} \mathrm{1dxdy} = S_{D_z} = \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})}$$

②利用柱面坐标计算$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$

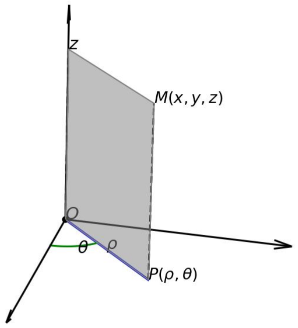
方法:

Ⅰ、直角坐标化为柱面坐标

直角坐标 $M(x,y,z)$，得$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$（换元法）

柱面坐标 $M(r,\theta,z)$

注：体积元 $= dxdydz = rdrd\theta dz$




Ⅱ、$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow[]{\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} 换元} \iiint\limits_{\Omega_{柱}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot {\color{red} r} \cdot drd\theta dz$（柱面坐标公式）

使用柱面坐标公式的前提$\begin{cases} ①积分区域\Omega与圆柱体、圆锥、旋转抛物面有关 \\ ②被积函数含有(x^2+y^2)^2 \end{cases}$

例：求 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中$\Omega$是由曲面 $z = x^2 + y^2$与平面 $z = 4$ 所围成

解：因与$\Omega$与旋转抛物面有关，可用“柱面坐标公式”；因被积函数是 z 的一元函数，且截面面积好求，可用“平面截割法”。

<法一>柱面坐标法

先把$\Omega$投影到 xoy 面得：$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 4$

再表示$\Omega_{柱} = \begin{cases} (r,\theta) \in D_{xy} \\ x^2 + y^2 \le z \le 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ r^2 \le z \le 4 \end{cases}$

最后 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{柱}} z\cdot rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_{r^2}^4 zdz = \frac{64}{3}\pi$

<法二>平面截割法

先用平行于 xoy 面的平面截割$\Omega$得：$D_z: x^2 + y^2 \le z$

再表示$\Omega \xRightarrow{定z穿D_z} \begin{cases} 0 \le z \le 4 \\ (x,y) \in D_z \end{cases}$

最后 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \int_0^4 zdz \iint\limits_{D_z} 1dxdy = \pi \int_0^4 z^2 dz = \frac{64}{3}\pi$

（其中 $\iint\limits_{D_z} 1dxdy = S_{D_z} = \pi\cdot z$）

③利用对称性化简三重积分

类似于定积分：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0， & 当\ f(x)为奇 \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx， & 当\ f(x)为偶 \end{cases}$

① $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow{\Omega关于\ xoy\ 面对称} \begin{cases} 0， & 当\ f(x,y,z)是\ z\ 的奇函数 \\ 2\iiint\limits_{\Omega_{半}} f(x,y,z)dxdydz， & 当\ f(x,y,z)是\ z\ 的偶函数 \end{cases}$

② $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow{\Omega关于\ xoz\ 面对称} \begin{cases} 0， & 当\ f(x,y,z)是\ y\ 的奇函数 \\ 2\iiint\limits_{\Omega_{半}} f(x,y,z)dxdydz， & 当\ f(x,y,z)是\ y\ 的偶函数 \end{cases}$

③ $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \xRightarrow{\Omega关于\ yoz\ 面对称} \begin{cases} 0， & 当\ f(x,y,z)x\ 的奇函数 \\ 2\iiint\limits_{\Omega_{半}} f(x,y,z)dxdydz， & 当\ f(x,y,z)是\ x\ 的偶函数 \end{cases}$

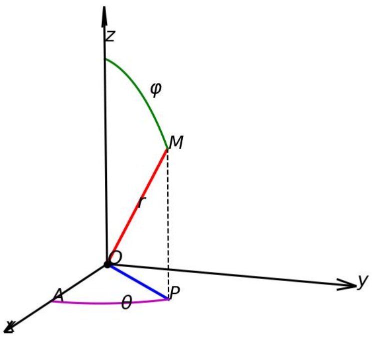
例：

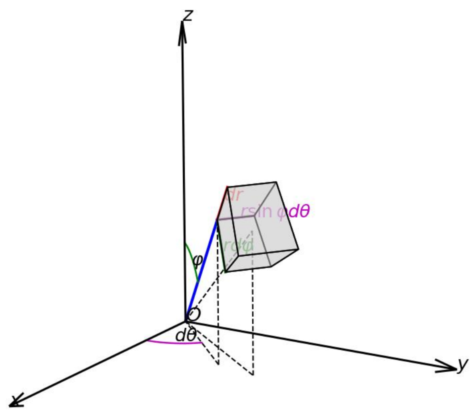
$$计算\iiint\limits_{\Omega} xzdxdydz，其中\Omega是由z=0,z=y,y=1,y=x^2围成的闭区域$$

解：由于$\Omega$关于 yOz 面对称，且被积函数 xz 关于 x 是奇函数因此等于 0

④利用球面坐标计算 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$

Ⅰ、直角坐标与球面坐标的关系




直角坐标：M(x,y,z)，如图，$r=|OM| \Rightarrow 0 \le r < +\infty$

$\theta$表示从 x 轴到 OP 的夹角$\Rightarrow 0 \le \theta \le 2\pi$

注：$x^2+y^2+z^2=r^2$；体积元 $dv = r^2 sin\varphi drd\varphi d\theta$

Ⅱ、$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{球}} f(rsin\varphi cos\theta, rsin\varphi sin\theta, rcos\varphi)\cdot r^2\ sin\varphi drd\varphi d\theta$

（球面坐标公式）

球面坐标公式使用前提$\begin{cases} 当积分区域\Omega与球有关 \\ 当积分函数含有(x^2+y^2+z^2)^2 \end{cases}$

例：求 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2zdv$，其中$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 4,z\ge 0\}$

解：
先画Ω：上半球体（略）
然后可以利用对称性化简$f(x,y,z)=(x+y)^2z=x^2z+y^2z+2xyz$

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}[(x^2+y^2)z+2xyz]dV\xRightarrow{下面括号解释}\iiint\limits_{\Omega}[(x^2+y^2)zdV$$

（其中Ω关于 yoz 面对称，2xyz 是 x 的奇函数，即奇+对称为 0）

$$再表示\Omega_{球}\xRightarrow{代入f(rsin\varphi cos\theta,rsin\varphi sin\theta,rcos\varphi)}\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\0\le r\le 2\end{cases}，体积元\ dV=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$最后：用球坐标公式：\iiint\limits_{\Omega_{球}}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r^5\sin^3\varphi\cos\varphi dr=\frac{16\pi}{3}$$

四、重积分计算

1、求曲顶柱体的体积

$$公式一：二重积分：V_{柱}=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$$

$$公式二：三重积分：V_{\Omega}=\iiint\limits_{\Omega}1dxdydz$$

2、求曲面的面积

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$给定，$D_{xy}$为 S 在 xoy 面的投影，则：曲面 S 的面积为：

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2z_y^2}dxdy$$

注：在 yoz 面、xoz 面类似

3、质心

①平面薄片 D 的密度为$\rho(x,y)$，则质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$，其中：

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D\rho(x,y)dxdy},\bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D\rho(x,y)dxdy},若均匀薄片，则\rho(x,y)=常数\triangleq 1$$

②平面薄片 D 的密度为$\rho(x,y,z)$，则质心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，其中：

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dV}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dV},\bar{y}=\frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dV}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dV},\bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dV}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dV}$$

$$若均匀立体，则\rho(x,y,z)=常数\triangleq 1$$

4、转动惯量

设空间立体Ω的密度为ρ(x,y,z)，则立体对 x 轴，y 轴，z 轴的转动惯量：

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$$

$$I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV$$

例：求均匀半球体的质心

解：建立坐标系，设半球体以 z 轴为对称轴

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2 \le a^2，\ z \ge 0\right\}$$

则质心在 x 轴上，设为$(0,0,\overline{z})$

$$\overline{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dV}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)dV} \xRightarrow{\text{均匀体}\rho=1} \frac{\iiint_{\Omega} zdV}{\iiint_{\Omega} 1dV} \xRightarrow{\text{下面解释}} \frac{3\pi}{8}$$

其中：

$$\iiint\limits_{\Omega} 1dV = V_{\Omega} = V_{\text{半球}} = \frac{2\pi a^2}{3}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdV \xRightarrow{\text{代入}f(rsin\varphi cos\theta,rsin\varphi sin\theta,rcos\varphi)} \iiint\limits_{\Omega_{\text{球}}} r\cos\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi drd\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a} r^3\sin^2\varphi\cos\varphi dr = \frac{\pi}{4}a^4$$