ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Моделирование механических систем

Вариант 11

Машуров Владимир БПМ-19-3

30 ноября 2021 г.

Содержание

1 Моделирование механической системы масса-пружина

Дана система:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + kx = f(t) \tag{1}$$

Где $f(t)$ - входное воздействие, $x(t)$ - выходное воздействие.

Задание 1.1

Применив преобразование Лапласа (с нулевыми начальными условиями) найдите передаточную функцию модели: $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$

Найдём соотношение из которого получим G(t):

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \frac{d}{dt} = \lambda$$

$$M\lambda^2 x(t) + B\lambda x(t) + kx(t) = f(t)$$

$$(M\lambda^2 + B\lambda + k)x(t) = f(t)$$

$$\frac{x(t)}{f(t)} = \frac{1}{M\lambda^2 + B\lambda + k}$$

Отсюда

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \mathcal{L}\left(\frac{x(t)}{f(t)}\right) = \frac{\mathcal{L}(\tilde{x}(t))}{\mathcal{L}(\tilde{f}(t))} =$$

$$= \frac{\mathcal{L}(1)}{\mathcal{L}(M\lambda^2 + B\lambda + k)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{M\lambda^2 + B\lambda + k} = \frac{1}{M\lambda^2 + B\lambda + k}$$

Задание 1.2

Перепишите уравнение 1 в форму вход-состояние-выход.

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Разделим всё на M и заменим переменные следующим образом, для удобства: $f = U$ и $x = y$. Получим

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}U$$

Составим систему:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} + \frac{B}{M}y \end{cases}$$

Продифференцируем оба равенства по t

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 - \frac{B}{M}y \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} = \frac{1}{M}U - \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}U - \frac{k}{M}x_1 \end{cases}$$

Мы пришли к форме вход-состояние-выход. Обратим замену переменных:

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 = \pi_2 - \frac{B}{M}x \\ \dot{\pi}_2 = \frac{1}{M}f - \frac{k}{M}\pi_1 \end{cases}$$

Легко заметить, что:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{k}{M} & 1 \\ -\dfrac{B}{M} & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Задание 1.3

Составьте структурную схему моделирования, опираясь на уравнение 1 и результат, полученный в Задании 2.

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad | : M$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{M}\dot{x}(t) + \frac{k}{M}x(t) = \frac{1}{M}f(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t) - \frac{B}{M}\dot{x}(t) \quad |\frac{d}{dt} = \lambda$$

$$\lambda^2 x(t) = \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t) - \frac{B}{M}\lambda x(t) \quad | : \lambda^2$$

$$x(t) = \frac{1}{\lambda^2}\Big(\frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t)\Big) - \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{B}{M}x(t)\Big)$$

Из полученного выражения можно построить структурную схему, изображенную на рисунке 1.

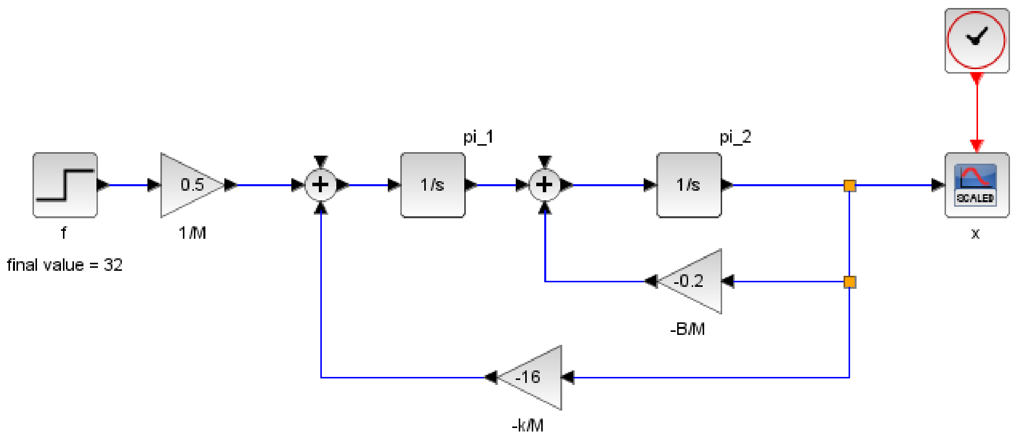


Рис. 1: Структурная схема моделирования механической системы масса-пружина

Задание 1.4

Для системы находящейся в состоянии покоя, в момент времени $t = 0$ прикладывается постоянная сила $f(t) = 32$ Н. Рассматриваемая система имеет массу 2 кг и жесткость пружины 32 кг / с2. Коэффициент демпфирования B можно отрегулировать для получения желаемого отклика. Выполните моделирование в пакете MATLAB/Simulink (Scilab).

Получим схему на рисунке 2 и графики на рисунке 3.

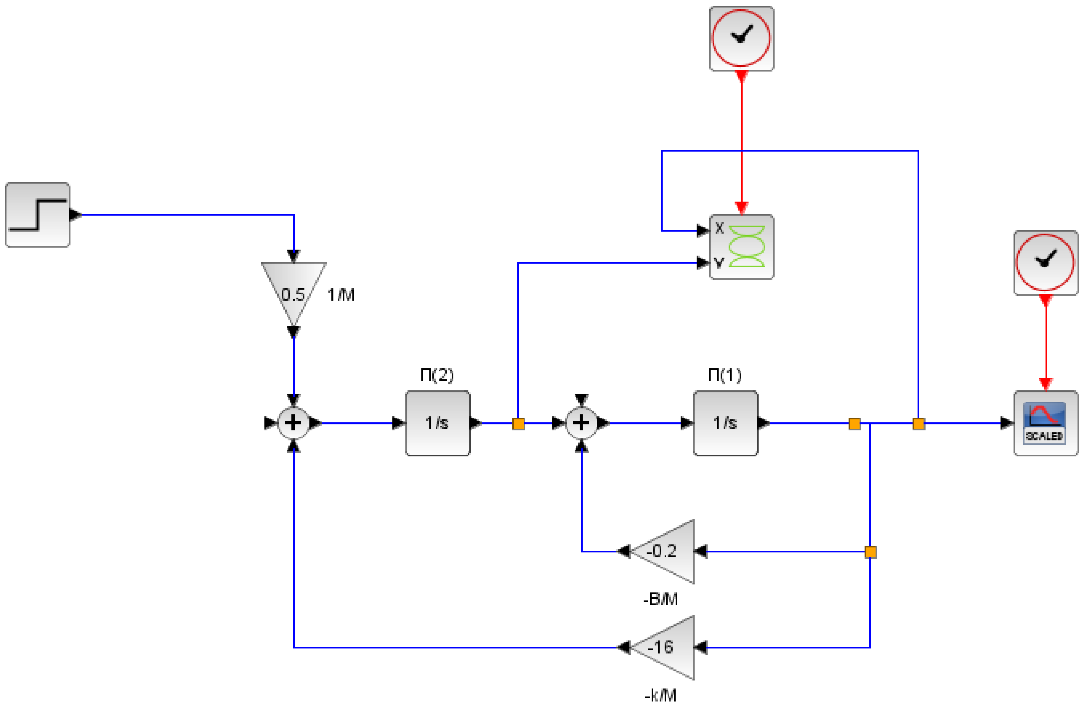
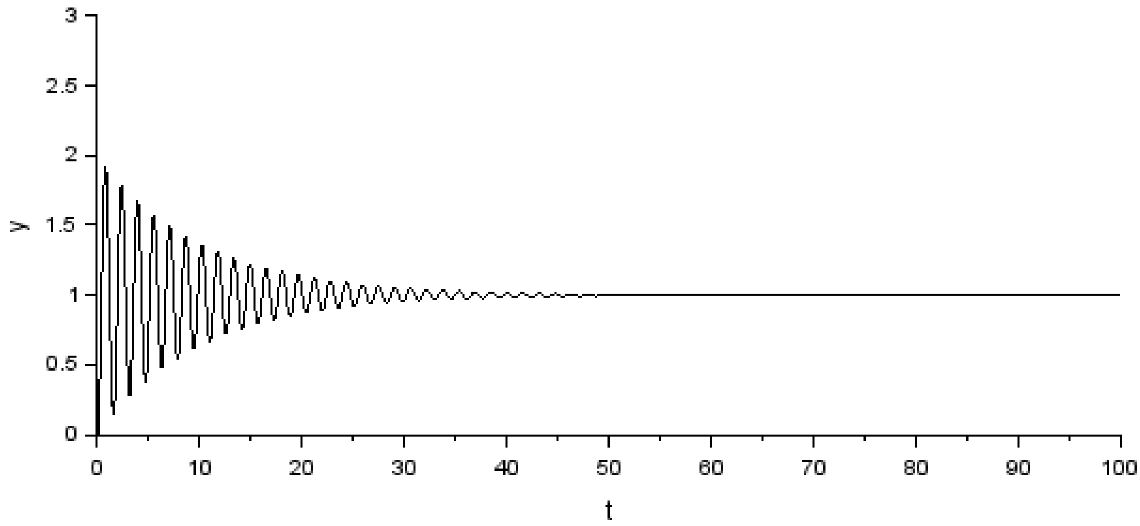


Рис. 2: Структурная схема моделирования механической системы масса-пружина с заданными условиями



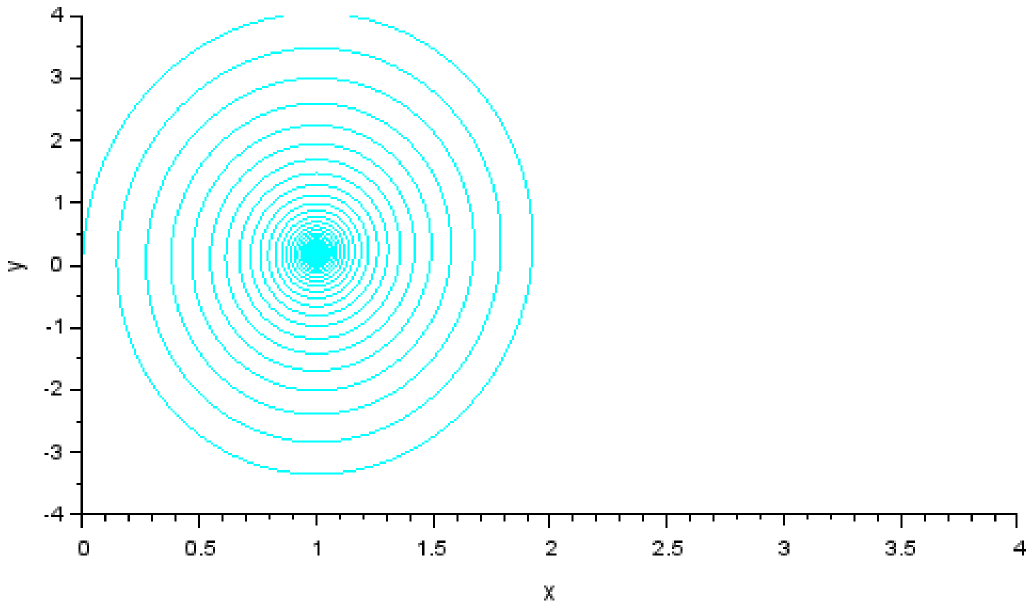


Рис. 3: График изменения положения груза во времени (сверху) и график зависимости скорости от положения системы (снизу)

2 Моделирование математического маятника

Дана система математического маятника, колебания которой описываются уравнением 2.

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{M}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2}$$

Задание 2.1

Перепишите уравнение в форму вход-состояние-выход.

Если мы допустим, что колебания достаточно малы, т. е. $\theta \to 0$, тогда можно представить $\sin\theta = \theta + o(\theta)$, где $o(\theta)$ - бесконечно малая функция, а значит уравнение 2 можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{M}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Откуда получим матрицы для представления в форме вход-состояние-выход:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{B}{M} & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Задание 2.2

Составьте структурную схему моделирования, опираясь на уравнение (1) и результат, полученный ранее

Задание 2.3

Выполните моделирование в пакете MATLAB/Simulink (Scilab). Исходные данные. Масса смещена от положения равновесия на 0.5 радиана в момент времени $t = 0$. Масса $m = 0.5$ кг, длина стержня $l = 0.6$ м а ускорение свободного падения - $9,81$ м / с2. Будем рассматривать два случая коэффициента трения:

1. $B = 0.05$ кг-с/м;
2. $B = 0.4$ кг-с/м;

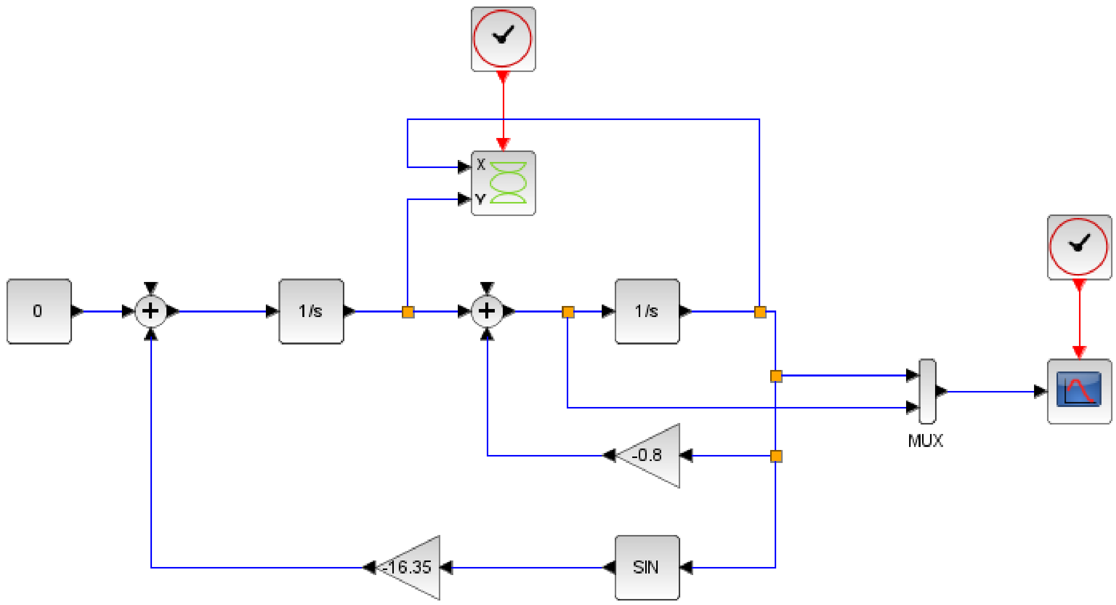


Рис. 4: Структурная схема моделирования механической системы математического маятника с заданными условиями

Для решения задач построим схему на рисунке 4. Проведём симуляцию и получим графики зависимостей, которые можно увидеть на рисунках 5 и 6.

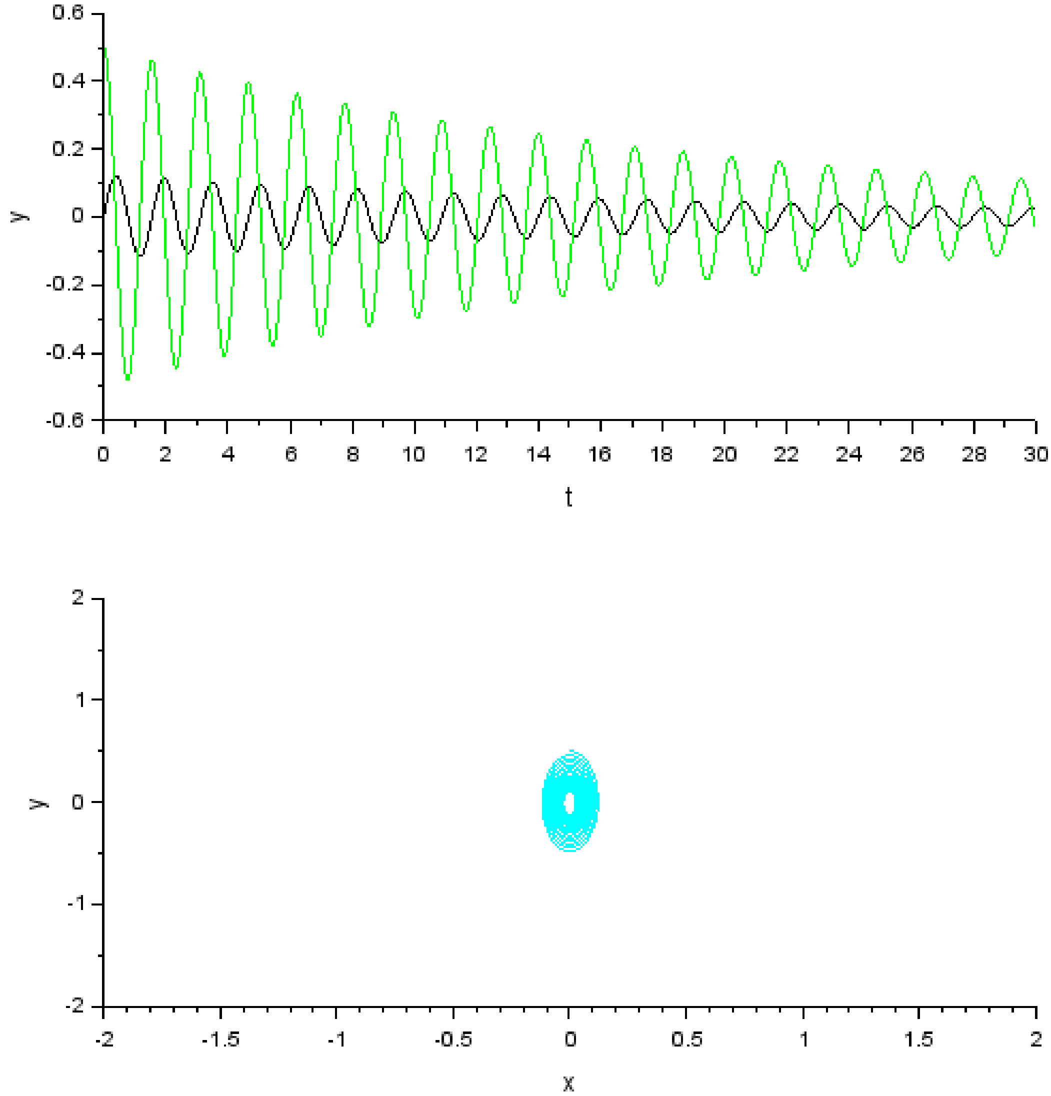


Рис. 5: Графики изменения угла и скорости со временем (сверху) и зависимости скорости от смещения (снизу) для $B = 0.05$ кг-с/м

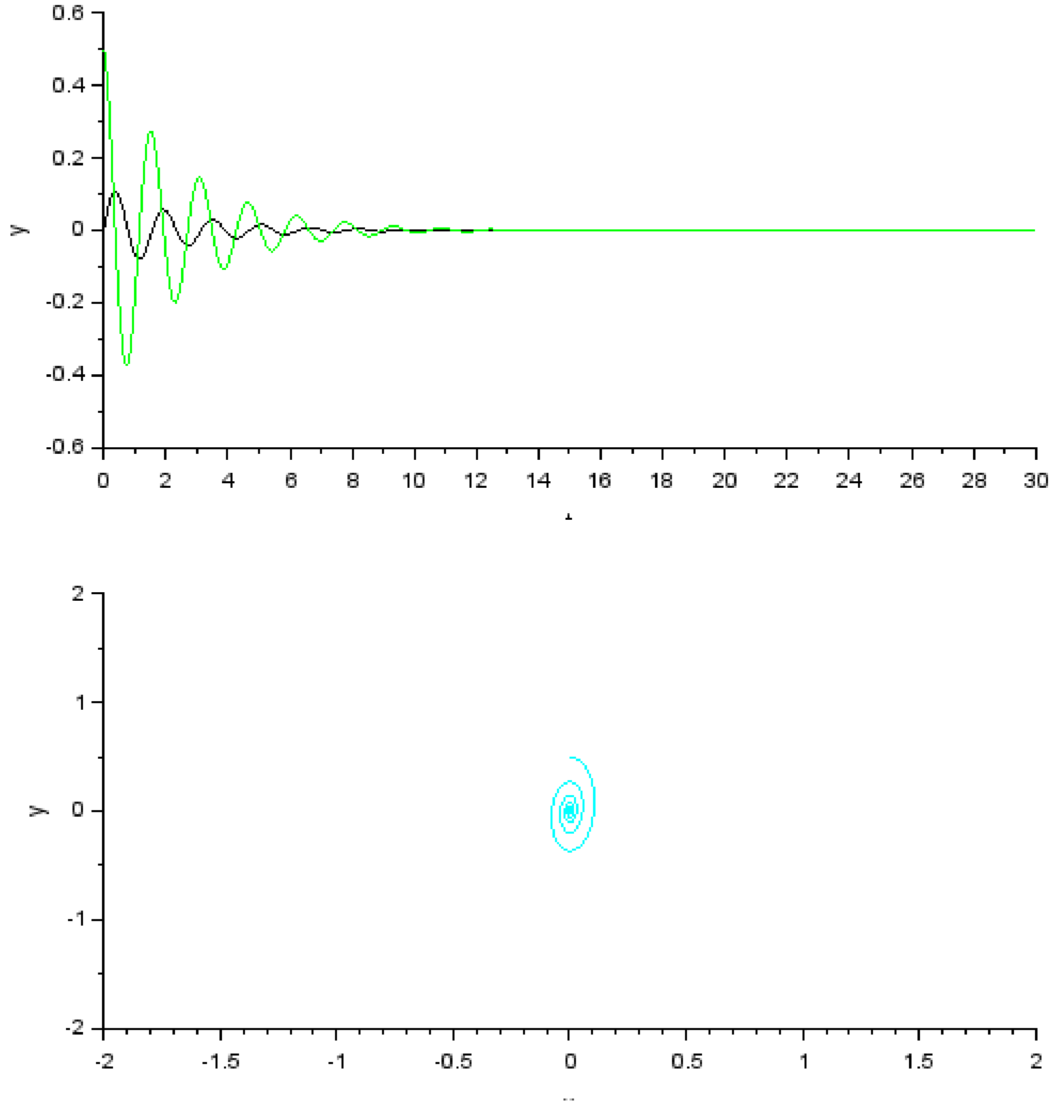


Рис. 6: Графики изменения угла и скорости со временем (сверху) и зависимости скорости от смещения (снизу) для $B = 0.4$ кг-с/м

3 Вывод

В данной лабораторной работе были исследованны две механические системы с коэффициентом демпфирования и коэффициентом трения. При вариации этих коэффициентов мы пришли к тому, что их увеличение ведёт к ускорению переходного процесса.