Économétrie : UGA

# 2 : MODÈLE DE RÉGRESSION LINÉAIRE ET ESTIMATION PAR MCO

## Application [1]

(Cette version : 15 mars 2022)

Michal Urdanivia [2]

1. Dans ces notes on applique certaines des méthodes et résultats théoriques du cours. Bien que celui-ci puisse être brièvement rappelé. pour plus de détails veuillez vous reporter à celui-ci. Remarquons aussi que les notations utilisées peuvent être différentes par rapport au cours.

2. Contact : michal.wong-urdanivia@univ-grenoble-alpes.fr, Université de Grenoble Alpes, Faculté d'Économie, GAEL.

Table des matières

## 1. Projection et moindres carrés

On considère un couple $(y_i, \mathbf{x}_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$ qui sont des variables aléatoires pour lesquelles on observe un échantillon d'observations i.i.d., $\{(y_i, \mathbf{x}_i); i = 1, \ldots, N\}$. Dans tout ce qui suit on suppose que $\mathrm{E}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i']$ et $\mathrm{E}[y_i^2]$ sont finis.

Définissons le paramètre de la projection de $y_i$ sur $\mathbf{x}_i$ par,

$$\boldsymbol{\gamma} := \arg\min_{\mathbf{g}} \mathrm{E}\left[(y_i - \mathbf{x}_i'\mathbf{g})^2\right]$$

où $\boldsymbol{\gamma}$ vérifie les conditions du premier ordre :

$$\mathrm{E}\left[\mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\gamma})\right] = 0,$$

et dès lors que $\mathrm{E}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i']$ est de rang plein ce qui revient à l'absence de multicolinéarité des éléments de $\mathbf{x}_i$, $\boldsymbol{\gamma}$ est donnée par l'expression :

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{E}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i']^{-1}\,\mathrm{E}[\mathbf{x}_i y_i].$$

On peut définir le résidu de la projection,

$$e_i = y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\gamma},$$

et obtenir la décomposition de $y_i$ suivante :

$$y_i = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\gamma} + e_i, \quad \mathrm{E}[\mathbf{x}_i e_i] = 0.$$

On remarque que cette décomposition ne nécessite aucune hypothèse de linéarité.

D'une façon similaire on peut définir le paramètre de la projection de $y_i$ sur sur $\mathbf{x}_i$ dans l'échantillon ou estimateur des moindres carrés par,

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} := \arg\min_{\mathbf{g}} \bar{\mathrm{E}}\left[(y_i - \mathbf{x}_i'\mathbf{g})^2\right].$$

où $\bar{\mathrm{E}}[f(w_i)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(w_i)$ est l'abbreviation de la moyenne empirique de $f(w_i)$ pour les différentes valeurs de $w_i$ dans l'échantillon de $N$ observations.

$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ vérifie les conditions du premier ordre :

$$\bar{\mathrm{E}}\left[\mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}})\right] = 0,$$

et dès lors que $\bar{\mathrm{E}}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i']$ est de rang plein ce qui revient à l'absence de multicolinéarité des éléments de $\mathbf{x}_i$ dans l'échantillon, $\boldsymbol{\gamma}$ est donnée par l'expression :

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \bar{\mathrm{E}}[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i']^{-1}\,\bar{\mathrm{E}}[\mathbf{x}_i y_i].$$

On peut définir,

$$\hat{e}_i = y_i - \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}},$$

et obtenir la décomposition de $y_i$ suivante :

$$y_i = \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \hat{e}_i, \quad \bar{\mathrm{E}}[\mathbf{x}_i\hat{e}_i] = 0.$$

## 2. Théorème de Frisch-Waugh-Lovell

Considérons une partition de $\mathbf{x}_i$ en deux groupes $\mathbf{x}_{1,i}$ et $\mathbf{x}_{2,i}$ de respectivement $K_1$ et $K_2$ éléments(on suppose que le régresseur constant appartient à $\mathbf{x}_{2i}$) et écrivons :

$$y_i = \mathbf{x}_{1,i}'\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{x}_{1,i}'\boldsymbol{\gamma}_2 + e_i \tag{2.1}$$

où l'on a décomposé le paramètre de la projection de $y_i$ sur $\mathbf{x}_i$ conformément à la décomposition de $\mathbf{x}_i$.

Définissons l'opérateur de Frisch-Waugh-Lovell par rapport à un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{w}_i$ telle que $\mathrm{E}[\mathbf{w}_i\mathbf{w}_i']$ soit fini, celui qui appliqué à une variable aléatoire $v_i$ telle que $\mathrm{E}[v_i^2]$ soit finie, lui associe le résidu de sa projection sur $\mathbf{w}_i$ que l'on note $\tilde{v}_i$ avec donc :

$$\tilde{v}_i = v_i - \mathbf{w}_i'\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{w}_i}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{w}_i} = \arg\min_{\mathbf{g}} \mathrm{E}\left[(v_i - \mathbf{w}_i'\mathbf{g})^2\right]$$

Quand nous appliquons cette opérateur à un vecteur $\mathbf{v}_i$ on notera $\tilde{\mathbf{v}}_i$ le vecteur qui empile les résultats de cette application sur chaque élément de $\mathbf{v}_i$.

Il est facile de vérifier que cet opérateur est linéaire au sens où pour $y_i = v_i + u_i$ avec $\mathrm{E}[v_i^2] + \mathrm{E}[u_i^2] < \infty$ :

$$\tilde{y}_i = \tilde{v}_i + \tilde{u}_i.$$

Quand nous appliquons cette opérateur sur les termes de (2.1) nous obtenons,

$$\tilde{y}_i = \tilde{\mathbf{x}}_{1,i}'\boldsymbol{\gamma}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_{2,i}'\boldsymbol{\gamma}_2 + \tilde{e}_i,$$

ce qui implique que :

$$\tilde{y}_i = \tilde{\mathbf{x}}_{1,i}'\boldsymbol{\gamma}_1 + e_i, \quad \mathrm{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}e_i] = 0. \tag{2.2}$$

La dernière ligne résulte de ce que $\tilde{\mathbf{x}}_{2,i} = 0$ par définition, et de ce que $\tilde{e}_i = e_i$ en raison de l'orthogonalité de $e_i$ et $\mathbf{x}_i$, $\mathrm{E}[\mathbf{x}_ie_i] = 0$ ; et de plus comme $\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{x}_i$ nous avons que $\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}e_i] = 0$.

La condition $\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}e_i] = 0$ est une condition du premier ordre dans la projection de $\tilde{y}_i$ sur $\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}$. Autrement dit le paramètre $\boldsymbol{\gamma}_1$ peut être obtenu par projection de $\tilde{y}_i$ sur $\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}$ :

$$\boldsymbol{\gamma}_1 := \arg\min_{\mathbf{g}} \mathrm{E}\left[(\tilde{y}_i - \tilde{\mathbf{x}}_{1,i}'\mathbf{g})^2\right] = \mathrm{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}']^{-1}\,\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{1,i}\tilde{y}_i]$$

De manière similaire on peut définir l'opérateur de FVL dans l'échantillon par :

$$\check{v}_i = v_i - \mathbf{w}_i'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{w}_i}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{w}_i} = \arg\min_{\mathbf{g}} \bar{\mathrm{E}}\left[(v_i - \mathbf{w}_i'\mathbf{g})^2\right],$$

et si nous l'appliquons à :

$$y_i = \mathbf{x}_{1,i}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 + \mathbf{x}_{1,i}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2 + \hat{e}_i$$

on obtient :

$$\check{y}_i = \check{\mathbf{x}}_{1,i}'\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 + \hat{e}_i, \quad \mathrm{E}[\check{\mathbf{x}}_{1,i}\hat{e}_i] = 0. \tag{2.3}$$

ce qui implique,

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 := \arg\min_{\mathbf{g}} \bar{\mathrm{E}}\left[(\check{y}_i - \check{\mathbf{x}}_{1,i}'\mathbf{g})^2\right] = \bar{\mathrm{E}}[\check{\mathbf{x}}_{1,i}\check{\mathbf{x}}_{1,i}']^{-1}\,\bar{\mathrm{E}}[\check{\mathbf{x}}_{1,i}\check{y}_i]$$

## 3. Questions

(1) Montrez que l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1$ obtenu par application du résultat de FVL est convergent pour $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1$.

(2) Montrer que sa distribution asymptotique est une loi normale.

## 4. Application empirique

## Références