Модель гармонічного осцилятора

Розглянемо найпростішу модель одновимірного гармонічного осцилятора. Зрозуміло, що така модель є тривіальною, і дослідити рух частинки під дією пружної сили можна аналітично. Але для розуміння комп’ютерного моделювання варто почати з задачі, що не обтяжена хитросплетінням фізичних умов та параметрів, а дає загальну картинку експерименту на комп’ютері.

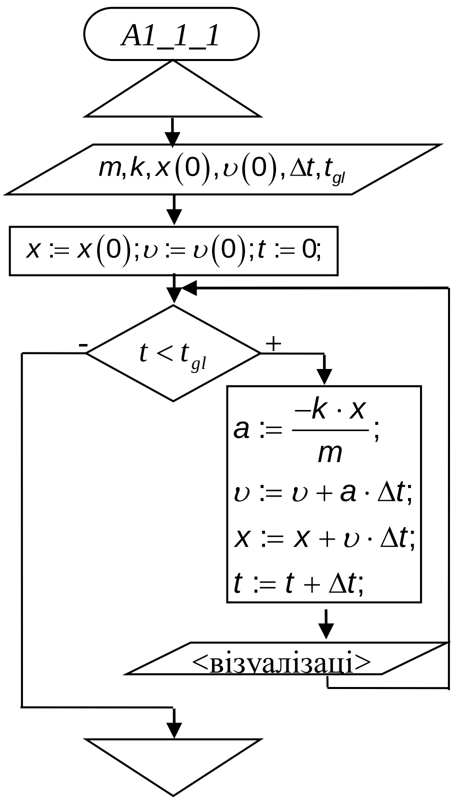
Постановка задачі. *Тіло масою m здійснює коливання на пружині, яка має коефіцієнт жорсткості k (за законом Гука). Перевірити гармонічність коливань (отримати часову розгортку швидкості і координати, фазову траєкторію), визначити закон зміни кінетичної та потенціальної енергії системи, перевірити аналітичну залежність періоду коливань від маси.*

Дослідження модельної системи можна проводити лише через достатньо малі дискретні кроки по часу Δt. Вважаємо, що на кожному малому кроці Δt рух осцилятора рівноприскорений, тобто сила $F = -k \cdot \Delta x$, що діє на тіло, на кожному кроці по часу є константою. Відповідно, прискорення у момент часу t дорівнює

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{-k \cdot \left(x(t) - x_0\right)}{m},$$

де x_0 – положення рівноваги.

Використавши схему Ейлера, визначаємо значення швидкості та прискорення за рекурентними формулами через відповідні значення у попередній момент часу:



$$\upsilon(t+\Delta t) = \upsilon(t) + a(t+\Delta t) \cdot \Delta t;$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t+\Delta t) \cdot \Delta t.$$

Закон руху залежить від початкових умов $x(0)$, $\upsilon(0)$, які визначають повну енергію системи $E(t) = \dfrac{k \cdot \left(x(t) - x_0\right)^2}{2} + \dfrac{m \cdot \upsilon(t)^2}{2}$. Оскільки описана система є ізольованою, і повна енергія зберігається, то, зрозуміло, що хоча б одна з величин $x(0) - x_0$ або $\upsilon(0)$ повинна відрізнятися від нуля.

Відмітимо, що якщо вдало вибрати початок відліку у системі, а саме вибрати рівноважне положення x_0 за нуль, то формули суттєво спростяться.

Отже, для моделювання потрібно задати початкові умови, а далі повторювати обрахунок прискорення, швидкості та координати на кожному кроці по часу, не забуваючи кожного разу збільшувати час на Δt.

Тестовий приклад. $m = 1$, $k = 1$, $x_0 = 0$, $x(0) = 1$, $\upsilon(0) = 0$, $\Delta t = 0.01$, $t_{gl} = 10$.

Завдання.

1. Побудувати траєкторію у фазовому просторі (υ, x).

2. Побудувати графіки часової залежності потенціальної та кінетичної енергії та пересвідчитись, що повна енергія є постійною величиною.

3. Дослідити залежність періоду коливань від маси тіла та порівняти з графіком аналітичної залежності.