Psychoakustik

4. Stunde

Konsonanz/Dissonanz

Das Weber-Fechner-Gesetz

Das **Weber-Fechner-Gesetz** besagt, dass die Stärke von Sinneseindrücken logarithmisch zur Intensität des physikalischen Reizes verläuft.

1834 bemerkte der Physiologe Ernst Heinrich Weber (1795-1878), dass ein Sinnesorgan nur dann eine merklich stärkere Empfindung *ΔE* registriert, wenn der Zuwachs *ΔR* zum vorangehenden Reiz *R* in einem bestimmten, gleich bleibenden Verhältnis *k* zu diesem steht:

(1) $$\Delta E = k \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

Webersches Gesetz

Beim Tastsinn beträgt der erforderliche relative Zuwachs *ΔR/R* nach Webers Versuchen etwa 3 Prozent des Hautdruckes, beim Helligkeitssehen ca. 1-2 Prozent der Lichtstärke. Beim Geschmack muss die Konzentration um 10-20% steigen, um als stärker empfunden zu werden.

Beis[illegible]nt man einen relativen Gewichtsunterschied von ungefähr 2% eines in der ruhenden Hand gehaltenen Geg[illegible]immt die Gewichtszunahme eines Gegenstands von zunächst 50g erst wahr, wenn das Gewicht um 1g auf [illegible]n ist. Entsprechend muss 5000g Gewicht um 100g anwachsen, um schwerer zu wirken.

Der Mathematiker Gustav Theodor Fechner (1801-1887) erweiterte das Webersche Gesetz 1860 formal durch Integration unter der Annahme, dass *k* konstant und unabhängig von *R* ist:

(2) $$E = k \cdot \log \frac{R}{R_0}$$

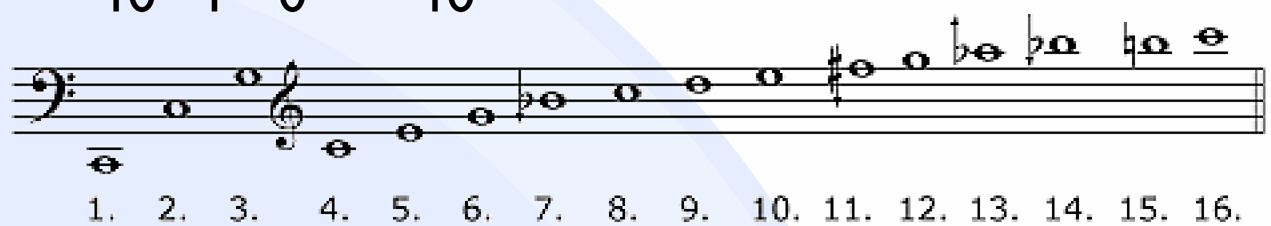
Weber-Fechnersches Gesetz

R_0 ist eine Integrationskonstante, die meist den *Schwellenreiz* festlegt. (2) besagt, dass bei einem linearen Anstieg der Reizstärke ihre Empfindung im Sinnesorgan nur logarithmisch anwächst.

Frequenz und Tonhöhe

Auch Frequenz (in Cent) und wahrgenommene Tonhöhe stehen in einem logarithmischen Verhältnis. Wie auch bei der Lautstärke muss die Tonhöhe in Bezug auf einen Referenzton (Intervall I) angegeben werden. Die Maßeinheit ist Cent = 1/100 Halbton oder 1/1200 Oktave

$I = 1200 \log_2(F_1/F_0) = 1200 \log_{10}(F_1/F_0)/\log_{10}(2).$



Aus der Obertonreihe leiten sich durch die Formel folgende reinen Intervalle ab (Die Verhältnisse entsprechen auch umgekehrt den Saitenverhältnissen, die Pythagoras bereits in der Antike bestimmt hat):

Intervall (Name)	Frequenzverhältnis	Intervall (Größe in Cent)	temperierte Stimmung
R1	1/1	0	0
K2	16/15	112	100
G2	9/8	204	200
K3	6/5	316	300
G3	5/4	386	400
R4	4/3	498	500
V5	7/5	583	600
R5	3/2	702	700
K6	8/5	814	800
G6	5/3	884	900
K7	16/9	996	1000
G7	15/8	1088	1100
R8	2/1	1200	1200

Konsonanz/Dissonanz

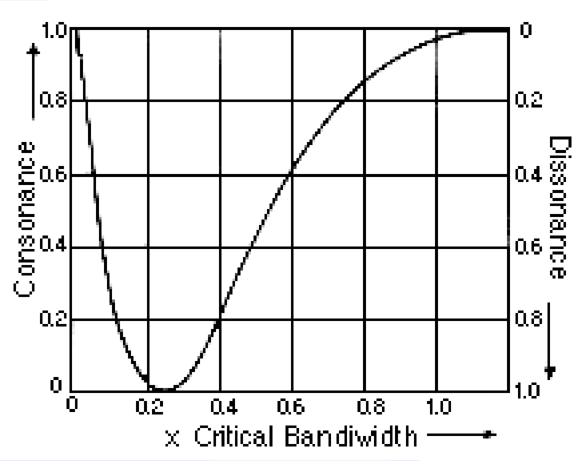
Wenn zwei Töne gleichzeitig oder auch kurz hintereinander gespielt werden, so ergibt sich ein Eindruck von Dissonanz und Konsonanz, der von mehreren Faktoren bestimmt wird:

1. Sensorische Konsonanz/Dissonanz => Ortstheorie der Tonhöhenerkennung)
2. Differenz- und Summationstöne
3. Abstrakte Muster (Polyrhythmus => Zeittheorie der Tonhöhenerkennung)
4. “Subjektive Kontur”
5. Kulturelle Faktoren

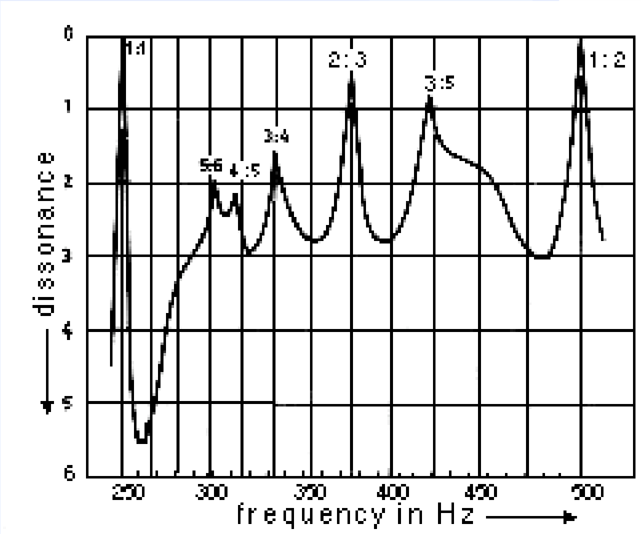
Sensorische Konsonanz/Dissonanz

R. **Plomp** and WJM **Levelt**, "Tonal Consonance and Critical Bandwidth". JASA 38:548-560 (1965)

Wenn ein Intervall, das von reinen Tönen gebildet wird, innerhalb einer Kritischen Bandbreite liegt, wird nach Plomp und Levelt diese bei 1/5 Kritischer Bandbreite als maximal dissonant empfunden. Die Kurve flacht sich bei höheren Werten zunehmend ab.



Aus diesen experimentell gewonnen Daten lässt sich eine Kurve für komplexe Töne mit 6 Teiltönen errechnen. Auffällig ist der geringe Wert für die kleine Sexte:

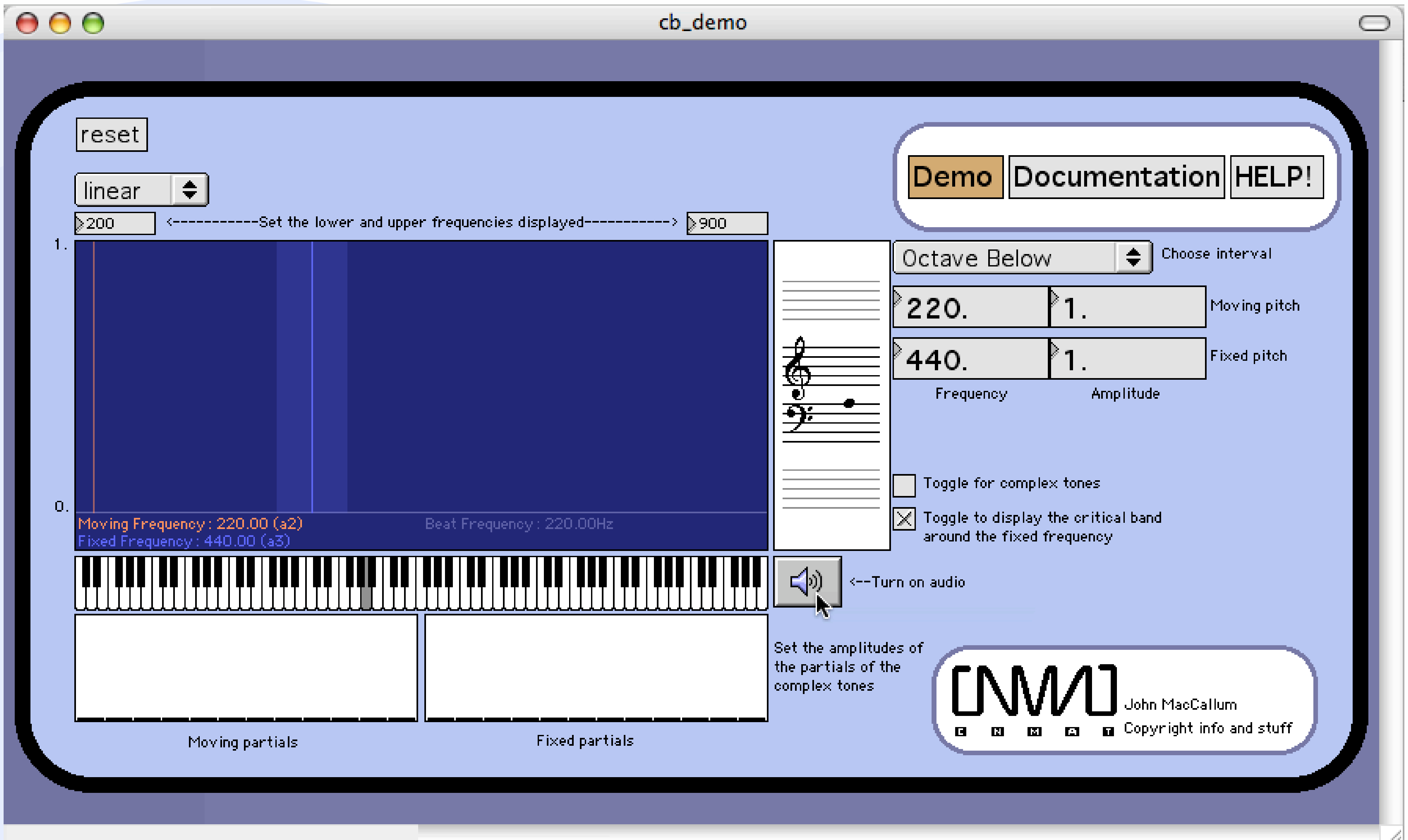


Sensorische Konsonanz

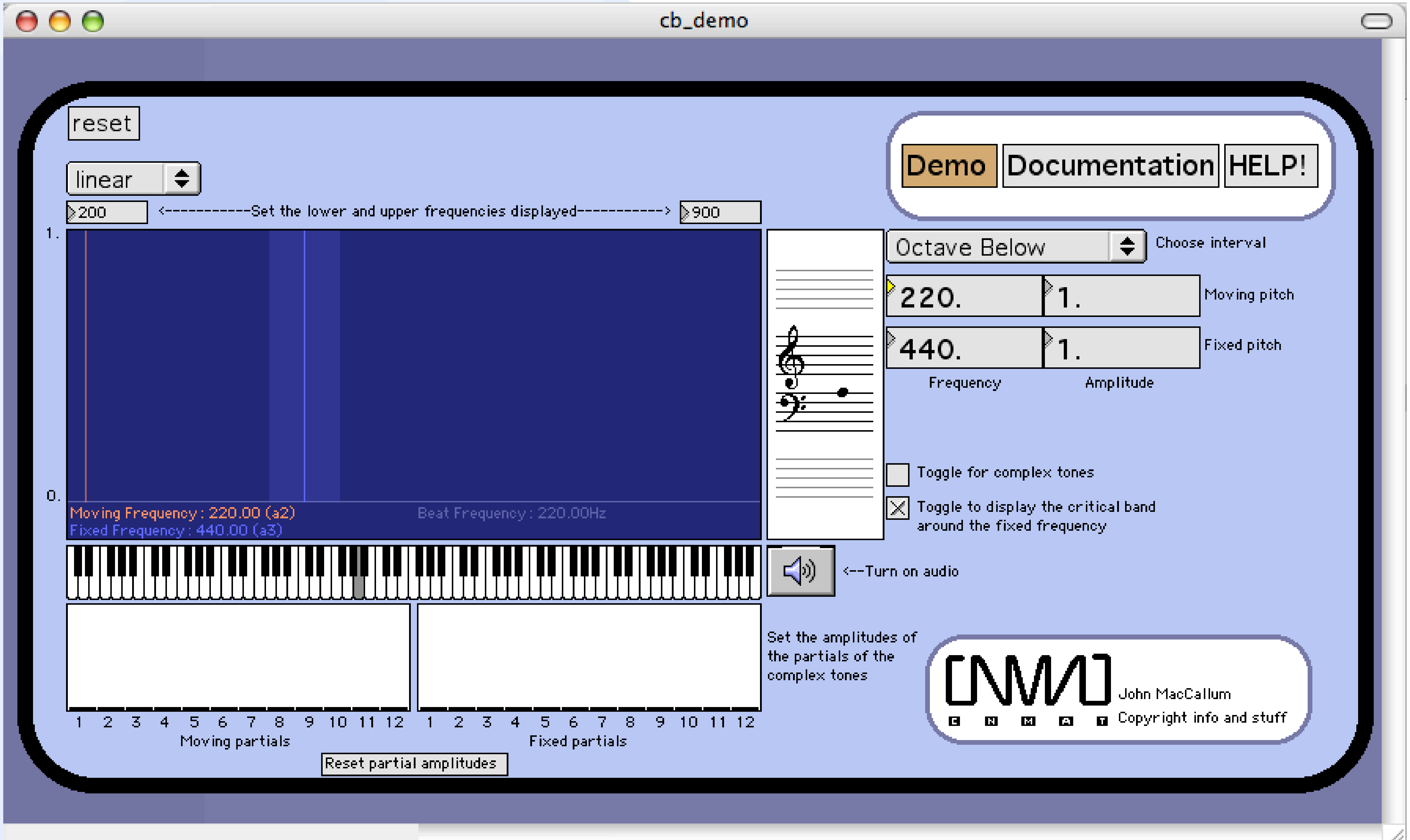
Ähnliche Resultate stammen von Kameoka and Kuriyagawa:
KAMEOKA, A., **KURIYAGAWA**, M. (1969a): Consonance theory part I: Consonance of dyads. Journal of the Acoustical Society of America 45, 1451-1459

Ein Online-Experiment dazu kann hier gefunden werden: http://faculty-web.at.northwestern.edu/music/lipscomb/dossier/movies/KameokaKuriyagawa1969.htm.
Eine Animation wurde von John MacCallum im Rahmen des MUTOR-Projekts erstellt, das unter der Leitung der HfMT in diesem Jahr durchgeführt wird.

Sensorische Konsonanz

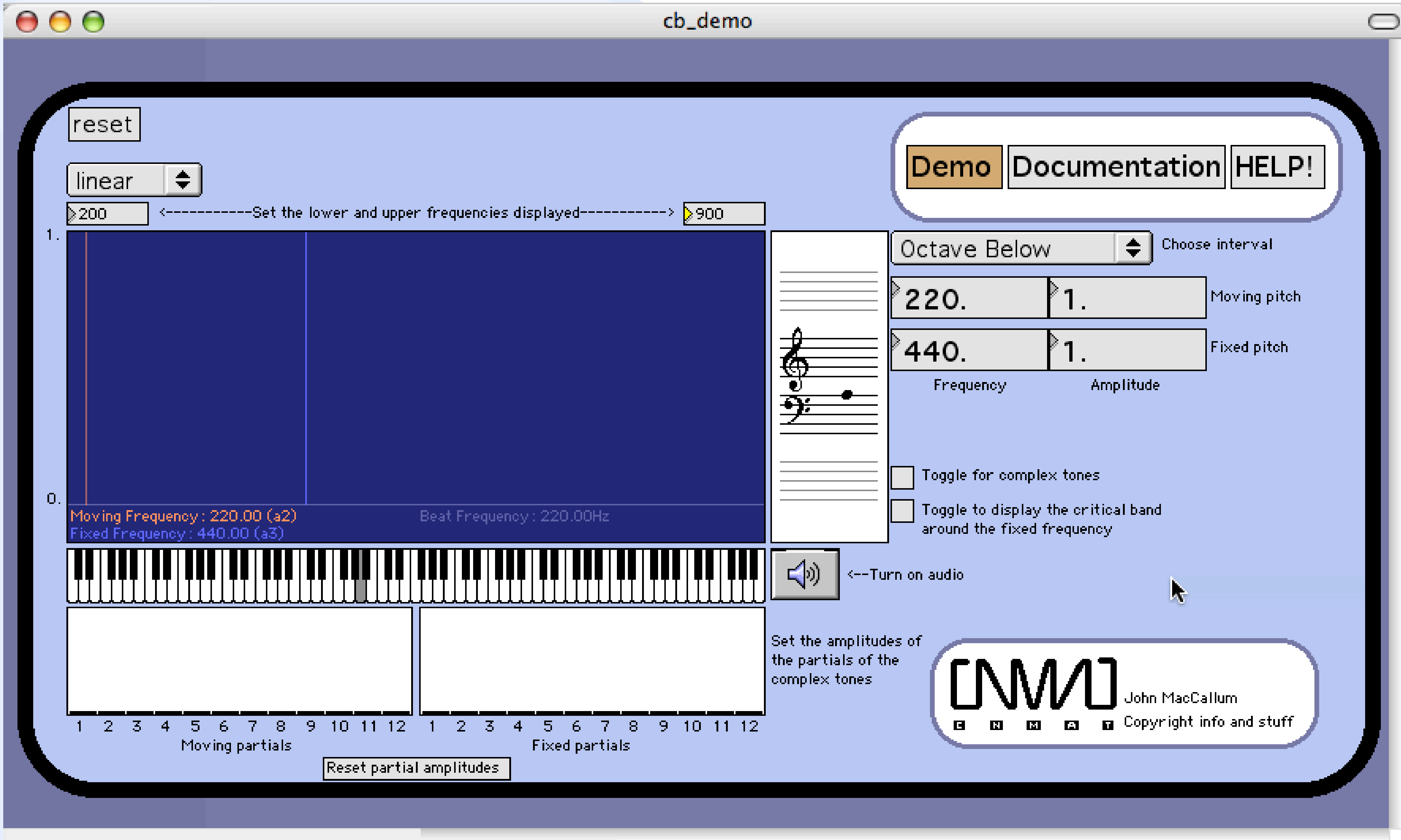


Das von MacCallum erstellte Programm ist auch in der Lage Aspekte von Konsonanz und Dissonanz bei komplexen Tönen zu demonstrieren.
Z.B. Schwebungen bei nicht ganz sauber gestimmten Quinten (z.B. temperierte Quinte).



Sensorische Dissonanz

oder eine Demonstration, die bei dem temperierten Tritonus den Einfluss der sensorischen Dissonanz höherer Teiltöne zeigt. Ein weiteres Beispiel zeigt aber, dass die Farbe eines Intervalls wohl doch von anderen Faktoren abhängt.



Der schweizer Mathematiker Euler beobachtete, dass die Konsonanz (Gradus Suavitatis = Grad der Lieblichkeit) eines Intervalls von der Primfaktorzerlegung der im Frequenzverhältnis enthaltenen Zahlen anhängt, wobei komplexe Verhältnisse durch einfachere substituiert werden.

Der Eulersche Gradus Suavitatis (kurz: G) ist eine Funktion, welche den Wohlklang von Zweiklängen – also Intervallen – bewertet. Das Intervall erster – und damit ist gemeint: bester – Güte ist die Prim:
G (1/1) = 1
Das Intervall zweiter Güte ist die Oktav:
G (2/1) = G(1/2) = 2
G ist nur definiert für Intervalle, welche durch Brüche dargestellt werden können. G wird nach dem folgenden Rezept bestimmt:
1) Verwandlen Sie das Intervall «Zähler/Nenner» zuerst in einen gekürzten Bruch a/b.
2) Bestimmen Sie dann den so genannten Produktwert a·b.
3) Nun zerlegen Sie den Produktwert in Primfaktoren:
a·b = p1 · p2 · p3 · .... · pn
4) Dann berechnen Sie G so:
G(Zähler/Nenner) = 1 + (p –1) + (p –1) + (p –1) + ... + (p –1)

ERSTES BEISPIEL
Zähler:Nenner = 12/15 = 4/5
Produktwert = 4 · 5 = 2 · 2 · 5

ZWEITES BEISPIEL
Zähler:Nenner = 2/18 = 1/9
Produktwert = 9 = 3 · 3

Mathematische Modelle

Der Komponist und Musiktheoretiker Clarence Barlow geht von Euler und Hindemith aus und verfeinert die Euler'sche Formel. Dabei werden die kognitiv-psychologischen Eigenschaften von einfachen ganzen Zahlen und ihrenVerhältnissen berücksichtigt. Barlow erklärt durch den Begriffs "Polarität" das unterschiedliche Verhalten der Quarte:

Indigestibility:

$$\xi(N) = 2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{n_r\left(p_r - 1\right)^2}{p_r}\right\} \quad \text{where} \quad N = \prod_{r=1}^{\infty} p_r^{nr}\text{, } p \text{ is a prime, and } n \text{ is a natural number.} \tag{1}$$

Harmonic Consonance ("Harmonicity"):

$$h(P,Q) = \frac{sgn\left[\xi(P) - \xi(Q)\right]}{\xi(P) + \xi(Q) - 2\xi\left(hcf_{P,Q}\right)} \tag{2}$$

where $sgn(x) = -1$ when x is negative, otherwise $sgn(x) = +1$,

$hcf_{a,b}$ is the highest common factor of a and b, and $\xi(x)$ is indigestibility of x

N	□(N)
1	0.000000
2	1.000000
3	2.666667
4	2.000000
5	6.400000
6	3.666667
7	10.285714
8	3.000000
9	5.333333
10	7.400000
11	18.181818
12	4.666667
13	22.153846
14	11.285714
15	9.066667
16	4.000000

Unverdaulichkeit einer ganzen Zahl

Mathematische Modelle

Aus den Formeln von Barlow lässt ein Maß für die Stabilität von musikalischen Intervallen, die “harmonische Energie”, gewinnen. Dabei kommt ein Grundsatz aus den Naturwissenschaften zur Anwendung, nach dem ein System am stabilsten ist, wenn es eine geringe Enegie besitzt. Starke Intervalle sind in der unteren Grafik durch Täler mit einer bestimmten Tiefe und Ausdehnung ausgezeichnet. Die Berge zwischen den Tälern nennt man kategorische Grenzen. Wir unterscheiden i.A. 12 Tonhöhenkategorien oder auch Intervallklassen. Die Grenzen sind nicht fest, sondern werden durch die Richtung bestimmt, durch man sich diesen nähert (Analogie zu Farben).