```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.special import factorial
from scipy import stats
import warnings

warnings.simplefilter('ignore')

%matplotlib inline
```

Задача №1

(К теоретической задаче 1)
Сгенерируйте $M = 100$ выборок $X_1, \dots, X_{1000}$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ (возьмите три произвольных положительных значения θ). Для каждой выборки $X_1, \dots, X_n$ для всех $n \leqslant 1000$ посчитайте оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\overline{X}, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Посчитайте для всех полученых оценок $\hat{\theta}$ квадратичную функцию потерь $(\hat{\theta} - \theta)^2$ и для каждого фиксированного n усредните по выборкам. Для каждого из трех значений θ постройте графики усредненных функций потерь в зависимости от n.

Обозначим функцию генерирующую по выборке $X_1, \dots, X_n$ для всех $n \leqslant 1000$ оценку параметра θ:

- $2\overline{X}$: **gen_double_mean**
- $(n+1)X_{(1)}$: **gen_mean_plus_last**
- $X_{(1)} + X_{(n)}$: **gen_multi_first**
- $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$: **gen_frac_last**

А также определим значения параметра θ

```
N, M = 10**3, 10**2
thetas = np.array([1, 5, 10])
```

```
thetas = np.array([1, 5, 10])

def gen_est_double_mean(sample):
    return 2 * np.add.accumulate(sample) / np.arange(1, N+1)

def gen_est_multi_first(sample):
    return np.minimum.accumulate(sample) * np.arange(2, N+2)

def gen_est_first_plus_last(sample):
    return np.minimum.accumulate(sample) + np.maximum.accumulate(sample)

def gen_est_frac_last(sample):
    return np.maximum.accumulate(sample) * np.arange(2, N+2) / np.arange(1, N+1)
```

Сгенерируйте $M = 100$ выборок $X_1, \ldots, X_{1000}$ из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$

```
rvs_parametric = {
    param: stats.uniform(loc=0, scale=param).rvs(size=(M, N))
    for param in thetas
}
```

Определим функцию `calc_square_error`, которая будет считать оценку $\hat{\theta}$ для каждого значения параметра θ для всех выборок, а по ней квадратичную функцию потерь $(\hat{\theta} - \theta)^2$ и усредняет по выборкам для каждого фиксированного n.

```
def calc_square_error(param, gen_estimation):
    global rvs_parametric
    estimations = np.apply_along_axis(gen_estimation, 1, rvs_parametric[param])
    sq_loss = np.square(estimations - np.full(estimations.shape, param)).mean(0)
    return sq_loss
```

Также определим функцию для построения графика усредненных функций потерь в зависимости от n для каждого из трех значений θ.

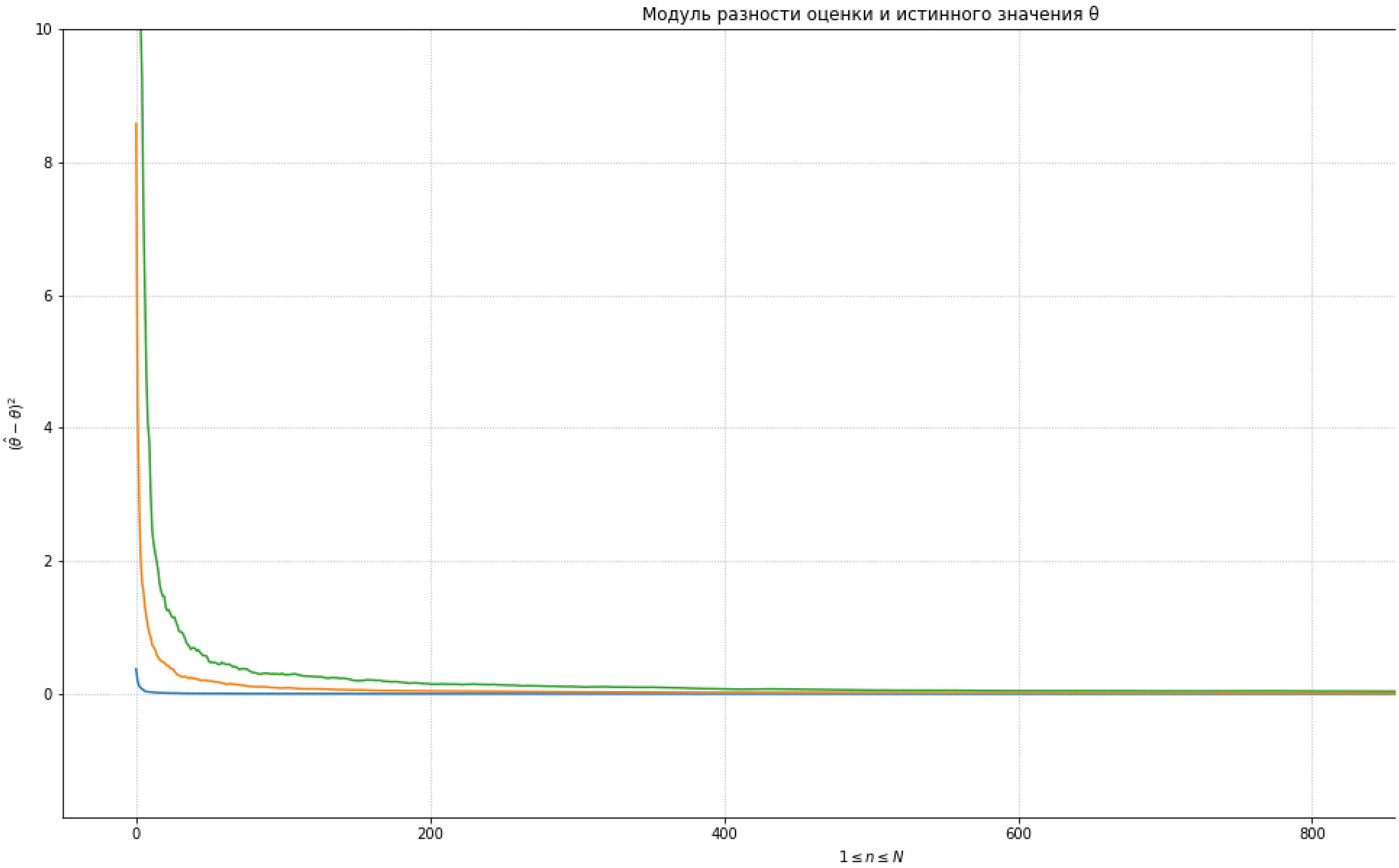
```
def show_plot_by_est(gen_estimation, ylim):
```

```
    global rvs_parametric
    plt.figure(figsize=(20, 10))
    plt.title("Модуль разности оценки и истинного значения θ")
    plt.xlabel('$1\leq n \leq N$')
    plt.ylabel('$(\\hat\\theta-\\theta)^2$')
    for param in rvs_parametric.keys():
        plt.plot(
          np.linspace(0, N, N),
          calc_square_error(param, gen_estimation),
          label=f'$\\theta={param}$'
        )
    plt.ylim(top=ylim)
    plt.grid(ls=':')
    plt.legend()
    plt.show()
```

Построим соответствующие графики для каждой оценки:

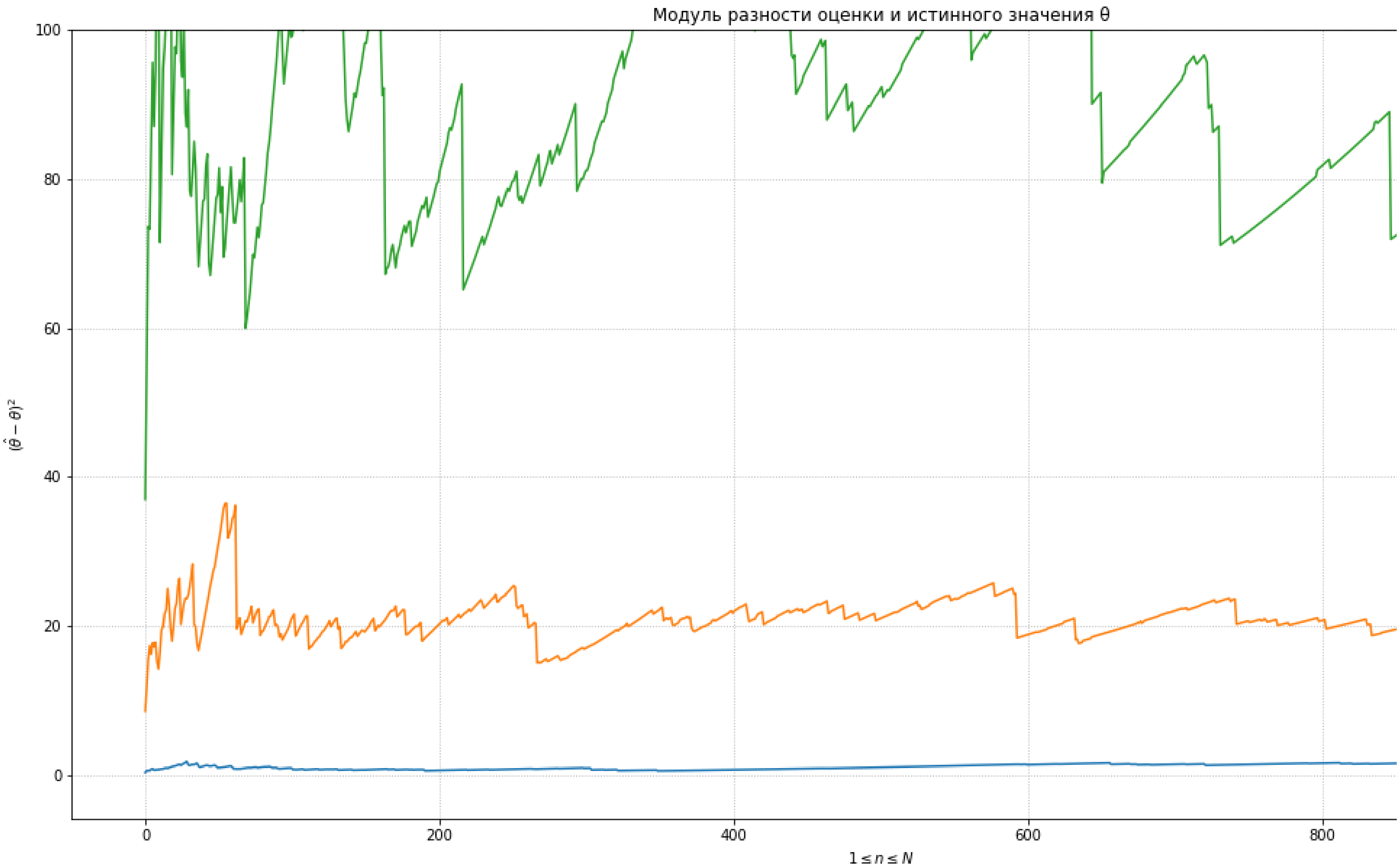
$2\overline{X}$

```
show_plot_by_est(gen_est_double_mean, 10)
```


Модуль разности оценки и истинного значения θ
10
8
6
4
2
0
$(\hat{\theta}-\theta)^2$
0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$

$(n+1)X_{(1)}$

```
show_plot_by_est(gen_est_multi_first, 100)
```

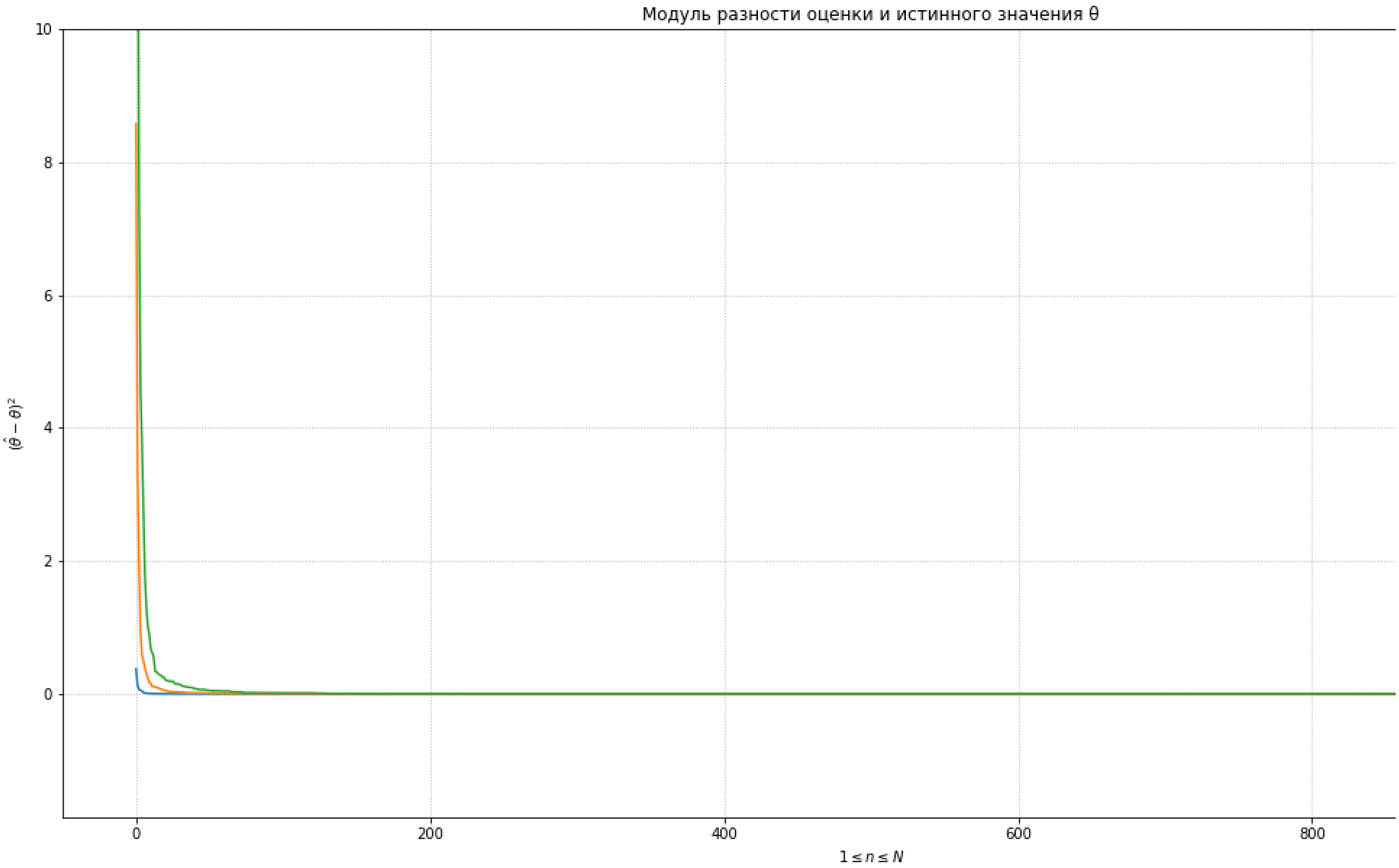


$X_{(1)} + X_{(n)}$

```
show_plot_by_est(gen_est_first_plus_last, 10)
```

$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

```
show_plot_by_est(gen_est_frac_last, 10)
```

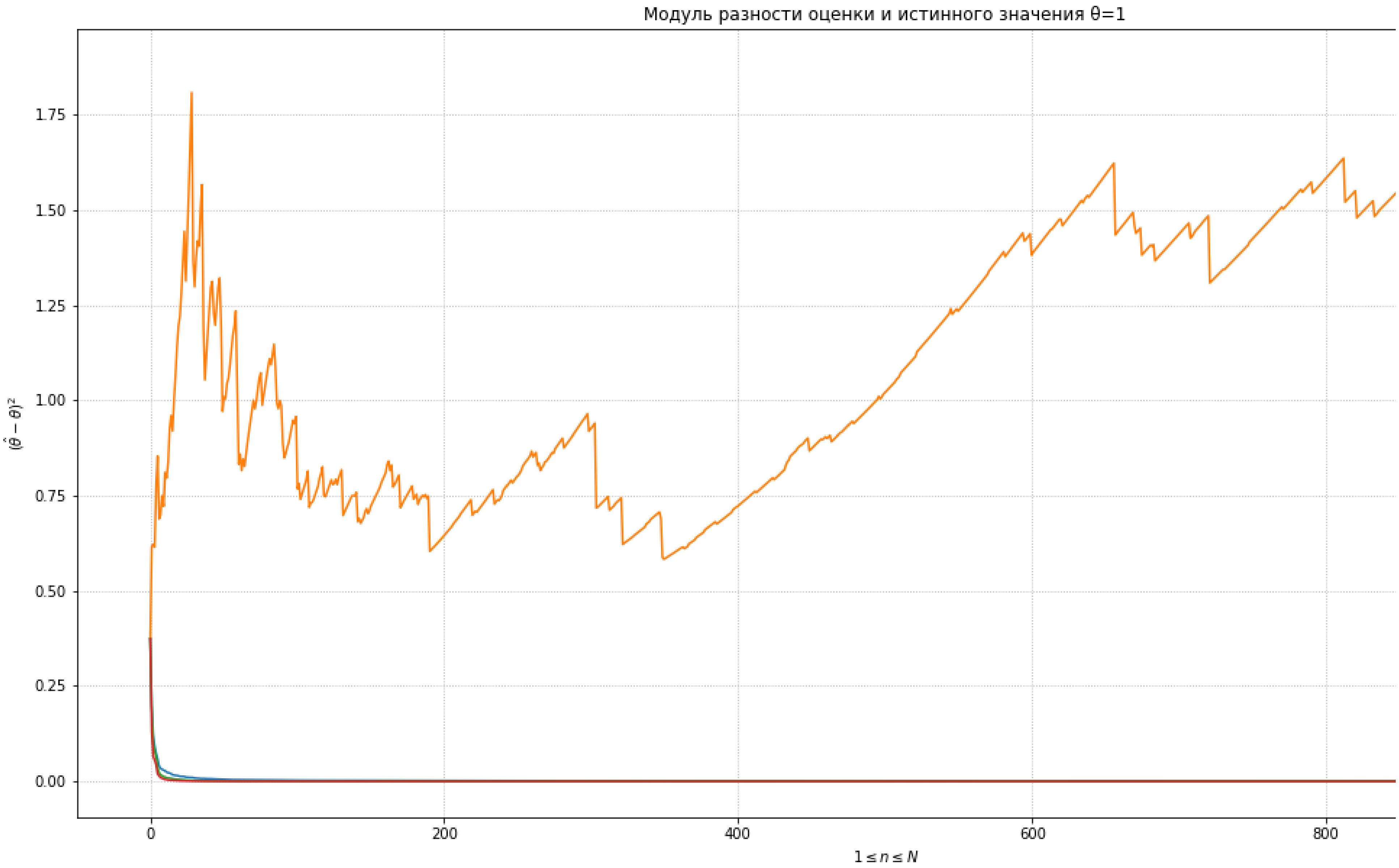

Модуль разности оценки и истинного значения θ
10
8
6
4
2
0
$(\hat{\theta} - \theta)^2$
0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$

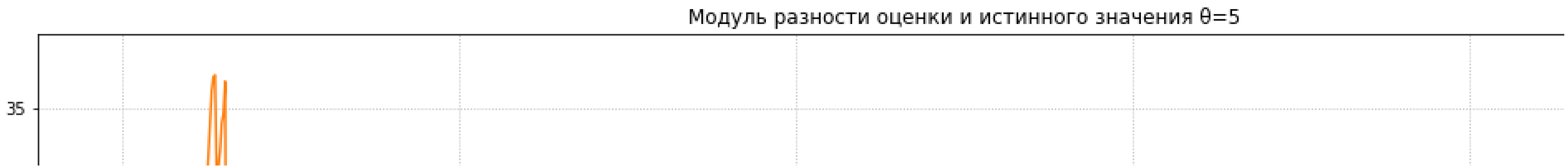
А теперь определим функцию для построения графика усредненных функций потерь в зависимости от n для каждого оценки от

```
def show_plot_by_theta(param):
    global rvs_parametric
    plt.figure(figsize=(20, 10))
    plt.title(f"Модуль разности оценки и истинного значения θ={param}")
    plt.xlabel('$1\leq n \leq N$')
    plt.ylabel('$(\\hat\\theta-\\theta)^2$')
    plt.plot(
      np.linspace(0, N, N),
      calc_square_error(param, gen_est_double_mean),
      label='$2 \overline{X}$'
    )
    plt.plot(
      np.linspace(0, N, N),
      calc_square_error(param, gen_est_multi_first),
      label='$(n + 1) X_{(1)}$'
    )
    plt.plot(
      np.linspace(0, N, N),
      calc_square_error(param, gen_est_first_plus_last),
      label='$X_{(1)} + X_{(n)}$'
    )
    plt.plot(
      np.linspace(0, N, N),
      calc_square_error(param, gen_est_frac_last),
      label='$\\frac {n + 1} {n} X_{(n)}$'
    )
    plt.grid(ls=':')
    plt.legend()
    plt.show()
```

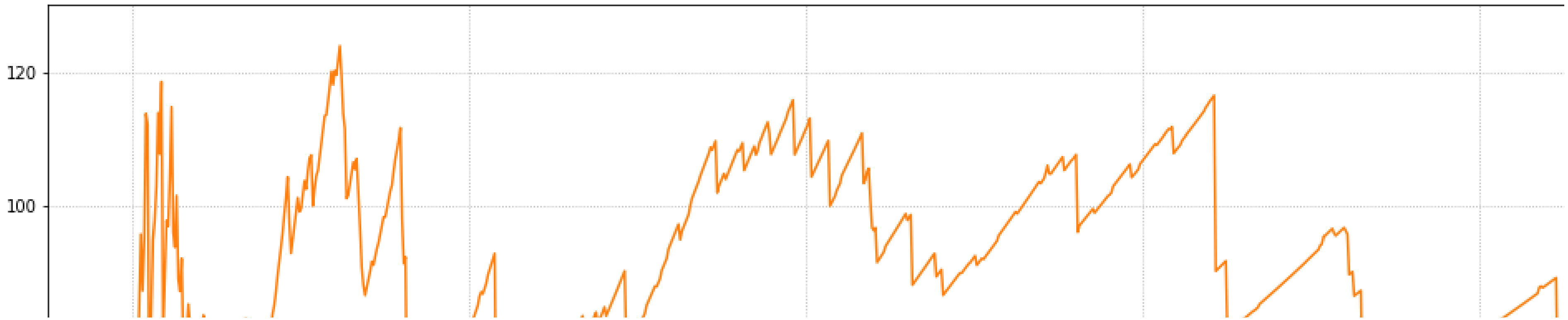
Построим соответствующие графики для каждого значения параметра

```
for theta in thetas:
    show_plot_by_theta(theta)
```


Модуль разности оценки и истинного значения θ=1
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$(\hat{\theta}-\theta)^2$
0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$


Модуль разности оценки и истинного значения θ=5
35

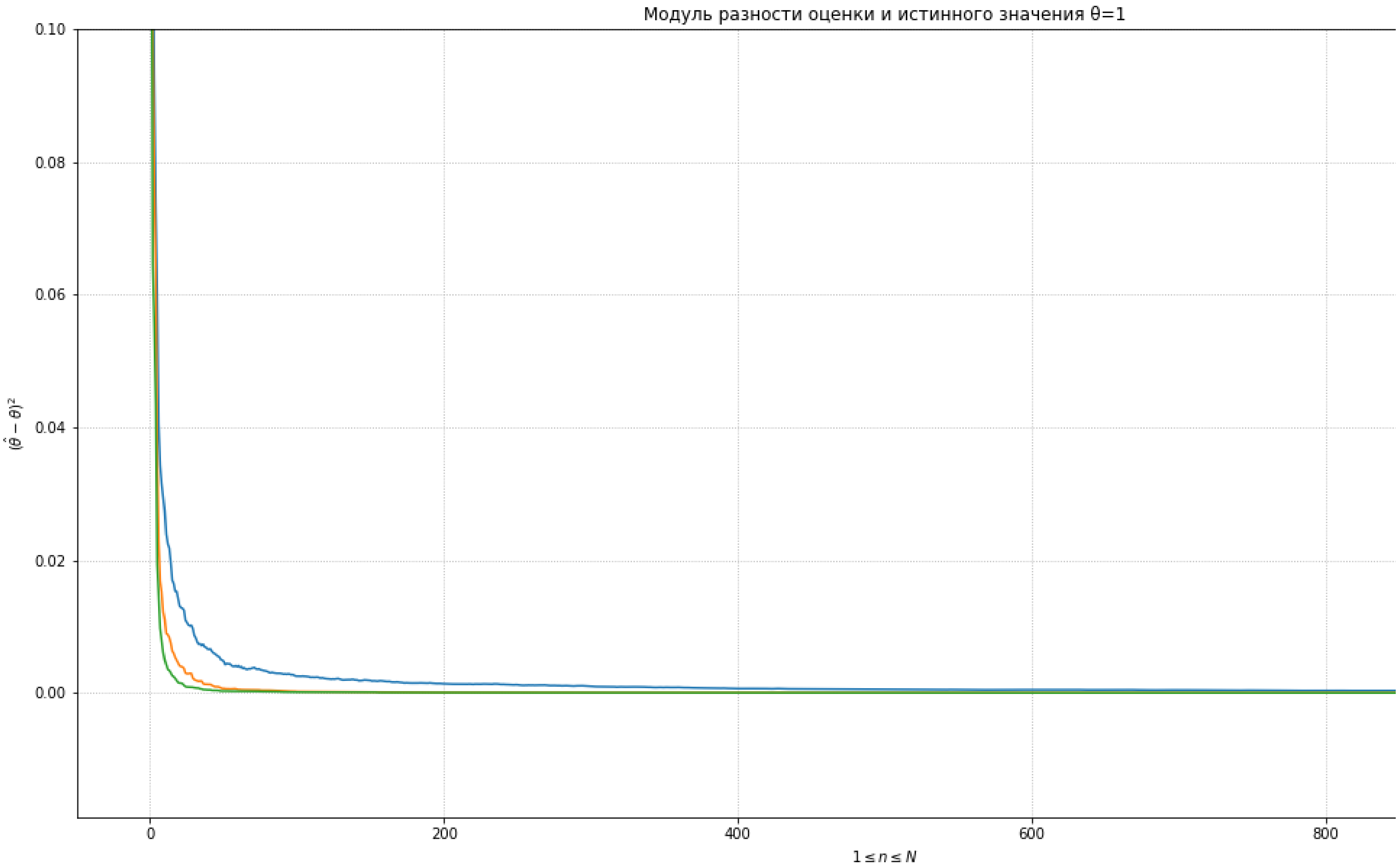
Модуль разности оценки и истинного значения θ=10

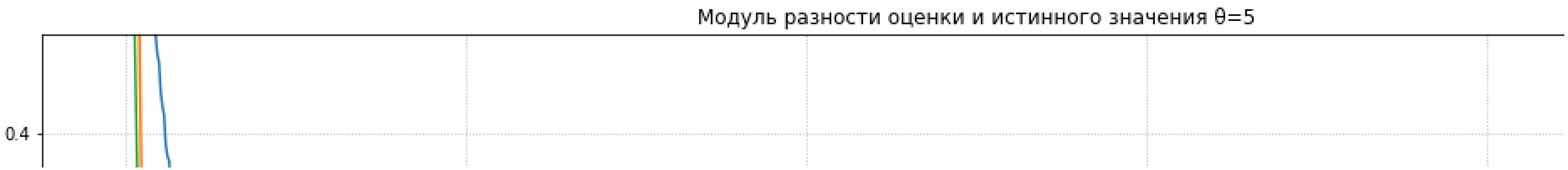


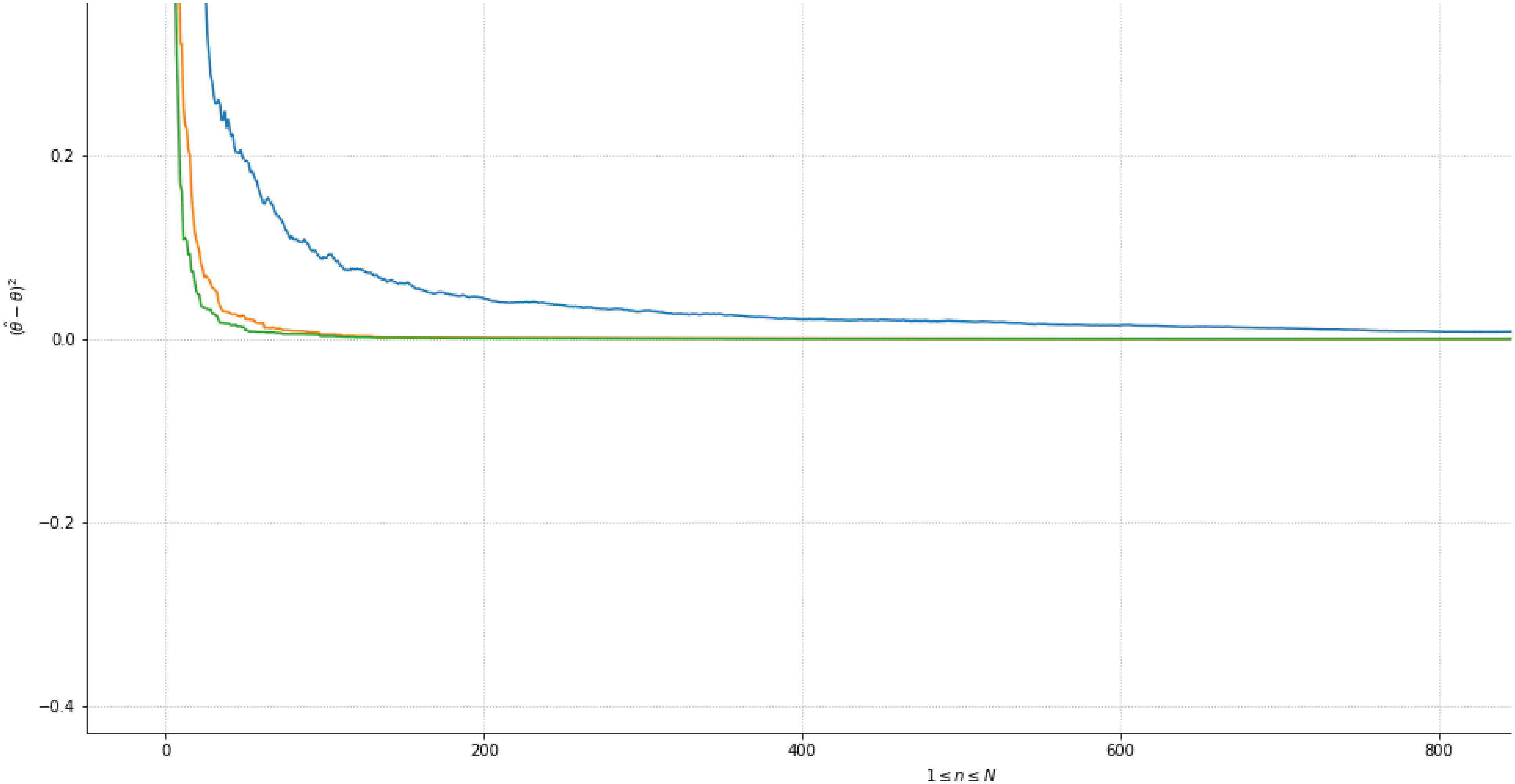
Как видим, оценка $(n+1)X_{(1)}$ не является состоятельной, на практике видно, что она значительно отличается от теоретического значения параметра, следовательно далее, уберем из рассмотрения эту оценку. И перестроим графики.

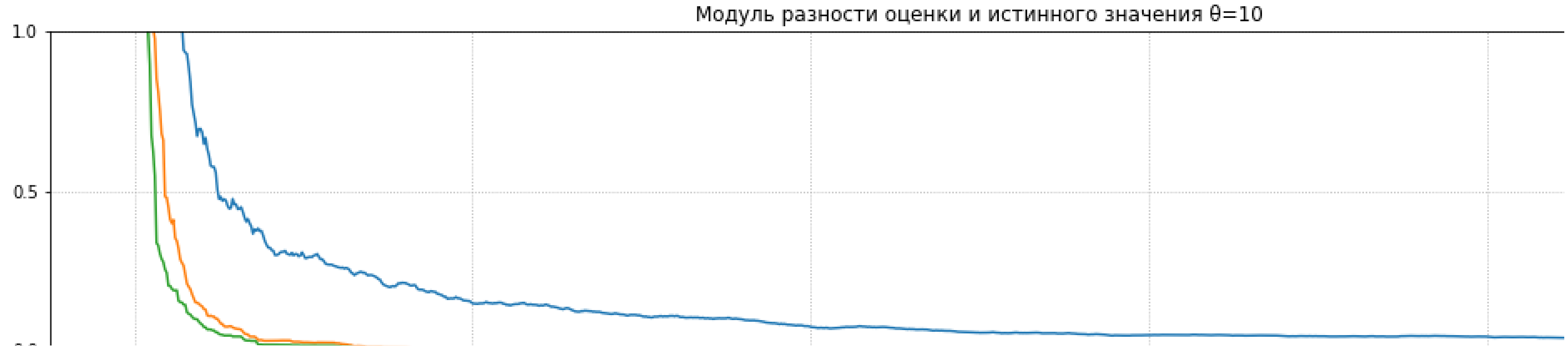
```
def show_plot_by_theta_fixed(param, ylim):
    global rvs_parametric
    plt.figure(figsize=(20, 10))
    plt.title(f"Модуль разности оценки и истинного значения θ={param}")
    plt.xlabel('$1\leq n \leq N$')
    plt.ylabel('$(\\hat\\theta-\\theta)^2$')
    plt.plot(
      np.linspace(0, N, N),
      calc_square_error(param, gen_est_double_mean),
      label='$2 \overline{X}$'
```

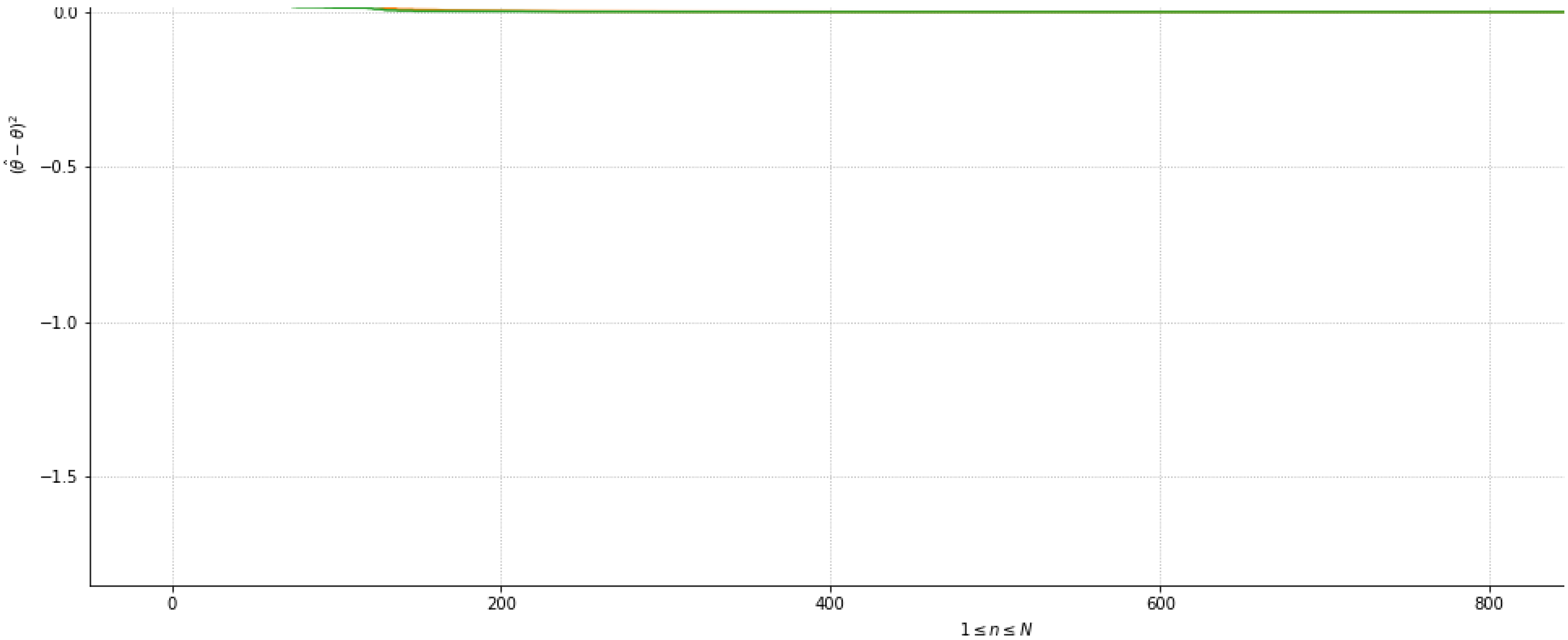
```
    )
    plt.plot(
      np.linspace(0, N, N),
      calc_square_error(param, gen_est_first_plus_last),
      label='$X_{(1)} + X_{(n)}$'
    )
    plt.plot(
      np.linspace(0, N, N),
      calc_square_error(param, gen_est_frac_last),
      label='$\\frac {n + 1} {n} X_{(n)}$'
    )
    plt.grid(ls=':')
    plt.ylim(top=ylim)
    plt.legend()
    plt.show()


for theta in thetas:
    show_plot_by_theta_fixed(theta, theta/10)
```


Модуль разности оценки и истинного значения θ=1
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
$(\hat{\theta}-\theta)^2$
0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$


Модуль разности оценки и истинного значения θ=5
0.4


0.2
0.0
−0.2
−0.4
$(\hat{\theta} - \theta)^2$
0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$


Модуль разности оценки и истинного значения θ=10
1.0
0.5



Вывод №1

Ранее, в теоретической задаче было доказано, что для выборки равномерного распределения $U[0,\theta]$ сравнимы следующие оценки параметра θ в подходе с квадратичной функцией потерь. Причем получено, что оценка $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ лучше оценки $2\overline{X}$ в квадратичном подходе, что легко видеть на построенных графиках. Также исходя из графиков, можно сказать, что в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь оценка $X_{(1)}+X_{(n)}$ хуже чем оценка $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$, но лучше чем $2\overline{X}$. Хуже всех повела себя оценка $(n+1)X_{(1)}$, так как она не является состоятельной.

Задача №2

(К теоретическим задачам 3, 4, 5)

В задаче требуется экспериментально проверить утверждение, что для любой несмещенной оценки $\hat{\theta}(X)$ параметра θ выполнено неравенство Рао-Крамера

$$\mathsf{D}_\theta \hat{\theta}(X) \geqslant \frac{1}{I_X(\theta)}.$$

Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_N$, $N = 1000$, из распределений в теоретических задачах (распределение Бернулли, экспоненциальное распределение и нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием). В случае биномиального распределения $m = 50$, в случае нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием $\sigma^2 = 2.1$. Второй параметр (единственный в случае экспоненциального распределения) выберите случайно из распределения $R[0, 1]$. Для всех $n \leqslant N$ посчитайте значение эффективной оценки и бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки (параметрический бутстреп, количество бутстрепных выборок равно 500, размер каждой равен n). Сделайте то же самое с другой несмещенной оценкой --- в задаче 3 возьмите $\frac{X_1}{m}$, в задаче 4 возьмите $\frac{n-1}{n\overline{X}}$, в задаче 5 возьмите выборочную медиану. Постройте графики зависимости бутстрепных оценок дисперсий от размера выборки n. Для каждой бутстрепной оценки постройте на том же графике кривую зависимости $\frac{1}{I_X(\theta)}$ от n.

Объявим необходимые константы и выберем значение для параметра θ.

```
N, m, sigma_sq, brvs_size = 10**3, 50, 2.1, 500
theta = stats.uniform(loc=0, scale=1).rvs(size=1)[0]
```

```
calc_var = lambda x: x.var()
```

Биномиальное распределение

Сгенерируем 500 выборок из биномиального распределения:

```
binom_rvs = stats.binom(n=m, p=theta).rvs(size=(brvs_size, N))
```

В теоретическом домашнем задании было доказано, что эффективная оценка для биномиального распределения: $\frac{\overline{X}}{m}$. Подсчитаем бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки с количеством бутстрепных выборок равным 500.

```
binom_eff_est = np.array([
    binom_rvs[i].cumsum() / np.arange(1, N+1) / m
    for i in range(brvs_size)])
binom_bootstrap_var_eff_est = np.apply_along_axis(calc_var, 0, binom_eff_est)
```

Предложенная для расмотрения несмещенная оценка: $\frac{X_1}{m}$. Подсчитаем бутстрепную оценку дисперсии для несмещенной оценки с количеством бутстрепных выборок равным 500.

```
binom_unbiased_est = np.array([
    binom_rvs[i][0] / np.arange(1, N+1)
    for i in range(brvs_size)])
binom_bootstrap_var_unbiased_est = np.apply_along_axis(calc_var, 0, binom_unbiased_est)
```

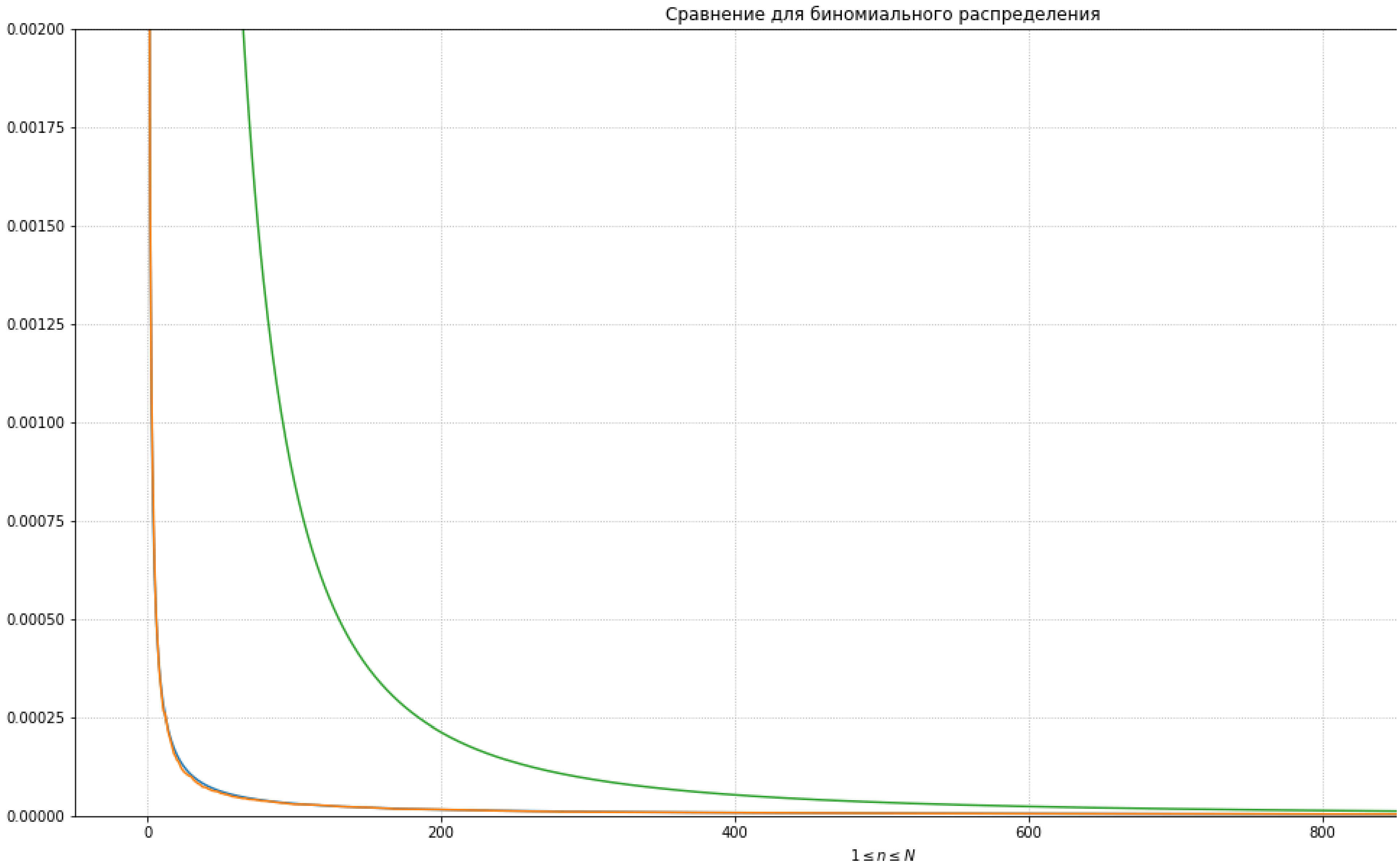
Информация Фишера для биномиального распределения равна $I_X(\theta) = \frac{nm}{\theta(1-\theta)}$

```
binom_fisher_info = np.linspace(1, N, N) * m  / (theta*(1-theta))
```

Построим график

```
plt.figure(figsize=(20, 10))
plt.title(f"Сравнение для биномиального распределения")
plt.xlabel('$1\leq n \leq N$')
plt.plot(
  np.linspace(1, N+1, N),
  1 / binom_fisher_info,
```

```
    label='$\\frac{1}{I_{X}(\\theta)}$'
  )
  plt.plot(
    np.linspace(1, N+1, N),
    binom_bootstrap_var_eff_est,
    label='$efficient$'
  )
  plt.plot(
    np.linspace(1, N+1, N),
    binom_bootstrap_var_unbiased_est,
    label='$unbiased$'
  )
  plt.ylim(top=1)
  plt.grid(ls=':')
  plt.ylim(bottom=0, top=0.002)
  plt.legend()
  plt.show()
```


Сравнение для биномиального распределения
0.00200
0.00175
0.00150
0.00125
0.00100
0.00075
0.00050
0.00025
0.00000
0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$

Экспоненциальное распределение

Сгенерируем 500 выборок из экспоненциального распределения:

```
expon_rvs = stats.expon(scale=theta).rvs(size=(brvs_size, N))
```

В теоретическом домашнем задании было доказано, что эффективная оценка для экспоненциального распределения: $\frac{1}{\overline{X}}$.
Подсчитаем бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки с количеством бутстрепных выборок равным 500.

```
expon_eff_est = np.array([
    1 / (expon_rvs[i].cumsum() / np.arange(1, N+1))
    for i in range(brvs_size)])
expon_bootstrap_var_eff_est = np.apply_along_axis(calc_var, 0, expon_eff_est)
```

Предложенная для расмотрения несмещенная оценка: $\frac{n-1}{n\overline{X}}$. Подсчитаем бутстрепную оценку дисперсии для несмещенной оценки с количеством бутстрепных выборок равным 500.

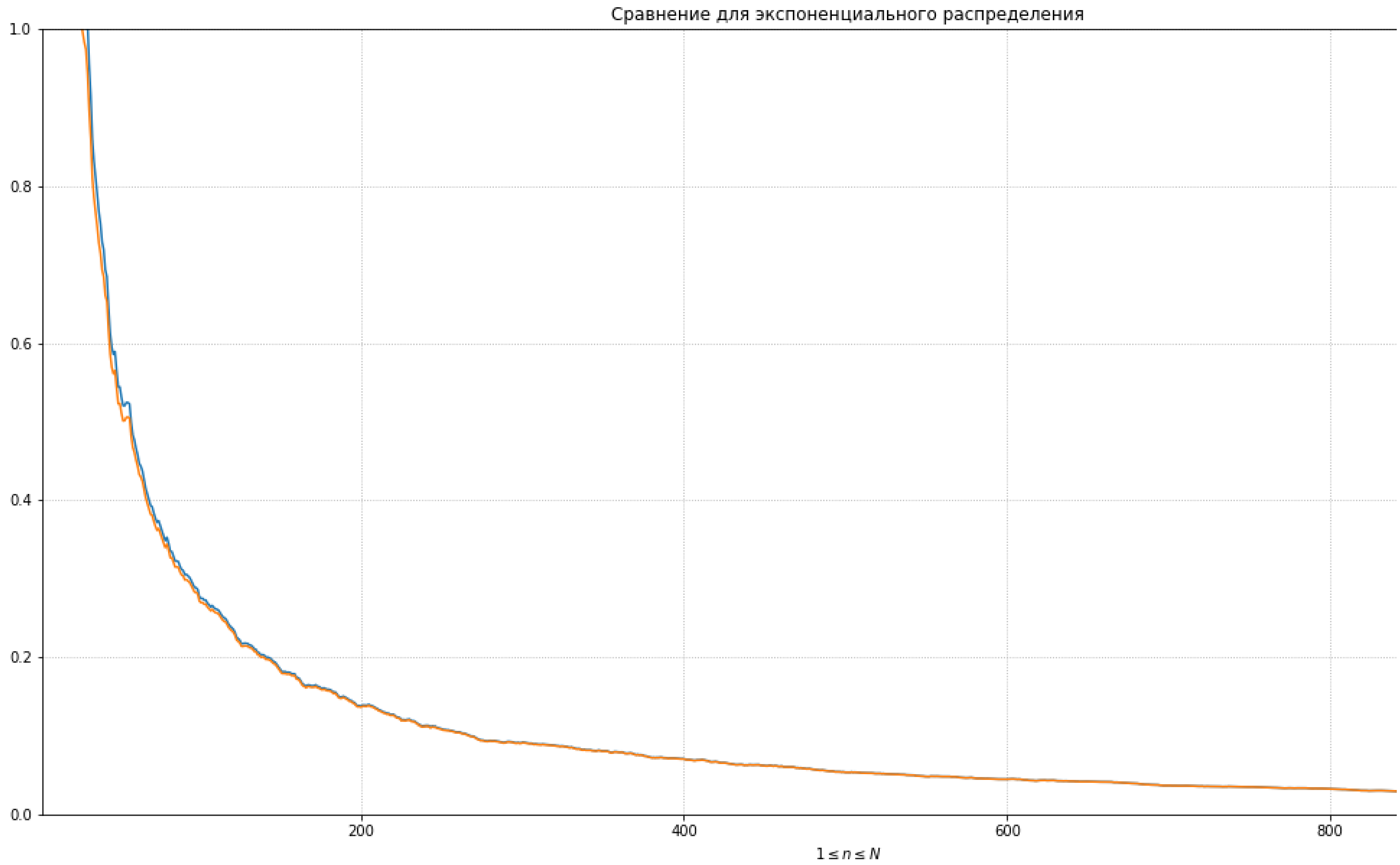
```
expon_unbiased_est = np.array([
    1 / expon_rvs[i].cumsum() * np.linspace(0, N-1, N)
    for i in range(brvs_size)])
expon_bootstrap_var_unbiased_est = np.apply_along_axis(calc_var, 0, expon_unbiased_est)
```

Информация Фишера для экспоненциального распределения равна $I_X(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$

```
expon_fisher_info = np.linspace(1, N, N) / theta**2
```

Построим график

```
plt.figure(figsize=(20, 10))
plt.title(f"Сравнение для экспоненциального распределения")
plt.xlabel('$1\leq n \leq N$')
plt.plot(
  np.linspace(2, N+1, N-1),
  expon_bootstrap_var_eff_est[1:],
  label='$efficient$'
)
plt.plot(
  np.linspace(2, N+1, N-1),
  expon_bootstrap_var_unbiased_est[1:],
  label='$\\frac{1}{I_{X}(\\theta)}$'
)
plt.ylim(bottom=0, top=1)
plt.xlim(left=3, right=N)
plt.grid(ls=':')
plt.legend()
plt.show()
```


Сравнение для экспоненциального распределения
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$

Нормальное распределение

Сгенерируем 500 выборок из нормального распределения:

```
norm_rvs = stats.expon(loc=theta, scale=sigma_sq**0.5).rvs(size=(brvs_size, N))
```

В теоретическом домашнем задании было доказано, что эффективная оценка для нормального распределения есть $\overline{X}$. Подсчитаем бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки с количеством бутстрепных выборок равным 500.

```
norm_eff_est = np.array([
    1 / (norm_rvs[i].cumsum() / np.arange(1, N+1))
    for i in range(brvs_size)])
norm_bootstrap_var_eff_est = np.apply_along_axis(calc_var, 0, norm_eff_est)
```

Возьмем выборочную медиану. Подсчитаем бутстрепную оценку дисперсии для несмещенной оценки с количеством бутстрепных выборок равным 500.

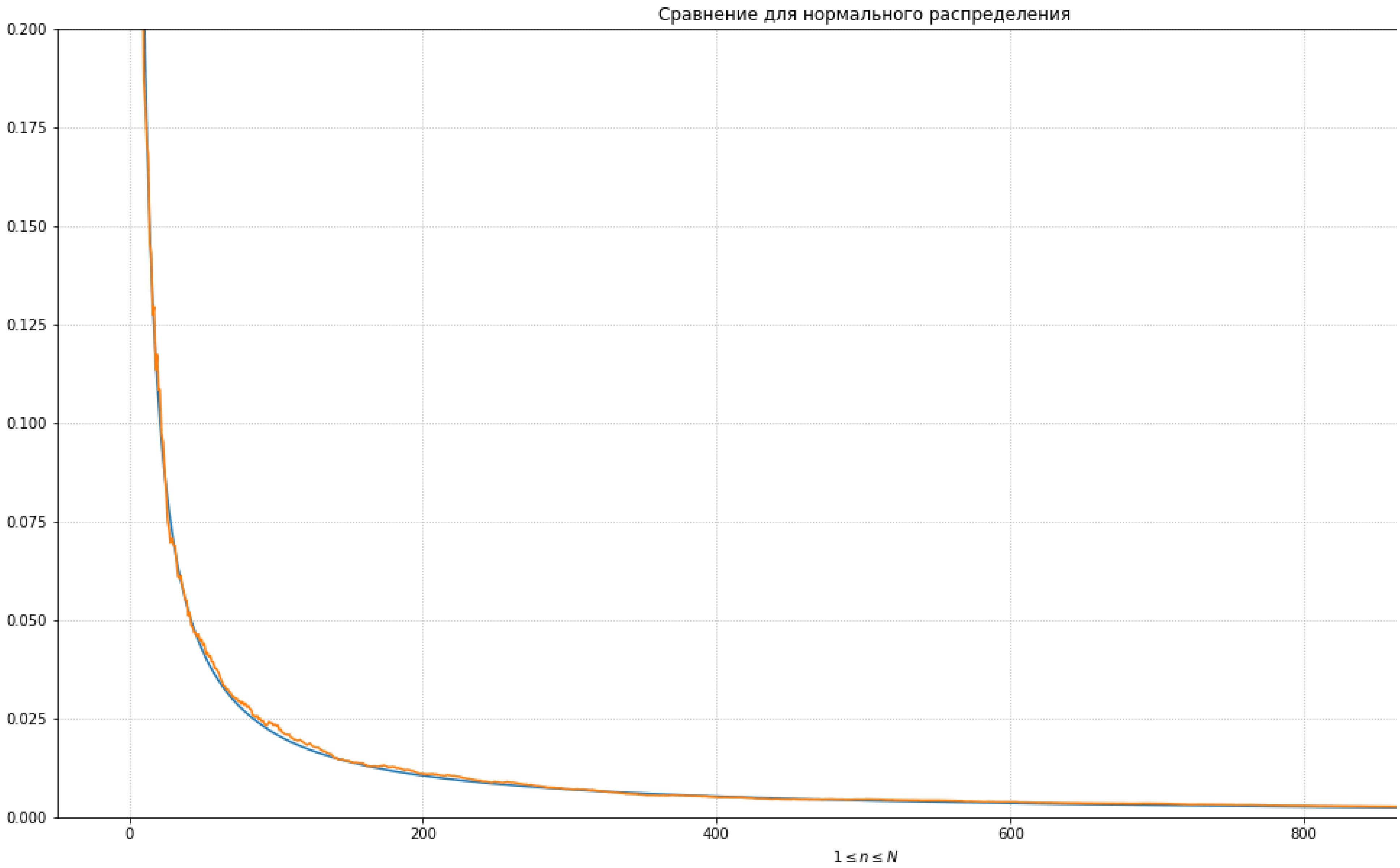
```
norm_unbiased_est = np.array([
    [np.median(norm_rvs[i][:j+1]) for j in range(N)]
    for i in range(brvs_size)])
norm_bootstrap_var_unbiased_est = np.apply_along_axis(calc_var, 0, norm_unbiased_est)
```

Информация Фишера для нормального распределения равна $I_X(\theta) = \frac{n}{\sigma^2}$

```
norm_fisher_info = np.linspace(1, N, N) / sigma_sq
```

Построим график

```
plt.figure(figsize=(20, 10))
plt.title(f"Сравнение для нормального распределения")
plt.xlabel('$1\leq n \leq N$')
plt.plot(
  np.linspace(1, N+1, N),
  1 / norm_fisher_info,
  label='$\\frac{1}{I_{X}(\\theta)}$'
)
plt.plot(
  np.linspace(1, N+1, N),
  norm_bootstrap_var_unbiased_est,
  label='$efficient$'
)
plt.grid(ls=':')
plt.ylim(bottom=0, top=0.2)
plt.legend()
plt.show()
```


Сравнение для нормального распределения
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0
200
400
600
800
$1 \leq n \leq N$

Вывод №2

На практике была проверена выполнимость неравенства Рао-Крамера на примере трёх различных распределений: биномиального, экспоненциального и нормального. В частности, нетрудно было заметить, что эффективные оценки достигают равенства в неравенстве Рао-Крамера (напомню, что эффективной оценкой в классе несмещенных оценок называется оценка, дающая равенство в неравенстве).

Задача №3

Рассмотрим $X_1, \ldots, X_n \sim Bern(\theta)$. По сетке значений $\theta \in [0, 1]$ с шагом 0.01 постройте график зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера от θ. Какой можно сделать вывод (напишите в комментариях)? Для каждого значения θ (для той же сетки) сгенерируйте выборку размера $n = 1000$ для параметра θ посчитайте эффективную оценку θ и бутстрепную оценку дисперсии (параметрический бутстреп, количество бутстрепных выборок равно 500) этой эффективной оценки θ. Нарисуйте график зависимости полученных бутстрепных оценок от θ.

```
sample_size, samples_amount = 10**3, 10**2
```

Знаем, что информация Фишера для Бернулиевского распределения равна $i = \frac{1}{\theta \cdot (1-\theta)}$ (как частный случай биномиального распределения), тогда $\frac{1}{I_X(\theta)}$ - нижняя оценка дисперсии несмещенной оценки по неравенству Рао-Крамера. В силу того, что $I_X(\theta) = n \cdot i$, получаем:

$$\mathsf{D}_\theta \hat{\theta}(X) \geqslant \frac{n}{\theta \cdot (1-\theta)}.$$

Наконец, построим график:

```
probe_params = np.arange(0, 1.01, 0.01)
low_est = probe_params * (1 - probe_params) / sample_size
plt.figure(figsize=(20, 10))
plt.title('График зависимости нижней оценки дисперсии по сетке')
plt.xlabel('$\\theta$')
plt.ylabel('$\\frac{1}{I_X(\\theta)}$')
plt.plot(probe_params, low_est, label='$\\frac{1}{I_X(\\theta)}$')
plt.grid(ls=':')
plt.legend()
plt.show()
```

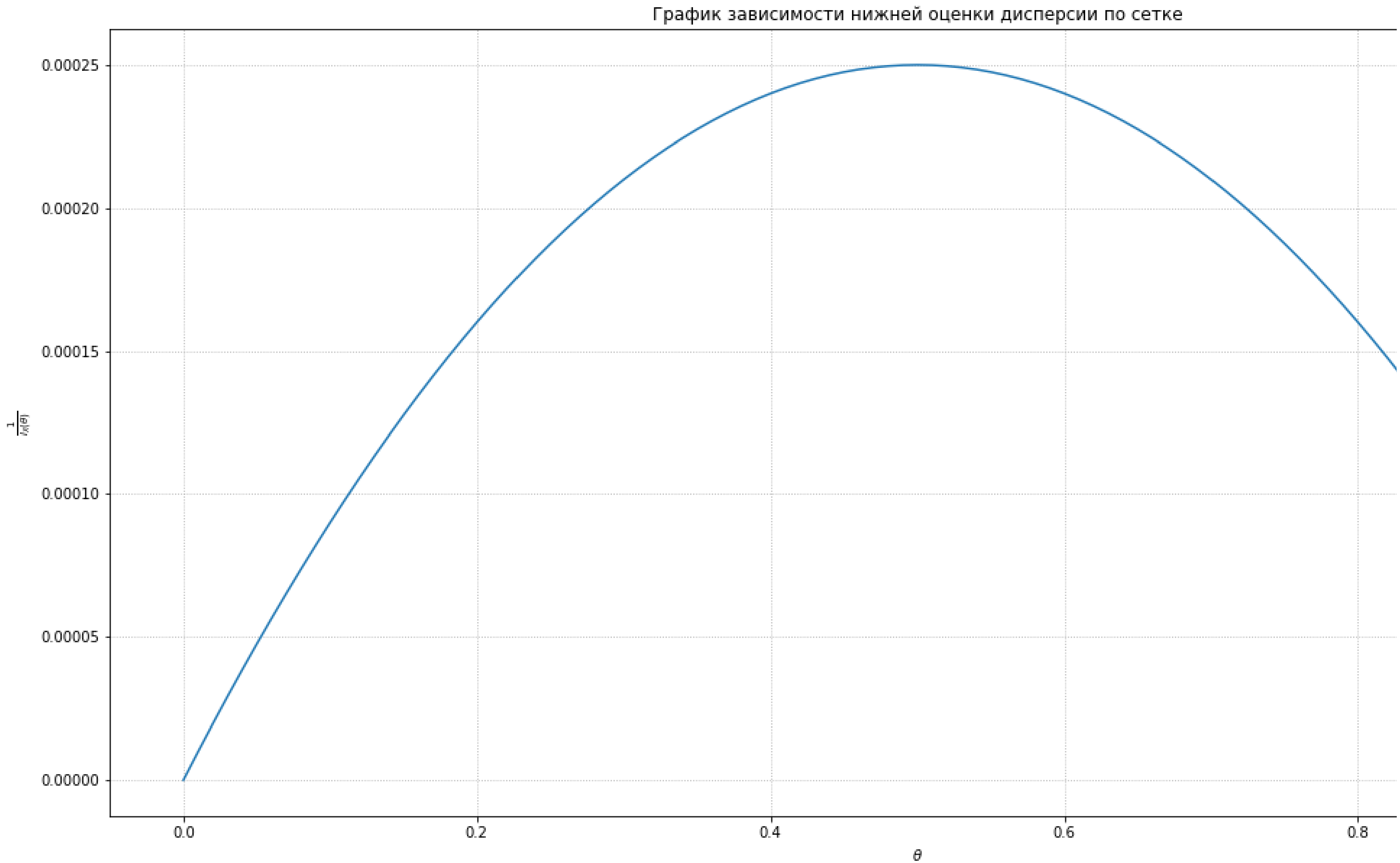


График зависимости нижней оценки дисперсии по сетке
0.00025
0.00020
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
θ