

# 14 $\lambda D$ 中的数字与算术

## Numbers and arithmetic in $\lambda D$

读书笔记

许博

### 1 用于自然数的皮亚诺公理

皮亚诺假设存在一个集合  $\mathbb{N}$ ，一个特殊的成员  $0$ ，以及一个由  $\mathbb{N}$  到  $\mathbb{N}$  的函数  $s$ 。所以在  $\mathbb{N}$  中，我们有成员  $0, s(0), s(s(0))$  等，表示  $0, 1, 2$  等。

之后，皮亚诺通过添加公理，使得这些形式化的数字行为符合预期。为了保证函数  $s$  一定产生新的数字，皮亚诺添加了两条公理：

$$ax-nat_1 : \forall x \in \mathbb{N} (s(x) \neq 0)$$

$$ax-nat_2 : \forall x, y \in \mathbb{N} (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$$

公理  $ax-nat_2$  表示  $s$  是一个内射的函数，而  $ax-nat_1$  隐含了  $s$  不是满射的。这两条公理决定了不同层数  $s$  的自然数不相同。

除此之外，皮亚诺还添加了一条公理，以通过数学归纳法确定所有自然数的性质：

$$ax-nat_3 : (P0 \wedge \forall x : \mathbb{N}. (Px \Rightarrow P(sx))) \Rightarrow \forall x : \mathbb{N}. Px$$

**引理 1.1** 对于所有  $n \in \mathbb{N} : n = 0 \vee \exists m \in \mathbb{N} (n = s(m))$