

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

## Моделирование механических систем

Вариант 11

Машуров Владимир БПМ-19-3

15 ноября 2021 г.

# Содержание

1	Моделирование механической системы масса-пружина	1
2	Моделирование математического маятника	4

## 1 Моделирование механической системы масса-пружина

Дана система:

$$M\dot{x} + B\dot{x} + kx = f(t) \quad (1)$$

Где  $f(t)$  - входное воздействие,  $x(t)$  - выходное воздействие.

### Задание 1.1

Применив преобразование Лапласа (с нулевыми начальными условиями) найдите передаточную функцию модели:  $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$

Найдём соотношение из которого получим  $G(t)$ :

$$M\dot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \frac{d}{dt} = \lambda$$

$$M\lambda^2 x(t) + B\lambda x(t) + kx(t) = f(t)$$

$$(M\lambda^2 + B\lambda + k)x(t) = f(t)$$

$$\frac{x(t)}{f(t)} = \frac{1}{M\lambda^2 + B\lambda + k}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{X(s)}{F(s)} = \mathcal{L}\left(\frac{x(t)}{f(t)}\right) = \frac{\mathcal{L}(\tilde{x}(t))}{\mathcal{L}(\tilde{f}(t))} = \\ &= \frac{\mathcal{L}(1)}{\mathcal{L}(M\lambda^2 + B\lambda + k)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{M\lambda^2 + B\lambda + k} = \frac{1}{M\lambda^2 + B\lambda + k} \end{aligned}$$

### Задание 1.2

Перепишите уравнение 1 в форму вход-состояние-выход.

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Разделим всё на  $M$  и заменим переменные следующим образом, для удобства:  $f = U$  и  $x = y$ . Получим

$$\ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} + \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}U$$

Составим систему:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} + \frac{B}{M}y \end{cases}$$

Продифференцируем оба равенства по  $t$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 - \frac{B}{M}y \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} + \frac{B}{M}\dot{y} = \frac{1}{M}U - \frac{k}{M}y = \frac{1}{M}U - \frac{k}{M}x_1 \end{cases}$$

Мы пришли к форме вход-состояние-выход. Обратим замену переменных:

$$\begin{cases} \dot{\pi}_1 = \pi_2 - \frac{B}{M}x \\ \dot{\pi}_2 = \frac{1}{M}f - \frac{k}{M}\pi_1 \end{cases}$$

Легко заметить, что:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k}{M} & 1 \\ -\frac{B}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### Задание 1.3

Составьте структурную схему моделирования, опираясь на уравнение 1 и результат, полученный в Задании 2.

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad | : M$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{M}\dot{x}(t) + \frac{k}{M}x(t) = \frac{1}{M}f(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t) - \frac{B}{M}\dot{x}(t) \quad | \frac{d}{dt} = \lambda$$

$$\lambda^2 x(t) = \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t) - \frac{B}{M}\lambda x(t) \quad | : \lambda^2$$

$$x(t) = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{M}f(t) - \frac{k}{M}x(t) \right) - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{B}{M}x(t) \right)$$

Из полученного выражения можно построить структурную схему, изображенную на рисунке 1.

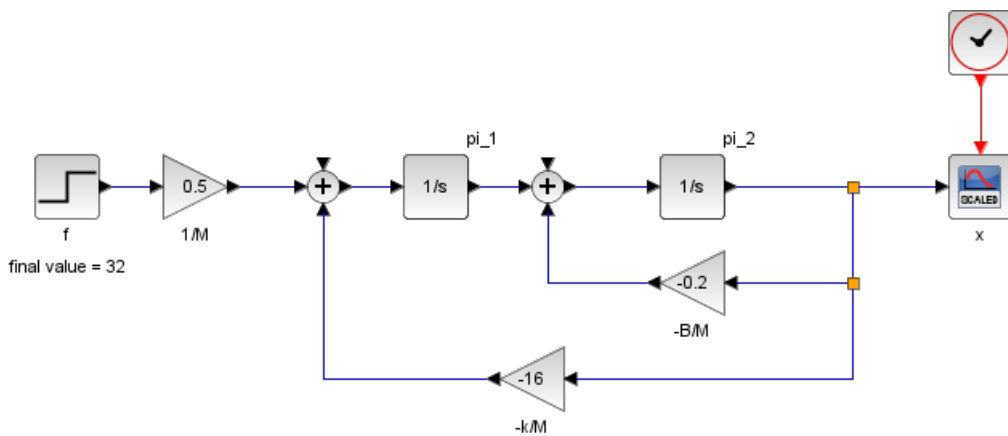


Рис. 1: Структурная схема моделирования механической системы масса-пружина

### Задание 1.4

Для системы находящейся в состоянии покоя, в момент времени  $t = 0$  прикладывается

постоянная сила  $f(t) = 32$  Н. Рассматриваемая система имеет массу 2 кг и жесткость пружины 32 кг / с<sup>2</sup>. Коэффициент демпфирования В можно отрегулировать для получения желаемого отклика. Выполните моделирование в пакете MATLAB/Simulink (Scilab).

Получим схему на рисунке 2 и графики на рисунке 3.

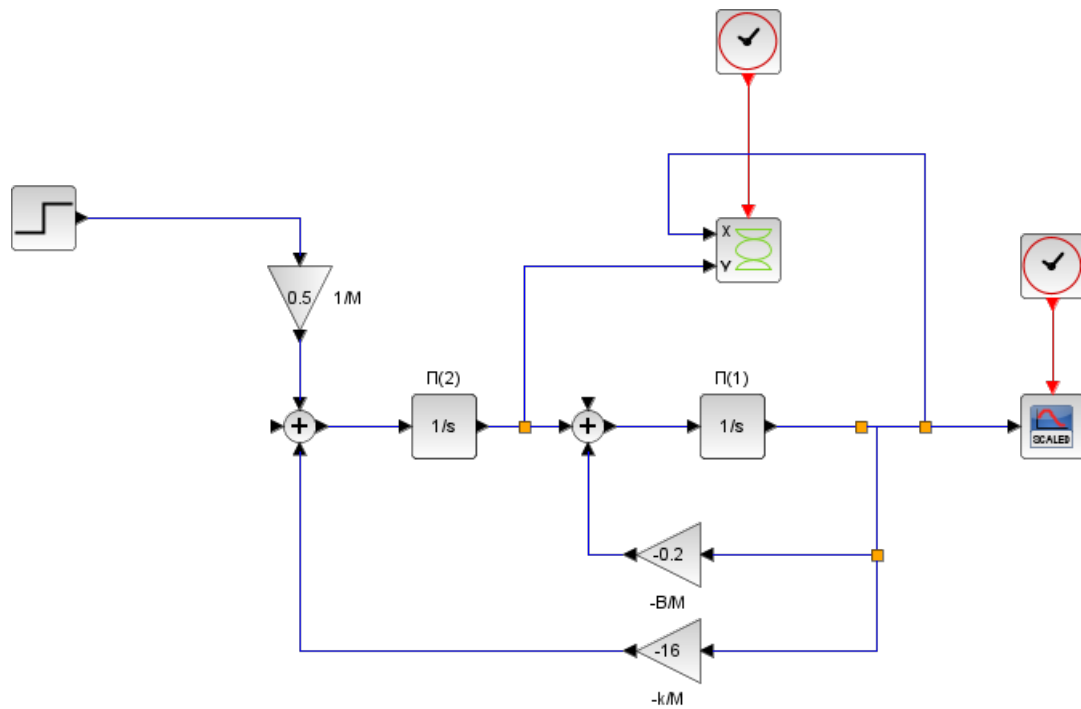


Рис. 2: Структурная схема моделирования механической системы масса-пружина с заданными условиями

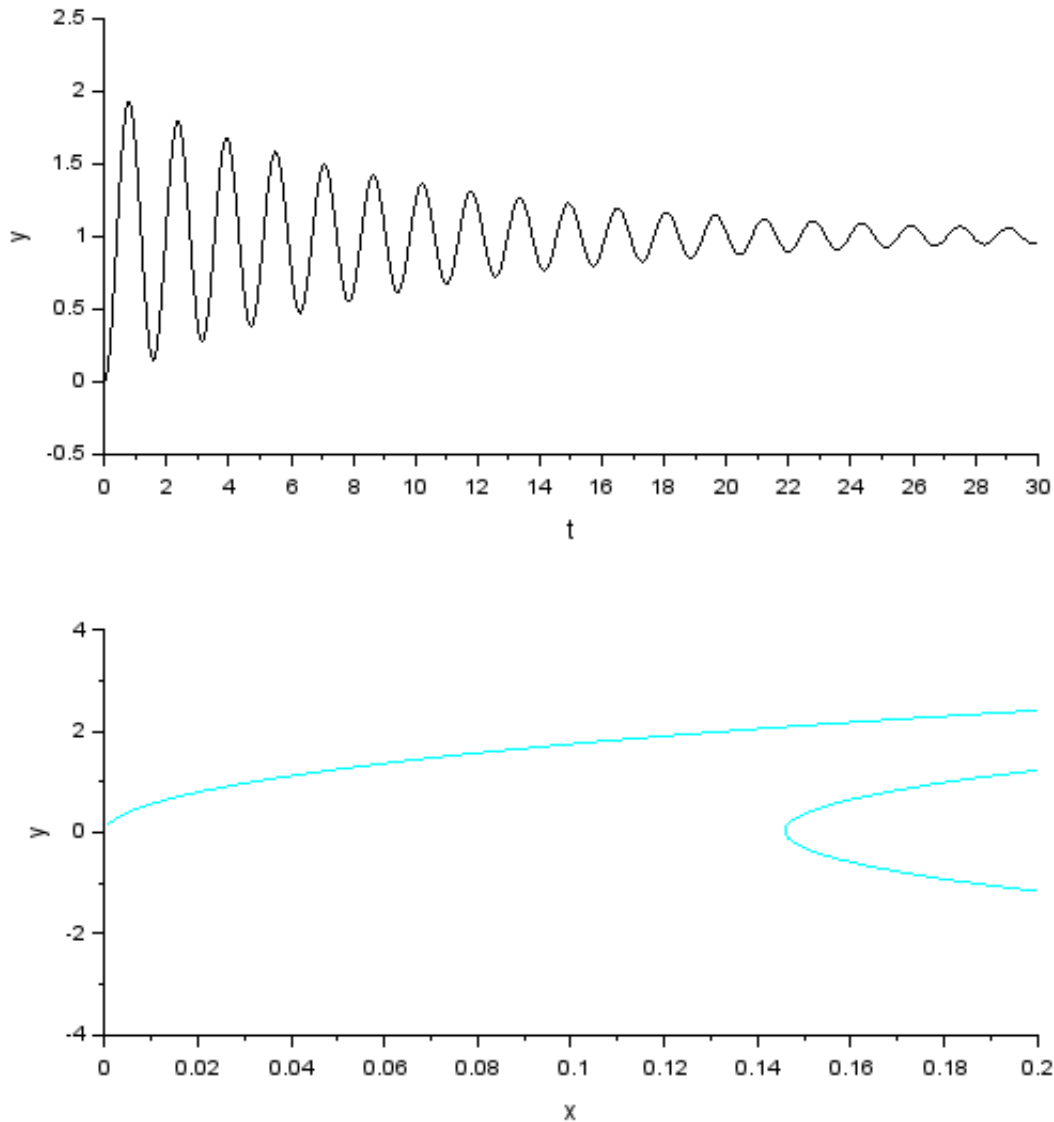


Рис. 3: График изменения положения груза во времени (сверху) и график зависимости скорости от положения системы (снизу)

## 2 Моделирование математического маятника

Дана система математического маятника, колебания которой описываются уравнением 2.

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{M}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (2)$$

### Задание 2.1

Перепишите уравнение в форму вход-состояние-выход.

Если мы допустим, что колебания достаточно малы, т. е.  $\theta \rightarrow 0$ , тогда можно представить  $\sin\theta = \theta + o(\theta)$ , где  $o(\theta)$  - бесконечно малая функция, а значит уравнение 2 можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{M}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Откуда получим матрицы для представления в форме вход-состояние-выход:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B}{M} & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### Задание 2.2

Составьте структурную схему моделирования, опираясь на уравнение (1) и результат, полученный ранее

### Задание 2.3

Выполните моделирование в пакете MATLAB/Simulink (Scilab). Исходные данные. Масса смещена от положения равновесия на 0.5 радиана в момент времени  $t = 0$ . Масса  $m = 0.5$  кг, длина стержня  $l = 0.6$  м а ускорение свободного падения -  $9,81$  м / с<sup>2</sup>. Будем рассматривать два случая коэффициента трения:

1.  $B = 0.05$  кг-с/м;
2.  $B = 0.4$  кг-с/м;

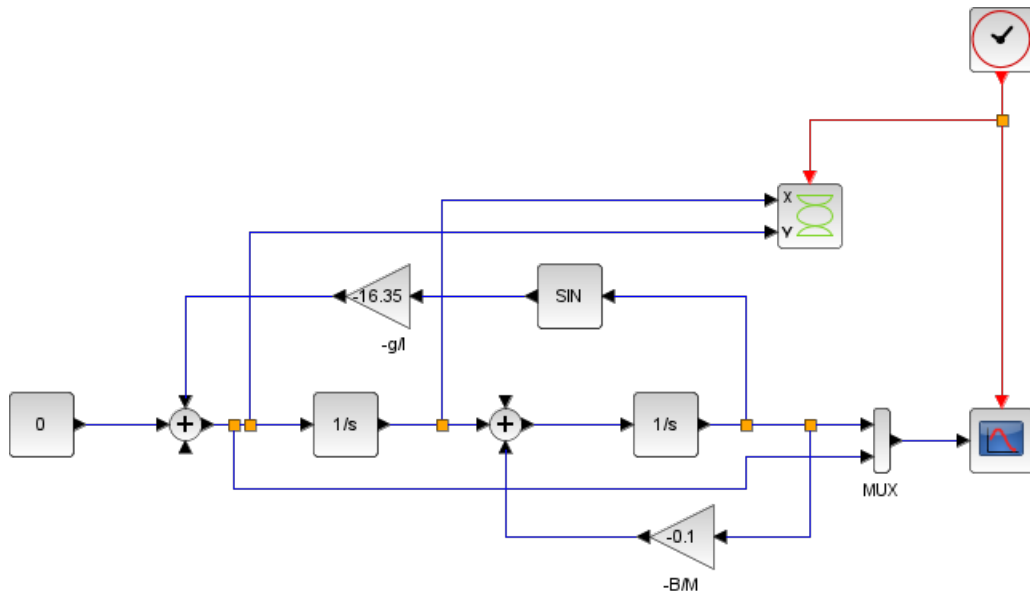


Рис. 4: Структурная схема моделирования механической системы математического маятника с заданными условиями

Для решения задач построим схему на рисунке 4. Проведём симуляцию и получим графики зависимостей, которые можно увидеть на рисунках 5 и 6.

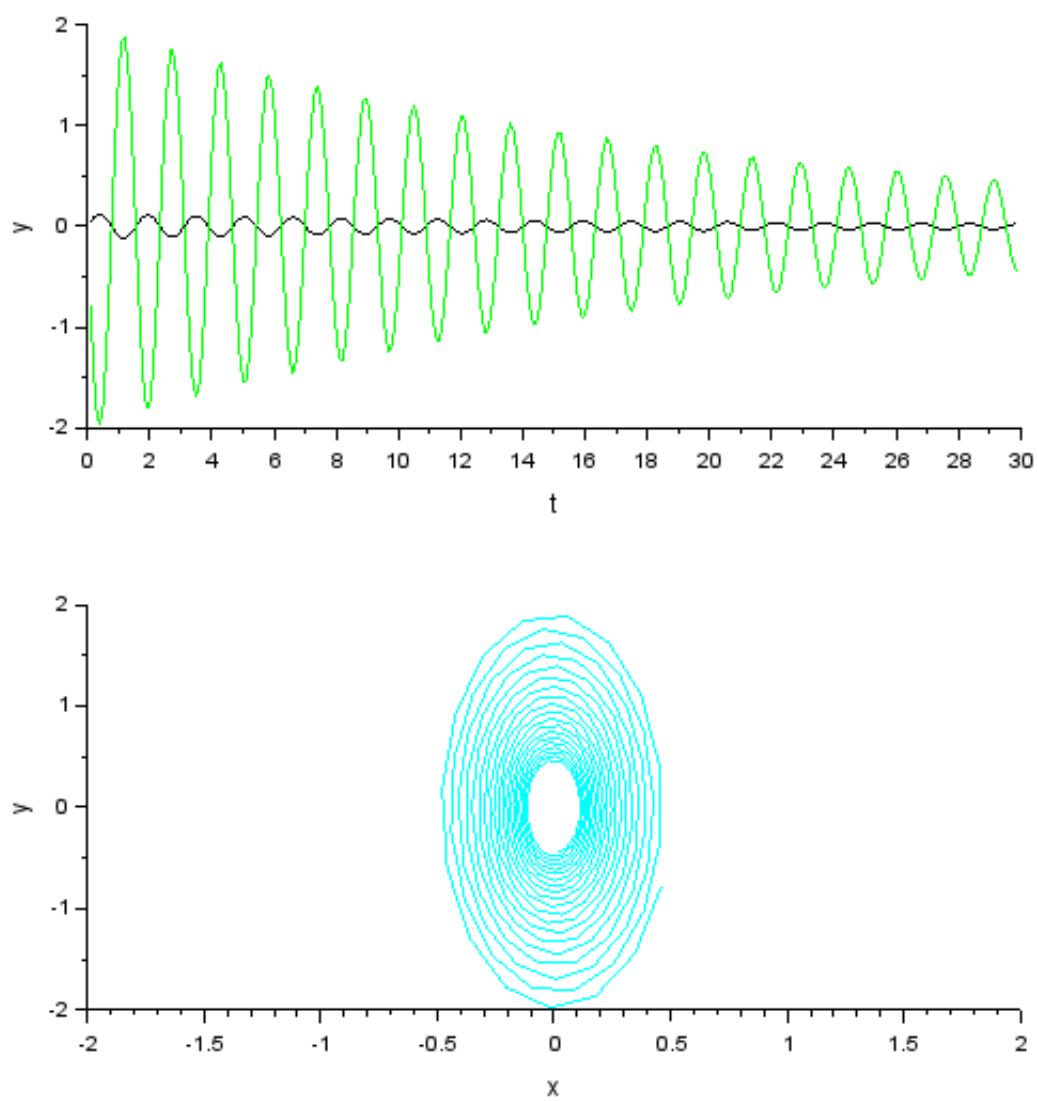


Рис. 5: Графики изменения угла и скорости со временем (сверху) и зависимости скорости от смещения (снизу) для  $B = 0.05$  кг·с/м

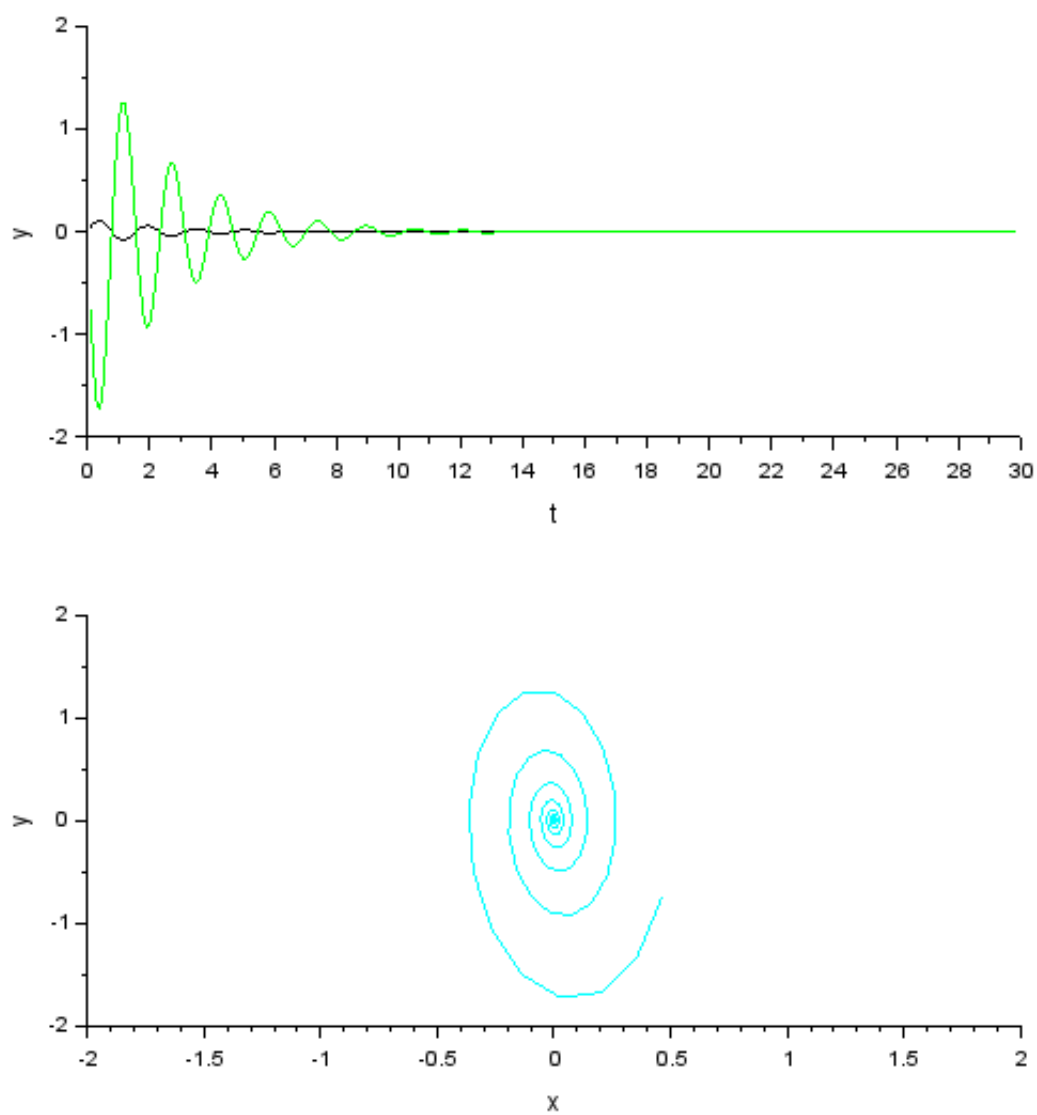


Рис. 6: Графики изменения угла и скорости со временем (сверху) и зависимости скорости от смещения (снизу) для  $B = 0.4$  кг-с/м