

Моделирование механических систем

Цель работы – ознакомиться с основами Simulink, среды графического моделирования, моделирования и создания прототипов, широко используемой в промышленности.

Задача – получить математическую модель для физической системы физической системы, получить структурную схему моделирования для результирующих дифференциальных уравнений, а также получить реакцию системы на единичный скачок и исследовать влияние демпфирования на реакцию системы.

Введение

Динамические характеристики физических систем получают за счет использования соответствующих физических законов. Многие динамические системы содержат элементы накопления энергии, такие как массы и пружины (в механических системах) или индукторы и конденсаторы (в электрической цепи). Принцип сохранения энергии запрещает мгновенные изменения переменных состояния. Следовательно система пройдет через некоторые переходные процессы, прежде чем вернется к своим установившимся значениям. Все физические системы в той или иной степени нелинейны. Чтобы выполнить моделирование системы с помощью линейных инвариантных во времени дифференциальных уравнений (для передаточной функции или представлений в пространстве состояний), систему необходимо сначала линеаризовать. В качестве альтернативы его рабочий диапазон может быть ограничен линейным диапазоном.

1 Моделирование механической системы масса-пружина

Рассмотрим простую механическую систему, состоящую из массы, пружины и демпинга, показанную на рис. 1 (слева). На рисунке M - масса, B - коэффициент демпфирования, K - жесткость пружины, $f(t)$ - внешняя сила, а $x(t)$ - перемещение массы. На движение массы влияют три силы (и инерция), а именно приложенная сила, демпфирующая сила и сила пружины, как показано на диаграмме свободного тела на рис. 1 (справа).

Применяя Второй закон Ньютона получим уравнение движения:

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx = f(t) \quad (1)$$

Задание 1.1 Применив преобразование Лапласа (с нулевыми начальными условиями) найдите передаточную функцию модели:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \dots \quad (2)$$

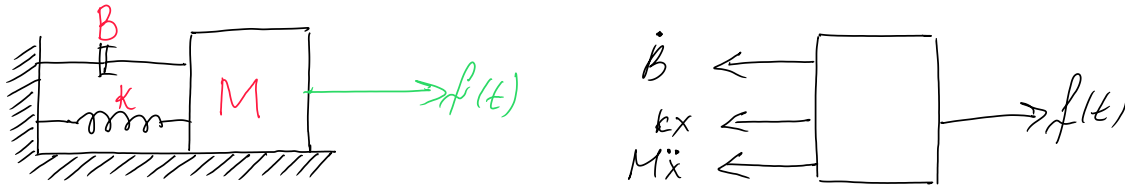


Рис. 1: Механическая система масса-пружина

Задание 1.2. Перепишите уравнение (1) в форму вход-состояние-выход. **Задание 1.3.** Составьте структурную схему моделирования, опираясь на уравнение (1) и результат, полученный в **Задании 2**.

Пояснения к выполнению моделирования (подсказки)

Задание 1.4. Для системы находящейся в состоянии покоя, в момент времени $t = 0$ прикладывается постоянная сила $f(t) = 32$ Н. Рассматриваемая система имеет массу 2 кг и жесткость пружины 32 кг / с². Коэффициент демпфирования B можно отрегулировать для получения желаемого отклика. Выполните моделирование в пакете MATLAB/Simulink (Scilab).

Для создания блок-схемы SIMULINK системы, полученной в **задании 1.3**, дважды щелкните значок SIMULINK на панели инструментов MATLAB. Щелкните значок создания новой модели на панели инструментов SIMULINK. Откроется безымянное окно для проектирования новой модели. Дважды щелкните значок библиотеки Simulink, это откроет девять библиотек-подсистем. Откройте исходную библиотеку и перетащите блок *Step Input* в открытое окно новой модели. Дважды щелкните на *Step Input*, чтобы открыть его диалоговое окно, установите для параметров *Step time* значение 0 и *Final value* равное 32. Найдите два *интегратора* в библиотеке *Continuous*, три блока *Gain* в одном блоке *Sum* из Math Library, один *Scope* и один *XY Graph* из библиотеки *Sink*, один блок *Mux* из библиотеки *Signals and Systems*. Откройте диалоговое окно *Sum block* и введите требуемые знаки суммирования. После того, как вы перетащили все необходимые блоки и поместили их в новое окно модели, соедините входящие и исходящие порты, чтобы создать имитационную модель. Назначение блока *Mux (Multiplex)* – объединение сигналов скорости и перемещения в составной сигнал, чтобы отобразить оба сигнала на одном осциллографе. *XYGraph* используется для отображения траектории состояния, то есть графика зависимости скорости от перемещения. Подключите $x_1(t)$ к первому входу и $x_2(t)$ ко второму входу *XY Graph*. Откройте диалоговое окно *XY Graph*, установите пределы оси x на 0.2, пределы оси y на ± 4 и время выборки на 0.01.

Установите блоки усиления на заданные значения и демпфирование.

Результаты моделирования:

1. представить график зависимости скорости от положения системы;
2. представить график изменения положения груза во времени.

2 Моделирование математического маятника

Рассмотрим простой маятник, показанный на рис. 2, где на шарнире висит груз массой M кг. Жесткий стержень длиной l метр. Стержень достаточно легкий, поэтому его массой можно пренебречь. Стержень смещен на угол θ радиан от положения равновесия. Предположим, что в системе действует вязкое трение с коэффициентом демпфирования B кг-с/м. Тангенциальная скорость массы равна $l\dot{\theta}$. Тангенциальные силы, действующие для восстановления равновесия маятника, равны

$$F_T = -mg \sin \theta - Bl\dot{\theta}, \quad (3)$$

где g – ускорение свободного падения.

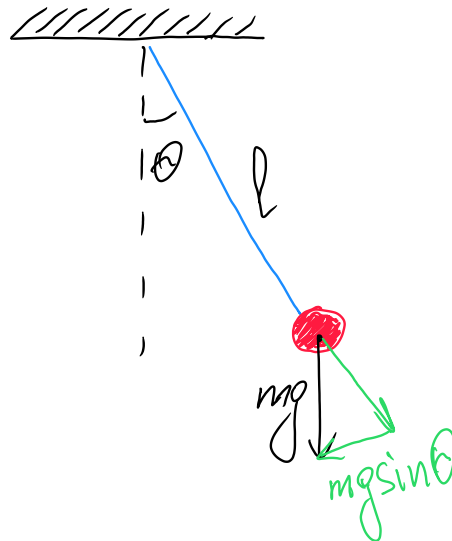


Рис. 2: Механическая система: математический маятник

Аналогично, Разделу 1, используя закон Ньютона, получим

$$F_T = ml\ddot{\theta}. \quad (4)$$

Объединив выражения (3)–(4) нетрудно получить уравнение движения маятника

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0. \quad (5)$$

Заметим, что выражение (5) является нелинейным в силу слагаемого $\sin(\theta)$.

Задание 2.1. Перепишите уравнение (5) в форму вход-состояние-выход. **Задание 2.2.** Составьте структурную схему моделирования, опираясь на уравнение (1) и результат, полученный ранее.

Задание 2.3. Выполните моделирование в пакете MATLAB/Simulink (Scilab). *Исходные данные.* Масса смещена от положения равновесия на 0.5 радиана в момент времени $t = 0$. Масса $m = 0.5$ кг, длина стержня $l = 0.6$ м а ускорение свободного падения - 9,81 м / с². Будем рассматривать два случая коэффициента трения:

1. $B = 0.05$ кг-с/м;
2. $B = 0.4$ кг-с/м;

Пояснения к выполнению моделирования (подсказки)

Создайте блок-схему SIMULINK системы, показанной на рис. 2. Перетащите все необходимые блоки и поместите их в новое окно модели. Для нелинейного слагаемого воспользуйтесь блоком *Fcn* из библиотеки *Function & Tables*. Используйте u для имени входной переменной, например $16 \sin(u)$. Задайте коэффициент усиления B/m и подключите все блоки, чтобы создать имитационную модель, полученную при выполнении *Задания 2.2*. Откройте диалоговое окно второго интегратора и установите начальное условие 0.5 для углового смещения. Начальная скорость равна нулю. Поэтому установите параметр Начальное условие для первого интегратора на 0. Поместите один осциллограф (*Scope*) для отображения угла θ , а другой осциллограф - для отображения скорости. Используйте *XYGraph* для отображения траектории состояния, то есть график зависимости скорости от смещения. Откройте диалоговое окно *XY Graph* и установите ограничения осей абсцисс значениями -5, 0,5, ось Y ограничена значениями -2, 2, а время выборки - 0,01.