λC 中逻辑概念的编码
The encoding of logical notions in λC

读书笔记

许博

1 类型理论中的谬论（absurdity）与否定（negation）

在章节 5.4 中，通过编码蕴含式 $A \Rightarrow B$ 为函数类型 $A \to B$，模拟蕴含式的行为，包括它的导入和消解规则。因为 λP 是 λC 的一部分，所以 λC 中同样拥有最小谓词逻辑。

本章将处理更多的接词（connective），比如否定（$\neg$），合取（$\wedge$）和析取（$\vee$）。这些在 λP 中不能表示，但在 λC 中存在非常优雅的方式去编码这些概念。

将否定 $\neg A$ 看作蕴含式 $A \Rightarrow \perp$，其中 $\perp$ 是“谬论（absurdity）”，也可以称为“矛盾（contradiction）”。因此 $\neg A$ 被解释为“A 蕴含了谬论”。为了这个目标，我们需要谬论的编码：

I. 谬论，Absurdity

命题“谬论”或 $\perp$ 的一个独特的性质是：如果 $\perp$ 为真，则每一个命题都为真。

每一个命题都为真，则存在一个接收任意一个命题 α 然后返回 α 的一个成员的函数，而这个函数的类型为 $\Pi\alpha : *.\alpha$。因此“如果 $\perp$ 为真，则每一个命题都为真”可以表述为“如果存在 $M : \perp$，则存在 $f : \Pi\alpha : *.\alpha$”。因此，在类型理论中，定义 $\perp$ 为 $\Pi\alpha : *.\alpha$。