

EQUATION DE POISSON ET TRAITEMENT D'IMAGE

GROUPE DE TRAVAIL THÉMATIQUE

4TQMS801S

---

## **Equation de Poisson et traitement d'image**

---

Virginie MONTALIBET

Sébastien Eyzat

May 13, 2020



# Contents

<b>1 Présentation du problème</b>	<b>2</b>
1.1 Problème mathématique associé . . . . .	3
1.2 Résolution et équivalence avec l'équation de Poisson . . . . .	4
<b>2 Résolution</b>	<b>5</b>
2.0.1 Qu'est-ce qu'une image . . . . .	5
2.1 Discrétisation [5] . . . . .	6
2.1.1 Notations . . . . .	6
2.2 Méthode des différences finies . . . . .	6
2.2.1 Résolution du système . . . . .	8
2.3 Exemple . . . . .	9
2.4 Méthode de Fourier [5] . . . . .	11
2.4.1 Rappel et définitions des opérateurs . . . . .	11
2.4.2 Résolution avec la méthode Fourier . . . . .	12
2.5 Méthode de Douglas [1] . . . . .	13
2.5.1 D'un problème avec contraintes... . . . . .	13
2.5.2 ... À un problème sans contraintes . . . . .	14
2.5.3 La convexité . . . . .	14
2.5.4 L'algorithme de Douglas . . . . .	15
2.5.5 Calcul des opérateurs proximaux . . . . .	15
2.5.6 Convergence de l'algorithme vers la solution . . . . .	16
2.5.7 Temps et coût de l'algorithme . . . . .	17
2.6 Tableau comparatif . . . . .	17
<b>3 Amélioration du collage</b>	<b>17</b>
<b>4 Résultats obtenus</b>	<b>18</b>
<b>5 Passage en couleurs</b>	<b>22</b>
5.1 De l'image en niveaux de gris... . . . . .	22
<b>6 Comparaison</b>	<b>23</b>
6.1 Différences de résultat . . . . .	23
6.2 Différence de temps . . . . .	23
<b>7 Implémentation</b>	<b>24</b>
7.1 Interface . . . . .	24
7.2 Organisation du code . . . . .	25
<b>8 Tableau Récapitulatif</b>	<b>27</b>
<b>9 Application à la vidéo</b>	<b>27</b>
<b>10 Conclusion</b>	<b>28</b>

# 1 Présentation du problème

Le traitement d'images est un ensemble de méthodes permettant d'étudier et de transformer une ou plusieurs images à l'aide de moyens mathématiques et numériques. Le principe du traitement d'images consiste à extraire certaines informations de celles-ci, afin de les étudier ou de les modifier. Il est utilisé dans beaucoup d'applications telles que l'amélioration du contraste, l'application d'un filtre (flou, lissage, changement de couleurs), ou encore les détections et identifications d'objets par exemple.

Dans ce rapport, nous nous intéresserons à l'incrustation d'images. À partir de deux images, comment sélectionner une partie de la première et l'incruster de la manière la plus naturelle possible dans la seconde ?

Afin d'éclaircir nos propos et d'identifier les problèmes à résoudre, voici un exemple de ce que nous souhaitons faire. À l'aide des deux images présentées ci-dessous, l'image T(arget) et l'image S(ource) :



Figure 1: Image T



Figure 2: Image S

L'objectif est d'incruster toute ou partie de l'image S dans l'image T. En terme de manipulations, cela consiste à faire un mélange ou mixage des deux images, ou encore à effectuer un clonage lisse de la seconde image dans la première. Le résultat attendu pour une insertion "réussie" est un résultat comme celui présenté ci-dessous :



Figure 3: Image finale attendue

Cette image a été obtenue à l'aide d'un de nos algorithmes, vous retrouverez les différents collages à la fin de ce rapport.

**Remarques** Ce résultat semble naturel, les frontières entre l'image collée et l'arrière-plan sont très peu visibles et ont été estompées, l'ours présent dans la première image n'a pas été déformé et semble faire partie de la photo

initiale. Mais comment obtenir un tel résultat ?

En reprenant les deux images initiales séparées, T et S, et en effectuant un simple copier/coller voici l'image que nous devrions obtenir :



Figure 4: Simple copier/coller

Ici certains pixels de T sont écrasés par ceux de l'image qui a été ajoutée. Ce résultat n'est bien entendu pas utilisable et bien loin de l'image finale attendue. Le découpage et le collage entre l'arrière-plan et l'image "objet" sont beaucoup trop visibles, les couleurs ne sont pas les mêmes et incohérentes. Le résultat doit être beaucoup plus naturel, comme écrit plus haut. Cette simple manipulation n'est donc pas suffisante pour effectuer le clonage cohérent d'une image dans une autre.

Il semble évident de vouloir modifier l'image finale obtenue ci-dessus afin qu'elle paraisse la plus naturelle possible. Nous verrons tout au long de ce rapport, quels sont les changements à effectuer et comment la résolution d'une équation aux dérivées partielles, l'équation de Poisson, permet d'obtenir un bien meilleur résultat. Nous implémenterons trois algorithmes permettant de résoudre le problème posé, et comparerons les résultats obtenus à l'aide de ceux-ci.

## 1.1 Problème mathématique associé

Comme écrit plus haut il faut apporter des modifications au précédent collage afin qu'il corresponde au mieux à nos attentes. En réalité nous ne souhaitons pas modifier l'entièreté de l'image mais seulement une "sous-image" correspondant à l'endroit du collage. Pour ce faire, considérons I la partie de l'image finale à modifier. Il est ainsi possible de représenter le problème sous forme schématique.



Avec :

- T, l'image "Target", l'image destination, l'image sur laquelle s'effectuera le collage, l'arrière-plan.
- S, l'image "Source", l'image qui sera collée.

- $\Omega$ , le domaine dans lequel se trouve l'inconnue.
- $\partial\Omega$ , la frontière de  $\Omega$ .
- $I$ , l'inconnue, la partie de l'image que nous ne connaissons pas et que nous voulons trouver, elle se situe dans  $\Omega \cup \partial\Omega$

Nous souhaitons donc trouver une fonction  $I$  qui satisfasse un certain nombre de critères afin de correspondre au résultat attendu. Cette fonction représente la partie modifiée de l'image. Mais quelles sont les conditions qu'elle doit remplir pour que le rendu soit le meilleur possible? Cette nouvelle image  $I$  doit-elle être plus proche de l'image collée  $S$ , ou de l'image d'arrière-plan  $T$  ?

Pour que l'image obtenue s'incruste parfaitement, il faut que celle-ci dénature le moins possible les deux images sélectionnées au départ. En effet, les détails de l'image que nous voulons coller,  $S$ , doivent être retrouvés dans l'image finale, il ne faut donc pas modifier les variations qu'elle ( $S$ ) pourrait posséder comme par exemple, les contours ou les objets lui appartenant. L'ours à coller, doit être présent dans le collage final. Il faut donc être capable de retrouver dans l'image  $I$ , les informations présentes dans l'image initiale  $S$ . Par conséquent, il faut que les variations présentes dans  $I$  soient presque identiques à celles de  $S$ .

Rappelons qu'en traitement d'image, les variations d'une image peuvent être obtenues en calculant son gradient. En effet, une variation peut être représentée comme un changement "brutal" d'intensité entre deux pixels. Le gradient d'une image étant numériquement obtenu en effectuant la différence entre des pixels voisins : si celle-ci est élevée alors il y a un fort changement d'intensité entre eux (par exemple un pixel noir et un autre blanc) et donc probablement la présence d'un contour. Par conséquent un gradient élevé détecte la présence de fortes variations. Au contraire, en l'absence de variations, le gradient est presque nul. Son calcul permet entre autre de détecter les contours d'une image.

Ici, il est nécessaire que les contours et objets de l'image finale soient très proches de ceux de l'image à coller. Mathématiquement, la fonction  $I$  possède donc un gradient très proche (voire identique) à celui de l'image initiale  $S$ . Nous cherchons donc :

$$\min \iint_{\Omega} \|\nabla I_{x,y} - \nabla S_{x,y}\|^2 dx dy$$

Mais les "frontières" entre l'image collée et l'image d'arrière-plan  $T$  ne doivent pas non plus être visibles, il faut donc que les pixels se situant sur cette partie là, i.e  $\partial\Omega$ , soient le plus proches possible de  $T$ . En d'autres termes, les pixels de l'image finale sur le bord, coïncident avec ceux de l'image initiale  $T$ , au même endroit. La fonction  $I$  doit donc vérifier:

$$I_{(x,y)} = T_{x,y} \text{ sur } \partial\Omega$$

Répondre au problème implique donc de résoudre un problème variationnel classique auquel des conditions sur le bord de Dirichlet sont ajoutées. Voici donc le nouveau problème à résoudre :

$$\begin{cases} \min \iint_{\Omega} \|\nabla I_{x,y} - \nabla S_{x,y}\|^2 dx dy \\ I_{(x,y)} = T_{x,y} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

## 1.2 Résolution et équivalence avec l'équation de Poisson

Pour résoudre ce problème, il faut donc trouver le minimum de la fonction  $g$  suivante :

$$g(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I(x) - \nabla S(x)\|^2 dx \quad (2)$$

S'il existe alors celui-ci annule le gradient de la fonction.

**Calcul de  $\nabla g(I)$**  En utilisant les formules de Taylor-Young à l'ordre 1, le gradient peut être calculé facilement :

Soit  $u \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $\|u\| = 1$  :

$$g(I + \epsilon u) = g(I) + \epsilon \langle \nabla g(I), u \rangle + o(\epsilon)$$

Posons :  $v = \nabla S$ .

$$\begin{aligned} g(I + \epsilon u) - g(I) &= \int_{\Omega} \|\nabla(I + \epsilon u) - v\|^2 - \|\nabla I - v\|^2 dx \\ g(I + \epsilon u) - g(I) &= \int_{\Omega} \|\nabla I - v\|^2 + \|\nabla \epsilon u\|^2 + 2(\nabla I - v) \times \epsilon \nabla u - \|\nabla I - v\|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \epsilon^2 \|\nabla u\|^2 + 2(\nabla I - v) \times \epsilon \nabla u dx \\ &= 2 \int_{\Omega} (\nabla I - v) \times (\nabla \epsilon u) + O(\epsilon^2) \\ &= 2 \langle \nabla I - v, \nabla \epsilon u \rangle + O(\epsilon^2) \\ &= 2\epsilon \langle \nabla I - v, \nabla u \rangle + O(\epsilon^2) \\ &= 2 \langle \nabla I - v, \nabla u \rangle + O(\epsilon) \\ &= -2 \langle \operatorname{div}(\nabla I - v), u \rangle + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Par identification, le gradient de  $g$  vaut

$$\nabla g(I) = -2(\Delta I - \operatorname{div}(v))$$

Le minimum de  $g$  annule son gradient, ainsi, si  $I$  est le minimum de la fonction alors il vérifie :

$$0 = (-\Delta I + \operatorname{div}(v))$$

$$\begin{aligned} \Delta I &= \operatorname{div}(\nabla S) \\ \Delta I &= \Delta S \end{aligned}$$

Trouver le minimum de (2) revient donc à résoudre l'équation :

$$\Delta I = \Delta S$$

Le nouveau problème est donc le suivant :

$$\begin{cases} \Delta I = \Delta S \text{ sur } \Omega \\ I = T \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

Il n'est autre que l'équation de Poisson. Ainsi résoudre (1) est équivalent à résoudre l'équation de Poisson avec conditions aux bords de Dirichlet. Nous décrirons dans ce rapport 3 manières de résoudre numériquement cette équation.

## 2 Résolution

Dans cette partie nous allons résoudre (1) à l'aide d'une discréétisation par différences finies. Puis nous résoudrons celle-ci à l'aide des transformées de Fourier.

### 2.0.1 Qu'est-ce qu'une image

Avant de résoudre numériquement le problème, nous rappelons ce qu'est une image et comment nous la parcourrons dans la suite.

Une image peut être représentée comme une succession de pixels. En traitement d'image, ce sont d'ailleurs sur ces pixels que le traitement est effectué. Leur modification entraîne la modification de l'image globale. Il est alors possible de découper l'image en prenant comme échelle le pixel. Elle peut donc être vue comme une grille, dans

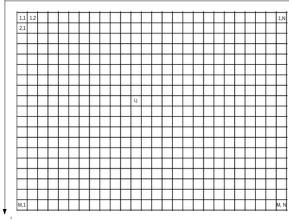


Figure 5: Parcours d'une grille

laquelle chaque carré représente un pixel. Les pixels seront numérotés selon la règle suivante :

Le premier pixel est situé en haut en gauche, puis il suffit de parcourir la grille de gauche à droite et de haut en bas, comme ci-dessus :

Les pas d'espaces sont donc égaux et valent 1. Dans la suite nous considérerons que l'image à modifier est de taille  $M \times N$ .

## 2.1 Discrétisation [5]

Cette partie sera consacrée à la résolution du problème à l'aide des différences finies. Pour trouver la solution il faut donc discrétiser les Laplaciens des images, puis résoudre un système.

### 2.1.1 Notations

#### Le gradient:

Le gradient est un vecteur composé des dérivées partielles d'une fonction. Soit la fonction  $f(x,y)$ , on note le gradient de  $f$  :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

#### Le Laplacien

On note le Laplacien :  $\Delta$ , et  $\Delta = \operatorname{div}(\nabla f)$ .

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

## 2.2 Méthode des différences finies

Le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta I = \Delta S \text{ sur } \Omega \\ I = T \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Dans un premier temps, discrétisons le Laplacien de  $I$ . Le Laplacien étant la somme des dérivées partielles secondes :  $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$ , sa discrétisation commence par une discrétisation de celles-ci. En utilisant les formules de Taylor-Young à l'ordre 2 suivantes :

$$\begin{aligned} I(x+h, y) &= I(x, y) + h \times \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \times \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, y) + O(h^3) \\ I(x-h, y) &= I(x, y) - h \times \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \times \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, y) + O(h^3) \end{aligned}$$

Il est donc facile de voir que la somme de ces deux équations permet d'obtenir une discrétisation de la dérivée seconde :  $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{h^2} (I(x+h, y) + I(x-h, y) - 2 \times I(x, y))$$

De même, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{k^2} (I(x, y + k) + I(x, y - k) - 2 \times I(x, y))$$

La somme des discrétisations des dérivées secondes :  $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, y)$  et  $\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(x, y)$ , permet d'obtenir une discrétisation possible du Laplacien de  $I$  :  $\Delta I$ .

$$\Delta I(x, y) = \frac{I(x+h, y) + I(x-h, y) - 2 \times I(x, y)}{h^2} + \frac{I(x, y+k) + I(x, y-k) - 2 \times I(x, y)}{k^2}$$

Les pas d'espaces  $h$  et  $k$  étant égaux à 1, nous pouvons écrire une discréétisation du Laplacien :

$$\Delta I(x, y) = I(x+1, y) + I(x-1, y) + I(x, y+1) + I(x, y-1) - 4 \times I(x, y)$$

**Application à une image** Afin d'obtenir le Laplacien du pixel  $I(i,j)$ , il est donc nécessaire d'avoir la connaissance de ses pixels voisins que nous nommerons par la suite  $U(p)$ ,  $D(own)$ ,  $L(eft)$ ,  $R(ight)$  pour les pixels  $I(i-1,j)$ ,  $I(i+1,j)$ ,  $I(i,j-1)$ ,  $I(i,j+1)$ .

	1	
1	-4	1
	1	

Figure 6: Laplacien du pixel

Afin de trouver la solution au problème, il faut donc appliquer cette discréétisation à chaque pixel de la partie de l'image à modifier( $\Omega \cup \partial\Omega$ ). Chaque pixel faisant intervenir ses voisins, la résolution du problème passe donc par la résolution d'un système. En notant :

$$g(x, y) = S(x + 1, y) + S(x - 1, y) + S(x, y + 1) + S(x, y - 1) - 4 \times S(x, y)$$

Résoudre  $\Delta I(x, y) = \Delta S(x, y)$  sur  $\Omega$  est équivalent à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} I(i+1,j) + I(i-1,j) + I(i,j+1) + I(i,j-1) - 4 \times I(i,j) = g(i,j) \\ \qquad \qquad \qquad \text{pour } (i,j) \in \Omega \\ I(i,j) = T(i,j) \text{ pour } (i,j) \in \partial \Omega \end{array} \right.$$

La résolution de ce système de taille  $M \times N$  permettra de trouver la nouvelle image I, et donc de résoudre numériquement l'équation de Poisson avec conditions aux bords de Dirichlet. Voici le système obtenu :

### 2.2.1 Résolution du système

Afin de résoudre ce système, il est plus facile de l'écrire sous forme matricielle. Il faut maintenant trouver la solution du problème suivant :

$$AI = b$$

Si la matrice est inversible, alors la solution est évidente, et elle vaut :

$$I = A^{-1} \times b$$

Avec :

- A, une matrice carrée de taille ( $M \times N, M \times N$ )
- I, un vecteur colonne de taille ( $M \times N, 1$ )
- b, un vecteur colonne de taille ( $M \times N, 1$ )

Voici donc à quoi ressemble le système que nous souhaitons résoudre :

La matrice A est une matrice carrée. Pour la remplir, commençons par écrire l'image sous forme d'un vecteur colonne. Dans l'exemple ci-dessous nous voyons bien qu'afin de remplir les lignes de A correspondant au pixel se situant à l'intérieur du domaine, il nous faut la connaissance des voisins de celui-ci. Ainsi, le calcul du Laplacien

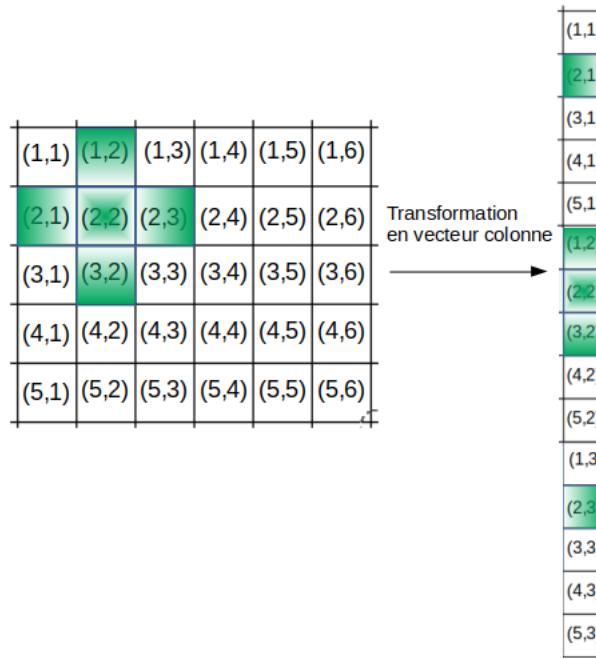


Figure 7: Transformation en un vecteur colonne

du pixel (2,2) nécessite les pixels U, D, R et L. Il faut donc ajouter les coefficients correspondant dans A. Grâce au vecteur colonne obtenu, il est évident que la ligne de la matrice correspondant au pixel (i,j) à l'intérieur du domaine sera remplie de la manière suivante :

$$(1 \ 0 \ \dots \ 1 \ -4 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \dots) \quad (5)$$

Si l'image est de taille ( $M \times N$ ) alors :

- Le coefficient (i, j-1) dans la matrice correspond au pixel U de l'image
- Le coefficient (i, j+1) correspond au pixel D

- Le coefficient  $(i,j+M)$  correspond au pixel R
- Le coefficient  $(i,j-M)$  correspond au pixel L

Les lignes de la matrice correspondant aux pixels situés sur le bord du domaine seront remplies de la manière suivante :

$$(0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (6)$$

Le seul coefficient étant celui correspondant au pixel  $(i,j)$  situés sur  $\partial\Omega$ .

Cette matrice possède donc beaucoup de zéros. Il est donc plus avantageux de la stocker sous cette forme, c'est à dire en ne gardant en mémoire que les coefficients non-nuls et leurs positions dans la matrice. Cela évite de stocker en mémoire une matrice entière.

Le vecteur b contient les Laplaciens des pixels à l'intérieur de  $\Omega$  et les valeurs des pixels de T en dehors du domaine. Les valeurs des pixels de S étant connus, il est facile de calculer son Laplacien en utilisant les discrétisations vues ci-dessus. Ainsi :

$$b(i) = \begin{cases} T(i,j) & \text{si } I(i,j) \notin \Omega \\ g(i,j) & \text{si } I(i,j) \in \Omega \end{cases}$$

En inversant la matrice, la solution I obtenue est un vecteur :

$$\begin{pmatrix} I(1,1) \\ I(2,1) \\ \vdots \\ I(1,2) \\ I(2,2) \\ \vdots \\ I(M,N) \end{pmatrix}$$

Afin de trouver l'image finale, il est donc important de reconstruire une matrice de taille  $M \times N$  à partir de ce vecteur.

### 2.3 Exemple

Considérons l'image S ci-contre, que nous souhaitons coller. Nous souhaitons ici coller les deux carrés rouges sur

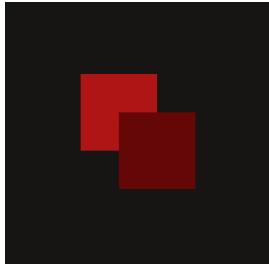


Figure 8: Images à coller

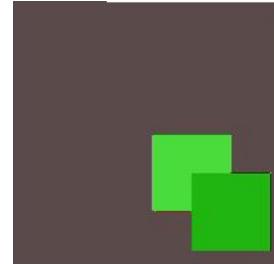


Figure 9: Image de fond

une image que nous nommerons T.

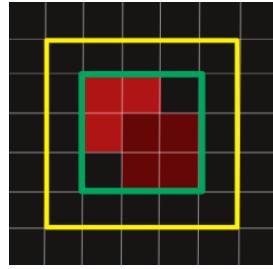


Figure 10: Sélection à coller

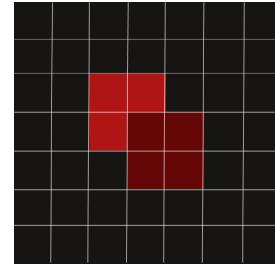


Figure 11: Vue grille pixel

Notons  $\Omega$ , l'intérieur de la zone encadrée par la ligne verte, et  $\partial\Omega$  les pixels appartenant à  $\text{Jaune} \setminus \Omega$

## Construction du système

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{1,1} = T_{1,1} \\ \dots \\ I_{5,1} = T_{5,1} \\ I_{1,2} = T_{1,2} \\ \Delta I_{2,2} = \Delta S_{2,2} \\ \Delta I_{3,2} = \Delta S_{3,2} \\ \Delta I_{4,2} = \Delta S_{4,2} \\ \dots \end{array} \right. \quad (7)$$

Avec  $\Delta I(i, j) = U + D + L + R - 4I(i, j)$ .

En écrivant ce système sous forme matricielle, la matrice A est la matrice  $25 \times 25$  ci-dessous :

Figure 12: Matrice du système

$$I = \begin{pmatrix} I(1, 1) \\ I(2, 1) \\ \dots \\ I(5, 1) \\ \dots \\ I(1, 3) \\ \dots \\ I(5, 3) \\ \dots \\ I(5, 5) \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} T(1, 1) \\ \dots \\ \Delta S(2, 2) \\ \dots \\ T(5, 2) \\ \Delta S(1, 3) \\ \dots \\ T(5, 3) \\ \Delta S(2, 4) \\ \dots \\ \Delta S(4, 4) \\ T(5, 4) \\ \dots \\ T(5, 5) \end{pmatrix} \quad (8)$$

La solution de ce système existe bien. En effet, A étant carrée, de taille  $(M \times N, M \times N)$ . C'est une matrice pentadiagonale, non symétrique. Ses colonnes étant linéairement indépendantes, elle est donc inversible.  
La solution I, s'écrit sous la forme

$$I = A^{-1}b.$$

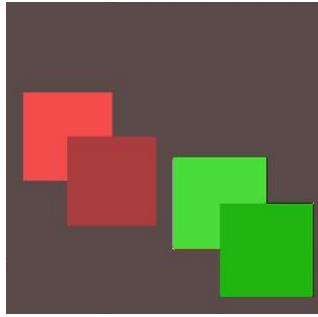


Figure 13: Résultat obtenu

Nous ajouterons dans la section suivante les résultats obtenus à l'aide de cette méthode.

Celle-ci fonctionne très bien mais le temps de calcul peut devenir très long. En effet, cette méthode demande une inversion matricielle et donc un temps de calcul relativement long sur de "très" grands systèmes, donc de très grandes sélections. Nous allons maintenant voir une seconde méthode, plus rapide sur de grandes sélections, en nous plaçant dans le domaine de Fourier.

## 2.4 Méthode de Fourier [5]

Avec cette seconde méthode nous allons résoudre l'équation de Poisson à l'aide de la transformée de Fourier. Avant de formuler la résolution de ce problème. Rappelons la définition des opérateurs dont nous aurons besoin dans la suite. [6]

### 2.4.1 Rappel et définitions des opérateurs

**Transformée de Fourier (discrète)** Soit F une fonction, sa transformée de Fourier peut s'écrire de la façon suivante :

$$\hat{F}(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} F(k, l) e^{-2\pi i \left( \frac{k \times x}{M} + \frac{l \times y}{N} \right)} \quad (9)$$

Enfin, afin de retrouver la fonction initiale nous aurons besoin de la transformée de Fourier inverse :

$$F(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \hat{F}(x, y) e^{2\pi i \left( \frac{xk}{M} + \frac{yl}{N} \right)} \quad (10)$$

**Gradient** Pour résoudre le problème nous avons besoin de calculer les Lapaciens des images. Nous nous placerons dans le domaine de Fourier, il est donc nécessaire de calculer la transformée de Fourier du Laplacien d'une fonction, et donc le gradient de celle-ci.  $F$  est toujours la fonction que nous souhaitons étudier.

$$\widehat{\nabla(F)} = \begin{pmatrix} \widehat{\frac{\partial F}{\partial k}} \\ \widehat{\frac{\partial F}{\partial l}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

En dérivant l'expression ci-dessus par rapport à la première variable :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial k} &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \widehat{F}(x, y) e^{2\pi i (\frac{k \times x}{M} + \frac{l \times y}{N})} \left( \frac{2\pi i x}{M} \right) \\ &= \left( \frac{2\pi i x}{M} \right) \widehat{F}(k, l) \\ \widehat{\frac{\partial F}{\partial k}} &= \left( \frac{2\pi i x}{M} \right) \widehat{F}(k, l) \end{aligned} \quad (12)$$

Le calcul est similaire pour  $\frac{\partial F}{\partial l}$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial F}{\partial k}} &= \left( \frac{2\pi i x}{M} \right) \widehat{F} \\ \widehat{\frac{\partial F}{\partial l}} &= \left( \frac{2\pi i y}{N} \right) \widehat{F} \end{aligned} \quad (13)$$

### Laplacien

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial k^2} &= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \widehat{F}(x, y) e^{2\pi i (\frac{k \times x}{M} + \frac{l \times y}{N})} \left( \frac{2\pi i x}{M} \right)^2 \\ &= \left( \frac{2\pi i x}{M} \right)^2 \widehat{F}(k, l) \\ \widehat{\frac{\partial^2 F}{\partial k^2}} &= \left( \frac{2\pi i x}{M} \right)^2 \widehat{F}(k, l) \end{aligned} \quad (14)$$

On a donc :  $\widehat{\Delta F} = \widehat{\frac{\partial^2 F}{\partial k^2}} + \widehat{\frac{\partial^2 F}{\partial l^2}}$ .

$$\widehat{\Delta F} = \left( \frac{2\pi i x}{M} \right)^2 \widehat{F} + \left( \frac{2\pi i y}{N} \right)^2 \widehat{F} \quad (15)$$

#### 2.4.2 Résolution avec la méthode Fourier

La résolution dans le domaine de Fourier nécessite quelques changements. Cette méthode ne fonctionnant que sur un domaine rectangulaire, nous devons donc modifier le domaine  $\Omega$ .

Rappelons que nous voulons résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta I(x, y) = \Delta S(x, y) \text{ si } (x, y) \in \Omega \\ I(x, y) = T(x, y) \text{ si } (x, y) \notin \Omega \end{cases} \quad (16)$$

Nous voulions que le laplacien de  $I$  à l'intérieur de  $\Omega$  corresponde à celui de  $S$ . En considérant le nouveau domaine  $\Omega_2$  comme étant l'image entière, il faudrait donc que le Laplacien de  $I$  soit très proche du laplacien de  $T \cup S$ . Mais dans ce cas, nous aurions un fort gradient sur  $\partial\Omega$ , (le changement d'intensité entre  $T$  et  $S$  étant fort). Il faut donc reconsidérer le problème précédent.

La nouvelle hypothèse que nous pouvons faire est donc la suivante :  $\nabla I$  doit être très proche de  $\nabla S$  dans  $\Omega$  mais aussi très proche de  $\nabla T$  dans  $\Omega_2 \setminus \Omega$ . En notant  $V$  :

$$V = \begin{cases} \nabla S(x, y) \text{ si } (x, y) \in \Omega \\ \nabla T(x, y) \text{ si } (x, y) \notin \Omega \end{cases} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

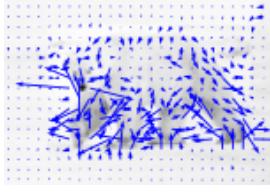


Figure 14: Champs de vecteurs de l'image S



Figure 15: Champs de vecteur de l'image T

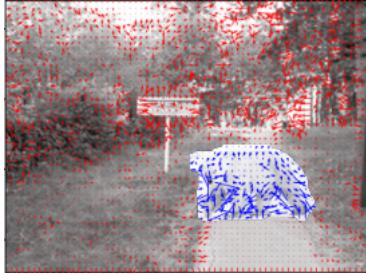


Figure 16: Nouveau domaine

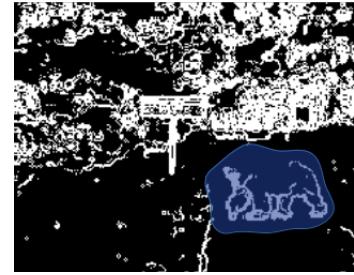


Figure 17: Nouveau domaine

Ces images représentent les champs de vecteurs dont le gradient de  $I$  devra se rapprocher le plus possible. Nous devons donc résoudre l'équation suivante :

$$\Delta I = \operatorname{div}(V)$$

Afin de pouvoir résoudre cette équation il faut imposer des conditions sur le bord. En appliquant l'effet miroir à l'image correspondant au nouveau domaine, nous obtenons un signal symétrique et il est donc possible d'appliquer la transformée de Fourier pour résoudre le problème. Les conditions imposées sont donc des conditions de Neumann.

Ainsi en calculant la transformée de Fourier du Laplacien nous obtenons :  $\widehat{\Delta I} = \widehat{\operatorname{div}(V)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi ix}{M}\right)^2 \widehat{I} + \left(\frac{2\pi iy}{N}\right)^2 \widehat{I} &= \left(\frac{2\pi ix}{M}\right) \widehat{V}_1 + \left(\frac{2\pi iy}{N}\right) \widehat{V}_2 \\ \left(\left(\frac{2\pi ix}{M}\right)^2 + \left(\frac{2\pi iy}{N}\right)^2\right) \widehat{I} &= \left(\frac{2\pi ix}{M}\right) \widehat{V}_1 + \left(\frac{2\pi iy}{N}\right) \widehat{V}_2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\widehat{I} = \frac{\left(\frac{2\pi ix}{M}\right) \widehat{V}_2 + \left(\frac{2\pi iy}{N}\right) \widehat{V}_1}{\left(\left(\frac{2\pi ix}{M}\right)^2 + \left(\frac{2\pi iy}{N}\right)^2\right)} \quad (19)$$

$x$  et  $y$  valant  $(0, 1, \dots, M-1)$  et  $(0, 1, \dots, N-1)$  respectivement.

Afin de retrouver  $I$ , il suffit d'appliquer la transformée inverse, à l'équation ci-dessus. Les résultats obtenus avec cette méthode seront présentés dans une prochaine section.

## 2.5 Méthode de Douglas [1]

Nous avons vu deux manières de résoudre l'équation de Poisson avec conditions aux bords de Dirichlet. Nous allons maintenant présenter une troisième méthode :

Le méthode de Douglas

Soit  $I$ , l'image à retrouver :

### 2.5.1 D'un problème avec contraintes...

Remarquons que le problème initial est un problème d'optimisation avec contraintes. En effet, nous voulons minimiser  $\int_{\Omega} \|\nabla I - \nabla S\|^2$ . Avec la contrainte suivante :  $I = T$  en dehors du domaine.

Ce problème d'optimisation peut donc être résolu à l'aide de différents algorithmes, mais avant cela, transformons-le en un problème sans contraintes.

### 2.5.2 ... À un problème sans contraintes

En utilisant des fonctions de pénalisation nous remarquons aisément que ce problème peut être ramené à un problème sans contraintes. Réécrivons donc celui-ci

$$\min \int_{\Omega} ||\nabla I - \nabla S||^2 + \mathbf{1}_{T \setminus \Omega}(I)$$

avec

$$\mathbf{1}_{T \setminus \Omega}(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I \in T \setminus \Omega \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la suite nous noterons  $K = T \setminus \Omega$ .  $K$  représente l'ensemble des images dont les pixels situés en dehors du domaine  $\Omega$  coïncident avec  $T$ .



Figure 18: Exemple d'images appartenant à  $K$

Nous avons bien équivalence entre notre problème sans contraintes et le problème (1). En effet, si  $I \in K$ , alors l'indicatrice vaut 0 et nous devons résoudre  $\min \int_{\Omega} ||\nabla I - \nabla S||^2$  (problème initial).

Si au contraire  $I \notin K$ , alors nous devons minimiser quelque chose qui vaut  $+\infty$ . Le minimum n'existant pas, il n'y a pas de solutions.

En effet, l'image  $I$  ne coïncide pas avec  $T$  à l'extérieur de  $\Omega$ , la condition  $I = T$  en dehors du domaine n'étant pas respectée, le problème n'a pas de solution.

Ce problème sans contraintes, traduit bien celui avec contraintes. Nous pouvons donc essayer de résoudre celui-ci numériquement.

Afin d'être sûrs que le minimum existe, nous montrerons dans la suite que cette fonction est bien convexe. Par commodité, nous noterons dans la suite :

$$\begin{aligned} F(I) &= \int_{\Omega} ||\nabla I - \nabla S||^2 + \mathbf{1}_{T \setminus \Omega}(I) \\ &= f(I) + g(I) \end{aligned}$$

### 2.5.3 La convexité

Montrons que  $K$  est convexe. Soient  $u$  et  $v$  deux images appartenant à  $K$ , alors, les pixels de  $u$  et de  $v$  se situant à l'extérieur de  $\Omega$ , coïncident avec les pixels de  $T$ .

Considérons maintenant une nouvelle image :

$$M = \lambda u + (1 - \lambda)v$$

Les pixels de  $u$  et  $v$  coïncidant avec ceux de  $T$  à l'extérieur, nous pouvons réécrire les pixels de  $M$  de la manière suivante.

$$M(i, j) = \begin{cases} \lambda u(i, j) + (1 - \lambda)v(i, j), & (i, j) \in \Omega \\ \lambda T(i, j) + (1 - \lambda)T(i, j) & (i, j) \notin \Omega \end{cases}$$

Ainsi, pour  $(i, j) \notin \Omega$  :

$$M_{i,j} = \lambda T_{i,j} + (1 - \lambda)T_{i,j} = T_{i,j}$$

Ainsi, les pixels de  $M$  n'appartenant pas à  $\Omega$  coïncident avec  $T$ .  $M$  appartient bien à  $K$ . Et  $K$  est donc convexe.  $K$  étant convexe et non vide, ( $T$  en particulier appartient à  $K$ ), alors la fonction  $\mathbf{1}_K(I)$  est convexe. Enfin montrons la convexité de  $\|\nabla I - \nabla S\|^2$ .

La norme étant une fonction convexe et croissante, alors la fonction :  $\|\cdot\|^2$  est elle aussi convexe.

Nous avons donc  $f$  et  $g$  convexes, ainsi, la fonction  $F = f + g$  l'est aussi. Elle admet donc un minimum. Nous pouvons donc résoudre numériquement ce problème.

#### 2.5.4 L'algorithme de Douglas

L'algorithme que nous allons utiliser est l'algorithme de Douglas-Rachford. Cet algorithme permet d'approcher le minimum d'une fonction  $F = f + g$ .

$f$  et  $g$  étant des fonctions convexes, comme montré dans la partie précédente, nous pouvons utiliser cet algorithme.

**L'algorithme** À chaque itération, sont calculés :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \text{prox}_f(y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \text{prox}_g(2x_{k+1} - y_k) - x_{k+1} \end{aligned}$$

Il est donc nécessaire de calculer les opérateurs proximaux respectifs de  $f$  et  $g$ .

#### 2.5.5 Calcul des opérateurs proximaux ...

Un opérateur proximal est défini comme suit :

$$\text{prox}_f(x) = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\|u - x\|^2}{2} + f(u) \right\}$$

[4]

##### Opérateur proximal de $f$

$$\text{prox}_f(x) = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\|u - x\|^2}{2} + \|\nabla u - \nabla S\|^2 \right\}$$

Afin de faciliter les notations définissons :

$$h(u) = \frac{\|u - x\|^2}{2} + \|\nabla u - \nabla S\|^2$$

Nous cherchons donc

$$\underset{u}{\operatorname{argmin}} h(u)$$

ie.  $u$  qui minimise la fonction  $h$ , autrement dit, un  $u$  qui annule le gradient de  $h$ .

En utilisant Taylor Young,

$$\begin{aligned} h(u + k) - h(u) &= \frac{\|u + k - x\|^2}{2} + \|\nabla(u + k) - \nabla S\|^2 - \frac{\|u - x\|^2}{2} - \|\nabla u - \nabla S\|^2 \\ &= \frac{\|k\|^2 + 2\langle u - x, k \rangle}{2} + \|\nabla k\|^2 + 2\langle \nabla u - \nabla S, \nabla k \rangle \\ &= O(\|k\|^2) + \langle u - x, k \rangle - 2\langle \nabla u - \nabla S, k \rangle \\ &= \langle u - x - 2\text{div}(\nabla u - \nabla S), k \rangle \end{aligned}$$

Nous obtenons le gradient de  $h$ .

$$\begin{aligned} \nabla h(u) &= u - x - 2\text{div}(\nabla u - \nabla S) \\ &= u - x - 2(\Delta u - \Delta S) \end{aligned}$$

En résolvant  $\nabla h(u) = 0$ , nous pourrons trouver :  $\text{prox}_f(x)$ .

$$\begin{aligned} \nabla h(u) &= 0 \\ u - x - 2(\Delta u - \Delta S) &= 0 \\ u - 2\Delta u &= x - 2\Delta S \end{aligned}$$

Afin de trouver  $u$ , nous discréterons le Laplacien de  $u$ , comme nous l'avons vu dans la section (1) :

$$-2u(x+1, y) - 2u(x-1, y) - 2u(x, y+1) - 2u(x, y-1) + 9 \times u(x, y) = y_k - 2\Delta S(x, y)$$

Il suffit de résoudre ce système afin d'approcher  $u$ . Pour cela, nous mettrons celui-ci sous forme matricielle et nous pourrons, grâce à une inversion matricielle trouver  $u$ . Nous pouvons donc numériquement approcher  $\text{prox}_f(x)$ .

**Opérateur proximal de  $g$**   $g$  étant la fonction indicatrice suivante :

$$\mathbf{1}_{T \setminus \Omega}(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } I \in T \setminus \Omega \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\text{prox}_g(x) = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\|u-x\|^2}{2} + \mathbf{1}_K(u) \right\}$$

Nous savons que  $\text{prox}_g(x)$  existe puisque la fonction  $g$  est convexe et la fonction norme est elle aussi convexe.

$$\text{Notons } h(u) = \frac{\|u-x\|^2}{2} + \mathbf{1}_K(u).$$

Comme nous l'avons vu cette fonction n'admet un minimum que si  $u \in K$ . Supposons donc  $u \in K$ .

$$\text{Alors chercher } \underset{u \in K}{\operatorname{argmin}} \{h(u)\} \text{ est équivalent à chercher } \underset{u \in K}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\|u-x\|^2}{2} \right\}.$$

Il est donc évident que la solution de ce problème est donc  $u = x$ . Cependant, comme nous l'avons supposé,  $u \in K$ .

Alors,  $\text{prox}_g(x) = L$ , avec  $L$  une image appartenant à  $K$ , et dont les pixels à l'intérieur de  $\Omega$  coïncident avec  $x$ .

Avec cet opérateur nous nous assurons que la condition initiale de notre problème est bien respectée.

## 2.5.6 Convergence de l'algorithme vers la solution

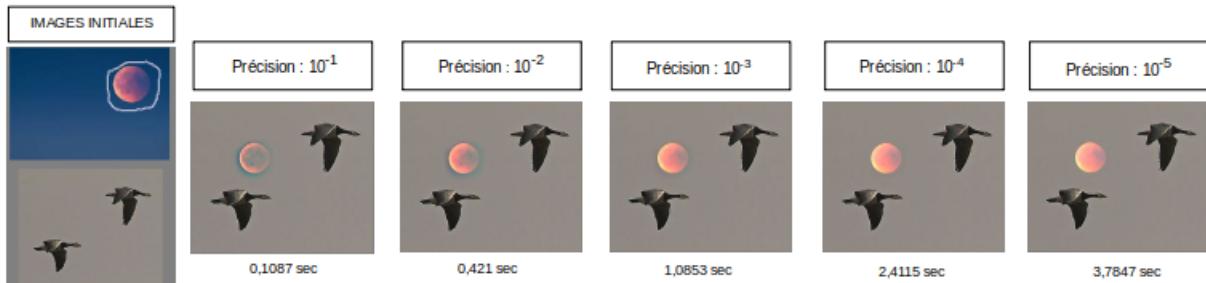


Figure 19: Convergence de l'algorithme vers la solution

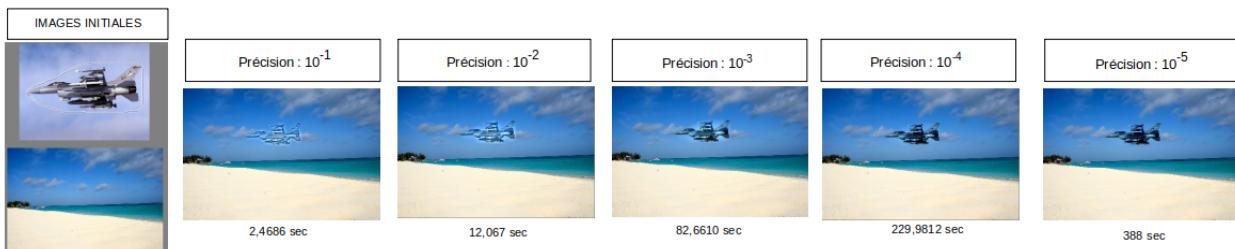


Figure 20: Convergence de l'algorithme vers la solution

L'algorithme de Douglas converge bien vers une solution  $I$  qui résout le problème initial.

### 2.5.7 Temps et coût de l'algorithme

L'algorithme semble être très efficace, malheureusement en termes de temps de calcul, il est très long. Nous ferons dans la prochaine partie un tableau comparatif des temps de calculs effectués sur des images de tailles différentes. Nous avons considérablement amélioré le temps de calcul de celui-ci en utilisant l'algorithme du gradient conjugué [3], afin d'inverser la matrice de l'opérateur proximal de  $f$ . Malgré tout, l'algorithme est encore lent sur de grandes images. Nous choisissons une précision de  $10^{-5}$ , afin d'avoir des résultats comparables à ceux obtenus avec les méthodes précédentes sur toutes les images testées. Le nombre d'itérations de l'algorithme devient alors très important. Pour certaines images (voir ci-dessous) une précision de  $10^{-3}$  de l'algorithme est suffisante pour obtenir des résultats convenables. Pour d'autres en revanche il faut augmenter cette précision (voir ci-dessus avec l'avion). Nous avons donc cherché à améliorer les temps de calculs en appliquant une méthode de sur-relaxation sur l'algorithme de Douglas-Rachford, avec  $\rho = 1.85$ . À chaque itération nous calculons donc :

- $x_{k+1} = \text{prox}_f(y_k)$
- $y_{k+1} = y_k + \rho_k(\text{prox}_g(2x_{k+1} - y_k) - x_{k+1})$

$$(1 < \rho < 2).$$

Cependant, le temps de calcul est encore élevé sur de grandes images. Afin de réduire ce temps de calcul il faudrait réduire le nombre d'itérations de celui-ci et donc que l'algorithme converge encore plus rapidement vers la solution.

### 2.6 Tableau comparatif

Taille image S (px)	Taille image T (px)	Temps Douglas	Temps Douglas (R)	Temps différences finies	Temps Fourier
220 × 154 × 3	304 × 252 × 3	834 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 3.799 secondes	547 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 2.2233 secondes	0.335 secondes	0.355 secondes
304 × 252 × 3	770×844 ×3	1591 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 72.348 secondes	1182 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 46.1067 secondes	0.797 secondes	1.640 secondes
400 × 300 × 3	1200×800×3	6224 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 440.886 secondes	3884 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 205.8105 secondes	1.05 secondes	2.102 secondes
400 × 300 × 3	614×441×3	5448 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 366.0.34 secondes	4046 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 224.3881 secondes	0.877 secondes	0.8576 secondes
220 × 154 × 3	263×192×3	861 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 4.056 secondes	510 itérations précision : $5 \times 10^{-5}$ 2.3466 secondes	0.0892 secondes	0.1754 secondes

Temps Douglas (R) est la méthode de sur-relaxation couplée à la méthode de Douglas,  $\rho = 1.89$ . Nous remarquons qu'à l'aide de cette méthode, nous pouvons considérablement diminuer le nombre d'itérations de l'algorithme de Douglas-Rachford et ainsi améliorer le temps de calcul de celui-ci (jusqu'à t/2 sur de grandes images).

Les résultats que nous obtenons avec les différentes images sont très similaires à ceux obtenus avec les différences finies. Nous pouvons bien sûr raccourcir le temps de calcul de l'algorithme de Douglas-Rachford en diminuant la précision. Mais dans ce cas, certains résultats sont moins convenables.

## 3 Amélioration du collage

Après avoir implémenté des "sliders" permettant de bouger la sélection sur l'image de fond, nous nous sommes rendus compte que la sélection est parfois trop grande, et peut cacher des objets, ou choses importantes sur l'image de fond : Nous voyons bien ci-dessous, qu'en sélectionnant une grande zone autour de la Lune dans l'image S, le collage cache effectivement l'oiseau, objet pourtant important de l'image T. Afin de résoudre ce problème, nous avons opté pour la comparaison des gradients dans chaque image. En effet, si le gradient de T est supérieur à celui de S, alors cela signifie que l'image T possède un objet, ou un contour à cette position tandis que S ne possède pas quelque chose d'important à la même position. Nous pouvons donc "réduire" la sélection et la modifier en ce pixel. Nous obtenons donc la figure suivante en utilisant cette propriété : Cependant cette "amélioration" a ses limites, en effet, l'intérieur de la Lune ne possède que très peu de variations et presque aucun contour, ainsi, si la Lune se

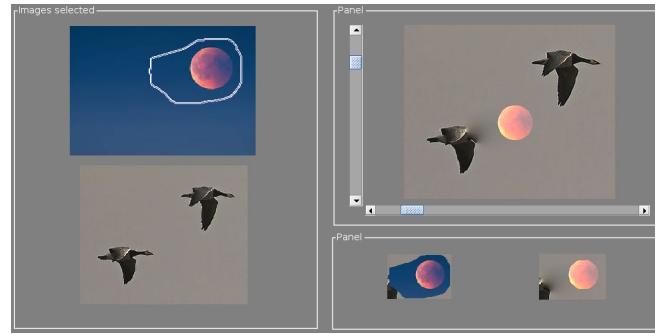


Figure 21: Problème rencontré



Figure 22: Problème résolu, méthode utilisée: Différences Finies

situait exactement sur la tête de l'oiseau, certains pixels à l'intérieur de celle-ci seraient "supprimés" de la sélection, et ainsi, le résultat ne serait pas satisfaisant.

## 4 Résultats obtenus

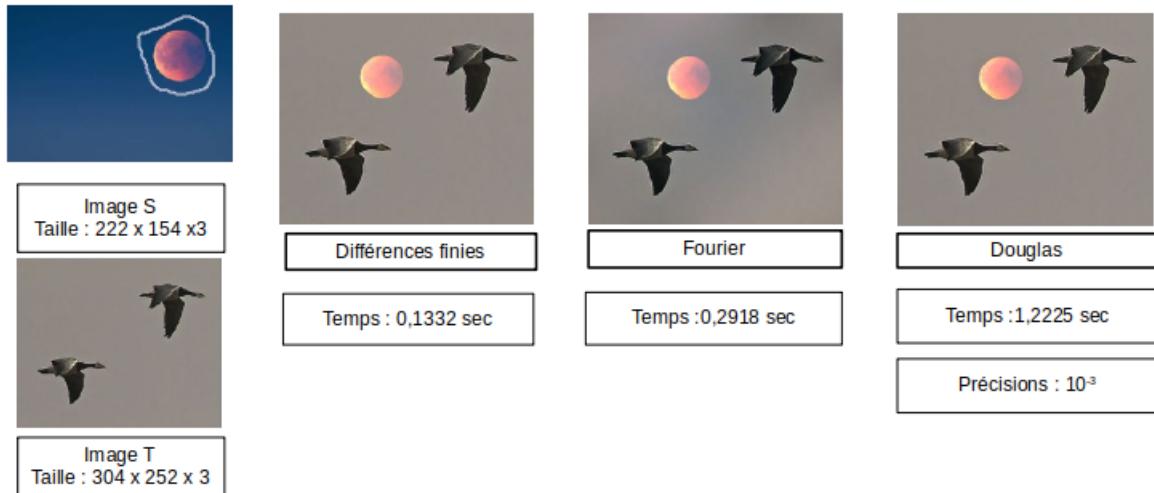


Figure 23: Résultats obtenus

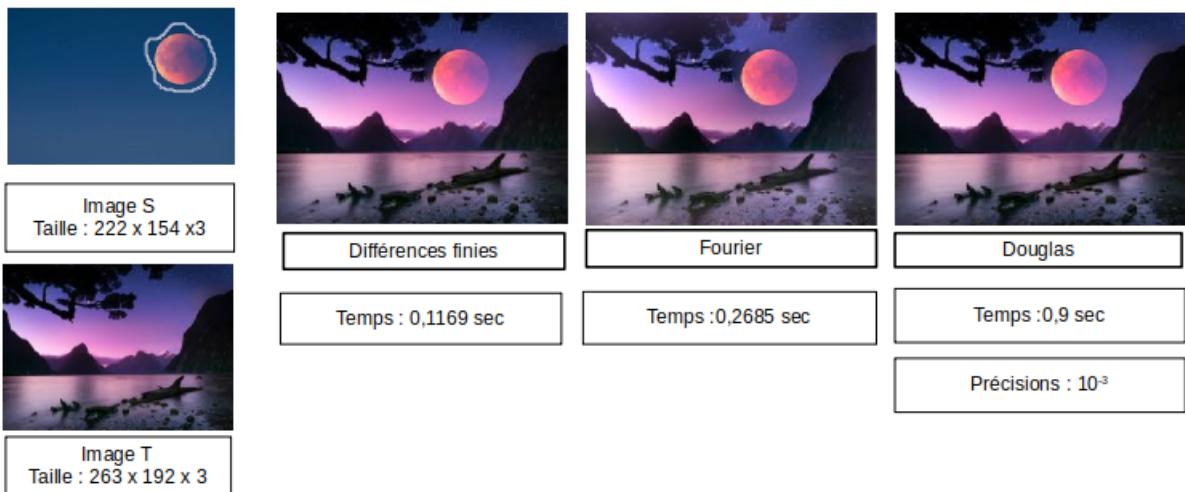


Figure 24: Résultats obtenus



Figure 25: méthode des différences finies ajustée

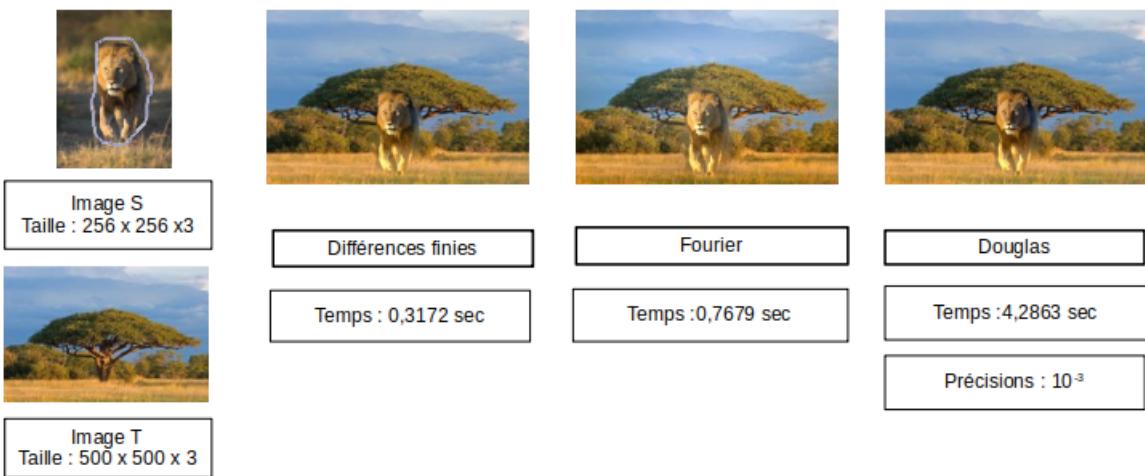


Figure 26: Résultats obtenus



Figure 27: Résultats obtenus

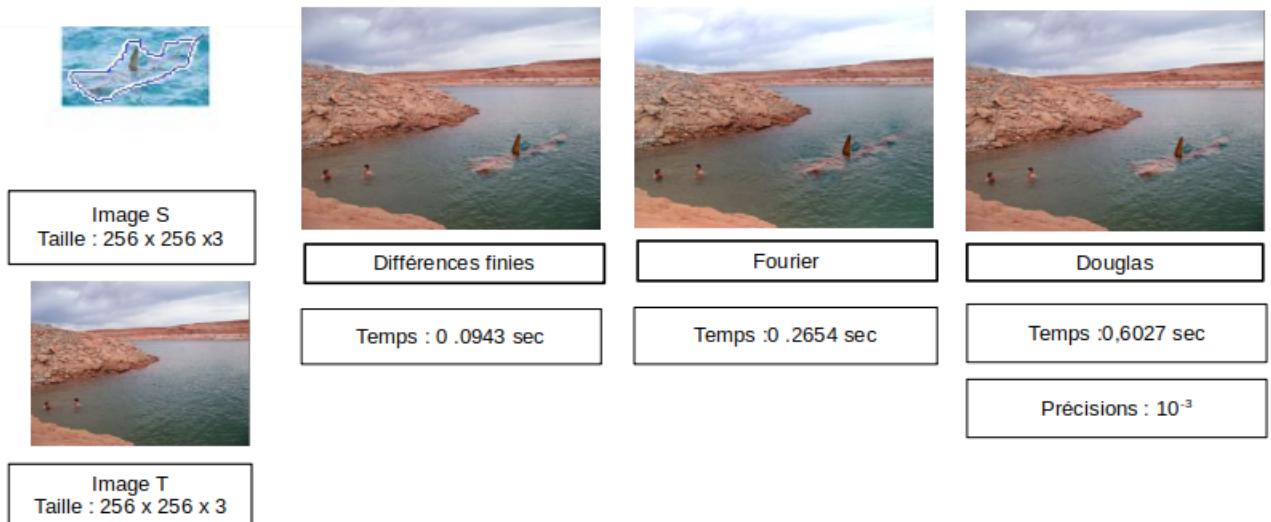


Figure 28: Résultats obtenus

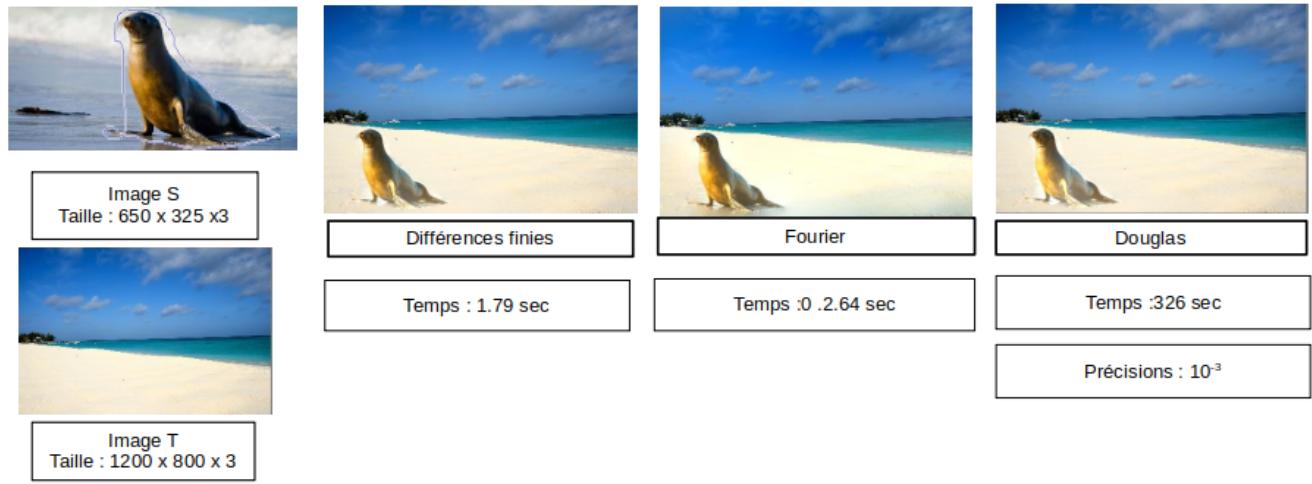


Figure 29: Résultats obtenus

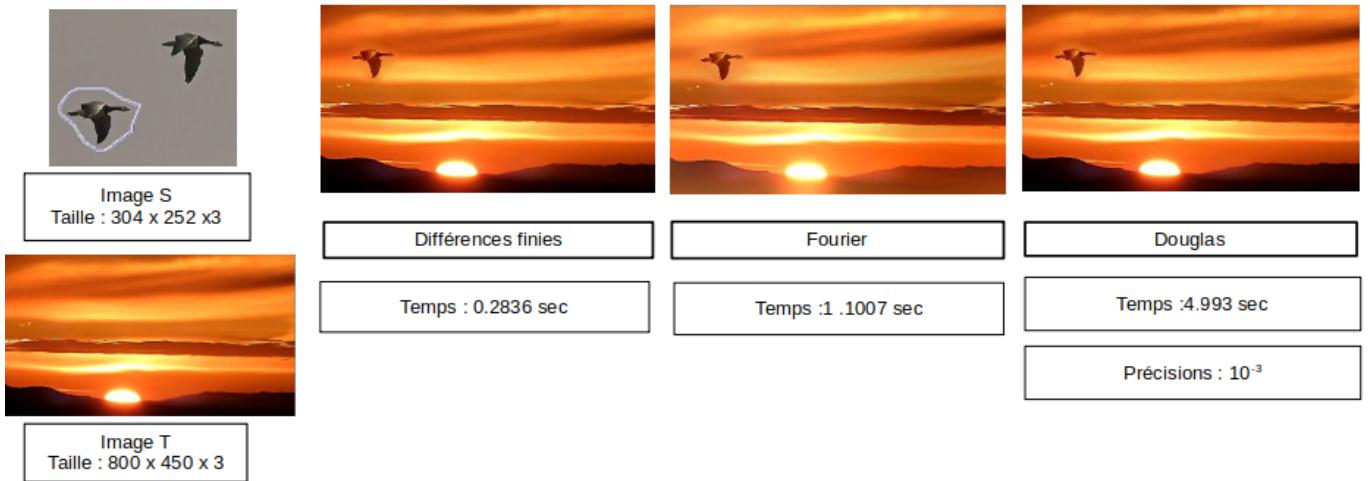


Figure 30: Résultats obtenus

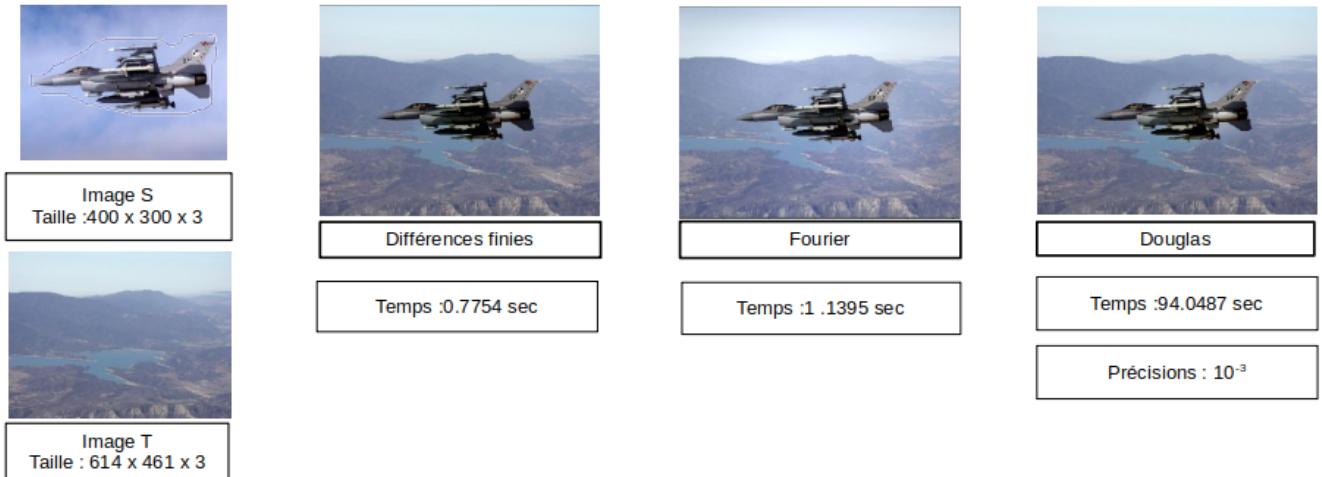


Figure 31: Résultats obtenus

## 5 Passage en couleurs

Nous avons commencé ce projet en ne travaillant que sur des images en niveaux de gris. Cependant, les résultats présentés ci-dessus sont en couleur. Afin de résoudre le problème sur ce type d'image, nous avons décidé d'utiliser l'espace RGB (Red Green Blue).

### 5.1 De l'image en niveaux de gris...

Une image en niveaux de gris, peut être considérée comme une matrice dont chaque pixel possède une valeur comprise entre 0 (noir) et 255 (blanc), les valeurs intermédiaires représentant un niveau de gris. Une image couleur se distingue d'une image en "noir et blanc" par le nombre de "canaux" qu'elle possède. Dans le cas d'image au format RGB, l'image possède 3 canaux.

Les canaux Rouge, Vert et Bleu, respectivement.

L'image obtenue, affichée sur l'écran, est donc une superposition de ses canaux. Un canal est la matrice associée à une couleur (Rouge, Vert ou Bleu), les valeurs de cette matrice étant comprises entre 0 et 255, il permet de caractériser la composante (R V ou B) de l'image.

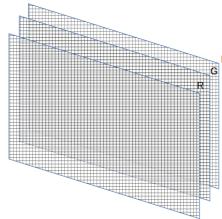


Figure 32: Superposition des matrices

Afin de résoudre le problème sur des images en couleur, nous avons donc appliqué les mêmes algorithmes que ceux utilisés pour une image en niveaux de gris sur chacune des matrices R G et B. L'algorithme est appliqué sur chaque canal de l'image.



Figure 33: Image obtenue avec l'algorithme des différences finies

Cependant, en observant les résultats obtenus plus haut, il est clair que la couleur de l'objet collé sur l'image finale est souvent "dénaturée", trop saturée.

En observant l'exemple ci-dessus, l'avion présent dans l'image S, avec une couleur initiale que l'on pourrait considérer comme "grise" se retrouve dans l'image finale avec une couleur "bleue" s'accordant avec le ciel. L'image obtenue dénature alors la couleur de l'objet à coller. L'espace RGB, qui utilise les systèmes de synthèse additive, ne semble donc pas un espace à utiliser pour faire ce genre de traitement d'images.

Afin de résoudre ce problème nous aurions pu utiliser un autre espace de couleurs, l'espace HSL (Hue Saturation Lightness ou Teinte Saturation luminosité en français). Dans ce nouvel espace il est possible d'influer sur :

- La saturation de l'image: l'intensité des couleurs qu'elle possède.
- La teinte : la couleur de l'image.
- La luminosité : la lumière présente dans l'image

Cet espace est beaucoup plus intéressant que celui précédemment utilisé. En effet, il est possible grâce à lui, d'influer sur plus de paramètres que sur l'espace RGB. Nous pouvons donc la saturation de l'image objet ainsi que sa luminosité, sans dénaturer la couleur de celui-ci, comme ce fut le cas dans de nombreux de nos essais avec l'espace RGB. [2]

## 6 Comparaison

### 6.1 Différences de résultat

En comparant les images ci-dessus, nous pouvons observer quelques différences entre la méthode de Fourier et les deux autres. En effet, la méthode des différences finies ne travaille que sur une partie de l'image, celle qui va être collée, afin de l'adapter au mieux à l'image de fond. Le reste de l'image n'est pas modifié et nous pouvons retrouver exactement l'image initiale T en dehors du domaine (tout comme l'algorithme de Douglas).

La méthode de Fourier elle, modifie toute l'image, elle n'adapte pas seulement la partie à coller, mais c'est toute l'image qui est modifiée. Fourier effectue un "mélange" des deux images.

Plus la précision de l'algorithme de Douglas augmente, plus le résultat obtenu avec celui-ci est proche de celui obtenu avec les différences finies. Les pixels en dehors du domaine  $\Omega$  ne sont pas non plus modifiés avec cet algorithme. En effet, grâce à l'opérateur proximal de la fonction indicatrice, vue précédemment nous nous assurons de ne pas modifier les pixels de K.

### 6.2 Différence de temps

La méthode des différences finies fait intervenir une inversion matricielle qui, si elle est grande, augmentera significativement le temps de calcul de l'algorithme. Cette méthode consiste en la résolution d'un système plus ou moins

grand, qui peut parfois prendre du temps.

Sur de grandes sélections la méthode de Fourier semble plus rapide, il est facile de calculer le gradient de l'image, et la fft ("fast fourier transform") est plus rapide. Sur de grandes sélections c'est donc cette méthode qui serait à privilégier.

L'image ci-dessous présente une comparaison des temps de calcul de la méthode de Fourier et des différences finies en fonction de la sélection. L'image choisie est de taille  $(800 \times 450 \times 3)$  :

Sélection	Temps DF	Temps Fourier
	0.6241 sec	1.4838 sec
	0.9017 sec	1.2445 sec
	2.7793 sec	1.1931 sec
	7.2114 sec	1.2481 sec

Figure 34: Comparaison en fonction de la sélection

La méthode de Douglas, est beaucoup plus lente, à cause du coût de l'opérateur proximal de  $f$ , et du nombre d'itérations répétées.

## 7 Implémentation

Voici une présentation de l'interface et de ses fonctionnalités.

### 7.1 Interface

Voici comment se présente notre interface : Elle est découpée en "blocs". Le premier bloc appelé "Open Button"

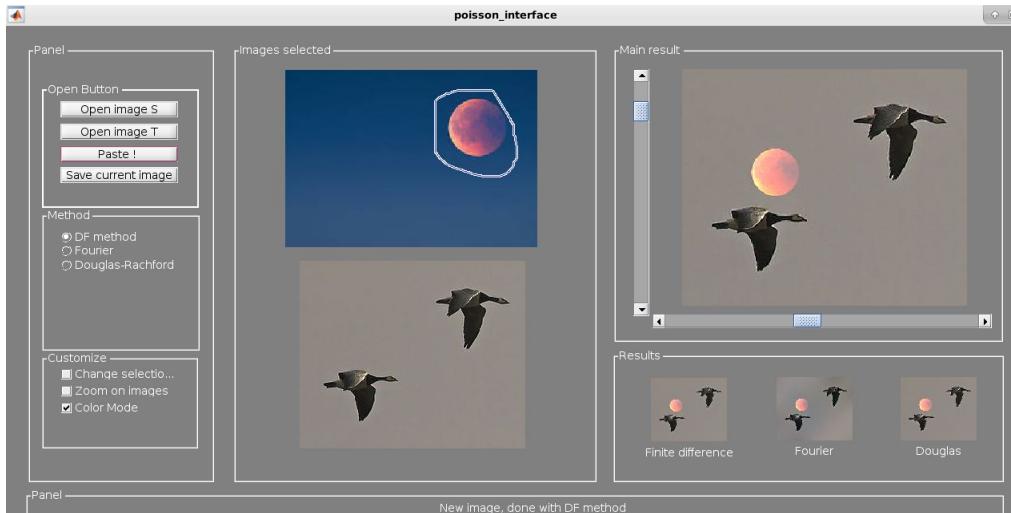


Figure 35: Interface 1.0

se situe en haut à gauche, il permet l'ouverture d'images. En cliquant sur "Open Image S", une boîte de dialogue

s'ouvre et permet de charger une image présente dans l'ordinateur. De même en cliquant sur le bouton T. Une fois ces images chargées elles s'affichent dans le bloc numéro 2 appelé "Images selected". L'image la plus haute dans ce bloc correspond à l'image S, tandis que l'image se situant en bas affiche l'image T. Il y a aussi un bouton "Save" permettant d'enregistrer l'image obtenue.

Une fois les images affichées, il faut sélectionner la région dite "à coller" dans l'image S, et la région où va se faire le collage dans l'image T.

**Choix des méthodes** Dans cette interface il est possible de sélectionner la méthode à utiliser. Le choix se porte sur 3 algorithmes :

- Les différences finies
- Fourier
- Douglas-Rachford

Il suffit de sélectionner la méthode pour l'appliquer. En cliquant sur le bouton "Paste !", présent dans le bloc "Open button", la nouvelle image est calculée et s'affiche dans le bloc "Main Result" situé en haut à droite.

**Les options** D'autres options ont été ajoutées dans cette interface. Il est possible d'effectuer l'amélioration vue plus haut, en la sélectionnant, la case : "Change selection". Il est aussi possible de zoomer sur les différentes images, à l'aide de la case zoom. Enfin il est possible de travailler sur des images en couleur, en sélectionnant la case adéquate (Si cette case n'est pas cochée, le résultat est affiché en niveau de gris). Toutes ces options se trouvent dans le bloc : Customizer.

**Sliders** Des sliders sont situés de parts et d'autres de l'image finale, dans le bloc "main result". En activant ces sliders, il est donc possible de bouger la sélection à l'intérieur de l'image. Ainsi l'image finale est recalculée, et l'image à coller sera collée à la position indiquée par les sliders.

**bloc Results** Le dernier bloc est un bloc d'affichage, il affiche, une fois créée, l'image obtenue par l'algorithme sélectionné, dans le bloc correspondant. Cela permet une comparaison rapide.

## 7.2 Organisation du code

Nous avons organisé le code sous forme de classes. Le projet contient 4 classes principales, la classe Fourier, la classe DFinies, la classe Douglas et enfin la classe Mask. Notre projet contient aussi deux fonctions, la fonction copier/coller et la fonction du gradient conjugué.

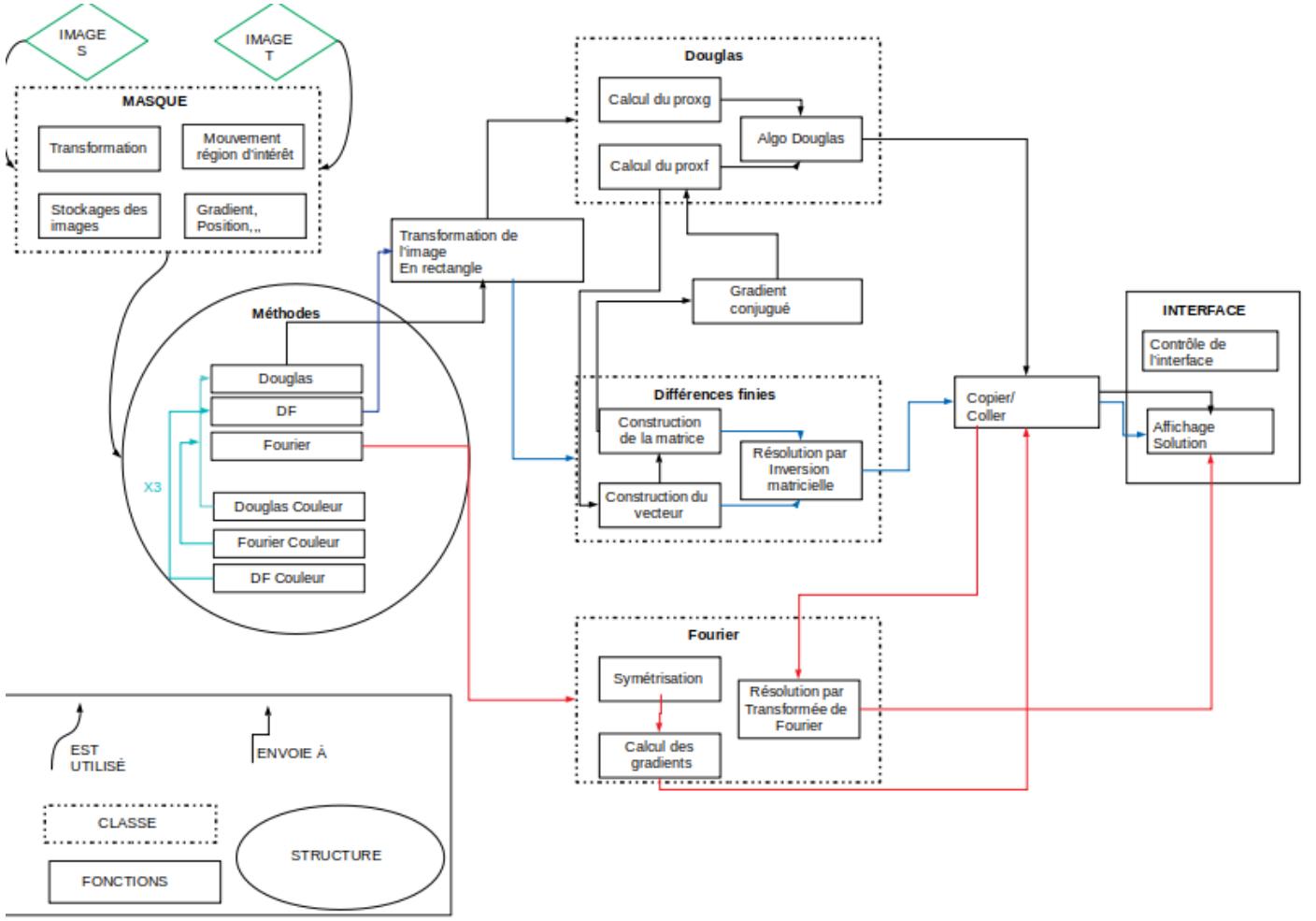


Figure 36: Structure et interactions du code

**Explication du schéma** Le code est organisé en différentes classes (4).

**L'algorithme de Douglas** Cet algorithme étant plutôt long (en terme de temps), nous ne travaillerons pas sur l'image entière mais sur le plus petit rectangle autour de la sélection. En d'autres termes nous collerons l'image S sur une sous-image de T, que nous réinsérerons par la suite au bon endroit dans T. Afin de résoudre le problème à l'aide de l'algorithme de Douglas, nous avons créé une classe du même nom. A l'intérieur de celle-ci, nous calculons les opérateurs proximaux nécessaires. Avec une particularité, l'opérateur proximal de la norme nécessite la construction d'une matrice. Afin d'éviter les doublons nous utilisons donc la classe FDSystem, pour calculer cette matrice, et le vecteur associé. Puis nous inversons le système à l'aide de l'algorithme du gradient conjugué.

**L'algorithme des différences finies** Pour résoudre le problème avec les différences finies, la classe DFSystem, nous permet de calculer la matrice A, le vecteur b et enfin d'inverser le système pour trouver la solution. De la même manière que pour Douglas, nous ne travaillons pas sur l'image entière mais sur une sous-image que nous recollons au bon endroit à la fin.

**La méthode de Fourier** Dans la classe Fourier nous symétrisons les images, puis calculons les gradients de celles-ci. Les images représentant les gradients sont par la suite fusionnées avant d'être envoyées à la fonction de résolution de la classe Fourier.

**Mask** La classe Mask, permet le traitement d'images et de masques, elle est mise à jour pendant tout le programme. C'est notamment elle qui permet le découpage d'image, la fusion de deux images, le redimensionnement

des masques si besoin.

**La fonction gradient conjugué** Elle permet de trouver la solution au système  $Ax=b$  de manière rapide.

**La fonction copier coller** Elle écrase certains pixels d'une image par les pixels d'une autre.

## 8 Tableau Récapitulatif

	Douglas-Rachford	Différences finies	Fourier
Flexibilité	Fonctionne qu'importe la sélection	Fonctionne qu'importe la sélection	Ne fonctionne que sur une sélection Rectangulaire
Vitesse	Petites images : + Grandes images --	Petites images : +++ Grandes images -	Petites images : ++ Grandes images +
Résultats	Dépend de la précision choisie Aucune modification en dehors de $\Omega$	+ Aucune modification en dehors de $\Omega$	Modification des pixels en dehors du domaine
Mémoire/Stockage	Stockage de matrice creuse Nombre d'itérations élevé	Stockage de matrice creuse	Symétrisation de l'image Taille de l'image ( $M \times 2, N \times 2$ )
Erreur d'approximations	Précision choisie : $10^{-3}$	Utilisation de schémas d'ordre 2	
Complexité algorithmique	Inversion matricielle : $O(n^3)$ Gradient conjugué : $O(n)$	Inversion matricielle : $O(n^3)$	Fast Fourier transform $O(n \log n)$

	Douglas-Rachford	Différences finies	Fourier
Principal avantage	Ajout facile de contraintes	Résultat et temps de calcul sur de petites sélections	Vitesse sur de grandes sélections
Principal inconvénient	Vitesse très lente	Stockage de matrice creuse	Ne fonctionne que sur un domaine rectangulaire

## 9 Application à la vidéo

Afin d'aller plus loin, nous avons décidé d'appliquer nos précédents algorithmes sur une vidéo.

Nous considérerons une vidéo comme une succession d'images. En appliquant les algorithmes sur chacune de ces images nous pourrons donc incruster un objet dans une vidéo.

Nous avons commencé par essayer d'incruster une image fixe dans une vidéo. L'image S reste donc comme précédemment l'image initiale à coller, mais l'image T, elle, devient une vecteur d'images. En appliquant les algorithmes implémentés sur chacune de ces images, nous pourrons obtenir le résultat souhaité. En effet, considérons n le nombres d'images issues de la vidéo, en utilisant nos algorithmes sur chacune d'elles, il y a donc n résultats différents et il est donc possible de reconstituer une nouvelle vidéo à partir des images obtenues. Le résultat est affiché une fois toutes les images calculées.

Nous ne pouvons malheureusement pas appliquer nos algorithmes "en temps réel" sur de "grandes" images, en effet nos algorithmes mettant plus ou moins de temps selon les images choisies, le résultat obtenu en temps réel ne serait donc pas une vidéo mais un diaporama d'images. Nous optimiserons chacun de nos algorithmes afin de pouvoir essayer ces schémas en temps réel.

Vous trouverez en annexe, les vidéos obtenues avec les méthodes des différences finies et de Fourier. Nous avons extrait 100 images de la vidéo initiale, soit 20 images par seconde. Ces images sont de taille :  $1364 \times 768 \times 3$ . L'image S quand à elle, fait :  $220 \times 154 \times 3$ .

Nous voulions essayer d'aller un peu plus loin en incrustant une vidéo sur une image fixe. Dans ce cas, l'image S serait un vecteur d'image, l'image T, elle, étant une simple image.

Malheureusement, nous ne pouvons pas sélectionner une région à coller. L'objet de la vidéo étant en mouvement dans celle-ci, il faudrait donc sélectionner celui-ci dans chacune des images extraites de la vidéo. Ou encore faire de la détection d'objet, de la détection de mouvement, un "suivi" de l'objet afin de modifier la sélection à chaque instant. Nous pouvons néanmoins essayer d'incruster la vidéo entière dans l'image T. C'est-à-dire coller chaque

image de la vidéo, entièrement dans l'image T. Malheureusement il faut donc que l'objet à sélectionner soit sur un fond plutôt lisse afin qu'il s'incruste parfaitement et que les objets autour ne se retrouvent pas eux aussi dans le résultat final.

En arrivant à incruster une vidéo sur une image nous pourrions facilement essayer d'incruster une vidéo dans une autre.

Afin d'accélérer la vitesse des algorithmes, nous proposons d'utiliser le calcul parallèle. Nous pourrions alors "construire" plusieurs images en même temps et ainsi améliorer considérablement la vitesse de nos algorithmes .

## 10 Conclusion

L'équation de Poisson avec conditions aux bords de Dirichlet permet donc l'insertion d'une image dans une autre. À l'inverse, nous pouvons utiliser cette équation pour effacer certaines parties d'une image ou encore pour augmenter la luminosité d'une image. Cette méthode est plutôt efficace même si elle possède ses limites. En effet, la couleur de l'objet à coller est par conséquent modifiée ce qui parfois rend le collage beaucoup moins naturel. De même une grande sélection, est visible sur un fond très détaillé. Plus l'image de fond 'T' possède des variations, contours, détails, plus le collage devient mauvais, (effet de flou sur l'image T plus visible).

Nous avons précédemment vu qu'une sélection plutôt large pouvait masquer des objets importants de l'image T. Ce problème peut être en partie résolu par des systèmes de comparaison de gradients ou de moyenne mais le résultat n'est pas fiable, surtout si l'image à coller possède peu de variations et au contraire l'image T énormément.

L'équation de Poisson est utilisée dans beaucoup d'autres améliorations, telles que l'amélioration du contraste, l'augmentation de la luminosité de l'image, ou encore le traitement de films.

## References

- [1] Douglas-rachford method and admm. <http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/236C/lectures/dr.pdf>.
- [2] Le modèle tsl. [https://e-cours.univ-paris1.fr/modules/uved/envcal/html/compositions-colorees/representations-couleur/modeles-perceptuels/tsl.html?fbclid=IWAR315ZeUGgvk99J9BSY1TvXvZ9748R51\\_6PyxQo\\_FgEaKg27eT6W3hL-yw](https://e-cours.univ-paris1.fr/modules/uved/envcal/html/compositions-colorees/representations-couleur/modeles-perceptuels/tsl.html?fbclid=IWAR315ZeUGgvk99J9BSY1TvXvZ9748R51_6PyxQo_FgEaKg27eT6W3hL-yw)
- [3] Méthode du gradient conjugué. [https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode\\_du\\_gradient\\_conjugu%C3%A9](https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_du_gradient_conjugu%C3%A9).
- [4] Introduction to optimization. [https://www.math.u-bordeaux.fr/~jaujol/PAPERS/optim\\_masterbdx.pdf](https://www.math.u-bordeaux.fr/~jaujol/PAPERS/optim_masterbdx.pdf), 2019.
- [5] J. Matias Di Martino, Gabriele Facciolo, and Enric Meinhardt-Llopis. Poisson image editing. [https://www.ipol.im/pub/art/2016/163/article\\_lr.pdf](https://www.ipol.im/pub/art/2016/163/article_lr.pdf), 2016.
- [6] Edoardo Provenzi. Transformée de fourier et ses applications. [https://www.math.u-bordeaux.fr/~eprovenzi/include/Poly\\_TransFourier.pdf](https://www.math.u-bordeaux.fr/~eprovenzi/include/Poly_TransFourier.pdf).