

Модель системи зв'язаних осциляторів

При зв'язуванні гармонічних осциляторів (частинок, які рухаються за законом Гука) між собою їх рух вже не буде описуватися гармонічними коливаннями. Так само коливання атомів у кристалі неможливо описати одним синусоїдальним (гармонічним) законом. Причина в тому, що коливання зв'язаних частинок визначається зміщеннями не лише самого атома, а й його сусідів. Найпростішою моделлю для дослідження зв'язаних коливань є модель системи зв'язаних осциляторів (модель ланцюжка).

При досить великій кількості частинок у ланцюжку рух поперечної хвилі можна моделювати розв'язуючи чисельно рівняння руху Ньютона для окремих частинок. Енергія передається вздовж ланцюжка, хоч кожен з осциляторів залишається поблизу свого рівноважного положення. Загальний рух системи можна представити як суперпозицію N незалежних простих гармонічних коливань.

Постановка задачі. Ланцюжок з N частинок, кожна масою m , з рівноважною відстанню між сусідніми l . Частинки зв'язані пружинками нульової маси з коефіцієнтом пружності k , дві крайні пружинки мають коефіцієнт пружності k_g . Кінці лівої та правої пружинки нерухомі.

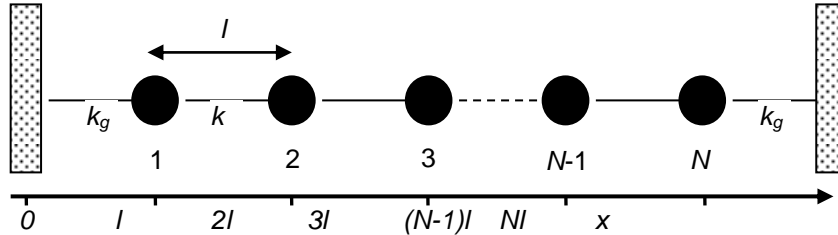


Рис. Модель ланцюжка на пружинках з нерухомо закріпленими кінцями

Положення кожної частинки можна визначати за формулами Ейлера, але вираз для визначення сили, що діє на кожну частинку ускладниться. Розглянемо i -ту частинку та визначимо силу у наближенні найближчого впливу, тобто з урахуванням дії лише сусідніх з частинкою пружинок:

$$F_i = F_i^{left} + F_i^{right} = -|F_i^{left}| + |F_i^{right}| = k_{i,i-1} \cdot \Delta x_{i,i-1} - k_{i,i+1} \cdot \Delta x_{i,i+1}.$$

Оскільки $\Delta x_{i,j} = l - (x_j - x_i)$, $x_i < x_j$, то $F_i = k_{i,i-1} \cdot (l - x_i + x_{i-1}) - k_{i,i+1} \cdot (l - x_{i+1} + x_i)$.

Якщо покласти, що початок відліку співпадає з лівою стінкою, то рівноважні положення кульок визначатимуться як $x_i(0) = i \cdot l$. Тоді формулу для визначення сили можна спростити:

$$F_i = \begin{cases} k_g \cdot (l - x_1) - k \cdot (l - x_2 + x_1), & i = 1 \\ -k \cdot (2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}), & i = \overline{2, N-1} \\ k \cdot (l - x_N + x_{N-1}) - k_g \cdot (x_N - Nl), & i = N \end{cases}.$$

Далі для кожної з частинок на кожному кроці по часу необхідно використати молекулярно-динамічну схему. Для опису координат, швидкостей та сил доцільно використати масиви. Як і в задачі про гармонічний осцилятор, систему необхідно вивести з рівноваги, щоб повна енергія системи не дорівнювала нулю. Для цього можна задати початкові зміщення та швидкості кожній з кульок. Ми для прикладу зміщуємо лише одну з кульок на величину Δx (для означеності першу).

Тестовий приклад.

$m = 1$, $k = 10$, $k_g = 2$, $x_i(0) = i \cdot l$, $v_i(0) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, $t_{gf} = 10$.

Завдання.

1. Виводити положення кульок у кожен момент часу.
2. Визначити повну енергію системи.
3. Розглянути систему зі слабо зв'язаними пружинками $k_g > k$ ($k_g = 1$, $k = 0.2$). Отримати часову залежність першої частинки. Чи можна розпізнати два види коливань, накладених одне на одне. Чому дорівнює період коливань амплітуди.
4. Як якісно зміниться частота коливань при $k = 0.1$.

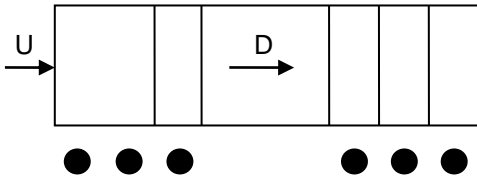


Рис. Взаємнооднозначна відповідність кульок ланцюжка кристалічним прошаркам, що перпендикулярні напрямку навантаження U

нашій моделі відповідає прошарку деякої товщини металу, розміщеного перпендикулярно до напрямку удару, то можна дослідити залежність швидкості перенесення імпульсу D , наданого першій кульці, від швидкості удару U . На відміну від алгоритму A1_2_1: 1) початкові швидкості і координати кульок, крім швидкості першої ($v_1 := U$), задаємо нульовими; 2) в ітераційній процедурі швидкості першої та останньої кульки і координату останньої кульки не перераховуємо, координата першої кульки залежить від постійної швидкості U ; 3) цикл по часу повторюємо, поки швидкість останньої кульки нульова (поки імпульсу не переданий останній кульці) – алгоритм A1_2_2.

