无类型的 λ-演算

读书笔记

许博

1 疑惑

Definition 1.6.1 (Substitution)
(1a) $x[x := N] \equiv N$,
$\boxed{\text{(1b) } y[x := N] \equiv y \text{ if } x \not\equiv y,}$
(2) $(PQ)[x := N] \equiv (P[x := N])(Q[x := N])$,
(3) $(\lambda y\,.\,P)[x := N] \equiv \lambda z\,.\,(P^{y\to z}[x := N])$, if $\lambda z\,.\,P^{y\to z}$ is an α-variant of $\lambda y\,.\,P$ such that $z \notin FV(N)$.

x 和 y 什么时候句法等同 $\equiv$?

2 函数的本质（essence）

在 λ-calculus 中，函数被表示为如 $\lambda x.x^2+1$ 的形式，. 的右边是表达式，λx 表示在表达式中 x 是一个变量，同时 x 是该函数的形参。在函数调用时，传入的值跟随在函数之后以括号包裹，如 $(\lambda x.x^2+1)(3)$。

总结出两个构造原则（construction principles）和一个求值规则（evaluation rule）。

2.1 构造原则

1. 抽象（Abstraction）：由表达式 M 和变量 x 可以构造得到一个新的表达式：$\lambda x.M$，称之为 M 上 x 的抽象。

2. 应用（Application）：由表达式 M 和 N 可以构造表达式 MN，称之为 M 应用于 N。

函数 $\lambda x.x^2$ 中，表达式 x^2 不是一个函数，而是一个抽象的输出值，表示 x 的平方。与函数的区别在于，假设 x 是一个自然数，函数 $\lambda x.x^2$ 接收自然数返回自然数，而 x^2 表示一个自然数。

2.2 求值规则

函数求值的过程的形式化称为 β-规约（β-reduction），使用替换（substitution）来进行计算，由中括号进行表示，如表达式 $M\left[x := N\right]$ 表示 M 中的 x 被替换成 N。

β-规约：形如 $(\lambda x.M)N$ 的表达式可以被重写为表达式 $M\left[x := N\right]$，表达式 M 中的每一个 x 都会被替换成 N，从 $(\lambda x.M)N$ 到 $M\left[x := N\right]$ 的过程记为 β-规约。

2.3 多参数

本书中，只考虑单参数的函数，在函数需要多个参数时，可以通过柯里化，使用单参数函数的复合来模拟多参数函数，如函数 $\lambda(x,y).(x^2+y)$ 可以柯里化为函数 $\lambda x.(\lambda y.(x^2+y))$，即为函数 g，在求值时，可以通过形如 $g(3)(5)$ 的方式来进行应用。

3 λ-项（terms）

λ-演算中主要关心的部分是以最简单，最抽象的视角描述函数的行为，可以不考虑数，以及和数有关的操作，如加法等，剩下的部分为：

1. 变量（x, y, ...）
2. 构造原则，抽象和应用
3. 求值规则，β-规约

3.1 Λ

λ-演算中的表达式被称为 λ-项，所有 λ-项的集合 Λ 可以通过归纳的定义来构造，首先假设存在一个无限的变量集合 V，$V = \{x, y, z, ...\}$。

Λ 的定义：

1.（变量）如果 $u \in V$，那么 $u \in \Lambda$

2.（应用）如果 M 和 N $\in \Lambda$，那么 $(MN) \in \Lambda$

3.（抽象）如果 $u \in V$ 以及 $M \in \Lambda$，那么 $(\lambda u.M) \in \Lambda$

Λ 以抽象语法的定义为：$\Lambda = V|(\Lambda\Lambda)|(\lambda V.\Lambda)$。

3.2 λ-项的表示

1. 使用字母 x, y, z 以及它们使用下标（subscript）和上标符（prime，$\prime$）的变体来表示 V 中的变量

2. 使用 L, M, N, P, Q, R 以及它们的变体来表示 Λ 中的元素

3. 使用符号 $\equiv$ 表示两个 λ-项句法等同

所以 $(x\ z) \equiv (x\ z)$，但是 $(x\ z) \not\equiv (xy)$，需要注意的是，$M \equiv N$ 表示 M 和 N 代表的实际的 λ-项句法等同。

3.3 子项

记 $Sub(M)$ 为 M 中的子项的多重集（multiset），即相同的子项可以出现多次。Sub 的定义为：

1.（基础）$\forall x \in V.Sub(x) = \{x\}$

2.（应用）$Sub((MN)) = Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{(MN)\}$

3.（抽象）$Sub((\lambda x.M)) = Sub(M) \cup (\lambda x.M)$

如果 $L \in Sub(M)$，记 L 为 M 的一个子项。如 $Sub((\lambda x.(xx))) = \{((\lambda x.(xx)), xx, x, x\}$，其中 x 出现了两次，一次是 xx 中的第一个 x，一次是 xx 中的第二个 x。

3.3.1 引理（lemma）

1.（自反性，reflexivity）$\forall M \in \Lambda.M \in Sub(M)$

2.（传递性，transitivity）由 $L \in Sub(M) \wedge M \in Sub(N)$ 可以得到 $L \in Sub(N)$

3.3.2 真子项

如果 $\{L \in Sub(M)\} \wedge \{L \not\equiv \{M\}\}$，那么 L 是 M 的真子项。

3.4 省略括号

1. 最外层的括号可以省略：$MN \equiv (MN)$
2. 应用是左结合的：$MNL \equiv ((MN)L)$
3. 应用的优先级高于抽象：$\lambda x.MN \equiv \lambda x.(MN)$
4. 同一 λ 后出现的抽象是右结合的：$\lambda xy.M \equiv \lambda x.(\lambda y.M)$

4 自由和约束（bound）变量

出现在 λ-项中的变量可以被分成三种：自由（free），约束（bound）和绑定（binding）。

1. 绑定变量，指直接出现在 λ 之后的变量
2. 约束变量，指出现在表达式中的绑定变量，如 $\lambda x.xy$ 中的第二个 x
3. 自由变量，指出现在表达式中的非绑定变量，如 $\lambda x.xy$ 中的 y

4.1 FV(L)

FV(L) 表示 λ-项 L 中的自由变量的集合，其定义为：

1. （变量）$FV(x) = \{x\}$
2. （应用）$FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$
3. （抽象）$FV(\lambda x.M) = FV(M)\ \{x\}$

需要注意，$FV(x(\lambda x.xy)) = \{x, y\}$，尽管其中 x, y 都是自由变量，但是自由变量的 x 是 $x(\lambda x.xy)$ 中的第一个 x，而 y 之前的 x 依然是约束变量。

4.2 组合子（combinator）

如果一个 λ-项 M 满足 $FV(M) = \emptyset$，称 M 是闭合的（closed），也可以将其称为是一个组合子。所有组合子的集合用 Λ^0 表示。

5 α-变换（conversion）

λ-项中的绑定变量并不是必须的，如平方函数可以写作 $\lambda x.x^2$，也可以写作 $\lambda u.u^2$，都表示函数计算传入值的平方之后将得到的值作为输出值。变量名只是为了给传入的值提供一个临时的名字。因此在 λ-演算中，只有绑定变量（以及对应的约束变量）不同的 λ-项是相同的。

定义关系 α-变换或 α-等价（equivalence）来形式化地描述这个过程：

令 $M^{x \to y}$ 表示将 M 中所有的自由变量 x 替换为 y，重命名的关系使用符号 $=_\alpha$ 表示，则当 $y \notin FV(M)$ 以及 y 不是 M 中的绑定变量时，$\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M^{x \to y}$。

也即 $\lambda x.M$ 被重命名为 $\lambda y.M^{x \to y}$。

α-变换具有如下性质：

1. （相容性，compatibility）如果 $M =_\alpha N$，那么 $ML =_\alpha NL, LM =_\alpha LN$，并且对于任意的 z，$\lambda z.M =_\alpha \lambda z.N$
2. （自反性，reflexivity）$M =_\alpha M$
3. （对称性，symmetry）如果 $M =_\alpha N$，那么 $N =_\alpha M$
4. （传递性，transitivity）如果 $L =_\alpha M \wedge M =_\alpha N$，那么 $L =_\alpha N$

如果 $M =_\alpha N$，则 M 和 N 称为 α-可变换（α-convertible）或 α-等价（α-equivalent）。M 被记为是 N 的一个 α-变体（α-variant）。

6 替换

替换 λ-项中的自由变量，它的定义如下：

1. $x[x := N] \equiv N$
2. 如果 $x \not\equiv y$，那么 $y[x := N] \equiv y$
3. $(PQ)[x := N] \equiv (P[x := N])(Q[x := N])$
4. 如果 $\lambda z.P^{y \to z}$ 是 $\lambda y.P$ 的一个 α-变体，且 $z \notin FV(N)$，则 $(\lambda y.P)[x := N] \equiv \lambda z.(P^{y \to z}[x := N])$

重命名可被看作是一种特殊的替换，如 $M^{x \to u} =_\alpha M[x := u]$，如果重命名的条件满足的话。

替换的顺序会影响 λ-项，如 $x[x := y][y := x] \equiv x$，但是 $x[y := x][x := y] \equiv y$。

$M[x := L]$ 不是一个合法的 λ-项，当替换执行完之后，所有的 $[x := L]$ 都消失了以后所得到的才是 λ-项。

6.1 引理

令 $x \not\equiv y \wedge x \notin FV(L)$：

$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

7 λ-项模 α 等价（module α-equivalence）

α-等价在项构造时会被保留，引理：

令 $M_1 =_\alpha N_1 \wedge M_2 =_\alpha N_2$，则：

1. $M_1 N_1 =_\alpha M_2 N_2$
2. $\lambda x.M_1 =_\alpha \lambda x.M_2$
3. $M_1[x := N_1] =_\alpha M_2[x := N_2]$

句法等同 $\equiv$ 现在包括 α-等价 $=_\alpha$。

7.1 Barendregt 约定

约定 λ-项中的绑定变量的名字都不相同，并且与其中出现的所有自由变量也不相同。

如使用 $(\lambda xy.xz)(\lambda uv.v)$，而非 $(\lambda xy.xz)(\lambda xz.z)$。

8 β-规约

8.1 单步 β-规约（one-step β-reduction，$\to_\beta$）

1. （基础，Basis）$(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$

2. （相容性，compatibility）如果 $M \to_\beta N$，那么 $ML \to_\beta NL$，$LM \to_\beta LN$ 以及 $\lambda x.M \to_\beta \lambda x.N$

形如 $(\lambda x.M)N$ 的 λ-项记为 redex（可规约的表达式，reducible expression），而规约后的 $M[x := N]$ 记为 contractum。

8.2 β-规约（零步或多步，$\twoheadrightarrow_\beta$）

如果存在 $n \geq 0$，有若干项 $M_0, ..., M_n$，且 $M_0 \equiv M, M_n \equiv N$，以及对于 $0 \leq i < n$，有 $M_i \to_\beta M_{i+1}$，则有 $M \twoheadrightarrow_\beta N$。

$\twoheadrightarrow_\beta$ 具有自反性以及传递性。

8.3 β-变换（β-conversion，β-equality，$=_\beta$）

如果存在 $n \geq 0$，有若干项 $M_0, ..., M_n$，且 $M_0 \equiv M, M_n \equiv N$，以及对于 $0 \leq i < n$，有 $M_i \to_\beta M_{i+1}$ 或 $M_{i+1} \to_\beta M_i$，则有 $M =_\beta N$。

对于 $(\lambda y.yv)z \to_\beta zv \leftarrow_\beta (\lambda x.zv)v$ 而言，也有 $(\lambda y.yv)z =_\beta (\lambda x.zv)v$。

$=_\beta$ 具有自反性，对称性以及传递性。

9 标准形式（normal forms）

定义：

1. 如果 M 不能进行 β-规约，则 M 是满足 β-标准形式（β-nf）的

2. 如果存在 N 使得 $M =_\beta N$，则称 M 具有 β-标准形式 N，或称 M 是可 β-标准化（β-normalising）的。

记 M 的 β-标准形式为 M 的输出。

9.1 引理

当 M 满足 β-标准形式，那么 $M \twoheadrightarrow_\beta N$ 隐含 $M \equiv N$。

9.2 规约路径（reduction path）

1. （M 的有限规约路径）一个有限 λ-项序列 $N_0, N_1, N_2, ..., N_n$，且 $N_0 \equiv M$ 以及对于 $0 \leq i < n$ 有 $N_i \to_\beta N_{i+1}$

2. （M 的无限规约路径）一个无限 λ-项序列 $N_0, N_1, N_2, ...$，且 $N_0 \equiv M$ 以及对于自然数 i 有 $N_i \to_\beta N_{i+1}$

9.3 Weak/strong normalisation

1. 如果存在 β-标准形式 N，使得 $M \twoheadrightarrow_\beta N$，称 M 为 weakly normalising
2. 如果不存在以 M 出发的无限规约路径，则称 M 为 strongly normalising

所有的 strongly normalising 的项都是 weakly normalising 的。

9.4 Church-Rosser 定理

缩写为 CR，或称汇流（Confluence）定理

假设对于给定的 λ-项 M，有 $M \twoheadrightarrow_\beta N_1$ 以及 $M \twoheadrightarrow_\beta N_2$，则存在一个 λ-项 N_3 使得 $N_1 \twoheadrightarrow_\beta N_3$ 以及 $N_2 \twoheadrightarrow_\beta N_3$。

通过 CR 定理可以得到一个结论，假设 $M =_\beta N$，则存在 L 使得 $M \twoheadrightarrow_\beta L$ 以及 $N \twoheadrightarrow_\beta L$。

9.5 引理

1. 如果 N 是 M 的 β-标准形式，那么 $M \twoheadrightarrow_\beta N$
2. 一个 λ-项至多有一个 β-标准形式

非正式表述如下：

1. 如果一个 λ-项有一个输出，则这个输出可以向前（forward）计算到达
2. 一个计算的输出若存在则唯一

10 不动点（fixed point）定理

对于任意 λ-项 L，都存在一个 λ-项 M，使得 $LM =_\beta M$，称之为不动点。

定理：$\forall L \in \Lambda . \exists M \in \Lambda . LM =_\beta M$。

在无类型的 λ-演算中，存在不动点组合子 Y，接收一个 λ-项，返回它的不动点：

$Y \equiv \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$。

对于任意的 λ-项 L，YL 都是 L 的一个不动点，因为 $L(YL) =_\beta YL$。

11 无意义的项

如 xx，其虽然符合 λ-项的定义，但是其无法进行 β-规约，也即无法进行计算，是一个无意义的项。