11 λD 中 Flag 风格的自然演绎

Flag-style natural deduction in λD

读书笔记

许博

1 λD 中的形式化推导

在 λD 中，我们可以以更有效更优雅的方式表示逻辑，尤其是构造逻辑。在章节 7.1 和 7.2 中，我们遇到了一些 λC 中处理逻辑的“隐藏”定义。作为例子，使用 λrmD 的标准形式表示下列三者：

Absurdity

λC 使用 $\perp$ 表示 $\Pi\alpha : *.\alpha$，行为与描述性定义相同，在 λD 中可以写作：

$\emptyset \rhd \perp () := \Pi\alpha : *.\alpha : *$。

Negation

之前使用 $\neg A$ 作为 $A \to\perp$ 的简写，同样也是一个描述性定义：

$A : * \rhd \neg(A) := A \to\perp () : *$。

Conjunction

同样的，我们可以定义合取，具有了两个参数：

$A : *, B : * \rhd \wedge(A, B) := \Pi C : *.(A \to B \to C) \to C : *$。

形如以上的逻辑定义在 λD 中能够被形式化推导。因为需要先推导出定义实体之后，才能够在环境中添加定义。比如 $\neg$ 的定义的一个 $\lambda\mathrm{D}_0$-推导：

$$\mathcal{D}_1 \equiv \emptyset \rhd \bot() := \Pi\alpha : *.\, \alpha : *$$
$$\mathcal{D}_2 \equiv A : * \rhd \neg(A) := A \to \bot() : *$$

(1)	$\emptyset$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$*$	:	$\square$	(*sort*)
(2)	$\emptyset$	;	$\alpha : *$	$\vdash$	α	:	$*$	(*var*) on (1)
(3)	$\emptyset$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$\Pi\alpha : *.\, \alpha$	:	$*$	(*form*) on (1), (2)
(4)	$\mathcal{D}_1$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$\bot()$	:	$*$	(*par*) on (3)
(5)	$\mathcal{D}_1$	;	$\emptyset$	$\vdash$	$*$	:	$\square$	(*def*) on (1), (3)
(6)	$\mathcal{D}_1$	;	$A : *$	$\vdash$	A	:	$*$	(*var*) on (5)
(7)	$\mathcal{D}_1$	;	$A : *$	$\vdash$	$\bot()$	:	$*$	(*weak*) on (4), (5)
(8)	$\mathcal{D}_1$	;	$A : *,\ y : A$	$\vdash$	$\bot()$	:	$*$	(*weak*) on (7), (6)
(9)	$\mathcal{D}_1$	;	$A : *$	$\vdash$	$A \to \bot()$	:	$*$	(*form*) on (6), (8)
(10)	$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$	;	$A : *$	$\vdash$	$\neg(A)$	:	$*$	(*par*) on (9)

Figure 11.2 A λD_0-derivation for the definition of $\neg$

通常来说，推导会从底端开始，也即需要考虑如果能够到达最后的推定。需要从推导规则，不断从 **conclusion** 反推所需要的 **premiss**。