Partiel Econométrie 2A
26/11/2010
1h15 sans document

Nom:

Prénom:

Cet examen est un QCM. Il contient au total une vingtaine de bonnes réponses. Parmi les réponses proposées pour une question, il peut y avoir 0, 1 ou 2 réponse(s) correcte(s). Une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse incorrecte se traduit par la perte de 0,5 point.
Pour donner les réponses, entourer le numéro (i., ii. ou iii.) de la réponse proposée jugée correcte.

Partie 1

La variable aléatoire $\hat{\mathbf{a}}_N$ est un estimateur de $\mathbf{a}_0$ construit à partir d'un échantillon aléatoire de N observations d'un vecteur de variables aléatoires. Ce vecteur décrit un phénomène dont le modèle statistique est paramétré par $\mathbf{a}_0$.

Question 1a. Si $\hat{\mathbf{a}}_N$ est un estimateur asymptotiquement normal de $\mathbf{a}_0$ alors on sait qu'il existe une matrice $\boldsymbol{\Sigma}_0$ telle que:

i. la loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}, N^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0)$ est une approximation correcte de la loi de $\hat{\mathbf{a}}_N$ lorsque N est grand
ii. $\sqrt{N}(\hat{\mathbf{a}}_N - \mathbf{a}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_0)$
iii. $\sqrt{N}(\hat{\mathbf{a}}_N - \mathbf{a}_0) \to^{L}_{N\to+\infty} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_0)$

Question 1b. Si $\hat{\mathbf{a}}_N$ est un estimateur asymptotiquement normal de $\mathbf{a}_0$ alors on sait que:

i. $\hat{\mathbf{a}}_N$ converge en probabilité vers $\mathbf{a}_0$ lorsque N tend vers $+\infty$
ii. $\hat{\mathbf{a}}_N$ converge presque sûrement vers $\mathbf{a}_0$ lorsque N tend vers $+\infty$
iii. $\hat{\mathbf{a}}_N$ est sans biais

Partie 2

Question 2a. Relations entre les estimateurs de la Méthode des Moments:

i. L'estimateur des MCO est un exemple d'estimateur des VI
ii. L'estimateur des 2MC est un exemple d'estimateur des VI
iii. L'estimateur des MCI est un exemple d'estimateur des 2MC

Question 2b. $(y, \mathbf{x})$ est un vecteur de variable aléatoires. La projection linéaire de y sur $\mathbf{x}$, $EL[y|\mathbf{x}]$, est telle que:

i. $EL[y|\mathbf{x}] = \mathbf{x}'E[\mathbf{x}\mathbf{x}']^{-1}E[\mathbf{x}y]$ si $E[\mathbf{x}\mathbf{x}']$ est inversible
ii. $EL[y|\mathbf{x}]$ est le meilleur prédicteur de y par $\mathbf{x}$
iii. $y = EL[y|\mathbf{x}] + e$ avec $E[e|\mathbf{x}] = 0$

Question 2c. **La normalité asymptotique des estimateurs des MCO, des VI et des 2MC résulte**:

i. de ce que les termes d'erreur des modèles considérés suivent une loi normale
ii. de l'application d'un théorème central limite
iii. de l'application d'une loi des grands nombres et d'un théorème central limite.

Partie 3

On considère dans cette partie que les vecteurs de variables aléatoires $(y_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ **sont indépendants et équidistribués pour** $i = 1, \ldots, N$ **avec** $\dim \mathbf{x}_i = K$ **et** $\dim \mathbf{z}_i = L$. **On pose la forme suivante**:

$$y_i = \mathbf{a}_0' \mathbf{x}_i + u_i = \alpha_0 + \mathbf{b}_0' \tilde{\mathbf{x}}_i + u_i \ \ \textbf{avec}\ E[u_i] \equiv 0, \ \ \mathbf{a}_0 \equiv \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix} \ \textbf{et}\ \mathbf{x}_i \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}$$

pour définir un modèle de y_i.

Question 3a. **Le modèle de** y_i **est un modèle de régression si**:

i. $E[u_i^2] = \sigma^2$
ii. $E[\mathbf{x}_i u_i] = \mathbf{0}$
iii. $E[u_i | \mathbf{x}_i] = 0$

Question 2b. **Si** $E[u_i | \mathbf{z}_i] = 0$ **et** $L > K$ **alors le paramètre** $\mathbf{a}_0$ **est**:

i. sur-identifié si rang$E[\mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'] = L$
ii. juste-identifié si rang$E[\mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'] = K$
iii. sur-identifié si rang$E[\mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'] = K$

Question 2c. **Si** $L = K$ **alors l'estimateur des VI de** $\mathbf{a}_0$:

i. n'existe pas
ii. est donné par: $\hat{\mathbf{a}}_N^{VI} = \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'\right]^{-1} N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i y_i$
iii. est donné par: $\hat{\mathbf{a}}_N^{VI} = \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'\right]^{-1} N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i y_i$

Question 3d. **On note** $\hat{\mathbf{a}}_N^{MCO}$ **l'estimateur des MCO de** $\mathbf{a}_0$. **On sait que**:

i. $p\lim_{N\to+\infty} \hat{\mathbf{a}}_N^{MCO} = \mathbf{a}_0 + E[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i']^{-1} E[\mathbf{x}_i u_i]$
ii. $p\lim_{N\to+\infty} \hat{\mathbf{a}}_N^{MCO} = \mathbf{a}_0$
iii. $E[\hat{\mathbf{a}}_N^{MCO}] = E[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i']^{-1} E[\mathbf{x}_i y_i]$

Question 3e. **On note** $\hat{\mathbf{a}}_N^{2MC}$ **l'estimateur des 2MC de** $\mathbf{a}_0$. **On a**:

i. $$\hat{\mathbf{a}}_N^{2MC} = \left\{\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'\right]\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'\right]^{-1}\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{z}_i\right]\right\}^{-1} \times \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'\right]\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'\right]^{-1} N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i y_i$$

ii. $$\hat{\mathbf{a}}_N^{2MC} = \left\{\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'\right]\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\right]^{-1}\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{z}_i'\right]\right\}^{-1} \times \left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'\right]\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\right]^{-1} N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i y_i$$

iii. $$\hat{\mathbf{a}}_N^{2MC} = \left\{\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{z}_i'\right]\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'\right]^{-1}\left[N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{x}_i'\right]\right\}^{-1}$$

$$\times \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{z}_i'\right]\left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{z}_i\mathbf{z}_i'\right]^{-1}N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{z}_i y_i$$

Question 3f. Si on suppose que $\mathbf{a}_0$ est identifiable. Alors:

i. on suppose que $V[\mathbf{x}_i]$ est inversible
ii. on suppose que $E[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i']$ est inversible
iii. on suppose que les éléments de $\mathbf{x}_i$ sont de variance non nulle et linéairement indépendants entre eux.

Question 3g. On sait que $\mathbf{z}_i$ est un vecteur de variables exogènes par rapport à u_i. On veut calculer l'estimateur des 2MC de $\mathbf{a}_0$, $\hat{\mathbf{a}}_N^{2MC}$, avec $\mathbf{z}_i$ pour vecteur d'instruments mais le logiciel utilisé "refuse" d'effectuer le calcul demandé. Parmi les explications possibles on a:

i. il y a un élément de $\tilde{\mathbf{x}}_i$, disons $\tilde{x}_{k,i}$, tel que $Cov[\tilde{x}_{k,i},\mathbf{z}_i] \simeq \mathbf{0}$ et $Cov[\tilde{x}_{k,i},u_i] \neq 0$
ii. $\mathbf{z}_i$ est en fait endogène dans le modèle considéré
iii. certains éléments $\tilde{\mathbf{x}}_i$ sont parfaitement linéairement liés ou presque

Question 3f. On suppose maintenant que:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i \equiv \begin{bmatrix} \tilde{x}_i^x \\ \tilde{x}_i^e \end{bmatrix} \textbf{ avec } Cov[\tilde{x}_i^x,u_i] = 0 \textbf{ et } Cov[\tilde{x}_i^e,u_i] \neq 0$$

et que:

$$Cov[\tilde{z}_{1i},u_i] = Cov[\tilde{z}_{2i},u_i] = 0, Cov[\tilde{z}_{1i},\tilde{x}_i^e] \neq 0 \textbf{ et } Cov[\tilde{z}_{2i},\tilde{x}_i^e] \neq 0.$$

On souhaite calculer un estimateur de $\mathbf{a}_0$ en fondant cet estimateur sur la condition d'orthogonalité $E[\mathbf{z}_i u_i] = \mathbf{0}$. On définit alors $\mathbf{z}_i$ par:

i. $\mathbf{z}_i \equiv \begin{bmatrix} \tilde{z}_{1i} \\ \tilde{z}_{2i} \end{bmatrix}$

ii. $\mathbf{z}_i \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{x}_i^x \\ \tilde{x}_i^e \\ \tilde{z}_{1i} \\ \tilde{z}_{2i} \end{bmatrix}$

ii. $\mathbf{z}_i \equiv \begin{bmatrix} \tilde{x}_i^x \\ \tilde{z}_{1i} \\ \tilde{z}_{2i} \end{bmatrix}$

Partie 4

Un économètre cherche à mesurer l'effet du prix de marché d'un bien sur la quantité demandée de ce bien, disons de la sole débarquée du jour. On observe le marché à la criée de Boulogne-sur-Mer sur N périodes pour la sole, poisson pêché au large de ce grand port de pêche ($j = 1,\ldots,N$). La variable q_j mesure la quantité demandée et p_j le prix de la sole débarquée le jour j. L'économètre pose le modèle simple:

$$q_j = \alpha_0 + b_0 p_j + u_j \text{ **avec** } E[u_j] \equiv 0.$$

Question 4a. Il pense que p_j est endogène dans ce modèle simple en raison:

i. de la simultanéité de p_j et q_j
ii. de l'omission de variables explicatives pertinentes
iii. d'erreurs de mesure sur q_j

Question 4b. L'économètre décide de compléter son modèle en introduisant l'effet d'un indice prix des poissons "proches" de la sole. Il spécifie le modèle suivant:

$$q_j = \alpha_0 + b_0 p_j + \delta_0 c_j + e_j \text{ avec } E[e_j] \equiv 0$$

où c_j est l'indice des prix des poissons "ressemblant" à la sole sur le marché de Boulogne-sur-Mer. Il estime les paramètres du modèle simplifié (en imposant $\delta_0 = 0$) et du modèle "complet" par les MCO et obtient les résultats suivant:

Paramètre	Estimation du paramètre	Ecart-type estimé de l'estimateur du paramètre
α_0	$12,58$	$2,73$
b_0	$1,20$	$0,51$
δ_0	0	–

pour le modèle "simplifié" et:

Paramètre	Estimation du paramètre	Ecart-type estimé de l'estimateur du paramètre
α_0	$10,72$	$2,12$
b_0	$-0,81$	$0,50$
δ_0	$2,67$	$0,85$

pour le modèle "complet". Il en conclut que:

i. la sole et les poissons lui ressemblant sont substituts dans la demande de poissons de "type sole"
ii. que la demande de solediminue en fonction de son prix
iii. qu'on a vraisemblablement $Cov[p_j, u_j] > 0$ et $Cov[p_j, c_j] > 0$

Question 4c. La force du vent au large de Boulogne-sur-Mer le jour j est mesurée par la variable v_j (v_j est d'autant plus élevée que le vent est fort le jour j, ce qui empêche les bâteaux, notamment les plus petits, de sortir en mer). L'économètre propose d'utiliser v_j pour instrumenter p_j dans le modèle "complet" de q_j parce qu'il pense que:

i. $Cov[v_j, p_j] < 0$ et $Cov[v_j, e_j] = 0$
ii. $Cov[v_j, p_j] > 0$ et $Cov[v_j, e_j] \neq 0$
iii. $Cov[v_j, p_j] > 0$ et $Cov[v_j, e_j] = 0$

Question 4d. En utilisant les données dont il dispose, l'économètre obtient les résultats suivants:

Paramètre	Estimation du paramètre	Ecart-type estimé de l’estimateur du paramètre
α_0	$11,42$	$4,52$
b_0	$-2,21$	$1,01$
δ_0	$2,37$	$0,95$

avec les 2MC dans le modèle complet en utilisant v_j **en tant que variables instrumentale de** p_j **et en considérant comme exogène le modèle considéré**. **Il en conclut que**:

i. que p_j est vraisemblablement endogène par rapport à e_j
ii. que l’estimation par les MCO est plus précise et donc préférable à celle par les 2MC
iii. que p_j est vraisemblablement exogène par rapport à e_j