

9 以定义扩展 λC

Extension of λC with definitions

读书笔记

许博

1 λC 扩展到系统 λD_0

本章在 λC 的基础上扩展通常意义上定义的形式化版本，也即所谓的描述性定义（descriptive definitions）。扩展后的系统 λD_0 尚不能完全支持公理以及公理概念的表示，相应的扩展会在下一章引入 λD 时说明。

为给出 λD_0 的合适的描述，首先扩展表达式的集合。 λD_0 中的表达式与 λD 中相同，因此记集合为 $\mathcal{E}_{\lambda D}$ 。

假设除了之前定义的变量集合 V 以外，还有常量的集合 C 。使用符号 $a, a_1, a_i, a', b, \dots$ 作为常量的名字，正如我们使用 $x, x_1, x_i, x', y, \dots$ 作为变量的名字一样。另外，还假设变量和常量来自不相交的集合，而 $*$ 和 \square 是特殊符号，不属于 V 和 C ：

$$V \cap C = \emptyset, * \neq \square, *, \square \notin V \cup C$$

定义 1.1 ($\mathcal{E}_{\lambda D}$)

$$\mathcal{E}_{\lambda D} = V | \square | * | (\mathcal{E}_{\lambda D} \mathcal{E}_{\lambda D}) | (\lambda V : \mathcal{E}_{\lambda D} . \mathcal{E}_{\lambda D}) | (\Pi V : \mathcal{E}_{\lambda D} . \mathcal{E}_{\lambda D}) | C(\overline{\mathcal{E}_{\lambda D}})$$

其中 $\overline{\mathcal{E}_{\lambda D}}$ 中的上划线表示这是一个 $\mathcal{E}_{\lambda D}$ -表达式的列表。

引入“环境，environment”表示一个定义列表。

定义 1.2 (λD_0 中的描述性定义；环境)

(1) 在 $\mathcal{E}_{\lambda D}$ 中，一个（描述性）定义具有形式

$$\bar{x} : \bar{A} \triangleright a(\bar{x}) := M : N$$

其中所有的 $x_i \in V, a \in C$ ，并且所有的 $A_i, M, N \in \mathcal{E}_{\lambda D}$

(2) 一个环境 Δ 是一个有限（空或非空）的定义列表。

使用诸如 $\mathcal{D}, \mathcal{D}_i, \dots$ 等符号作为元名称表示定义。一个长度为 k 的环境可以被表示为如 $\Delta \equiv \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ 。

关于定义，区分以下元素：

定义 1.3（定义中的元素）

令 $\mathcal{D} \equiv \bar{x} : \bar{A} \triangleright a(\bar{x}) := M : N$ 是一个定义。则：

- $\bar{x} : \bar{A}$ 是 \mathcal{D} 中的上下文
- a 是 \mathcal{D} 中被定义的常量， \bar{x} 是参数列表
- $a(\bar{x})$ 是 \mathcal{D} 中的 *definiendum*
- $M : N$ 是 \mathcal{D} 中的语句， M 是 *definiens* 或 \mathcal{D} 的主体， N 是 \mathcal{D} 的类型。