

# 9 以定义扩展 $\lambda C$

## Extension of $\lambda C$ with definitions

读书笔记

许博

### 1 $\lambda C$ 扩展到系统 $\lambda D_0$

本章在  $\lambda C$  的基础上扩展通常意义上定义的形式化版本，也即所谓的描述性定义（descriptive definitions）。扩展后的系统  $\lambda D_0$  尚不能完全支持公理以及公理概念的表示，相应的扩展会在下一章引入  $\lambda D$  时说明。

为给出  $\lambda D_0$  的合适的描述，首先扩展表达式的集合。 $\lambda D_0$  中的表达式与  $\lambda D$  中相同，因此记集合为  $\mathcal{E}_{\lambda D}$ 。

假设除了之前定义的变量集合  $V$  以外，还有常量的集合  $C$ 。使用符号  $a, a_1, a_i, a', b, \dots$  作为常量的名字，正如我们使用  $x, x_1, x_i, x', y, \dots$  作为变量的名字一样。另外，还假设变量和常量来自不相交的集合，而  $*$  和  $\square$  是特殊符号，不属于  $V$  和  $C$ ：

$$V \cap C = \emptyset, * \neq \square, *, \square \notin V \cup C$$

**定义 1.1** ( $\mathcal{E}_{\lambda D}$ )

$$\mathcal{E}_{\lambda D} = V | \square | * | (\mathcal{E}_{\lambda D} \mathcal{E}_{\lambda D}) | (\lambda V : \mathcal{E}_{\lambda D} . \mathcal{E}_{\lambda D}) | (\Pi V : \mathcal{E}_{\lambda D} . \mathcal{E}_{\lambda D}) | C(\bar{\})$$

其中  $\bar{\}$  中的上划线表示这是一个  $\}$ -表达式的列表。

引入“环境，environment”表示一个定义列表。

**定义 1.2** ( $\lambda D_0$  中的描述性定义；环境)

(1) 在  $\mathcal{E}_{\lambda D}$  中，一个（描述性）定义具有形式

$$\bar{x} : \bar{A} \triangleright a(\bar{x}) := M : N$$

其中所有的  $x_i \in V, a \in C$ ，并且所有的  $A_i, M, N \in \mathcal{E}_{\lambda D}$

(2) 一个环境  $\Delta$  是一个有限（空或非空）的定义列表。

使用诸如  $\mathcal{D}, \mathcal{D}_i, \dots$  等符号作为元名称表示定义。一个长度为  $k$  的环境可以被表示为如  $\Delta \equiv \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ 。

关于定义，区分以下元素：

**定义 1.3**（定义中的元素）

令  $\mathcal{D} \equiv \bar{x} : \bar{A} \triangleright a(\bar{x}) := M : N$  是一个定义。则：

- $\bar{x} : \bar{A}$  是  $\mathcal{D}$  中的上下文
- $a$  是  $\mathcal{D}$  中被定义的常量， $\bar{x}$  是参数列表
- $a(\bar{x})$  是  $\mathcal{D}$  中的 *definiendum*
- $M : N$  是  $\mathcal{D}$  中的语句， $M$  是 *definiens* 或  $\mathcal{D}$  的主体， $N$  是  $\mathcal{D}$  的类型。

## 2 以定义扩展推定

回顾  $\lambda C$  中的推定，具有如下形式：

$$\Gamma \vdash M : N$$

但在  $\lambda D_0$  中，这样的推定可能会依赖一些定义，因此我们在推定之前添加环境，使用元符号“;”分割环境与推定，因此包含定义的推定具有新的形式：

**定义 2.1**（包含定义的推定；扩展后的推定）

$$\Delta; \Gamma \vdash M : N,$$

其中  $\Delta$  是一个环境， $\Gamma$  是一个上下文以及  $M, N \in \mathcal{E}_{\lambda D}$ 。

其含义为：“在环境  $\Delta$  和上下文  $\Gamma$  中， $M$  具有类型  $N$ ”。

因此  $M : N$  由在其头部的列表  $\Delta$  和  $\Gamma$  修饰：

- (1) 环境  $\Delta$  绑定了  $M : N$  中出现的常量，
- (2) 上下文  $\Gamma$  绑定了  $M : N$  中出现的自由变量。

在整个推定中，存在依赖关系，先出现的变量或常量可能会出现在之后出现的部分中，而后出现的变量或常量则不会出现在之前出现的部分中，尽管前后可能存在相同的名称，但并非表示的不同。

与上下文相同，使用  $\Delta, \mathcal{D}$  表示在  $\Delta$  右边以  $\mathcal{D}$  进行扩展。

因为暂且不考虑递归定义，因此在一个定义当中，被定义的常量只出现一次。

再给出修改后的全部推到规则之前，将先引入规则 (*def*) 和 (*inst*)，前者导入新的定义到已存在的环境中，而后者则是定义的实例化规则。