ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
Моделирование механических систем

Вариант 11
Машуров Владимир БПМ-19-3

13 ноября 2021 г.

Содержание

1 Моделирование механической системы масса-пружина

Дана система:

$$M\dot{x} + B\dot{x} + kx = f(t) \tag{1}$$

Где $f(t)$ - входное воздействие, $x(t)$ - выходное воздействие.

Задание 1.1

Применив преобразование Лапласа (с нулевыми начальными условиями) найдите передаточную функцию модели: $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$

Найдём соотношение из которого получим G(t):

$$M\dot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \frac{d}{dt} = \lambda$$

$$M\lambda^2 x(t) + B\lambda x(t) + kx(t) = f(t)$$

$$(M\lambda^2 + B\lambda + k)x(t) = f(t)$$

$$\frac{x(t)}{f(t)} = \frac{1}{M\lambda^2 + B\lambda + k}$$

Отсюда

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \mathcal{L}\left(\frac{x(t)}{f(t)}\right) = \frac{\mathcal{L}(\tilde{x}(t))}{\mathcal{L}(\tilde{f}(t))} =$$

$$= \frac{\mathcal{L}(1)}{\mathcal{L}(M\lambda^2 + B\lambda + k)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{M\lambda^2 + B\lambda + k} = \frac{1}{M\lambda^2 + B\lambda + k}$$

Задание 1.2

Перепишите уравнение 1 в форму вход-состояние-выход.

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Разделим всё на M и заменим переменные следующим образом, для удобства: $f = U$ и $x = y$. Получим

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}U$$

Составим систему:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} + \frac{B}{M}y \end{cases}$$

Продифференцируем оба равенства по t

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 - \frac{B}{M}y \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} = \frac{1}{M}U - \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}U - \frac{k}{M}x_1 \end{cases}$$

Мы пришли к форме вход-состояние-выход. Обратим замену переменных:

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 = \pi_2 - \frac{B}{M}x \\ \dot{\pi}_2 = \frac{1}{M}f - \frac{k}{M}\pi_1 \end{cases}$$

Задание 1.3

Составьте структурную схему моделирования, опираясь на уравнение 1 и результат, полученный в Задании 2.

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad | : M$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{M}\dot{x}(t) + \frac{k}{M}x(t) = \frac{1}{M}f(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t) - \frac{B}{M}\dot{x}(t) \quad |\frac{d}{dt} = \lambda$$

$$\lambda^2 x(t) = \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t) - \frac{B}{M}\lambda x(t) \quad | : \lambda^2$$

$$x(t) = \frac{1}{\lambda^2}\Big(\frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t)\Big) - \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{B}{M}x(t)\Big) \quad | : \lambda^2$$

Из полученного выражения можно построить структурную схему, изображенную на рисунке 1.

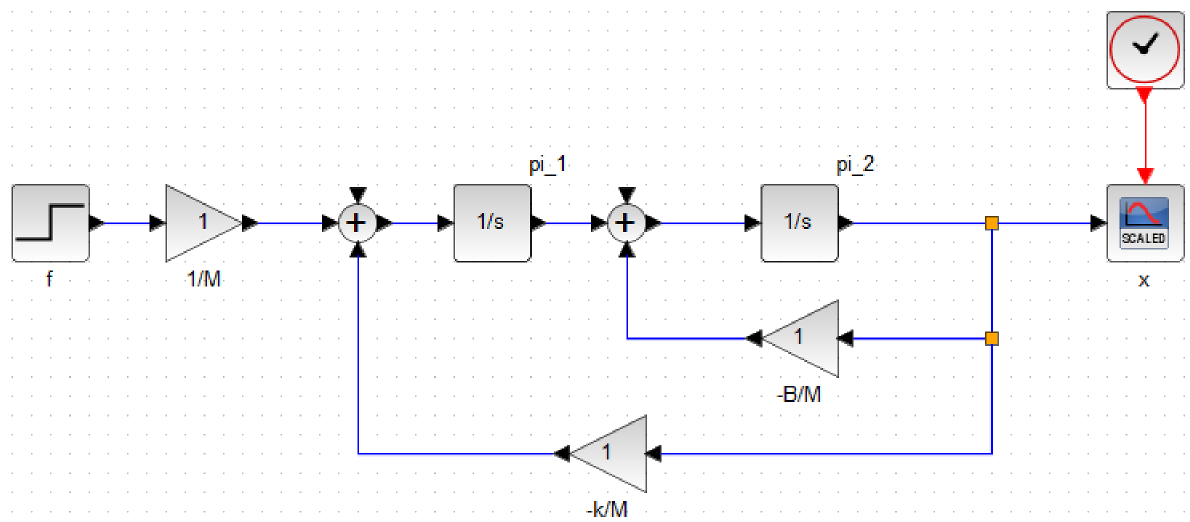

Рис. 1: Структурная схема моделирования механической системы масса-пружина

2 Исследование модели вход-состояние-выход