11 λD 中 Flag 风格的自然演绎

Flag-style natural deduction in λD

读书笔记

许博

1 λD 中的形式化推导

在 λD 中，我们可以以更有效更优雅的方式表示逻辑，尤其是构造逻辑。在章节 7.1 和 7.2 中，我们遇到了一些 λC 中处理逻辑的“隐藏”定义。作为例子，使用 λrmD 的标准形式表示下列三者：

Absurdity

λC 使用 $\perp$ 表示 $\Pi\alpha:*.\alpha$，行为与描述性定义相同，在 λD 中可以写作：

$\emptyset \rhd \perp() := \Pi\alpha:*.\alpha:*$。

Negation

之前使用 $\neg A$ 作为 $A \to \perp$ 的简写，同样也是一个描述性定义：

$A:* \rhd \neg(A) := A \to \perp():*$。

Conjunction

同样的，我们可以定义合取，具有了两个参数：

$A:*, B:* \rhd \wedge(A,B) := \Pi C:*.(A \to B \to C) \to C:*$。

形如以上的逻辑定义在 λD 中能够被形式化推导。因为需要先推导出定义实体之后，才能够在环境中添加定义。比如 $\neg$ 的定义的一个 λD_0-推导：

$$\begin{array}{lclclcl} \mathcal{D}_1 & \equiv & \emptyset & \rhd & \perp() & := & \Pi\alpha:*.\,\alpha & : & * \\ \mathcal{D}_2 & \equiv & A:* & \rhd & \neg(A) & := & A \to \perp() & : & * \end{array}$$

(1)	$\emptyset$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$*$	:	$\square$	($sort$)
(2)	$\emptyset$	;	$\alpha:*$	$\vdash$	α	:	$*$	(var) on (1)
(3)	$\emptyset$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$\Pi\alpha:*.\,\alpha$	:	$*$	($form$) on (1), (2)
(4)	$\mathcal{D}_1$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$\perp()$	:	$*$	(par) on (3)
(5)	$\mathcal{D}_1$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$*$	:	$\square$	(def) on (1), (3)
(6)	$\mathcal{D}_1$	;	$A:*$	$\vdash$	A	:	$*$	(var) on (5)
(7)	$\mathcal{D}_1$	;	$A:*$	$\vdash$	$\perp()$	:	$*$	($weak$) on (4), (5)
(8)	$\mathcal{D}_1$	;	$A:*,\ y:A$	$\vdash$	$\perp()$	:	$*$	($weak$) on (7), (6)
(9)	$\mathcal{D}_1$	;	$A:*$	$\vdash$	$A \to \perp()$	:	$*$	($form$) on (6), (8)
(10)	$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$	;	$A:*$	$\vdash$	$\neg(A)$	:	$*$	(par) on (9)

Figure 11.2 A λD_0-derivation for the definition of $\neg$

通常来说，推导会从底端开始，也即需要考虑如果能够到达最后的推定。需要从推导规则，不断从 **conclusion** 反推所需要的 **premiss**。

2 对比形式化和 flag-风格的 λD

在第四章及以后，我们在推导时，将应用了规则 (sort),(var),(weak) 以及 (form) 的步骤省略，以获得更紧凑的推导过程，同时舍去了一些并不有趣的步骤，现在在 λD 中，也将这样做，除了上述提到的规则，还加入了规则 (def)。

一个有趣的问题是如何使用 flag-风格表示图 11.2 中的线性格式，如下（已经使用了简化版本）：

(3)	$\Pi\alpha:*.\,\alpha \ : \ *$	($form$)
($\mathcal{D}_1$)	$\perp() \ := \ \Pi\alpha:*.\,\alpha \ : \ *$	definition
(4)	$\perp():*$	(par) on (3) and ($\mathcal{D}_1$)
(a)	$\boxed{A:*}$	
(6)	$A:*$	(var)
(b)	$\boxed{y:A}$	
(8)	$\perp() \ : \ *$	($weak$), twice, on (4) and (6)
(9)	$A \to \perp() \ : \ *$	($form$) on (6) and (8)
($\mathcal{D}_2$)	$\neg(A) \ := \ A \to \perp() \ : \ *$	definition
(10)	$\neg(A) \ : \ *$	(par) on (9) and ($\mathcal{D}_2$)

两个版本之间极为相似。而观察行 (3) 到 (4)，会发现信息的重复，以及 ($\mathcal{D}_1$) 和行 (9) 和 (10)。看起来只保留 ($\mathcal{D}_1$) 和 ($\mathcal{D}_2$) 而删除行 (3),(4),(9)

和 (10) 是非常合理的。

以及行 (6) 和 (8) 或多或少都有些多余，行 (9) 是假设 (a) 和行 (4) 的一个显而易见的结果，所以我们可以跳过行 (6) 和 (8)，以及假设 (b)。

应用了上述修改，得到如下 flag-风格的推导：

$$
\begin{array}{rlll}
(\mathcal{D}_1) & \bot(\,) \;:=\; \Pi\alpha:*.\,\alpha \;:\; * & & (\mathit{form}) \text{ and } (\mathit{par}) \\
(\text{a}) & \boxed{A:*} & & \\
(\mathcal{D}_2) & \quad \neg(A) \;:=\; A \to \bot(\,) \;:\; * & & (\mathit{form}) \text{ and } (\mathit{par})
\end{array}
$$

至此，通过重写证明到 flag 形式，以及省略一些非常明显的行，我们得到了一个 flag 风格的推导，与在章节 11.1 开头相对应的定义的表示相同。