12 λD 中的数学：第一个尝试

Mathematics in λD: a first attempt

读书笔记

许博

1 先举个例子

第十一章中，我们在 λD 中表示了逻辑。在本章中，将转向数学（mathematics）。尽管逻辑的推导框架对数学至关重要，因为逻辑包含了推理的原则，但是数学本身要比单纯的逻辑多的多。

本章以一个关于偏序集合的例子开始，即证明在这样的集合中只存在至多一个最小元。一个在集合 S 上的关系 R 如果满足自反性，反对称性和传递性，则这个关系是偏序的。

> **Definition 12.1.1** Let S be a set and $\leq$ a binary relation on S. Then $m \in S$ is a *least element* of S with respect to $\leq$ if $\forall_{n \in S}(m \leq n)$.
>
> **Lemma 12.1.2** *Let S be a set, partially ordered by $\leq$. Assume that S has a least element with respect to $\leq$. Then this least element is unique.*
>
> *Proof* Assume that m_1 and m_2 are elements of S and that both are *least* elements. Then $\forall_{n \in S}(m_1 \leq n)$ and $\forall_{n \in S}(m_2 \leq n)$. In particular, $m_1 \leq m_2$ and $m_2 \leq m_1$. Hence, $m_1 = m_2$, by antisymmetry of $\leq$. It follows that, if S has a least element, then this element is unique. $\square$

在 λD 中形式化这个证明：

$\boxed{S : *_s}$

$\quad \boxed{m_1, m_2 : S}$

$\quad\quad \boxed{u \ : \ \forall n : S \,.\, (m_1 \leq n)}$

$\quad\quad\quad \boxed{v \ : \ \forall n : S \,.\, (m_2 \leq n)}$

(1) $\quad a_1(S, m_1, m_2, u, v) \ := \ t_1 \ : \ m_1 \leq m_2$

(2) $\quad a_2(S, m_1, m_2, u, v) \ := \ t_2 \ : \ m_2 \leq m_1$

(3) $\quad a_3(S, m_1, m_2, u, v) \ := \ t_3 \ : \ m_1 = m_2$

$\quad \boxed{w \ : \ S \textit{ has a least element}}$

(4) $\quad a_4(S, w) \ := \ t_4 \ : \ \textit{the least element is unique}$

Figure 12.1 A first attempt of proving Lemma 12.1.2 in λD

注意到其中存在的几个问题。有一些可以以直观的方式解决：

- 符号 '$\leq$' 表示在 S 上的一个任意的偏序关系。这些隐含的假设会在章节 12.4 中明确的表示。
- 全称量词 $\forall$ 在 λD 中被编码为 Π。
- 解决未知项 t_1 和 t_2 代表什么：应是 $\forall$-消去规则的实例，所以令 $t_1 \equiv \forall{-}el(S, \lambda x : S.m_1 \leq x, u, m_2)$ 以及 $t_2 \equiv \forall{-}el(S, \lambda y : S.m_2 \leq y, v, m_1)$，或者简单地令 $t_1 \equiv u m_2$ 以及 $t_2 \equiv v m_1$。

剩下的问题似乎更加重要：

Q1 符号 '=' 表示了基本的相等关系，作为数学中许多领域的基础，但尚未是我们系统的一部分，如何补足这点？

Q2 行 (3) 中 t_3 代表什么？

Q3 如何表达 S 拥有一个最小元？

Q4 如何表达最小元的唯一性？

Q5 如何证明最小元的唯一性，也即 t_4 是什么？