λC 中逻辑概念的编码
The encoding of logical notions in λC

读书笔记

许博

1 疑问

P142. 析取的表示 $A \vee B \equiv \Pi C : *.(A \to C) \to (B \to C) \to C$，对它的解释为：*If A implies C and also B implies C, then C holds on its own*。为什么这里的 A 和 B 是或的关系？

2 类型理论中的谬论（absurdity）与否定（negation）

在章节 5.4 中，通过编码蕴含式 $A \Rightarrow B$ 为函数类型 $A \to B$，模拟蕴含式的行为，包括它的导入和消解规则。因为 λP 是 λC 的一部分，所以 λC 中同样拥有最小谓词逻辑。

本章将处理更多的接词（connective），比如否定（$\neg$），合取（$\wedge$）和析取（$\vee$）。这些在 λP 中不能表示，但在 λC 中存在非常优雅的方式去编码这些概念。

将否定 $\neg A$ 看作蕴含式 $A \Rightarrow \perp$，其中 $\perp$ 是“谬论（absurdity）”，也可以称为“矛盾（contradiction）”。因此 $\neg A$ 被解释为“A 蕴含了谬论”。为了这个目标，我们需要谬论的编码：

I. 谬论，*Absurdity*
命题“谬论”或 $\perp$ 的一个独特的性质是：如果 $\perp$ 为真，则每一个命题都为

真。

每一个命题都为真，则存在一个接收任意一个命题 α 然后返回 α 的一个成员的函数，而这个函数的类型为 $\Pi\alpha:*.\alpha$。因此“如果 $\perp$ 为真，则每一个命题都为真”可以表述为“如果存在 $M:\perp$，则存在 $f:\Pi\alpha:*.\alpha$”。因此，在类型理论中，定义 $\perp$ 为 $\Pi\alpha:*.\alpha$。

$\perp$-消解（$\perp$-elimination）规则：

($\perp$-elim) $\dfrac{\perp}{A}$

因为 $\perp\equiv\Pi\alpha:*.\alpha$，则 $s_1=\square$ 且 $s_2=*$，所以 $\perp$ 存在于 $\lambda2$ 中，且 $\perp:*$。

II. 否定，Negation

定义：$\neg A\equiv A\to\perp$。

$A\to\perp$ 是 $\Pi x:A.\perp$ 的简写，其中 $A:*$ 且 $\perp:*$，所以 $(s_1,s_2)=(*,*)$。但因为 $\perp$ 存在，至少 $\lambda2$ 才能够表示否定。

$\perp$-导入（$\perp$-introduction）规则：

($\perp$-intro) $\dfrac{A\quad\neg A}{\perp}$

或：

($\perp$-intro) $\dfrac{A\quad A\Rightarrow\perp}{\perp}$

而 ($\neg$-intro) 和 ($\neg$-elim) 规则可以以 ($\Rightarrow$-intro) 和 ($\Rightarrow$-elim) 规则替换，前者为后者的特殊情况。

需要注意的是，尽管 ($\perp$-intro) 和 ($\neg$-elim) 都是 ($\Rightarrow$-elim) 的特殊情况，但两者具有不同的目的，前者是为了获得 $\perp$，而后者则告诉了我们如何使用一个否定 $\neg A$。

3 类型理论中的合取和析取

I. 合取，Conjunction

合取 $A\wedge B$ 为真当且仅当 A 和 B 都为真。在 $\lambda2$ 中，合取的表示为：

$A\wedge B\equiv\Pi C:*.(A\to B\to C)\to C$

这是一个合取的所谓“二阶”编码，比如 $A\wedge B\equiv\neg(A\to\neg B)$ 的一阶编码更为通用，因为后者只在经典逻辑中有效。

$\Pi C:*.(A\to B\to C)\to C$ 可以读作：对于所有的 C,（A 蕴含（B 蕴含 C)）蕴含 C。若将 A,B,C 都看作是命题，则可以解释为：对于所有命

题 C, 如果 A 和 B 共同蕴含 C, 则 C 取决于自身。条件“如果 A 和 B 共同蕴含 C”也即“A 和 B 都为真”是多余的，而为了使条件成立，A 和 B 必须为真。这里我认为，C holds on its own 意为 $C \to C$，也即第二个 C 由第一个 C 蕴含，而 $C \to C$ 恒为真，所以条件是多余的，但条件需要满足（条件满足是命题为真的必要条件），所以 A 和 B 都需要为真。

$\Pi C : *.(A \to B \to C) \to C$ 被称为二阶是因为它是在命题上的泛化，而命题是二阶对象。

$\wedge$ 在自然演绎中的规则以及在类型理论中二阶编码的规则：

($\wedge$-intro) $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$

($\wedge$-elim-left) $\dfrac{A \wedge B}{A}$

($\wedge$-elim-right) $\dfrac{A \wedge B}{B}$

($\wedge$-intro-sec) $\dfrac{A \quad B}{\Pi C : *.(A \to B \to C) \to C}$

($\wedge$-elim-left-sec) $\dfrac{\Pi C : *.(A \to B \to C) \to C}{A}$

($\wedge$-elim-right-sec) $\dfrac{\Pi C : *.(A \to B \to C) \to C}{B}$

II. 析取，Disjunction

析取 $A \vee B$ 的二阶编码：

$$A \vee B \equiv \Pi C : *.(A \to C) \to (B \to C) \to C$$