Introductory Macroeconomics for Engineers

Martin A. Valdez

IE 1

Exercice 11

Considérez le modèle de Solow que nous avons étudié en classe, en termes de variables par travailleur. Les dynamiques du modèle sont données par l'équation d'accumulation du capital :

$$k_{t+1} = sAk_t^\alpha + (1-\delta)k_t$$

Cela définit le niveau de capital par travailleur à l'instant $t+1$ en fonction du niveau de capital par travailleur à l'instant t. Définir $h(k_t) = sAk_t^\alpha + (1-\delta)k_t$.

1. Montrez que $h'(k_t) \to \infty$ lorsque $k_t \to 0$ par la droite et que $h'(k_t) \to (1-\delta)$ lorsque $k_t \to \infty$.

   On dit qu'une fonction $f(x)$ satisfait les conditions d'Inada si :

   $$\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

   Nous venons de prouver que sAk_t^α satisfait les conditions d'Inada.

2. Tracez la courbe $k_{t+1} = k_t$ sur un graphique avec k_t sur l'axe horizontal et k_{t+1} sur l'axe vertical. Quelle est la pente de cette courbe très simple ?

3. Tracez la courbe $k_{t+1} = h(k_t)$ sur le même graphique. Quelle est la pente de cette courbe lorsque $k_t \to 0$ par la droite ? Quelle est la pente de cette courbe lorsque $k_t \to \infty$?

4. Résolvez pour les points où les deux courbes se croisent. Que représentent ces points en termes du modèle de Solow ? Lequel est l'état stationnaire non trivial ?

Exercice 12

L'état stationnaire, ou l'équilibre, du modèle est caractérisé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} k^* &= \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \\ y^* &= Ak^{*\alpha}, \\ c^* &= (1-s)Ak^{*\alpha}, \\ i^* &= sAk^{*\alpha}, \\ R^* &= \alpha Ak^{*\alpha-1}, \\ w^* &= (1-\alpha)Ak^{*\alpha}. \end{aligned}$$

1. Exprimez les valeurs d'équilibre de y^*, R^* et w^* en termes des paramètres du modèle.

2. Supposons que l'économie soit initialement à l'état stationnaire, donc $k_0 = k^*$. Montrez que le taux de croissance de la production et le taux de croissance du capital sont nuls. Indice : Utilisez l'approximation logarithmique des taux de croissance.

3. Supposons que l'économie soit initialement à l'état stationnaire, donc $k_0 = k^*$. Pendant cette période, l'économie subit un choc de la productivité totale des facteurs, $A \to A' > A$. Tracez la nouvelle courbe $k_{t+1} = h(k_t)$ sur le même graphique que l'exercice précédent, en utilisant une nouvelle couleur. Que se passe-t-il au niveau d'équilibre du capital par travailleur ? Que se passe-t-il aux taux de croissance de la production et du capital par travailleur ? Reviennent-ils à un moment donné à zéro ?

4. Supposons que l'économie soit initialement à l'état stationnaire, donc $k_0 = k^*$. Rappelez-vous que le niveau de consommation à l'état stationnaire est donné par $c^* = (1-s)Ak^{*\alpha}$, ce qui peut aussi être écrit $c^* = (1-s)y^*$. Utilisez le calcul pour énoncer les conditions pour le niveau d'épargne qui maximise la consommation à l'état stationnaire. Interprétez les conditions - quelles sont les forces concurrentes qui déterminent le niveau optimal d'épargne ?

Exercice 13

Nous ajoutons maintenant le progrès technologique et la croissance démographique au modèle de Solow. Supposons que la fonction de production soit donnée par :

$$Y_t = AF(K_t, N_t) = AK_t^{\alpha}(Z_tN_t)^{1-\alpha}$$

où Z_t est le progrès technologique augmentant le travail et N_t est la population. Nous continuons à considérer A comme une constante. Rappelez-vous que le modèle de Solow est donné par les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t, \\
Y_t &= C_t + I_t, \\
C_t &= (1-s)Y_t, \\
I_t &= sY_t, \\
R_t &= F_K(K_t, N_t), \\
w_t &= F_N(K_t, N_t)
\end{aligned}
$$

Supposons que la population croisse à un taux constant n, donc $N_{t+1} = (1+n)N_t$, et que le progrès technologique croisse à un taux constant z, donc $Z_{t+1} = (1+z)Z_t$. Définir les variables par travailleur en termes de *travail effectif* :

$$\hat{k}_t = \frac{K_t}{Z_t N_t}$$

1. Montrez que $\hat{y}_t = \frac{Y_t}{Z_t N_t} = A\hat{k}_t^{\ \alpha}$

2. Montrez que l'équation d'accumulation du capital peut s'écrire :

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+z)(1+n)}[sA\hat{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\hat{k}_t]$$

3. Tracez la courbe $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t$ sur un graphique avec $\hat{k}_t$ sur l'axe horizontal et $\hat{k}_{t+1}$ sur l'axe vertical, ainsi que la courbe $\hat{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+z)(1+n)}[sA\hat{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\hat{k}_t]$ sur le même graphique.

4. Quel est le taux de croissance du capital et du capital par travailleur dans le nouveau modèle ? Utilisez l'état stationnaire pour trouver ce taux de croissance, ainsi que la définition du taux de croissance. Indice : rappelez-vous que $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t$ à l'état stationnaire, et que $\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + g_K$.