## Рух по колу. Система трьох тіл. Рівняння руху планет

***Рух по колу***

*Постановка задачі.* Описати рух матеріальної точки масою *m* навколо нерухомого силового центра (початок системи координат).

*Аналіз задачі.* У сили притягання є дві властивості загального характеру: її величина залежить тільки від відстані між тілами, а напрямок збігається з лінією їх сполучення. Такі сили називаються центральними. Крім того, рух обмежується умовою збереження повної енергії *E,* рівної

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m\upsilon^2}_{E_p} \underbrace{- G\frac{mM}{r}}_{E_k},$$

де вектор $\vec{r}$ спрямований від тіла з масою *M* до тіла з масою *m,* а *G* — постійна притягання. $G = 6.67 \cdot 10^{-11} м^3 / кг \cdot с$ Знак мінус означає, що притягання прагне зменшити відстань $r$ між тілами.

Сила взаємодії визначатиметься похідною потенціальною енергії:

$$F = -\frac{dE_p}{dr} = -G\frac{mM}{r^2}.$$

Якщо зв'язати систему координат з тілом масою *M,* то рівняння руху набуде вигляду:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2}.$$

*Математична модель*

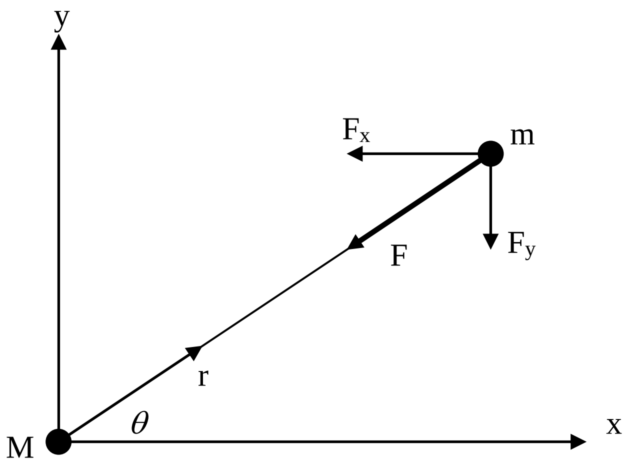



Рис. 1. Тіло масою m рухається під дією центральної сили F.

Введемо позначення (рис. 1):

υ – швидкість тіла;

R – радіус кола;

a – доцентрове прискорення.

Величина прискорення **a** пов’язана з радіусом кругової орбіти R та швидкістю тіла υ відношенням

$$a = \frac{\upsilon^2}{r}. \qquad (1)$$

Прискорення завжди направлене до центра та обумовлене гравітаційною силою. Тому, за другим законом Ньютона, маємо

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = -G\frac{mM}{r^2} \qquad (2)$$

або

$$v = \sqrt{\frac{MG}{r}}. \quad (3)$$

Вираз (3) пов’язує радіус та швидкість і є загальною умовою будь-якої кругової орбіти. Використовуючи відношення

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (4)$$

разом з формулою (3), отримаємо

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}. \quad (5)$$

Формула (5) є частинним випадком третього закону Кеплера, оскільки радіус r відповідає більшій піввісі еліпсу.

Для зручності чисельного моделювання зручно записати силу в декартових координатах:

$$F_x = -\frac{GMm}{r^2}\cos\theta = -\frac{mGM}{r^3}x, \quad (7а)$$

$$F_y = -\frac{GMm}{r^2}\sin\theta = -\frac{mGM}{r^3}y. \quad (7б)$$

У результаті рівняння руху в декартових координатах приймають вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}x, \quad (8а)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}y. \quad (8б)$$

де $r^2 = x^2 + y^2$. Рівняння (8а) і (8б) — приклад „системи диференціальних рівнянь”, оскільки кожне рівняння містить як *x,* так і $y$.

Для вибору початкових умов можна використати рівняння (3). Для спрощення оберемо початкове положення на одній з осей: $x = r$, $y = 0$. Тоді проекції швидкості, направленої по дотичній, визначаться як $vx = 0$, $vy = v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

*Тестовий приклад*

R = 7, M = 1, G = 1, dt = 0.1, $x_0 = r$, $y_0 = 0$, $vx_0 = 0$, $vy_0 = v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

*Завдання*

1. Визначити період обертання, частоту обертання та порівняти з теоретичними оцінками.
2. Дослідити залежність швидкості від радіусу кола.
3. Визначити лінійну та кутову швидкості.

## *Система трьох тіл*

Значну частину наших знань про рух планет об'єднали в собі закони Кеплера, які можна сформулювати наступним чином:

1) всяка планета рухається по еліптичній орбіті, в одному з фокусів якої знаходиться Сонце;
2) швидкість планети зростає в міру віддалення від Сонця таким чином, що пряма, що з'єднує Сонце і планету, у рівні проміжки часу замітає однакову площу.
3) для всіх планет, що обертаються навколо Сонця, відношення $T^2 / a^3$ однакове (*T* – період обертання планети навколо Сонця, *a* – велика піввісь еліпса).

Перший і третій закони Кеплера стосуються форми орбіти, а не залежності швидкості і координати планети від часу. Оскільки ці часові залежності неможливо отримати в елементарних функціях, необхідно розглядати чисельний розв’язок рівнянь руху планет та їх супутників по орбіті.

Рух Сонця і Землі є прикладом задачі двох тіл. Цю задачу можна звести до задачі одного тіла двома методами. В основі найпростішого методу лежить той факт, що маса Сонця набагато більша маси Землі. Отже, з хорошою точністю можна вважати Сонце нерухомим і зв'язати з ним початок системи координат. Користуючись поняттям зведеної маси, рух двох тіл з масами *m* і *M,* повна потенціальна енергія яких залежить тільки від відстані між ними, можна звести до еквівалентної задачі про рух одного тіла зведеної маси $\mu$, що описується формулою

$$\mu = \frac{Mm}{m+M}$$

Оскільки маса Землі $m$=5.99× 10$^{24}$кг, а маса Сонця $M$=1.99×10$^{30}$ кг, то зрозуміло, що для більшості практичних цілей зведена маса Сонця і Землі дорівнює масі Землі.

При моделюванні системи трьох тіл (Сонце, Земля, Місяць) використовуються ті ж самі рівняння, що і для попередніх систем (руху тіла по колу або системи двох тіл), але при визначенні сили потрібно враховувати вплив двох інших тіл (за законом суперпозиції):

$$F_z = -\frac{Gm_s m_z}{r_{sz}^2} - \frac{Gm_z m_m}{r_{zm}^2}$$ – сила, що діє на Землю;

$$F_m = -\frac{Gm_s m_m}{r_{sm}^2} - \frac{Gm_z m_m}{r_{zm}^2}$$ – сила, що діє на Місяць.

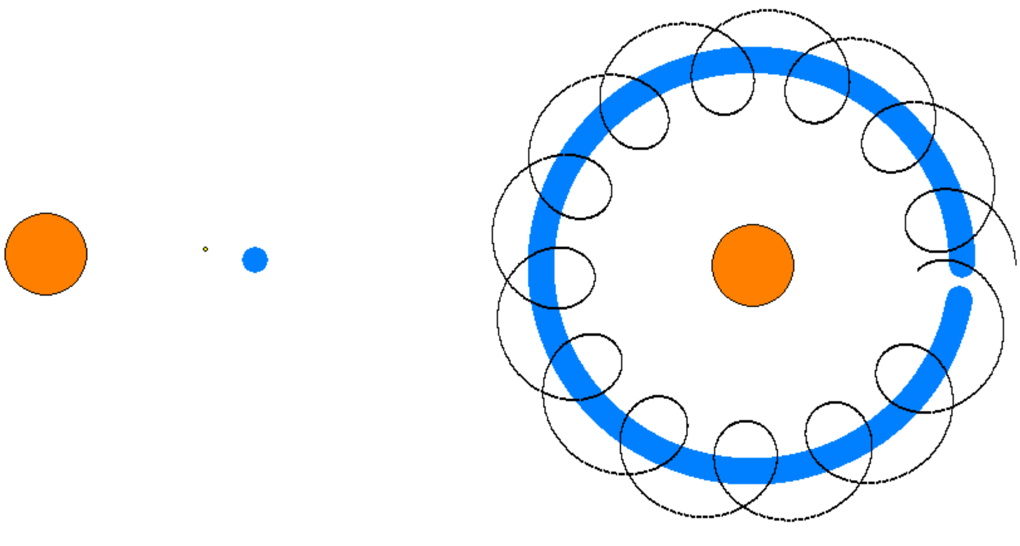
Аналогічно визначається вплив Землі та Місяця на Сонце. Але, оскільки Сонце має набагато більшу масу, то будемо вважати його нерухомим центром відліку.

Початкові умови оберемо аналогічно до моделі руху тіла по колу з урахуванням того, що місяць рухається в системі Земля-Місяць:

$$vy_z = v_z = \sqrt{\frac{Gm_s}{r_{sz}}},\ vy_m = v_m = vy_z + \sqrt{\frac{Gm_z}{r_{zm}}}.$$

*Постановка задачі*

Змоделювати рух Землі з супутником навколо Сонця.



Результати моделювання системи Сонце-Земля-Місяць.
(при візуалізації враховано, що координати Місяця потрібно виводити відносно Землі;
при цьому для наочності збільшено відстань між Землею і Місяцем у 100 разів)

*Завдання*

4) Підібрати початкові умови для руху Землі по еліптичній орбіті.
5) Перевірити другий закон Кеплера.
6) Перевірити третій закон Кеплера.