Завдання з теми «Цикли».

1. Дано натуральне число n. Обчислити:

а) 2^n;

б) $n!$;

в) $\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

г) $\frac{1}{\sin 1}+\frac{1}{\sin 1+\sin 2}+\frac{1}{\sin 1+\sin 2+\sin 3}+\ldots+\frac{1}{\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n}$;

д) $\sqrt{3+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{3(n-1)+\sqrt{3n}}}}$.

2. Дано дійсне число a та натуральне число n. Обчислити:

а) a^n;

б) $a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+(n-1))$;

в) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a(a+1)}+\ldots+\frac{1}{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$;

г) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}+\ldots+\frac{2}{a^{2^n}}$;

д) $a(a-n)(a-2n)\cdot\ldots\cdot(a-n^2)$.

3. Дано дійсне число x. Обчислити:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{13}}{13!}.$$

4. Дано дійсне число a. Знайти:

а) серед чисел $1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \ldots$ перше, що більше за a;

б) таке найменше n, що $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>a$.

5. Дано натуральне число n.

а) Скільки цифр у числі n?

б) Чому рівна сума його цифр?

в) Знайти першу цифру числа n.

6. Видалити із запису заданого натурального числа n усі парні цифри.

7. Дано натуральні числа n, m. Отримати суму m останніх цифр числа n.

8. Дано натуральне число n.

а) Вияснити, чи входить цифра 3 у запис числа n^2.

б) Поміняти порядок цифр числа на зворотній.
в) Переставити першу та останню цифри числа.
г) Приписати по одиниці на початку та в кінці запису числа n.

9. Використовуючи алгоритм Евкліда пошуку найбільшого спільного дільника (НСД) невід'ємних чисел, для заданих n, m знайти їх НСД та найменше спільне кратне.

10. Дано натуральні числа m, n. Знайти такі натуральні p, q, які не мають спільних дільників, що $p/q = m/n$.

11. Дано додатні дійсні числа a, x, ε. У послідовності y_1, y_2, …, утвореній за законом

$$y_0 = a,\ y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1} + \frac{x}{y_{i-1}}\right),\ i = 1,2,\ldots,$$

знайти перший член y_n, для якого виконується нерівність $\left|y_n^2 - y_{n-1}^2\right| < \varepsilon$.

12. Нехай

$$y_0 = 0,\ y_k = \frac{y_{k-1}+1}{y_{k-1}+2},\ k = 1,2,\ldots$$

Дано дійсне $\varepsilon > 0$. Знайти перший член y_n, для якого виконується нерівність $y_n - y_{n-1} < \varepsilon$.

13. Дано натуральне число n. Обчислити:

а) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$; б) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^5}$; в) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}$;

г) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k}$; д) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$; е) $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(k+1)}{k!}$;

є) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}}$.

14. Знайти перше число Фібоначчі, що більше заданого числа m, а також номер n цього числа. Обчислити суму усіх чисел Фібоначчі, що менші за число m.

15. Скласти програму, що розв'язує наступний числовий ребус:

$$\begin{array}{r} \mathit{oxoxo} \\ +\,\mathit{axaxa} \\ \hline =\mathit{axaxax} \end{array}.$$

16. Обчислити $\sum_{k=1}^{10} k^3 \sum_{i=1}^{15} (k-l)^2$.

17. Знайти натуральне число від 1 до 10000 з максимальною сумою дільників.

18. Дано цілі числа p і q. Отримати всі дільники числа q, взаємно прості з p.

19. Знайти найменше натуральне число n, що може бути подане двома різними способами у вигляді суми кубів двох натуральних чисел $x^3 + y^3$ ($x \geq y$).

20. Дано натуральні числа n, m. Отримати всі менші за n натуральні числа, квадрат суми цифр яких рівний m.

21. Натуральне число називається досконалим, якщо воно рівне сумі своїх дільників, за виключенням самого себе. Число 6 – досконале: 6 = 1+2+3, число 8 – не досконале: 8 = 1+2+4. Дано натуральне число n. Отримати всі досконалі числа, менші за n.

22. Дані натуральне число n, дійсне число x. Отримати:

а) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(2i)! + |x|}{(i^2)!}$; б) $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{(k!+1)!}$; в) $\sum_{k=1}^{n} k^k x^{2k}$; г) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=k}^{n} \frac{x+k}{m}$.

23. Написати програми обчислення наступних сум з заданою точністю:

а) $y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$; для $-5 < x \leq 5.5$ з кроком 0.25;

б) $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$; для $1 < x \leq 10$ з кроком 0.2;

в) $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, для $-1 < x \leq 1$ з кроком 0.1;

г) $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$, для $|x| \leq 1$;

д) $y = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$, для будь-якого дійсного m та $|x| < 1$.

24. Обчислити k – кількість точок з цілочисельними координатами, що попадають у коло радіуса R ($R > 0$) з центром у початку координат.

25. Дано натуральне k. Надрукувати k-ту цифру послідовності:
а) 12345678910111213…, у якій виписані підряд усі натуральні числа;
б) 149162536…, у якій виписані підряд квадрати усіх натуральних чисел;
в) 1123581321…, у якій виписані підряд усі числа Фібоначчі.