```
!pip3 install -U -q PyDrive

from pydrive.auth import GoogleAuth
from pydrive.drive import GoogleDrive
from google.colab import auth
from oauth2client.client import GoogleCredentials


import pandas as pd


def collect_csv_data_via_gd(link: str, filenm: str) -> pd.core.frame.DataFrame:
    auth.authenticate_user()
    gauth = GoogleAuth()
    gauth.credentials = GoogleCredentials.get_application_default()
    drive = GoogleDrive(gauth)
    fluff, id = link.split('=')
    downloader = drive.CreateFile({'id':id})
    downloader.GetContentFile(filenm)
    return pd.read_csv(filenm)


import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.special import factorial
from scipy import stats
import warnings

warnings.simplefilter('ignore')

%matplotlib inline
```

В учебных целях в данном задании запрещено использовать готовые реализации линейной регрессии (например, из пакета `scikit-learn`).

Задача №1

Загрузите данные из набора `Forest Fires` (файл `forestfires.csv`) о лесных пожарах в Португалии. Задача состоит в том, чтобы с помощью линейной регрессии научиться предсказывать координату area (площадь пожара) в виде линейной комбинации других данных.

Чтобы работать с числовыми координатами, нечисловые координаты (`month`, `day`) нужно перевести в числовые. Для простоты можно заменить координату month на индикатор летнего сезона, а координату day не использовать вообще. По желанию можно сделать преобразование другим способом. Также добавьте координату, тождественно равную единице (вес при этой координате интерпретируется как сдвиг).

Разбейте выборку на две части в соотношении $7:3$ (перемешав её с помощью `random.shuffle`). По первой части постройте регрессионную модель. Примените модель ко второй части выборки и посчитайте по ней среднеквадратичную ошибку.

Для переменной area выполните преобразование $f(x) = ln(x+c)$ и постройте для нее новую регрессионную модель. Посчитайте среднеквадратичную ошибку для преобразованных значений. При каком c предсказания получаются лучше всего?

При выбранном c сделайте разбиение выборки в соотношении $7:3$ разными способами (перемешивая каждый раз). Найдите способ оценить разброс качества от разбиения. Сильно ли меняется качество? Сделайте выводы.

Решение

Загрузим данные и выполним преобразования и сделаем копию для вспомогательных расчетов:

```
df_data = collect_csv_data_via_gd(
    link="https://drive.google.com/open?id=16biq--Fyj66FCIXJoLAPFM1iuhoDqHFd",
    filenm="forestfires.csv")\
    .drop("day", axis=1)

df_data.month = df_data.month.apply(
```

```
        lambda month: int(month in ['jun', 'jul', 'aug']))

df_data["shift"] = 1.0

df_data_copy = df_data.copy()
```

Напишем функцию вычисляющую $\mathtt{MSE}$:

```
def compute_mean_squared_error(predicted, actual):
    return np.square(np.subtract(predicted, actual)).mean()
```

Следующий класс $\mathtt{ForestFiresLinReg}$ описывает линейную регресионную модель в нашей задаче.

- $\mathtt{compute\_mean\_squared\_estimator}$ - вычисляет оценку наименьших квадратов
- $\mathtt{split\_data}$ - разбить датасет на данные для тестирования и предсказания
- $\mathtt{extract\_basis}$ - выделить базис из датасета
- $\mathtt{extract\_values}$ - выделить сами значения из датасета
- $\mathtt{test\_prediction}$ - обучиться на части данных и выполнить предсказание на остатке

```
class ForestFiresLinReg:

    def __init__(self, **kwargs):
        self.transform = np.vectorize(
            kwargs.get("transform", lambda x: x))
        self.transform_inv = np.vectorize(
            kwargs.get("transform_inv", lambda x: x))

    @staticmethod
    def compute_mean_squared_estimator(values, basis):
        return np.linalg.inv(basis.T @ basis) @ basis.T @ values

    @staticmethod
    def split_data(df: pd.core.frame.DataFrame, split_factor: float)\
      -> (pd.core.frame.DataFrame, pd.core.frame.DataFrame):
```

```
        assert 0. < split_factor < 1., "Incorrect split factor"
        items_cnt = len(df)
        to_train_cnt = int(np.ceil(items_cnt * split_factor))
        return df[:to_train_cnt], df[to_train_cnt:]

    @staticmethod
    def extract_basis(df: pd.core.frame.DataFrame)\
      -> pd.core.frame.DataFrame:
        return df.drop(labels=["area"], axis=1)

    @staticmethod
    def extract_values(df: pd.core.frame.DataFrame)\
      -> pd.core.frame.DataFrame:
        return df.area

    def test_prediction(self, df: pd.core.frame.DataFrame, split_factor: float)\
      -> pd.core.frame.DataFrame:
        df.area = self.transform(df.area)
        to_train, to_predict = self.split_data(df, split_factor)
        theta_est = self.compute_mean_squared_estimator(
            self.extract_values(to_train),
            self.extract_basis(to_train)
        )
        predicted_areas = np.dot(self.extract_basis(to_predict), theta_est)
        actual_areas = self.extract_values(to_predict)
        return pd.DataFrame(data={
            "predicted": self.transform_inv(predicted_areas),
            "actual"   : self.transform_inv(actual_areas)
        })
```

Напишем функцию для тестирования работы линейной регресионной модели с $log-$трансформацией при фиксированном значении c:

```
def test_log_transform(c_param: float) -> float:
    loglinreg_model = ForestFiresLinReg(
        transform=lambda x: np.log(x + c_param),
        transform_inv=lambda x: np.exp(x) - c_param)
```

```
        transform_inv=lambda x: np.exp(x) - c_param)
    df_test = loglinreg_model.test_prediction(df_data_copy.copy(), 0.7)
    return compute_mean_squared_error(
        predicted=df_test.predicted,
        actual=df_test.actual)

vtest_log_transform = np.vectorize(test_log_transform)
```

И для простой линейной регрессионной модели, т.е. без дополнительной трансформации данных:

```
def test_standart() -> float:
    df_test = ForestFiresLinReg().test_prediction(df_data_copy.copy(), 0.7)
    return compute_mean_squared_error(
        predicted=df_test.predicted,
        actual=df_test.actual)
```

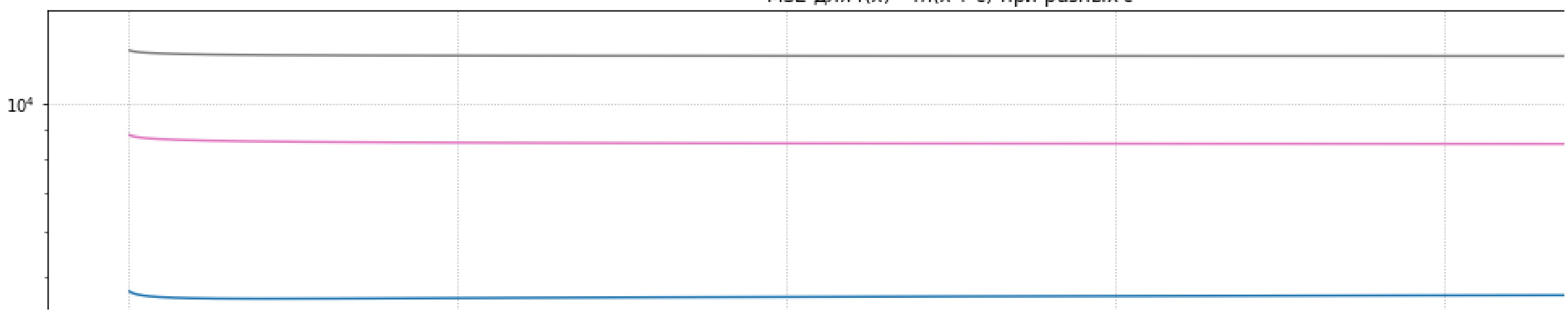
Для $1 \leq c \leq 1000$ с шагом 1 для фиксированного порядка датасета найдем оптимально значение `c`, т.е. при каком значении `c` $\mathtt{MSE}$ принимает наименьшее значение.
Выполним всего 10 серий таких тестов, перемешивая данные на каждой серии.
В дополнение, на каждой серии посчитаем $\mathtt{MSE}$ для линейной регрессионной модели без дополнительных преобразований данных.

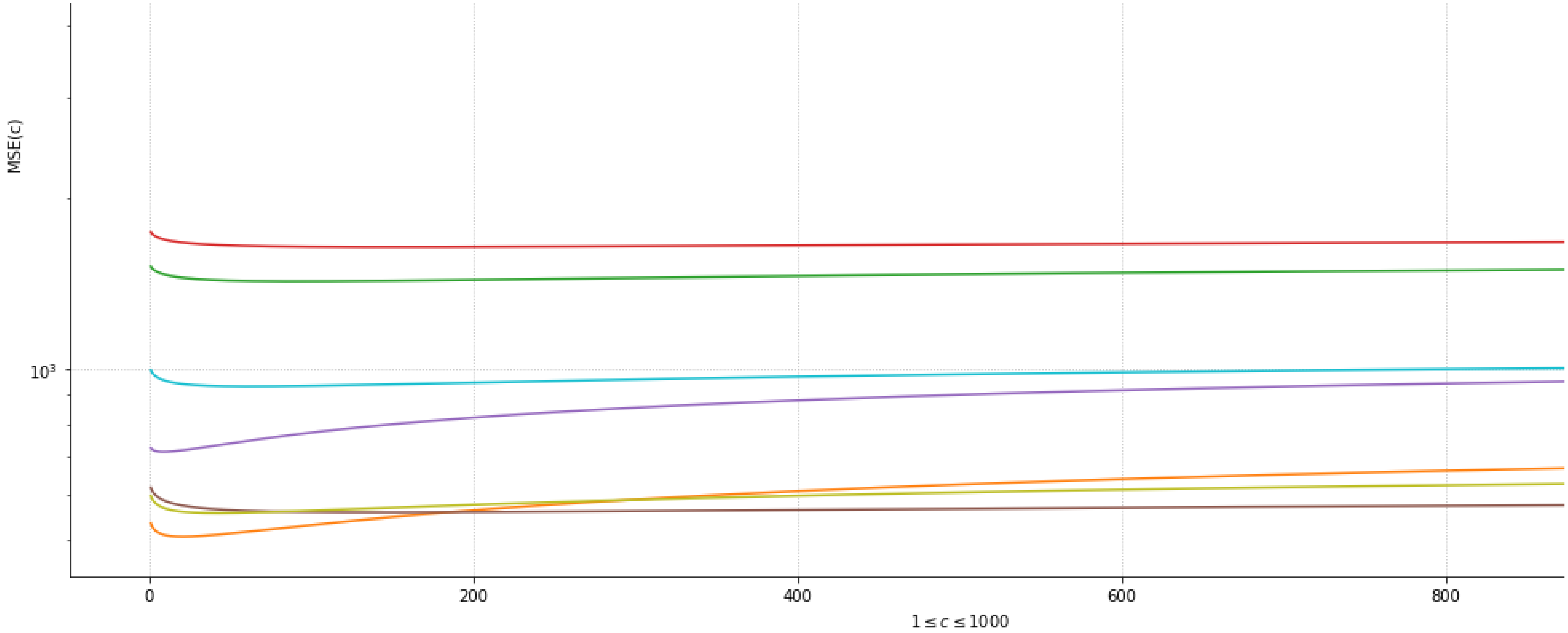
```
c_vector = np.linspace(1, 1000, num=10**3)
plt.figure(figsize=(20, 10))
plt.title('MSE для $f(x) = ln(x+c)$ при разных $c$')
plt.xlabel('$1\leq c\leq 1000$')
plt.ylabel('MSE(c)')
plt.yscale('log')
for test in range(10):
    series = vtest_log_transform(c_vector)
    c_min = np.argmin(series)
    print(f"""Test №{test+1}:
    \t* loglinreg_model.MSE({c_min+1}) = {series[c_min]}
    \t* linreg_model.MSE = {test_standart()}""")
    plt.plot(c_vector, series, label=f"Test №{test+1}")
    df_data_copy = df_data_copy\
```

```
        .sample(frac=1)\
        .reset_index(drop=True)
plt.grid(ls=':')
plt.legend()
plt.show()
```

```
Test №1:
        * loglinreg_model.MSE(83) = 4578.087574373634
        * linreg_model.MSE = 4724.1332614232
Test №2:
        * loglinreg_model.MSE(21) = 507.2862020056817
        * linreg_model.MSE = 807.4596508490382
Test №3:
        * loglinreg_model.MSE(92) = 1426.4265668726123
        * linreg_model.MSE = 1594.1685266102922
Test №4:
        * loglinreg_model.MSE(148) = 1636.2294541922138
        * linreg_model.MSE = 1743.462407102731
Test №5:
        * loglinreg_model.MSE(9) = 714.361622136963
        * linreg_model.MSE = 1095.598482307715
Test №6:
        * loglinreg_model.MSE(143) = 559.1309933870166
        * linreg_model.MSE = 611.3466290991527
Test №7:
        * loglinreg_model.MSE(1000) = 8502.825665807215
        * linreg_model.MSE = 8486.905418167431
Test №8:
        * loglinreg_model.MSE(1000) = 12069.047600240208
        * linreg_model.MSE = 12064.966384596317
Test №9:
        * loglinreg_model.MSE(42) = 557.4295468413637
        * linreg_model.MSE = 699.3240950102736
Test №10:
        * loglinreg_model.MSE(62) = 931.3903231061033
        * linreg_model.MSE = 1088.2024465125821
```

MSE для $f(x) = ln(x + c)$ при разных c





Как видим, невозможно предсказать, что при увеличении/уменьшении параметра `c`, мы получим меньшее значение `MSE(c)`.

Также важно заметить, что на каждой серии при равных `c` значения `MSE(c)` разнятся. Причем само `MSE(c)` может отличаться на несколько порядков в некоторых случаях, что при равных `c`, что при "оптимальных" `c`. Однако, это вполне закономерно, т.к. на разных подчастях датасета модель строится разная, метод оценки наименьших квадратов дает разные значения.

Более того, при перемешиваниии мы предсказываем часть прошлое по части будущему и наоборот, что довольно странно.

Также по приложенному графику сложно судить о том, о поведении функции `MSE(c)`. Все потому что `MSE(c)` также является функцией от данных, а на каждой серии, аргумент — данные — разные из-за перемешивания.

Отдельно отметим, что в случае, когда линейная регрессионная модель с $log-$трансформацией даёт минимальное значение $\texttt{MSE}$ при различных $\mathbf{c}$ на разных данных, в том числе и при $\mathbf{c} = 1000$. Это объясняется, тем, что значения $\mathbf{c}$ мы берем из ограниченного отрезка, а "оптимальное" $\mathbf{c}$ может "лежать дальше" 10^3. Однако, при найденном оптимальном $\mathbf{c} < 10^3$ среднеквадратичная ошибка меньше в моделе с $log-$трансформацией, чем в простой.

Вывод №1

Таким образом данную задачу решать методом линейной регрессии не совсем оправдано, так как этот метод дает очень большую ошибку на тестовых данных при случайном сплите. Возможно, если брать данные в хронолигическом порядке данный метод отработает лучше, но данные не полные, т.к. в датасете нет поля "год". Из условия не ясно: данные за один год или за несколько лет. В случае, когда данные за один год, разбиение $7:3$ не годится при упорядовачивании в хронологическом порядке по понятным причинам.
Результаты экспериментов показывают, что модель $log-$трансформацией даёт меньшую среднеквадратичную ошибку, исключая те случаи, когда $\mathbf{c}$ не лежит в $[1; 1000]$.

Задача №2

Пусть

$$X_i = \beta_1 + i\beta_2 + \varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

$-$ расстояния, которое проехал трамвай за i секунд по показанию датчика. Здесь $\beta_1 -$ начальное расстояние, $\beta_2 -$ скорость трамвая, $\varepsilon_0 -$ ошибка начального показания датчика. Трамвай едет с постоянной скоростью, и через каждую секунду датчик фиксирует расстояние, которое проехал трамвай. Отсчет времени идет от предыдущего замера, причем отсчет происходит с ошибкой. Для $i = 1, \ldots, n$ величина ε_i есть ошибка приращения расстояния, то есть $\varepsilon_i = \varepsilon_i^t \beta_2$, где $\varepsilon_i^t -$ ошибка отсчета времени. Все ошибки ε_i независимы и распределены по закону $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Сведите задачу к линейной модели и найдите оценки наименьших квадратов для начального расстояния β_1 и скорости β_2, а также несмещенную оценку для σ^2, из которой выразите оценку дисперсии отсчета времени.

Данные возьмите из файла `Regression.csv`. Сделайте выводы.

Решение

Сведем решение к линейной модели. Достаточно рассмотреть разности вида:

$$Y_i = X_{i+1} - X_i = \beta_2 + \varepsilon_i$$

для $\forall i > 0$.

Более того, положим $Y_0 = X_0 = \beta_1 + \varepsilon_0$. Значение Y_i это расстояние, которое проезжает трамвай за i-ую секунду.

Найдем оценку коэффициентов линейной регрессии методом наименьших квадратов:

$$\hat{\theta} = (Z^T \cdot Z)^{-1} \cdot Z^T \cdot Y = \begin{pmatrix} \hat{\beta_1} \\ \hat{\beta_2} \end{pmatrix}$$

где:

Y - вектор данных,

$Z = \begin{pmatrix} 1\ 0 \\ 0\ 1 \\ \dots \\ 0\ 1 \end{pmatrix}$.

Решением является:

$\hat{\beta_1} = Y_0$,

$\hat{\beta_2} = \overline{\mathbf{Y}'}$, где $\mathbf{Y}' = \{Y_i | i = \overline{1, n}\}$.

Несмещенная оценка σ^2 :

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-k} ||Y - Z \cdot \hat{\theta}||^2 =$$

$$= \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y'})^2 = \frac{n}{n-2} \cdot s^2(Y')$$

Дисперсия отсчета времени равна: $\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}_2^2}$.

Загрузим данные:

```
df_data = collect_csv_data_via_gd(
    link="https://drive.google.com/open?id=1ODAEoNo-WgheJ7bnwKmUErajqDPWW-tU",
    filenm="regression.csv")
```

Преобразуем данные из `pandas.DataFrame` в `numpy.array` с учетом специфики считывания через `pandas` входных данных.

```
x_rvs = np.append(
    [np.float64(df_data.columns[0])],
    df_data.iloc[:,0:].values.flatten()
)
```

Согласно теоретическим выкладкам выше, построим линейную регрессионную модель:

```
y_rvs = x_rvs - np.append([0.], x_rvs[:-1])
```

Найдем оценки наименьших квадратов:

```
beta_est = (y_rvs[0], np.mean(y_rvs[1:]))
n = y_rvs.shape[0] - 1
sigma_sq_est = (n / (n - 2)) * stats.moment(y_rvs[1:], moment=2)
sigma_sq_t_est = sigma_sq_est / (beta_est[1]**2)
```

для начального расстояния β_1 и скорости β_2

```
beta_est
```

```
beta_est
```

```
(82.0053, 11.970782982982984)
```

несмещенной оценки σ^2

```
sigma_sq_est
```

```
1.5267747059886199
```

дисперсии отсчета времени $\hat{\sigma_t^2}$

```
sigma_sq_t_est
```

```
0.01065442069716351
```

Вывод №2

Дисперсия времени мала, следовательно показания датчика довольно точные. Линейная модель дает хорошее приближение, т.е. это подтверждает, что полученные оценки для $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\sigma^2}$ и $\hat{\sigma_t^2}$ были найдены довольно точно.