

12 λ D 中的数学：第一个尝试

Mathematics in λ D: a first attempt

读书笔记

许博

1 疑问

1. P260, Remark 12.2.1 中, 为何定义 $\Pi P : S \rightarrow *_p.(Px \Rightarrow Py)$ 也可以表示 $x = y$?

2 先举个例子

第十一章中, 我们在 λ D 中表示了逻辑。在本章中, 将转向数学 (mathematics)。尽管逻辑的推导框架对数学至关重要, 因为逻辑包含了推理的原则, 但是数学本身要比单纯的逻辑多的多。

本章以一个关于偏序集合的例子开始, 即证明在这样的集合中只存在至多一个最小元。一个在集合 S 上的关系 R 如果满足自反性, 反对称性和传递性, 则这个关系是偏序的。

Definition 12.1.1 Let S be a set and \leq a binary relation on S . Then $m \in S$ is a *least element* of S with respect to \leq if $\forall_{n \in S}(m \leq n)$.

Lemma 12.1.2 Let S be a set, partially ordered by \leq . Assume that S has a least element with respect to \leq . Then this least element is unique.

Proof Assume that m_1 and m_2 are elements of S and that both are least elements. Then $\forall_{n \in S}(m_1 \leq n)$ and $\forall_{n \in S}(m_2 \leq n)$. In particular, $m_1 \leq m_2$ and $m_2 \leq m_1$. Hence, $m_1 = m_2$, by antisymmetry of \leq . It follows that, if S has a least element, then this element is unique. \square

在 λD 中形式化这个证明：

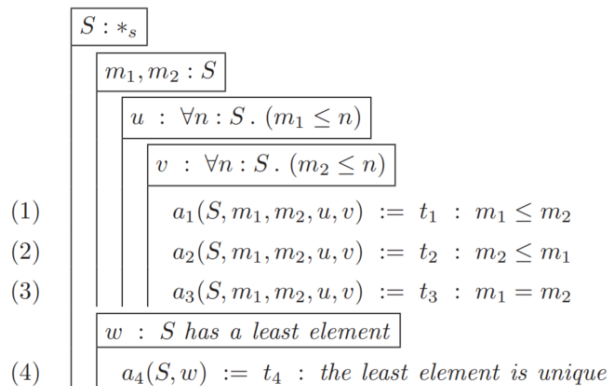


Figure 12.1 A first attempt of proving Lemma 12.1.2 in λD

注意到其中存在的几个问题。有一些可以以直观的方式解决：

- 符号 ‘ \leq ’ 表示在 S 上的一个任意的偏序关系。这些隐含的假设会在章节 12.4 中明确的表示。
- 全称量词 \forall 在 λD 中被编码为 Π 。
- 解决未知项 t_1 和 t_2 代表什么：应是 \forall -消去规则的实例，所以令 $t_1 \equiv \forall\text{-el}(S, \lambda x : S. m_1 \leq x, u, m_2)$ 以及 $t_2 \equiv \forall\text{-el}(S, \lambda y : S. m_2 \leq y, v, m_1)$ ，或者简单地令 $t_1 \equiv um_2$ 以及 $t_2 \equiv vm_1$ 。

剩下的问题似乎更加重要：

- Q1 符号 ‘ $=$ ’ 表示了基本的相等关系，作为数学中许多领域的基础，但尚未是我们系统的一部分，如何补足这点？
- Q2 行 (3) 中 t_3 代表什么？
- Q3 如何表达 S 拥有一个最小元？
- Q4 如何表达最小元的唯一性？
- Q5 如何证明最小元的唯一性，也即 t_4 是什么？

3 相等

相等显然是两个参数之间的关系：对于一对元素 x 和 y ，有命题 $x = y$ 。又因为在类型理论中，每个元素都应具有一个类型；所以假设 S 是 x 和 y 的类型。故我们可以将相等看作是在 S 上的二元谓词。写作 $x =_S y$ 以表示 S 中的 x 和 y 相等。

所以，相等是一个参数化的二元关系：对每一个类型 S ，有一个相等关

系 $=_S: S \rightarrow S \rightarrow *$, 作用于类型为 S 的项。

现在, 核心问题是: S 中的元素 x 和 y “相等” 意味着什么? 德国数学家莱布尼兹 (G.W. Leibniz, 1646-1716) 给出的一个富有哲学的答案是, 如果两个对象在所有可能的环境中都是不可分辨的, 则这两个对象是相等的。可以更简洁地表示为: “对任意在 S 上的谓词 P , Px 的有效性等价于 Py 的有效性”, 也即, 对于给定的 P , 要么 Px 和 Py 都成立, 要么两者都不成立。在这种情况下, 没有可能分辨 x 和 y , 故两者相等。

莱布尼兹对于相等的看法可以作为描述性定义在 λD 中进行形式化, 形式化地定义 $eq(S, x, y)$ 表示 S 中的元素 x 和 y 的相等, 为

$$\Pi P : S \rightarrow *_p. (Px \Leftrightarrow Py)$$

甚至更为简单的定义也可以, 即:

$$\Pi P : S \rightarrow *_p. (Px \Rightarrow Py)$$

使用图 12.2 显示这个被定义的相等时一个满足自反性的关系。使用名字 $eq-refl(S, x)$ 表示自反性的证明。

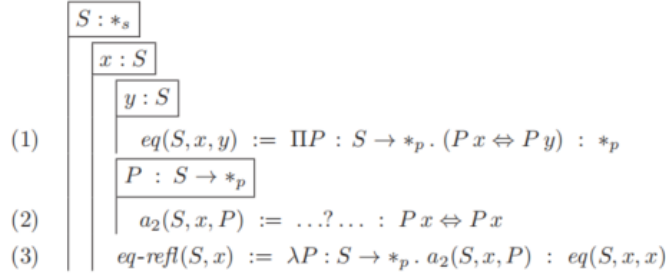


Figure 12.2 Definition of equality, and the reflexivity property for equality

需要注意的是, 我们得到的是相等的二阶定义, 因为 Π 抽象的谓词 $P : S \rightarrow * : \square$ 是二阶的, 所以公式中的 Π 是一个二阶全称量词。

在图 12.2 中的推导中存在一个空, 即行 (2) 中, $Px \Leftrightarrow Px$ 的证明, 有两种方式解决:

(1) 特定的方法 (ad-hoc approach): 也即找到 $Px \Leftrightarrow Px$ 的成员, 使用表达式 $\Leftrightarrow -in(Px, Px, \lambda u : Px.u, \lambda u : Px.u)$ 即可。

(2) 通用方法: 首先证明一个引理, 即 $A \Leftarrow A$ 对于任意的 $A : *_p$ 都成立, 命名这个证明为 $\Leftrightarrow -refl(A)$, 然后使用表达式 $\Leftrightarrow -refl(Px)$ 填空即可。

为便于阅读, 使用记号 $x =_S y$ 表示 $eq(S, x, y)$ 。

而相等还满足替代性 (substitutivity), 也即 “对所有在 S 上的谓词 P ,

如果 $x =_S y$ 且 Px 成立, 则 Py 也成立, 则当在任意命题中出现的 t_1 以及 $t_1 =_S t_2$, 使用 t_2 替换 t_1 不影响命题的真值。

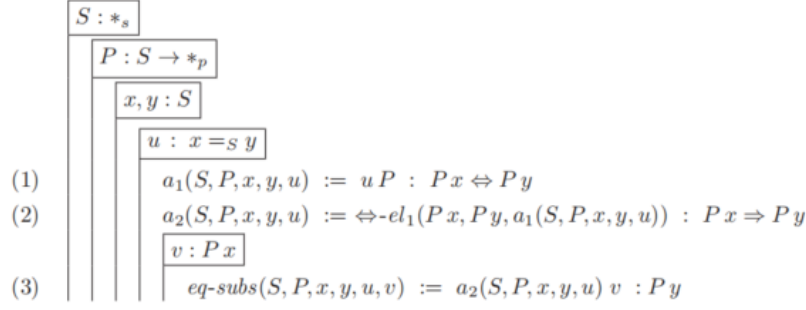


Figure 12.4 Substitutivity as property of equality

4 相等的一致性

一致性与替代性相似, 但一致性关注以集合而非命题作为域的函数。一致性即“对所有的函数 $f : S \rightarrow T$ 且 $x, y : S$, 如果 $x =_S y$, 则 $fx =_T fy$ ”。

我们将使用 $x =_S y$ 推导结果 $fx =_T fy$, 因此需要找到一个合适的谓词。首先展开目标 $fx =_T fy$ 为 $\Pi Q : T \rightarrow *_{\mathcal{P}}. (Q(fx) \Leftrightarrow Q(fy))$ 。

第一种方式, 令谓词为 $\lambda z : S. Q(fz)$, 由替代性可以得到 $Q(fy)$, 证明过程如下:

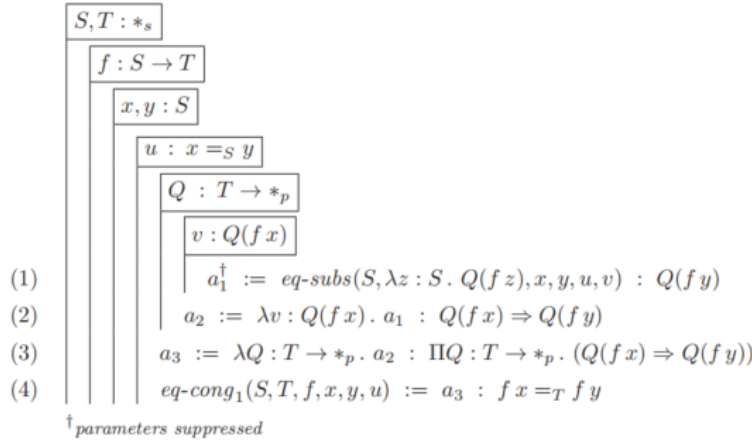


Figure 12.5 First proof of the congruence property for equality

第二种方式, 令谓词为 $\lambda z : S. (fx =_T fz)$, 由自反性可以得到 $fx =_T fx$,

再由替代性可以得到 $fx =_T fy$ ，需要注意的是，第一个 x 是抽象中的自由变量，证明过程如下：

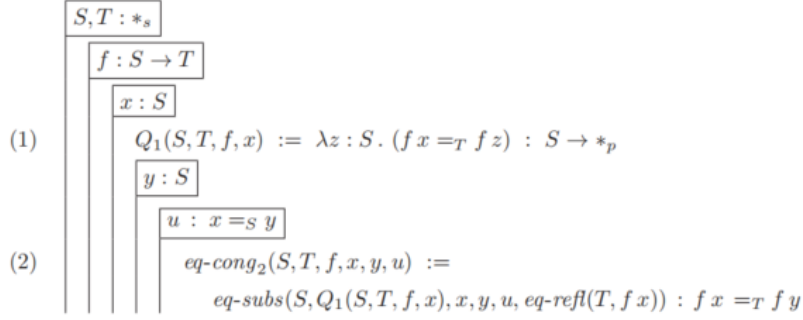


Figure 12.6 Second proof of the congruence property for equality

5 序, Orders

在知道如何编码“相等”后，还需要知道引理 12.1.2 的证明中起到重要作用的其它关系，也即符号‘ \leq ’表示的序关系。与‘ $=$ ’相似， $\leq : S \rightarrow S \rightarrow *_p$ ，为了便于阅读，我们使用 $x \leq_S y$ 表示在集合 S 中的元素 x 和 y 上应用关系 \leq 。形式化定义“偏序”（即偏序关系所具有的类型）：

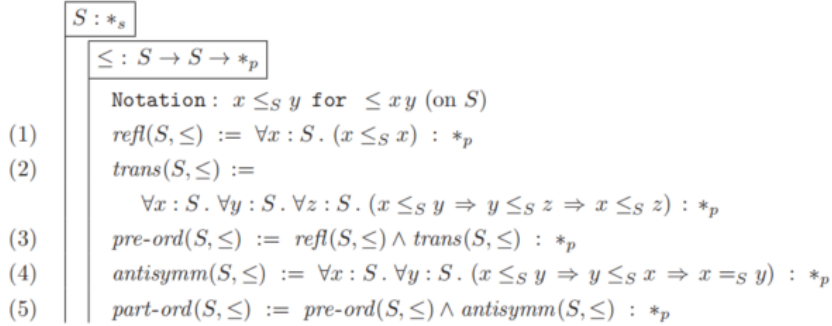


Figure 12.7 Definitions regarding partial orders

可以看到 \leq 是具有自反性，传递性和反对称性的关系。

现在可以证明由 $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ，也即图 12.1 中的 t_3 ：

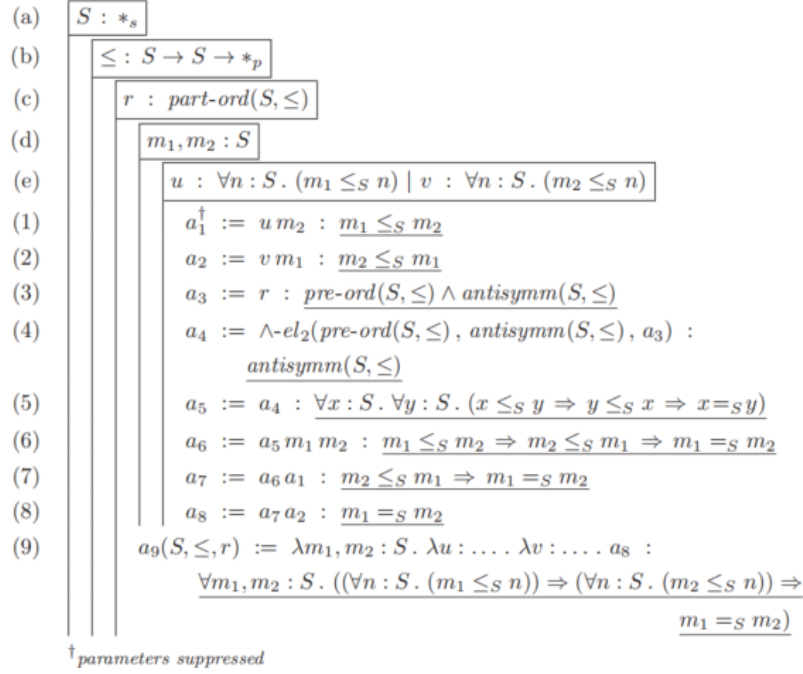


Figure 12.9 A formal proof of the first part of Lemma 12.1.2 in λD

可以看到，证明主要依赖于偏序关系的反对称性。

6 关于序的证明

除了已经证明过的相等的自反性以及替代性外，还有对称性和传递性。

对称性的证明使用了自反性和替代性：

$$\begin{array}{lcl}
& \boxed{S : *_s} & \\
(1) & \boxed{x : S} & Q_2(S, x) := \lambda z : S. (z =_S x) : S \rightarrow *_p \\
(2) & & a_2(S, x) := eq\text{-}refl(S, x) : x =_S x \\
& \boxed{y : S} & \\
(3) & \boxed{u : x =_S y} & eq\text{-}sym(S, x, y, u) := \\
& & eq\text{-}subs(S, Q_2(S, x), x, y, u, a_2(S, x)) : \\
& & y =_S x \\
(4) & & a_4(S) := \lambda x, y : S. \lambda u : (x =_S y). eq\text{-}sym(S, x, y, u) : \\
& & \forall x, y : S. (x =_S y \Rightarrow y =_S x)
\end{array}$$

Figure 12.10 Symmetry of equality follows from reflexivity and substitutivity

传递性的证明使用了替代性:

$$\begin{array}{lcl}
& \boxed{S : *_s} & \\
(1) & \boxed{x : S} & Q_3(S, x) := \lambda w : S. (x =_S w) : S \rightarrow *_p \\
& \boxed{y, z : S} & \\
& \boxed{u : x =_S y} & \\
& \boxed{v : y =_S z} & \\
(2) & & eq\text{-}trans(S, x, y, z, u, v) := \\
& & eq\text{-}subs(S, Q_3(S, x), y, z, v, u) : x =_S z \\
(3) & & a_3(S) := \lambda x, y, z : S. \lambda u : (x =_S y). \lambda v : (y =_S z). eq\text{-}trans(S, x, y, z, u, v) : \\
& & \forall x, y, z : S. (x =_S y \Rightarrow y =_S z \Rightarrow x =_S z)
\end{array}$$

Figure 12.12 Transitivity of equality follows from substitutivity