

EQUATION DE POISSON ET TRAITEMENT D'IMAGE

GROUPE DE TRAVAIL THÉMATIQUE

4TQMS801S

Equation de Poisson et traitement d'image

Virginie MONTALIBET

Sébastien Eyzat

April 19, 2020



Contents

1 Présentation du problème	2
1.1 Traduction du problème sous formes mathématiques	3
1.2 Résolution	4
2 Résolution	5
2.1 Discrétisation	5
2.1.1 Qu'est qu'une image	5
2.2 Les différents opérateurs nécessaires	6
2.3 Méthode des différences finies	6
2.3.1 Discrétisation du Laplacien	7
2.3.2 Résolution de l'équation de Poisson	7
2.4 Fourier	10
2.4.1 Rappel et définitions des opérateurs	10
2.4.2 Résolution de la méthode Fourier	11
3 Implémentation	11
3.1 Interface	11
3.1.1 Ouverture d'images	11
3.1.2 Sélection	12
3.1.3 Choix des méthodes	12
3.1.4 Différences finies	12
3.1.5 Fourier	13
3.1.6 Amélioration avec change selection	14
3.1.7 Sliders	14
3.2 Organisation du code	14
4 Résultats obtenus	16
5 Comparaison	17
5.1 Différences de résultat	18
5.2 Différence de temps	18
6 Optimisation	18
6.1 Méthode de Douglas	18
7 Conclusion	18

1 Présentation du problème

Le traitement d'images est un ensemble de méthodes permettant d'étudier et de transformer une ou plusieurs images à l'aide de moyens mathématiques et numériques. Le principe du traitement d'images consiste à extraire certaines informations de celles-ci, afin de les étudier ou de les modifier. Il est utilisé dans beaucoup d'applications telles que l'amélioration du contraste, l'application d'un filtre (flou, lissage, changement de couleurs), ou encore les détections et identifications d'objets par exemple.

Aujourd'hui, nous nous intéressons à l'incrustation d'images. A partir de deux images, comment sélectionner une partie de la première et l'incruster de la manière la plus naturelle possible dans la seconde ?

Afin d'éclaircir nos propos et d'identifier les problèmes que nous devons résoudre, voici un exemple de ce que nous souhaitons faire.

Nous disposons des deux images présentées ci-dessous, l'image T(arget) et l'image S(ource).

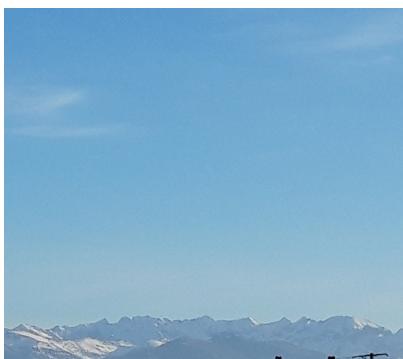


Figure 1: Image T



Figure 2: Image S

L'objectif est d'incruster toute ou partie de l'image S dans l'image T. En terme de manipulations, cela consiste à effectuer un copier/coller ou encore un clônage de la seconde image dans la première. Le résultat que nous attendons pour une incrustation "réussie" est un résultat comme celui présenté ci-dessous :



Figure 3: Image finale attendue

Cette image est extraite d'une simulation effectuée sur 'ipol.im/...'. Nous comparerons les images obtenues avec nos algorithmes avec celle-ci à la fin de ce rapport.

Remarques Ce résultat semble naturel, les frontières entre l'image collée et l'arrière plan sont très peu visibles, les oiseaux semblent faire partie de l'image finale. Mais comment obtenir un tel résultat ?

Reprendons nos deux images séparées, T et S. Commençons par effectuer un simple copier/coller. Certains pixels de T sont donc écrasés par ceux de S. En effectuant cette manipulation voici l'image que nous devrions obtenir :



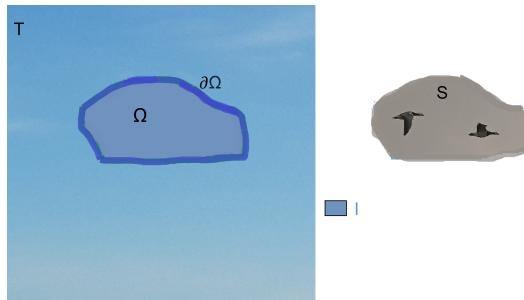
Figure 4: Simple copier/coller

Ce résultat n'est bien entendu pas convenable et bien loin de l'image finale attendue. Le découpage et le collage entre l'arrière-plan et l'image "objet" sont beaucoup trop visibles, les couleurs ne sont pas les mêmes et incohérentes. Nous souhaitons obtenir un résultat beaucoup plus naturel, comme écrit plus haut. Cette simple manipulation n'est donc pas suffisante pour effectuer le clônage cohérent d'une image dans une autre.

Il semble évident de vouloir modifier l'image finale obtenue afin qu'elle paraisse la plus naturelle possible. Nous verrons tout au long de ce rapport, quels sont les changements à effectuer, et comment la résolution d'une équation aux dérivées partielles, nous permet d'obtenir un bien meilleur résultat.

1.1 Traduction du problème sous formes mathématiques.

Comme écrit plus haut nous souhaitons apporter des modifications au précédent collage afin qu'il corresponde au mieux à nos attentes. Pour ce faire, considérons I , la partie de l'image finale à modifier. Nous pouvons ainsi représenter le problème sous forme schématique.



Ici :

- T est l'image "Target", l'image destination, l'image sur laquelle s'effectuera le collage, l'arrière plan.
- S est l'image "Source", l'image que nous souhaitons coller.
- Ω est le domaine dans lequel se trouvent nos inconnues.
- $\partial\Omega$ est la frontière de Ω .
- I est notre inconnue, la partie de l'image que nous ne connaissons pas et que nous voulons remplir.

Nous souhaitons donc trouver une fonction I qui satisfasse un certain nombre de critères, afin de correspondre au résultat voulu. Cette fonction représente notre image modifiée. Mais quelles sont les conditions qu'elle doit remplir pour que le rendu soit le meilleur possible? Notre nouvelle image I doit-elle être plus proche de l'image collée S , ou de l'image d'arrière-plan T ?

Pour répondre à cette question, reprenons le problème de départ.

Pour que l'image obtenue paraisse naturelle, il faut que celle-ci dénature le moins possible les deux images sélectionnées au départ. En effet, nous devons garder les détails de l'image que nous voulons coller, S , ne pas modifier les variations qu'elle pourrait posséder comme les contours des objets lui appartenant, par exemple. Nous devons pouvoir retrouver les informations présentes dans celle-ci. Il faut donc que les variations présentes dans I soient presque identiques à celles de S . Mathématiquement, de manière équivalente, nous cherchons une fonction I dont le gradient est le plus proche possible, ou identique à celui de l'image collée, S . Nous cherchons donc :

$$\min \iint_{\Omega} \|\nabla I_{x,y} - \nabla S_{x,y}\|^2 dx dy$$

Mais les démarcations entre notre image collée et l'image d'arrière-plan T, ne doivent pas non plus être visibles, il faut donc que les pixels se situant sur cette partie là, i.e $\partial\Omega$, soient le plus proches possible de T . Nous voulons donc, mathématiquement, chercher la fonction I qui vérifie:

$$I_{(x,y)} = T_{x,y} \text{ sur } \partial\Omega$$

Répondre au problème implique donc de résoudre un problème variationnel classique auquel des conditions sur le bord de Dirichlet sont ajoutées. Réécrivons le problème mathématique que nous cherchons à résoudre :

$$\begin{cases} \min \iint_{\Omega} \|\nabla I_{x,y} - \nabla S_{x,y}\|^2 dx dy \\ I_{(x,y)} = T_{x,y} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1.2 Résolution

Pour résoudre cette équation, nous devons trouver le minimum de la fonction g suivante :

$$g(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I(x) - v(x)\|^2 dx \quad (1)$$

Si g admet un minimum alors, celui-ci annule son gradient.

Calcul du gradient de g

$$g(I + \epsilon u) - g(I) = \int_{\Omega} \|\nabla(I + \epsilon u) - v\|^2 - \|\nabla I - v\|^2 dx$$

En développant :

$$\begin{aligned} g(I + \epsilon u) - g(I) &= \int_{\Omega} \|\nabla I - v\|^2 + \|\nabla \epsilon u\|^2 + \langle 2(\nabla I - v), \epsilon \nabla u \rangle - \|\nabla I - v\|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \epsilon^2 \|\nabla u\|^2 + \langle 2(\nabla I - v), \epsilon \nabla u \rangle dx \\ &= 2 \int_{\Omega} (\nabla I - v) \times (\nabla \epsilon u) + O(\epsilon^2) \\ &= -2\epsilon \int_{\Omega} \langle \nabla I - v, \nabla u \rangle + O(\epsilon^2) \\ &= -2 \int_{\Omega} \langle \nabla I - v, \nabla u \rangle + O(\epsilon) \\ &= 2 \langle \operatorname{div}(\nabla I - v), u \rangle + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Par identification, le gradient de g vaut

$$\nabla g(I) = (\Delta I - \operatorname{div}(v))$$

Le minimum de g annule son gradient donc on cherche I tel que :

$$0 = (\Delta I - \operatorname{div}(v))$$

Ici $v = \nabla S$

$$\begin{aligned} \Delta I &= \operatorname{div}(\nabla S) \\ \Delta I &= \Delta S \end{aligned}$$

Trouver le minimum de la fonction revient donc à résoudre l'équation :

$$\Delta I = \Delta S$$

Cette équation est l'équation de Poisson.

Résoudre ce problème variationnel est équivalent à résoudre l'équation de poisson avec conditions aux bords de Dirichlet, suivante :

$$\begin{cases} \Delta I = \Delta S \text{ sur } \Omega \\ I = T \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous verrons deux approches afin de résoudre cette équation, la première utilisant des discrétisations, la seconde la méthode de Fourier.

2 Résolution

Nous verrons dans un premier temps, comment résoudre cette équation à l'aide de discrétisation et de différences finies. Puis nous résoudrons celle-ci à l'aide des transformées de Fourier. Rappelons que nous souhaitons résoudre l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} \Delta I = \Delta S \text{ sur } \Omega \\ I = T \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2.1 Discrétisation

Avant de discrétiser les Laplaciens de nos deux images, il faut définir le maillage que nous allons utiliser.

2.1.1 Qu'est qu'une image

Une image peut être représentée comme une succession de pixels. En traitement d'image, ce sont d'ailleurs sur ces pixels que le traitement est effectué. Leur modification entraîne la modification de l'image globale. Nous verrons donc une image comme la succession de pixels et nous pouvons la représenter comme une grille, dans laquelle chaque carré représente un pixel. Schématiquement, nous pourrions donc découper notre image comme ci-dessous. Nous

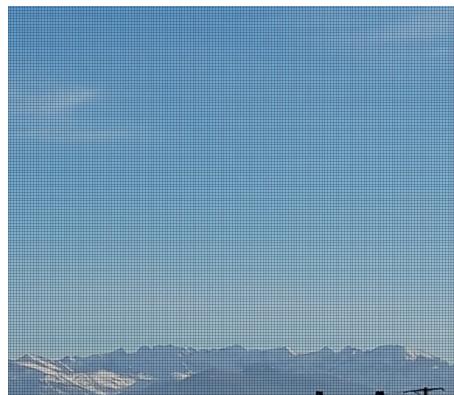


Figure 5: Maillage d'une image

numéroterons les pixels suivant la règle suivante. Le premier pixel est situé en haut en gauche, puis il suffit de parcourir la grille comme ci-dessous :

Les pas d'espaces sont donc égaux et valent 1. Dans la suite nous considérons que notre image est de taille $N \times M$.

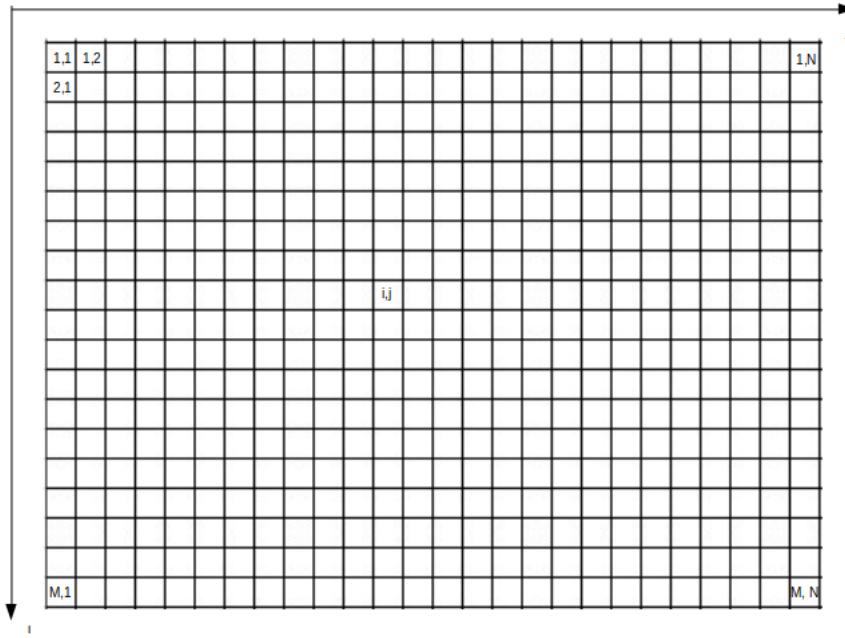


Figure 6: Parcours d'une grille

2.2 Les différents opérateurs nécessaires

Nous utiliserons certains opérateurs que nous définissons ici afin de ne pas alourdir les différentes sections.

Le gradient

Le Laplacien Le Laplacien peut s'écrire de la forme :

$$\Delta I(x, y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

2.3 Méthode des différences finies

Nous cherchons à résoudre :

$$\begin{cases} \Delta I = \Delta S \text{ sur } \Omega \\ I = T \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En utilisant la méthode des différences finies, commençons par discréteriser le Laplacien. Pour discréteriser celui-ci, il faut donc commencer par discréteriser $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$.

Discréétisation des dérivées secondes : A l'aide des formules de Taylor à l'ordre 2 ci-dessous :

$$\begin{aligned} I(x+h, y) &= I(x, y) + h \times \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \times \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} + o(h^3) \\ I(x-h, y) &= I(x, y) - h \times \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \times \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} + o(h^3) \end{aligned}$$

Et en effectuant la somme de ces deux équations, nous obtenons une discréétisation possible de $\frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (I(x+h, y) + I(x-h, y) - 2 \times I(x, y))$$

2.3.1 Discrétisation du Laplacien

Comme le Laplacien n'est autre que la somme de $\frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial y^2}$, une discrétisation possible de celui-ci s'écrit de la forme :

$$\Delta I(x, y) = \frac{I(x+h, y) + I(x-h, y) - 2 \times I(x, y)}{h^2} + \frac{I(x, y+k) + I(x, y-k) - 2 \times I(x, y)}{k^2}$$

Les pas d'espaces h et k étant égaux à 1, nous pouvons écrire une discrétisation du Laplacien :

$$\Delta I(x, y) = I(x+1, y) + I(x-1, y) + I(x, y+1) + I(x, y-1) - 4 \times I(x, y)$$

Application à une image Afin de calculer le Laplacien du pixel $I(i,j)$, il est donc nécessaire d'avoir la connaissance de ses pixels voisins que nous nommerons par la suite U(p), D(own), L(eft), R(ight) pour les pixels $I(i-1,j)$, $I(i+1,j)$, $I(i,j-1)$, $I(i,j+1)$.

	1	
1	-4	1
	1	

2.3.2 Résolution de l'équation de Poisson

Soit $g(x, y) = S(x+1, y) + S(x-1, y) + S(x, y+1) + S(x, y-1) - 4 \times S(x, y)$

Résoudre $\Delta I(x, y) = \Delta S(x, y)$ sur Ω est équivalent à résoudre :

$$\begin{cases} I(i+1, j) + I(i-1, j) + I(i, j+1) + I(i, j-1) - 4 \times I(i, j) = g(i, j) \\ \text{pour } (i, j) \in \Omega \\ I(i, j) = T(i, j) \text{ pour } (i, j) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Nous devons donc résoudre un système à $M \times N$ inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{l} I(1, 1) = T(1, 1) \\ I(3, 2) + I(1, 2) + I(2, 3) + I(2, 1) - 4I(2, 2) = g(2, 2) \\ I(3, 3) + I(1, 3) + I(2, 4) + I(2, 2) - 4I(2, 3) = g(2, 3) \\ \dots \\ I(M, N-1) + I(M-2, N-1) + I(M-1, N) + I(M-1, N-2) = g(M-1, N-1) \\ I(M, N) = T(M, N) \end{array} \right. \quad (2)$$

Afin de résoudre ce système, il est plus facile de l'écrire sous forme matricielle. Nous devons donc résoudre un système de la forme $AI = b$ et sa solution est : $I = A^{-1} \times b$. Avec :

- A une matrice carrée de taille $(M \times N, M \times N)$
- I un vecteur colonne de taille $(M \times N, 1)$
- b un vecteur colonne de taille $(M \times N, 1)$

Voici donc à quoi ressemble le système que nous souhaitons résoudre :

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(1, 1) \\ I(2, 1) \\ \dots \\ I(1, 2) \\ I(2, 2) \\ \dots \\ I(M, N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(1, 1) \\ g(2, 1) \\ \dots \\ g(1, 2) \\ g(2, 2) \\ \dots \\ g(M, N) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Transformation de l'image Afin de pouvoir résoudre ce système, I doit être un vecteur colonne. Or dans notre cas, I est une matrice de taille (M,N) . Le nouveau vecteur I , est la concaténation des colonnes de l'image I , comme ci dessous.

Ecriture de la matrice du système Pour remplir la matrice A dont nous avons besoin.Premièrement

Ecriture de vecteur Après avoir calculé le Laplacien de l'image S , le vecteur b est obtenu en concaténant les colonnes de l'image ΔS .

Exemple simple Considérons l'image S ci-contre que nous souhaitons coller. Nous souhaitons ici coller les



Figure 7: Image à coller

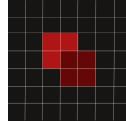


Figure 8: Vue grille pixel

deux carrés rouge sur une image que nous nommerons T . Commençons par sélectionner la zone que nous souhaitons coller, comme ci-dessous.

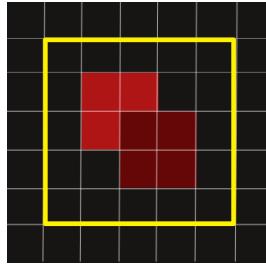


Figure 9: Sélection à coller

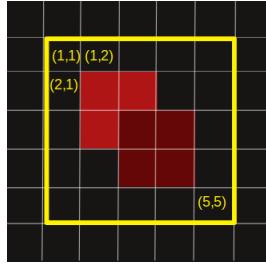


Figure 10: Numérotation des pixels

Construction du système Ici les pixels avec la pastille verte sont sur $\delta\Omega$. On veut donc résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{1,1} = T_{1,1} \\ \dots \\ I_{5,1} = T_{5,1} \\ I_{1,2} = T_{1,2} \\ \Delta I_{2,2} = \Delta S_{2,2} \\ \Delta I_{3,2} = \Delta S_{3,2} \\ \Delta I_{4,2} = \Delta S_{4,2} \\ \dots \end{array} \right. \quad (4)$$

Avec $\Delta I(i, j) = U + D + L + R - 4I(i, j)$.

En écrivant ce système sous forme matricielle la matrice A est la matrice 25×25 ci-dessous :

Figure 11: Matrice du système

Le vecteur I est obtenu en concaténant les colonnes de la sélection, il est de taille(25×1) :

$$\begin{pmatrix} I(1,1) \\ I(2,1) \\ \dots \\ I(5,1) \\ \dots \\ I(1,3) \\ \dots \\ I(5,3) \\ \dots \\ I(5,5) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Enfin le vecteur b

$$\begin{pmatrix} T(1,1) \\ \dots \\ \Delta S(2,2) \\ \dots \\ T(5,2) \\ \Delta S(1,3) \dots \\ T(5,3) \\ \Delta S(2,4) \\ \dots \\ \Delta S(4,4) \\ T(5,4) \\ \dots \end{pmatrix} \quad (6)$$

La solution I, s'écrit sous la forme $I = A^{-1}b$.

2.4 Fourier

Avec cette seconde méthode nous allons résoudre l'équation de Poisson à l'aide de la transformée de Fourier. Avant de formuler la résolution de ce problème. Rappelons la définition des opérateurs dont nous aurons besoin dans la suite

2.4.1 Rappel et définitions des opérateurs

Transformée de Fourier Soit S une fonction, sa transformée de Fourier peut s'écrire de la façon suivante :

$$\widehat{S}(x, y) = \sum_{k=0}^{W-1} \sum_{l=0}^{H-1} S(k, l) e^{-2\pi i \left(\frac{k \times x}{W} + \frac{l \times y}{H}\right)} \quad (7)$$

Enfin afin de retrouver la fonction initiale nous aurons besoin de la transformée de Fourier inverse :

$$S(k, l) = \frac{1}{WH} \sum_{x=0}^{W-1} \sum_{y=0}^{H-1} \widehat{S}(x, y) e^{2\pi i \left(\frac{xk}{W} + \frac{yl}{H}\right)} \quad (8)$$

Gradient Nous pouvons calculer le gradient d'une fonction dans le domaine de Fourier. Nous considérons toujours S la fonction que nous souhaitons étudier.

$$\widehat{\nabla(S)} = \begin{pmatrix} \widehat{\frac{\partial I}{\partial k}} \\ \widehat{\frac{\partial I}{\partial l}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

En dérivant l'expression ci-dessus par rapport à la première variable :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial k} &= \sum_{x=0}^{W-1} \sum_{y=0}^{H-1} S(x, y) e^{2\pi i \left(\frac{k \times x}{W} + \frac{l \times y}{H}\right)} \left(\frac{2\pi i x}{W}\right) \\ &= \left(\frac{2\pi i x}{W}\right) S(k, l) \\ \widehat{\frac{\partial S}{\partial k}} &= \left(\frac{2\pi i x}{W}\right) \widehat{S}(k, l) \end{aligned} \quad (10)$$

Le calcul est similaire pour $\frac{\partial S}{\partial l}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial S}{\partial k}} &= \left(\frac{2\pi i}{W} x\right) \widehat{S} \\ \widehat{\frac{\partial S}{\partial l}} &= \left(\frac{2\pi i}{H} y\right) \widehat{S} \end{aligned} \quad (11)$$

Laplacien

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 S}{\partial k^2} &= \sum_{x=0}^{W-1} \sum_{y=0}^{H-1} S(x, y) e^{2\pi i (\frac{k \times x}{W} + \frac{l \times y}{H})} \left(\frac{2\pi i x}{W} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{2\pi i x}{W} \right)^2 S(k, l) \\
 \widehat{\frac{\partial^2 S}{\partial k^2}} &= \left(\frac{2\pi i x}{W} \right)^2 \widehat{S(k, l)}
 \end{aligned} \tag{12}$$

On a donc : $\widehat{\Delta S} = \widehat{\frac{\partial^2 S}{\partial k^2}} + \widehat{\frac{\partial^2 S}{\partial l^2}}$.

$$\widehat{\Delta S} = \left(\frac{2\pi i x}{W} \right)^2 \widehat{S} + \left(\frac{2\pi i y}{H} \right)^2 \widehat{S} \tag{13}$$

2.4.2 Résolution de la méthode Fourier

Rappelons que nous devons résoudre l'équation :

Ainsi en calculant le laplacien dans le domaine de Fourier, on obtient : $\widehat{\Delta I} = \widehat{\Delta S}$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2\pi i x}{W} \right)^2 \widehat{I} + \left(\frac{2\pi i y}{H} \right)^2 \widehat{I} &= \left(\frac{2\pi i x}{W} \right) \widehat{S} + \left(\frac{2\pi i y}{H} \right) \widehat{S} \\
 \left(\left(\frac{2\pi i x}{W} \right)^2 + \left(\frac{2\pi i y}{H} \right)^2 \right) \widehat{I} &= \left(\frac{2\pi i x}{W} \right) \widehat{S} + \left(\frac{2\pi i y}{H} \right) \widehat{S} \\
 \widehat{I} &= \frac{\left(\frac{2\pi i x}{W} \right) \widehat{S} + \left(\frac{2\pi i y}{H} \right) \widehat{S}}{\left(\left(\frac{2\pi i x}{W} \right)^2 + \left(\frac{2\pi i y}{H} \right)^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Afin de retrouver I, il suffit d'appliquer la transformée inverse, à l'équation ci-dessus.

3 Implémentation

Voici une présentation de l'interface et ses fonctionnalités.

3.1 Interface

Voici comment se présente notre interface :

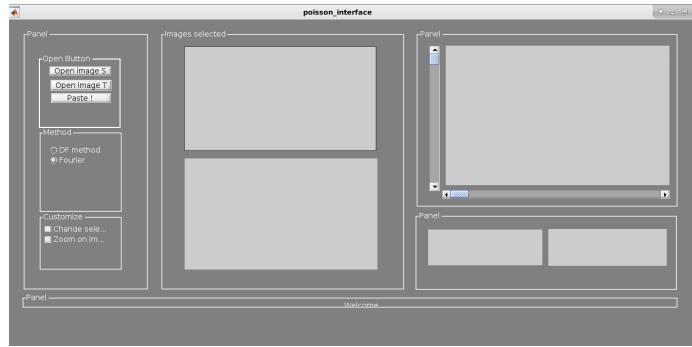


Figure 12: Interface 1.0

3.1.1 Ouverture d'images

Vous pouvez ouvrir n'importe quelle image en cliquant sur les boutons situés en haut à gauche de l'interface. En cliquant sur eux, une boîte de dialogue vous proposera de choisir une image présente sur votre ordinateur. Une fois

sélectionnée cette image sera affichée sur l'interface et vous pourrez travailler dessus. Image S correspond à l'image Source, c'est l'image que vous souhaitez coller. Et l'image T représente l'image Target, l'image d'arrière plan. Ici nous avons choisi d'ouvrir ces deux images. L'image à coller s'affichera dans le premier rectangle, celui le plus haut. Tandis que l'image d'arrière plan s'affichera en dessous de la première.

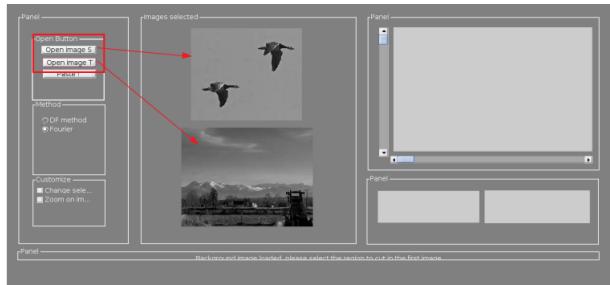


Figure 13: Ouverture d'images

3.1.2 Sélection

Une fois vos deux images ouvertes, il vous faut sélectionner la partie de l'image S que vous souhaitez coller dans l'image T. Pour cela cliquez une première fois sur l'image S : celle du haut puis cliquez une seconde fois pour dessiner sur l'image, la partie que vous souhaitez extraire.

Pour la seconde image, faites de même, cliquez une première fois sur l'image puis cliquez une seconde fois pour choisir l'endroit où vous souhaitez coller la partie sélectionnée plus tôt. Voici ce que vous devriez obtenir.

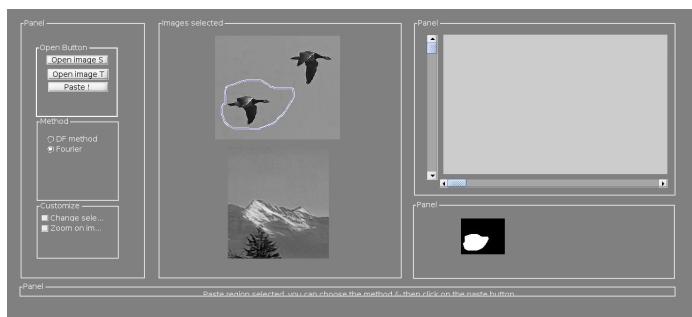


Figure 14: Sélection des parties

3.1.3 Choix des méthodes

Vous pouvez sélectionner la méthode avec laquelle vous voulez coller l'image S dans l'image T. Vous avez pour l'instant deux méthodes :

- Avec les différences finies
- Avec Fourier

3.1.4 Différences finies

Une fois la méthode DF choisie, il vous suffit de cliquer sur le bouton "Paste!" pour afficher le résultat. Ce résultat s'affiche dans la partie droite de l'interface.

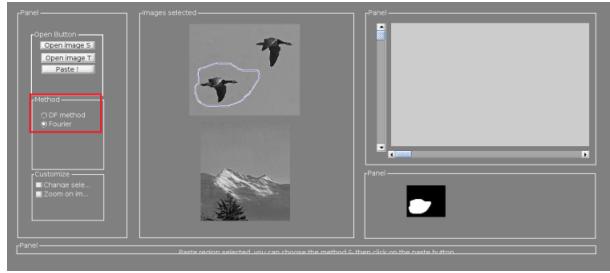


Figure 15: Choisir une méthode

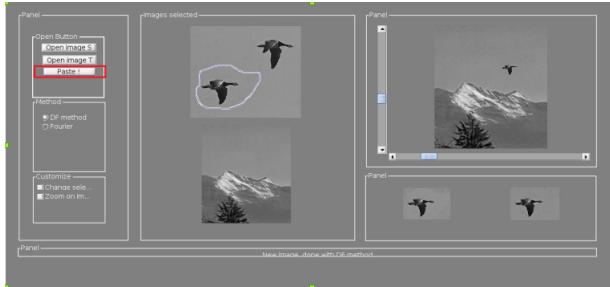


Figure 16: Différences finies

3.1.5 Fourier

Pour afficher le résultat obtenu avec Fourier, il suffit de cocher la case Fourier. Nous avons ajoutés des options

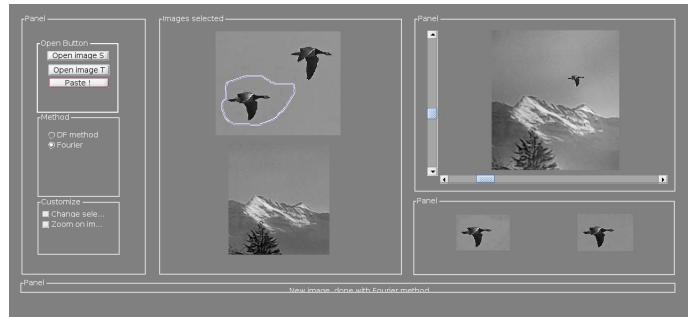


Figure 17: Résultat obtenu avec la méthode de Fourier

comme l'option de zoom qui permet de zoomer sur une image pour voir de plus près le collage de l'image.

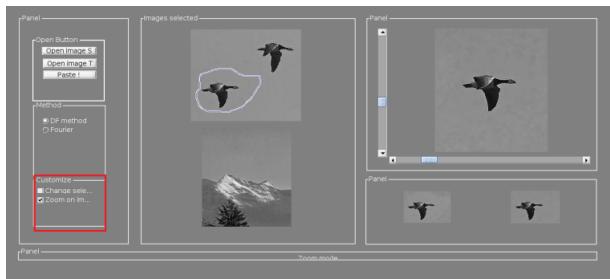


Figure 18: Zoom

3.1.6 Amélioration avec change selection

ATTENTION CETTE FONCTIONNALITE NE FONCTIONNE POUR L'INSTANT QU'AVEC LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES Nous avons aussi remarqué un problème en effectuant différents tests sur les images : Ainsi nous avons ajouté, l'option Change sélection qui re-dimensionne automatique la

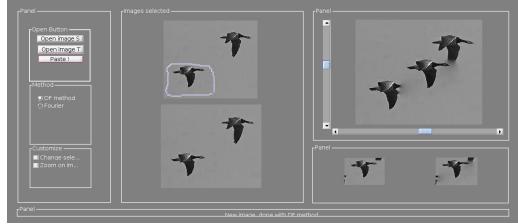


Figure 19: Problème de collage

sélection afin de résoudre ce pb.

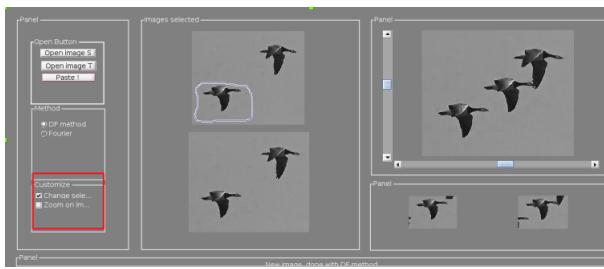


Figure 20: Résolution du problème

3.1.7 Sliders

Vous pouvez bouger les sliders présents à droite afin de déplacer la zone collée dans l'image de fond. La solution au problème est alors automatiquement recalculée en fonction de l'endroit où l'objet à collé.

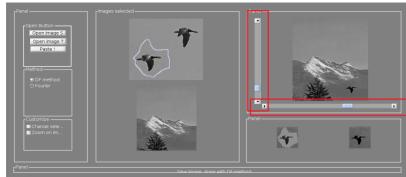


Figure 21: Modifier l'endroit de collage

3.2 Organisation du code

Nous avons organisé le code sous forme de classes. Le projet contient 2 classes principales, la classe, Fourier et la classe DFinies

Classe Fourier

Propriétés

- $grad_{Tj}, grad_{Ti}$: permet de stocker le gradient de T, l'image d'arrière-plan
- $grad_{sj}, grad_{si}$: Permet de stocker le gradient de S, l'image à coller.

Méthodes

- `compute_grad` : permet de calculer le gradient d'une image.
- `symmetry` : Permet d'étendre l'image par symétrie, alors la taille de l'image est multipliée par 2.
`solve` : utilise la formule $\hat{A} \hat{b}$, pour trouver la solution de l'équation de Poisson à l'aide de la méthode de Fourier.
- `resize` : permet de redimensionner l'image qui avait été symétrisée auparavant.

Classe DFinies

Propriétés

- `size` : taille de la matrice.
- `matrix` : permet de stocker la matrice du système.
- `vector` : permet de stocker le vecteur b associé au système.
- `i_vect` : Permet de stocker les numéros de lignes de la matrice creuse A
- `j_vect` : Permet de stocker les numéros des colonnes de la matrice creuse A
- `v_vect` : Permet de stocker les coefficients de la matrice creuse A

Méthodes

- `add_four` : ajoute à la matrice creuse le coefficient -4, à la position i, j
- `pix_up_is_inside` : ajoute le coefficient 1 à la matrice creuse, à la position
- `pix_down_is_inside` : ajoute le coefficient 1 à la matrice creuse, à la position
- `pix_left_is_inside` : ajoute le coefficient 1 à la matrice creuse, à la position
- `pix_right_is_inside` : ajoute le coefficient 1 à la matrice creuse, à la position
- `is_inside` :
- `find_roi` : Trouve la région d'intérêt dans l'image
- `find_useless` : Trouve les pixels, ne faisant pas partie de ma sélection
- `create_matrix` : Crée la matrice A, pour résoudre le système.
- `Laplacian` : Calcule le laplacien d'une image et met à jour le vecteur b.
- `solve` : Résout le système Ax=b et trouve l'image finale.

Classe Mask

Propriétés

- `associate_im`
- `associate_roi`
- `matrix`
- `pos`
- `pos_to_move`
- `cut_im`
- `shift_done`

- *boundaries*

Méthodes

- *reinitialize_mask*
- *save_mask_settings*
- *move_roi*
- *invert_mask*
- *find_boundaries*
- *modify_mask_values*
- *adjust_size*
- *change_selection*

Fonction Copy/Paste

4 Résultats obtenus



Figure 22: Images sélectionnées



Figure 23: Différences finies



Figure 24: Fourier



Figure 25: Différence Finie ajustée



Figure 26: Images sélectionnées



Figure 27: Différences finies



Figure 28: Fourier



Figure 29: Images sélectionnées



Figure 30: Différences finies



Figure 31: Fourier

5 Comparaison



Figure 32: Différence Finie zoom

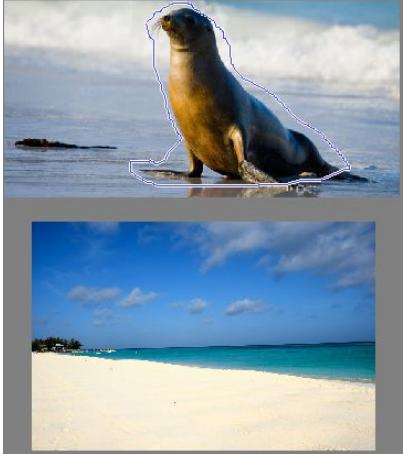


Figure 33: Images sélectionnées



Figure 34: Différences finies



Figure 35: Fourier

5.1 Différences de résultat

En comparant les images ci-dessus, nous pouvons observer quelques différences entre la méthode de Fourier et celle des Différences finies. En effet, la méthode des différences finies ne travaille que sur une partie de l'image, celle qui va être collée, afin de l'adapter au mieux à l'image de fond. Le reste de l'image n'est pas modifier et on retrouve exactement l'image initiale T en dehors du domaine.

La méthode de Fourier elle, modifie toute l'image, elle n'adapte pas seulement la partie à coller, mais c'est toute l'image qui est modifiée pour être la plus convenable possible.

5.2 Différence de temps

La méthode des différences finies fait intervenir une inversion matricielle, qui si elle est grande peut prendre pas mal de temps. Cette méthode consiste en la résolution d'un système plus ou moins grand, qui peut parfois prendre du temps.

La méthode de Fourier, elle semble plus rapide, il est facile de calculer le gradient de l'image, et la fft est plus rapide. Sur de grandes sélections c'est donc cette méthode qui serait à privilégier.

6 Optimisation

6.1 Méthode de Douglas

7 Conclusion