Econometria II – Séries Temporais

Prof. Dr. Pedro Costa Ferreira –pedro.guilherme@fgv.br

1ª Lista de Exercícios

1) Seja $Z_t = a_t + ca_{t-1} + ca_{t-2} + \cdots + ca_1,\ t \geq 1$, onde c é uma constante e $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$

(a) Esse é um processo estacionário?

(b) O processo $(1 - L)Z_t$ é um processo estacionário?

2) Suponha que $\{\varepsilon_t\}$ seja $RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Defina o processo:

$$X_t \begin{cases} \varepsilon_0, t = 0 \\ X_{t-1} + \varepsilon_t, t = 1,2, \ldots \end{cases}$$

O processo X_t é estacionário?

3) Considere o processo estocástico $Z_t = a_t$, onde a_t é um processo ruído branco com $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, e:

$$a_t \begin{cases} \text{+1, com probabilidade } 1/2 \\ \text{-1, com probabilidade } 1/2 \end{cases}$$

(a) Obtenha a média do processo Z_t;

(b) Calcule a autocovariância $\gamma(\tau), \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(c) Calcule a autocorrelação $\rho(\tau), \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4) Utilizando o software R, reproduza empiricamente todos os procedimentos realizados no exercício 3.

5) Prove que se $\{Z_t, t \in \mathbb{R}\}$ for gaussiano e estacionário se 2ª ordem, então ele será estritamente estacionário.

6) Considere as observações:

t	**1961**	**1962**	**1963**	**1964**	**1965**	**1966**	**1967**
Z_t	15	19	13	17	22	18	22

Calcule a autocorrelação do processo e plote em um gráfico de defasagens.

7) Utilizando o software R, reproduza os procedimentos realizados no exercícios 6 e veja se os resultados são coincidentes.

8) Seja o modelo $Z_t = 0.5Z_{t-1} + a_t$, $\sigma_a^2 = 1$. Para este modelo pede-se:

(a) É estacionário?

(b) É inversível?

(c) Calcule as sequências $\gamma_0, \gamma_1, \cdots \gamma_5$ e $\rho_0, \rho_1 \cdots \rho_5$

9) Um modelo AR(2) dado por $Y_t = a + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$, t=1,2,3..., em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2, será estacionário se $\phi_1 < 1$ e $\phi_2 < 1$. Explique sua resposta.

10) Quando um processo estocástico é dito estacionário de segunda ordem?

11) Defina "Ruído Branco".

12) Explicite os momentos teóricos e empíricos utilizados para obter a média, a variância e a FAC de um processo estocástico.

13) Que características devemos esperar da realização do seguinte processo MA(1)?

$$y_t = 1 + \varepsilon_t + 0{,}8\varepsilon_{t-1}$$

Em quê essas características seriam diferentes daquelas da realização do seguinte processo MA(1)?

$$y_t = 1 + \varepsilon_t - 0{,}8\varepsilon_{t-1}$$

14) Considere o processo, $y_t = a\cos(wt) + b\,sen(wt)$, onde $E(a) = E(b) = 0$, $E(ab) = 0$, $E(a^2) = E(b^2) = \sigma^2$. Esse é um processo estacionário?

15) Julgue as seguintes afirmativas e prove matematicamente:

(0) O processo AR(2), $\mathrm{Y_t} = \rho_1 \mathrm{Y_{t-1}} + \rho_2 \mathrm{Y_{t-2}} + \varepsilon_t$, em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2, é estacionário de segunda ordem, se e somente se as raízes do polinômio $\mathrm{L}^2 - \rho_1 \mathrm{L} + \rho_2$ estão fora do círculo unitário.

(1) No processo MA(2), $\mathrm{Y_t} = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$, em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2, a covariância entre $\mathrm{Y_t}$ e $\mathrm{Y_{t-3}}$ é igual a zero.

(2) Seja a FAC de um processo AR(1) dada por ρ_k. É correto afirmar que $\rho_k = \varphi_1^k$

(3) Defina Critério de Informação. Por que eles são úteis?

(4) O que você entende sobre MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*)

(5) O que você entende sobre RMSE (*Root Mean Square Error*)

16) Seja o processo abaixo:

$$\Delta \mathrm{Y_t} = \beta_0 + \beta_1 \Delta \mathrm{Y_{t-1}} + \mathrm{u_t}$$

onde $\mathrm{u_t} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Pede-se:

a) A equação de $\mathrm{Y_t}$. Qual processo ARMA(p,q) segue $\mathrm{Y_t}$?

b) Quais são os parâmetros e o intercepto do modelo encontrado em (a)?

17) Responda:

a) Defina a função de auto-correlação e explique sua utilidade na metodologia Box-Jenkins. O que é um Correlograma?
b) Defina o intervalo de confiança da FAC. Mostre como devemos esperar a FAC estimada de um processo MA(2) para uma amostra com 100 observações.
c) Explique o que é e qual é a utilidade da função de auto-correlação parcial.

18) Suponha que ΔY_t pode ser representado pelo seguinte processo:

$\Delta Y_t = \epsilon_t - 0{,}6\epsilon_{t-1}$ para *t = 1;*

$\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t - 0{,}6\epsilon_{t-1}$ para $t \geq 2$;

em que ϵ_t, *t = 1,2...* é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média igual a 0. Se $Y_t = 10$, quando *t = 0*, calcule o valor da $E[Y_3]$.

19) Responda se a afirmação é verdadeira ou falsa e **JUSTIFIQUE** sua resposta.

a) Seja L o operador de defasagem tal que $\mathrm{LY_t} = \mathrm{Y_{t-1}}$. Se $\mathrm{Y_t}$ segue um processo AR(1) estacionário de segunda ordem, então $(1 - \mathrm{L})^2\mathrm{Y_t}$ é um processo ARMA(2,2).

b) O processo ARMA(2,2) definido na forma $(1 - \mathrm{L} - 0{,}25\mathrm{L}^2)\mathrm{Y_t} = (1 - 0{,}5\mathrm{L} - 0{,}06\mathrm{L}^2)\mathrm{u_t}$ é n]ao estacionário, em que $\mathrm{u_t}$é o erro aleatório com média nula e variância constante.

c) Todo processo MA é estacionário de segunda ordem.

d) A soma de dois processos estocásticos independentes e estacionários de segunda ordem será estacionária de segunda ordem.

e) A soma de dois processos estocásticos não estacionários será não estacionária.

20) Encontre a média, a variância e a autocorrelação da função estocástica abaixo e responda se esse é um processo estacionário.

$y_t = a + y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, *a* é uma constante.

21) A que componentes de uma série temporal (pelo modelo clássico) estariam principalmente associados cada um dos seguintes eventos. JUSTIFIQUE suas respostas.

a) Uma recessão.

b) Um acréscimo na oferta de empregos durante os meses de verão.

c) O declínio da taxa de mortalidade decorrente do progresso da medicina.

d) Um greve na indústria do aço.

e) Uma procura continuamente crescente por automóveis pequenos.

f) O efeito nas vendas de cigarros das crescentes restrições ao fumo em lugares fechados e a divulgação

de mais pesquisas mostrando os malefícios do tabagismo.

g) Maior procura por roupas de lã.

h) O fenômeno climático “El Niño”.

i) Um terremoto em Taiwan que danificou várias fábricas de memórias RAM para computadores.

j) Maior procura por artigos de papelaria e livros escolares.

k) Aumento no volume total de benefícios pagos pelo INSS.

22) Verifique se o seguinte processo é superparametrizado, ou seja, se os polinômios $\Phi(L)$ e $\Theta(L)$ possuem raízes comuns, as quais devem ser eliminadas, simplificando do modelo.

$$y_t = -0.2\, y_{t-1} + 0.48\, y_{t-2} + 0.6\, \varepsilon_{t-1} - 0.16\, \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

23) Defina Processo Estocástico. Explique o significado de processo estocástico e ilustre graficamente. O que é a realização de um processo estocástico? Por que as

séries econômicas podem ser entendidas como sendo geradas por processos estocásticos?

24) Defina a função de auto-correlação e explique sua utilidade na metodologia Box-Jenkins.

25) Explique o que é e qual é a utilidade da função de auto-correlação parcial.

26) O que é um Correlograma?

27) Para séries estacionárias com início em janeiro de 1998 e final em dezembro de 2007, desenhe a função de auto-correlação amostral e a função de auto-correlação parcial amostral caso a série pudesse ser descrita por:

- Um processo AR(4)
- Um processo MA(2)
- Um ruído branco

28) Qual deve ser o resultado do teste de Ljung-Box para um processo de ruído branco (para uma defasagem d qualquer).

29) Por que o processo de construção de Modelos ARIMA pode ser considerado um ciclo iterativo, como afirmam Granger e Newbold?

30) Quais os principais instrumentos utilizados na identificação de um modelo ARIMA? Por que essa é a etapa mais difícil para o pesquisador?

31) Responda

a. Mostre algebricamente como um processo AR(2), com raízes fora do círculo unitário é expresso como um MA(∞);

b. Escreva um MA(1) sob a forma de um AR(∞);

c. Por que as raízes do processo MA devem estar fora do círculo unitário?

32) Para os modelos abaixo, ache os valores de p, d, q e verifique se os mesmos são estacionários e inversíveis.

(i) $Z_t + 0,4Z_{t-2} = a_t + 1,4Z_{t-1}$

(ii) $Z_t + Z_{t-2} - a_t = 2Z_{t-1} - 0,4a_{t-1} - 0,8a_{t-2}$

33) O processo ARMA(2,2) definido na forma $(1 - L - 0,25L^2)Y_t = (1 - 0,5L - 0,06L^2)u_t$ é não estacionário, em que u_t é o erro aleatório com média nula e variância constante. Prove.

34) Um modelo AR(2) dado por $Y_t = a + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$, t=1,2,3..., em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2, será estacionário se $\phi_1 < 1$ e $\phi_2 < 1$. Explique sua resposta.

35) Considere o modelo ARMA(2,2): $Z_t = 0,6Z_{t-1} + 0,2Z_{t-2} + a_t + 0,3a_{t-1} - 0,4a_{t-2}$ e seja um instante de tempo genérico T onde conhecemos: Z_T=4,0; Z_{T-1}=5,0; a_T=1,0 e a_{T-1}=0,5. Pede-se os valores:

(i) $Z_T(1)$
(ii) $Z_T(2)$
(iii) $Z_T(l)$; para l = 3,4,....

36) (Analista do Banco Central do Brasil – 2001) A evolução de uma série mensal de receitas, após a remoção da tendência e de efeitos sazonais, define um processo estacionário que obedece a lei de formação de um processo auto-regressivo de médias móveis ARMA(p,q). O natural p é da parte auto-regressiva e o natural q a ordem do processo de médias móveis. Sabe-se que a função de autocorrelação da série tem queda exponencial e que a função de autocorrelação parcial não se anula a partir da defasagem de ordem 2, mas se anula a partir da defasagem de ordem 3, inclusive. Que modelo ARIMA (p,d,q) é esse? Justifique.

37) Explique qual a função da FAC, FACP e da FAC dos resíduos e mostre o comportamento de ambas para um processo ruído branco, lembre-se de explicitar o intervalo de confiança.

38) Suponha que foi ajustado um modelo ARMA(0,2) para uma série temporal gerada por um processo ARMA(1,2). Como o teste para a verificação do modelo ajustado indicaria que o modelo foi especificado de maneira errada? Como corrigir esse problema?

39) Dado que $y_T = 2.0$ e $y_{T-1} = 1.0$ e $e_t = 0.5$, calcule as previsões 1,2 e 3 passos à frente para o modelo abaixo:

$$y_t = 0.6\, y_{t-1} + 0.2\, y_{t-2} + 0.6\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim NID(0,\sigma 2)$$

40) A tabela abaixo apresenta a FAC estimada (r_k) para três séries temporais (original), e quando adequado, apresentamos também a FAC estimada para a primeira diferença da série (diferença). Todas as séries têm 50 observações. A partir destas estimativas produza o correlograma para cada uma das séries com as bandas de confiança de 95%. Usando esta informação tente identificar um modelo apropriado da família ARIMA(p,d,q) para cada uma das séries. Justifique a sua escolha usando o seu conhecimento das FAC's teóricas para processos ARIMA.

Série	**k:**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
(a) Original	r_k	-0.70	0.51	-0.32	0.22	-0.11	0.08	-0.04	0.03
(b) Original	r_k	0.99	0.98	0.98	0.97	0.94	0.91	0.89	0.86
Diferença	r_k	0.45	-0.04	0.12	0.06	-0.18	0.16	0.01	-0.07
(c) Original	r_k	0.94	0.93	0.90	0.89	0.87	0.86	0.84	0.81
Diferença	r_k	0.69	0.50	0.33	0.19	0.10	0.08	0.03	0.01

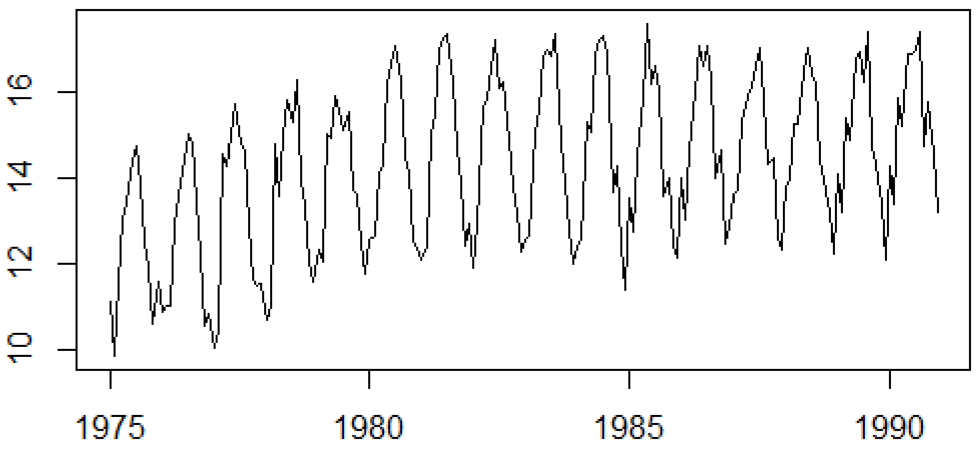
41) Mostre que o coeficiente de correlação parcial de um processo AR(2) é dado por:

$$\phi_{22} = corr(y_t, y_{t-2} \mid y_{t-1}) = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}, \text{ onde } \rho_k = corr(y_t, y_{t-k}),\ k=1,2,....$$

Obs: Mostre passo a passo como chegar a esse resultado.

42) Observando a ST abaixo de vendas de cerveja, pergunta-se: qual é o modelo ARIMA(p,d,q) você definiria para a série? Explique sua resposta utilizando os conceitos aprendidos até o momento.

Vendas de Cerveja



43) Considere uma ST $\{Y_t\}$ onde:

$$Y_t = \varepsilon_t$$

e $\varepsilon_t \sim i.i.d(0, \sigma^2)$. Esse processo é estacionário? Prove matematicamente.

44) Seja o processo abaixo:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta Y_{t-1} + u_t$$

onde $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Pede-se:

a) A equação de Y_t. Qual processo ARMA(p,q) segue Y_t?

b) Quais são os parâmetros e o intercepto do modelo encontrado em (a)?

45) Julgue as seguintes afirmativas e prove matematicamente:

(0) O processo AR(2), $Y_t = \rho_1 Y_{t-1} + \rho_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$, em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2, é estacionário de segunda ordem, se e somente se as raízes do polinômio $L^2 - \rho_1 L + \rho_2$ estão fora do círculo unitário.

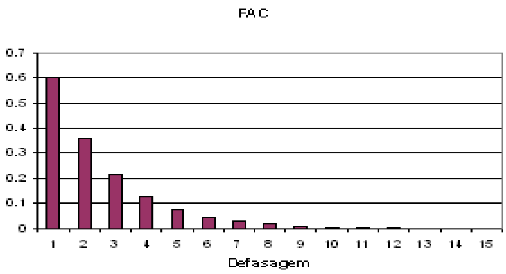
(1) No processo MA(2), $Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$, em que ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ^2, a covariância entre Y_t e Y_{t-3} é igual a zero.

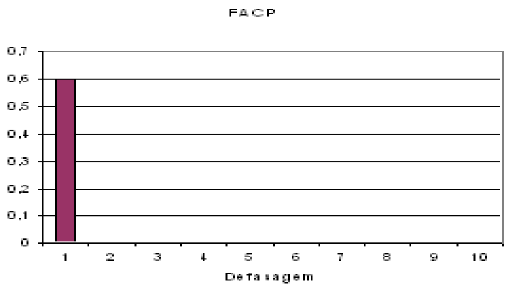
(2) Seja a FAC de um processo AR(1) dada por ρ_t. É correto afirmar que $\rho_t = \varphi_1^j$

(3) Defina Critério de Informação. Por que eles são úteis?

(4) O que você entende sobre MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*)

46) **(ANPEC 2006)** Uma série temporal Y_t, t = 1,...T, foi gerada por um processo da classe ARIMA(p,d,q) e apresenta os seguintes formatos para a Função de Autocorrelação (FAC) e Função de Autocorrelação Parcial (FACP):





Supondo que a média da série seja 100 e que Y_{T-3} = 35, Y_{T-2} = 28, Y_{T-1} = 38 e Y_T = 30, calcule a previsão para Y_{T+1} feita no instante T , isto é $E(Y_{T+1}|Y_T, Y_{T-1}, Y_{T-2}, Y_{T-3,...})$.

47) **(ANPEC 2007)** Considere o modelo autorregressivo de primeira ordem, AR(1), definido por:

$$\mathrm{Y_t = a + bY_{t-1} + u_t}$$

em que a e b são parâmetros e $\{\mathrm{u_t}\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas, com média nula e variância σ2 . Suponha que |b| < 1. A previsão n passos-à-frente para a variável Y convergirá para

⓪ a.

① a média de $\mathrm{u_t}$

② $\frac{a}{1-b}$

③E(Yt)

④∞.

48) **(ANPEC 2014)** Suponha que Y_t seja representado pelo seguinte processo auto-regressivo de primeira ordem:

$$Yt = 10 + 0{,}6\ Yt\text{-}1 + e_t,$$

em que et é um ruído branco que satisfaz as condições: $E(e_t)=0$, $E(e_t^2)=\sigma^2$ e $E(e_te_s)=0$ para t≠s. Suponha também que Y0=0. Obtenha $E(Y_t)$ para t=2.

49) Seja um processo AR(2). (a) mostre matematicamente e graficamente os parâmetros φ_{kk} da FACP teórica; (b) estime teoricamente, via Método dos Momentos, os parâmetros desse processo.

50) Seja o modelo $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \mu_t$. Onde ϕ_0 ϕ_1 são os parâmetros e μ_t é o ruído/inovação. Se o modelo foi definido de forma adequada, defina as características de μ_t. (matematicamente e graficamente).

51) Avalie as afirmativas e prove matematicamente os seus argumentos

a) O modelo $y_t = 0{,}364 y_{t-1} + e_t - 0{,}364 e_{t-1}$ segue um processo ARIMA(1,0,1)?

b) No processo AR(1): $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, em que $|\phi| < 1$ e ε_t é um ruído branco de média zero e variância σ^2, qual será a variância de y_t?

c) Defina e explique os testes de Jarque Bera, Ljung Box e ARCH LM. Em qual fase da teoria BJ eles são usados e para que?

Referências:

Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, Second Edition. Wiley. 2014

Morettin, P. A.; Toloi, C.M.C. **Análise de Séries Temporais**. São Paulo: Editora Blücher, 2006.

Fernandes, C. **Notas de Aula**. DEE, PUC-Rio, 2011.

Stock J, Watson MW. **Introduction to Econometrics.** New York: Prentice Hall; 2003.

Schmidt et al. **Estatística – Questões comentadas das provas de 2006 a 2015**. 5ª edição. Elsievier. 2015.

Provas da ANPEC. Disponíveis em: http://www.anpec.org.br/novosite/br/exame