

# 12 $\lambda$ D 中的数学：第一个尝试

## Mathematics in $\lambda$ D: a first attempt

读书笔记

许博

### 1 先举个例子

第十一章中，我们在  $\lambda$ D 中表示了逻辑。在本章中，将转向数学（mathematics）。尽管逻辑的推导框架对数学至关重要，因为逻辑包含了推理的原则，但是数学本身要比单纯的逻辑多的多。

本章以一个关于偏序集合的例子开始，即证明在这样的集合中只存在至多一个最小元。一个在集合  $S$  上的关系  $R$  如果满足自反性，反对称性和传递性，则这个关系是偏序的。

**Definition 12.1.1** Let  $S$  be a set and  $\leq$  a binary relation on  $S$ . Then  $m \in S$  is a *least element* of  $S$  with respect to  $\leq$  if  $\forall_{n \in S} (m \leq n)$ .

**Lemma 12.1.2** Let  $S$  be a set, partially ordered by  $\leq$ . Assume that  $S$  has a least element with respect to  $\leq$ . Then this least element is unique.

*Proof* Assume that  $m_1$  and  $m_2$  are elements of  $S$  and that both are least elements. Then  $\forall_{n \in S} (m_1 \leq n)$  and  $\forall_{n \in S} (m_2 \leq n)$ . In particular,  $m_1 \leq m_2$  and  $m_2 \leq m_1$ . Hence,  $m_1 = m_2$ , by antisymmetry of  $\leq$ . It follows that, if  $S$  has a least element, then this element is unique.  $\square$

在  $\lambda$ D 中形式化这个证明：

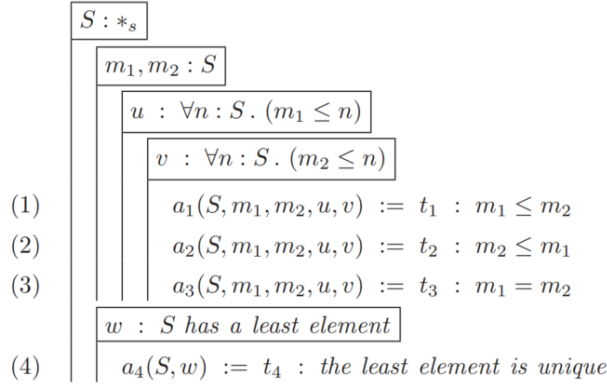


Figure 12.1 A first attempt of proving Lemma 12.1.2 in  $\lambda D$

注意到其中存在的几个问题。有一些可以以直观的方式解决：

- 符号 ‘ $\leq$ ’ 表示在  $S$  上的一个任意的偏序关系。这些隐含的假设会在章节 12.4 中明确的表示。
- 全称量词  $\forall$  在  $\lambda D$  中被编码为  $\Pi$ 。
- 解决未知项  $t_1$  和  $t_2$  代表什么：应是  $\forall$ -消去规则的实例，所以令  $t_1 \equiv \forall\text{-el}(S, \lambda x : S. m_1 \leq x, u, m_2)$  以及  $t_2 \equiv \forall\text{-el}(S, \lambda y : S. m_2 \leq y, v, m_1)$ ，或者简单地令  $t_1 \equiv um_2$  以及  $t_2 \equiv vm_1$ 。

剩下的问题似乎更加重要：

*Q1* 符号 ‘ $=$ ’ 表示了基本的相等关系，作为数学中许多领域的基础，但尚未是我们系统的一部分，如何补足这点？

*Q2* 行 (3) 中  $t_3$  代表什么？

*Q3* 如何表达  $S$  拥有一个最小元？

*Q4* 如何表达最小元的唯一性？

*Q5* 如何证明最小元的唯一性，也即  $t_4$  是什么？