

依赖于类型的类型

Types Depending on Types

报告人：许博

目录

- 1 类型构造子
- 2 类别和变量规则
- 3 弱化规则 (weakening rule)
- 4 形成规则 (formation rule)
- 5 应用与抽象规则
- 6 简化 (shortened) 推导
- 7 变换 (conversion) 规则
- 8 性质

引入类型构造子

$\lambda \rightarrow$

$\lambda x : \alpha. x$

$\lambda 2, \lambda \rightarrow + \text{terms depending on types}$

$\lambda \alpha : *. \lambda x : \alpha. x$

$(\lambda \alpha : *. \lambda x : \alpha. x) \beta \rightarrow_{\beta} \lambda x : \beta. x$

$\lambda \underline{\omega}, \lambda \rightarrow + \text{types depending on types}$

$\beta \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \gamma, \dots$ 等具有结构 $\diamond \rightarrow \diamond$ 的类型，其中箭头的左右是一样的类型

$\lambda \alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha$ ，类型构造子

$(\lambda \alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha) \beta \rightarrow_{\beta} \beta \rightarrow \beta$

类型构造子的类型, 超级类型

类型构造子的类型

$$\alpha : *$$

$$\alpha \rightarrow \alpha : *$$

$$\lambda \alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha : * \rightarrow *$$

$$\lambda \alpha : *. \lambda \beta : *. \alpha \rightarrow \beta : * \rightarrow (* \rightarrow *)$$

超级类型, 记为类 (kind), \mathbb{K}

$$*, * \rightarrow *, * \rightarrow (* \rightarrow *), \dots$$

$$\mathbb{K} = * | (\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K})$$

超级超级类型, \square , 仅有一个

$$* : \square, * \rightarrow * : \square, * \rightarrow (* \rightarrow *) : \square, \dots$$

类型构造子

定义 4.1.4 (构造子, 真构造子, 类别)

- (1) 如果 $\kappa : \square$ 且 $M : \kappa$, 则 M 是一个构造子, 如果 $\kappa \neq *$, 则 M 是一个真构造子
- (2) 类别 (s) 的集合为 $\{*, \square\}$

类型构造子的定义

如果 κ 是一个类 (kind), 则对于每个类型是 κ 的 M (即 $M : \kappa$), M 被称作是一个类型构造子, 简称为构造子
 因为 $* : \square, \alpha : *$, 所以 α 或者 $\alpha \rightarrow \alpha$ 也都是构造子

真构造子

使用真构造子 (proper constructor) 表示不是类型的构造子 (即类型不是 $*$ 的构造子)。

类别 (sort), s

使用类别 (sort) 或符号 s 表示 $*$ 或 \square 。

四个层级 (level)

定义 4.1.6 (层级, level)

- 第 1 层: 项 (terms);
- 第 2 层: 构造子 (包括类型和真构造子);
- 第 3 层: 类 (kinds);
- 第 4 层: 超级超级类型 \square 。

对于语句 $A : B$, 可以得出 B 所处的层级一定比 A 高一级, 比如当 A 是一个项时, B 是一个类型, 或者 A 是一个类型时, $B \equiv *$ 。

类别规则

定义 4.2.1 (类别规则, sort-rule)

$(\text{sort}) \ \emptyset \vdash * : \square$

形式化 $*$ 的类型是 \square , $* : \square$ 可以由空的上下文推导出。

良构 (well-formed) 的类型定义

给定的上下文中所有的声明都需要是可推导的。

定义 2.4.5 ($\lambda \rightarrow$ 的 var-rule)

如果 $x : \sigma \in \Gamma$, 则 $\Gamma \vdash x : \sigma$

对于 $\lambda \rightarrow$ 上下文中出现的类型, 合法类型的集合已经给出, 可以直接判断合法与否。

定义 3.4.6 ($\lambda 2$ 的 var-rule)

如果 Γ 是一个 $\lambda 2$ -上下文且 $x : \sigma \in \Gamma$, 则 $\Gamma \vdash x : \sigma$

$\lambda 2$ 的类型复杂一点, 需要类型中的自由类型变量在上下文中已声明, 因此类型的合法与否依赖于推定的上下文。

λ_{ω} 中的变量规则

定义 4.2.2 (变量规则, var-rule)

(var) 如果 $x \notin \Gamma$, 则
$$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

推定中的类型的合法与否取决于是否可以被形式化地推导出。

$x \notin \Gamma$ 保证了变量 x 未在 Γ 中出现, 因此声明在一个上下文中的所有变量都是不同的, 避免了变量名相同 (类型不同) 时造成的混淆。

应用 (sort) 和 (var) 规则的一个例子

$$\begin{array}{c}
 (1) \ \emptyset \vdash * : \Box \\
 \hline
 (2) \ \alpha : * \vdash \alpha : * \quad (var) \\
 \hline
 (3) \ \alpha : *, x : \alpha \vdash x : \alpha \quad (var)
 \end{array}$$

只能推导出上下文中新添加的最后一个声明。

不能推导的例子

$$\alpha : *, x : \alpha \vdash \alpha : *$$

$$\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *$$

$$\alpha : *, \beta : * \vdash \beta : *$$

最后一个例子中, 不能得到 **premiss**: $\alpha : * \vdash * : \Box$

$\lambda\omega$ 中的弱化规则 (weakening rule)

定义 4.3.1 (弱化规则, weakening rule)

(weak) 如果 $x \notin \Gamma$, 则
$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$$

若上下文 Γ 已经可以推导出 $A : B$, 在 Γ 的尾部添加了一个任意的声明 (弱化) 后仍然可以推导出 $A : B$ 。需要注意的是添加的声明的类型需要是可推导出的。

推导 $\alpha : *, x : \alpha \vdash \alpha : *$

$$\frac{\frac{(1) \emptyset \vdash * : \square}{(2) \alpha : * \vdash \alpha : *} (var) \quad \frac{(1) \emptyset \vdash * : \square}{(2) \alpha : * \vdash \alpha : *} (var)}{(3) \alpha : *, x : \alpha \vdash \alpha : *} (weak)$$

定义 4.4.1 (形成规则, formation rule)

$$(\text{form}) \frac{\Gamma \vdash A : s \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \rightarrow B : s}$$

三个 s 同时表示 $*$ 或 \square 。

在引入新的 (form) 规则之前, 由 (var) 规则与 (weak) 规则只能推导出 $* : \square, \alpha : *, x : \alpha$ 而不能推出箭头类型 $* \rightarrow * : \square$ 以及 $\alpha \rightarrow \beta : *$ 等。

例子

$$\frac{\emptyset \vdash * : \square \quad \emptyset \vdash * : \square}{\emptyset \vdash * \rightarrow * : \square} (\text{form})$$

定义 3.4.7 ($\lambda \rightarrow$ 中的形成规则, formation rule in $\lambda \rightarrow$)

(form) 如果 Γ 是一个 λ^2 -上下文, $B \in \mathbb{T}^2$ 且 B 中所有的自由类型变量已经在 Γ 中声明, 则 $\Gamma \vdash B : *$

应用规则, application rule

$$(\text{appl}) \frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

抽象规则, abstraction rule

$$(\text{abst}) \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B}$$

λ_{ω} 中的这两个规则与之前略有不同:

- 用于类型的元变量 (meta-variable) 的名字不同, 因为 λ_{ω} 中的类型更为通用
- 需要保证类型是良构的 (即可以由上下文推导出)

当 $s \equiv *$ 时, $A \rightarrow B$ 是一个第二层的类型, 如 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$,

当 $s \equiv \square$ 时, $A \rightarrow B$ 就是一个第三层的类 (kind), 如 $(* \rightarrow *) \rightarrow *$ 。

简化 (shortened) 推导

推导 $\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha \rightarrow \beta : *$, 需要以下推定:

$\emptyset \vdash * : \square$ (sort),
 $\alpha : * \vdash \alpha : *$ (var),
 $\alpha : * \vdash * : \square$ (weak),
 $\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha : *$ (weak),
 $\alpha : *, \beta : * \vdash \beta : *$ (var)。

允许跳过以下推导过程:

- (i) 当使用规则 (sort), (var) 和 (weak) 时,
- (ii) 当使用规则 (form) 时, 以及
- (iii) 当确定 (abst) 规则的第二个 premiss 的合法性时。

因此 $\alpha : *, \beta : * \vdash \alpha \rightarrow \beta : *$ 现在可以直接使用。

定义 4.7.1 (变换规则, conversion rule)

(conv) 如果 $B =_{\beta} B'$, 则
$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'}$$

B 作为已知推定 $\Gamma \vdash A : B$ 的部分是良构的, $\Gamma \vdash B' : s$ 保证 B' 也是良构的。而 $B =_{\beta} B'$ 无法保证 B' 是良构的, 比如 $\beta \rightarrow \gamma =_{\beta} (\lambda \alpha : *. \beta \rightarrow \gamma) M$ 。

例子

令 $\Gamma \equiv \beta : *, x : (\lambda \alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha) \beta$:

$$\frac{\Gamma \vdash x : (\lambda \alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha) \beta \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \beta : *}{\Gamma \vdash x : \beta \rightarrow \beta} \text{ (conv)}$$

λ_{ω} -规则

(sort) $\emptyset \vdash * : \square$

(var) 如果 $x \notin \Gamma$, 则 $\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$

(weak) 如果 $x \notin \Gamma$, 则 $\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B}$

(form) $\frac{\Gamma \vdash A : s \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \rightarrow B : s}$

(appl) $\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$

(abst) $\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B}$

(conv) 如果 $B =_{\beta} B'$, 则 $\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'}$

λ_ω 的性质

λ_ω 满足之前几章所提到的大部分性质，但是类型唯一性引理需要进行调整：

引理 4.8.1 (类型唯一性引理)

如果 $\Gamma \vdash A : B_1$ 且 $\Gamma \vdash A : B_2$ ，则 $B_1 =_\beta B_2$

引理 2.10.9 (适用于 $\lambda \rightarrow$ 的类型唯一性引理)

假设 $\Gamma \vdash M : \sigma$ 且 $\Gamma \vdash M : \tau$ ，则 $\sigma \equiv \tau$