ÉCONOMÉTRIE 2
UGA, M1 MIASH-BDA, S2

SYSTÈMES LINÉAIRES D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES : TRAVAIL 1

(Cette version : 6 mars 2023)

Michal Urdanivia [1]

1. Contact : michal.wong-urdanivia@univ-grenoble-alpes.fr, Université de Grenoble Alpes, Faculté d'Économie, GAEL.

Table des matières

1. OBJECTIFS

(1) Illustrer les mécanismes d'identification dans les systèmes d'équations simultanées et leurs liens avec les techniques de VI
(2) Manipuler des notations matriciels
(3) Montrer comment utiliser un résultat théorique en pratique, ici la méthode du delta pour déterminer la distribution as. d'un estimateur des MCI.
(4) Appliquer sur des données certaines des méthodes.

2. THÉORIE

2.1. **Modèles récursifs.** Les vecteurs de variables aléatoires $(y_{1i}, y_{2i}, z_{1i}, z_{2i})$ sont indépendants, identiquement distribués pour $i = 1, \ldots, N$. Ils satisfont en outre les conditions de régularité requises par les applications de la loi des grands nombres et du théorème central limite nécessaires pour la normalité as. des estimateurs considérés (lorsqu'ils sont employés de manière pertinente !).

On considère ici différentes version du modèle suivant :

$$\begin{cases} y_{1i} = a_{10}z_{1i} + a_{2,0}z_{2i} + a_{3,0}y_{2i} + u_{1i} \\ y_{2i} = b_{1,0}z_{1i} + b_{2,0}z_{2i} + u_{2i} \end{cases}, \text{ avec } \mathrm{E}[\mathbf{u}_i|\mathbf{z}_i] = 0, \text{et } \mathrm{E}[\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i'|\mathbf{z}_i] = \mathbf{\Omega} \tag{2.1}$$

avec les notations suivantes :

$$\mathbf{y}_i \equiv \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_i \equiv \begin{bmatrix} z_{1i} \\ z_{2i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i \equiv \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{bmatrix}$$

On utilisera également les notations :

$$\mathbf{a}_0 \equiv \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{2,0} \\ a_{3,0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 \equiv \begin{bmatrix} b_{1,0} \\ b_{2,0} \end{bmatrix}$$

et :

$$\underline{\mathbf{y}}_k \equiv \begin{bmatrix} y_{k,1} \\ \vdots \\ y_{k,N} \end{bmatrix}_{N\times 1}, \quad \underline{\mathbf{z}}_k \equiv \begin{bmatrix} z_{k,1} \\ \vdots \\ z_{k,N} \end{bmatrix}_{N\times 1}, \quad \text{pour } k = 1, 2 \text{ et } \mathbf{Z} \equiv \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_1 & \underline{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix}_{N\times 2},$$

et on suppose que $\mathrm{Var}[\mathbf{z}_i]$ est inversible.

(1) Justifier l'absence de paramètres constants pour les modèles de y_{1i} et y_{2i}
(2) Déterminer les variables exogènes et endogènes de chacune des équations du système et du système
(3) Qualifier le modèle décrit par le système d'équations (2.1).

(4) Analyser l'identification de $\mathbf{b}_0$ et $\mathbf{a}_0$ dans le modèle.

(5) Proposer un estimateur convergent de $\mathbf{b}_0$ et donner sa forme avec les $y_{2,i}$ et $\mathbf{z}_i$ ainsi qu'avec $\underline{\mathbf{y}}_k$ et $\mathbf{Z}$.

(6) Donner une approximation de la distribution de $\mathbf{b}_0$ lorsque N est grand et un estimateur de sa précision.

(7) On suppose que $\omega_{12} = 0$ dans le modèle (2.1) :

(a) Commentez cette condition.

(b) Montrer qu'on a alors $\text{Cov}[y_{2i}; u_{1i}] = 0$.

(c) Quelles sont les implications de $\text{Cov}[y_{2i}; u_{1i}] = 0$ pour y_{2i} et pour l'estimation de $\mathbf{a}_0$?

(d) Justifiez que $\omega_{12} = 0$ soit une condition peut vraisemblable dans le modèle.

(8) On suppose que dans le modèle (2.1) $a_{1,0} = 0$ de sorte que l'on étudie :

$$\begin{cases} y_{1i} = a_{2,0}z_{2i} + a_{3,0}y_{2i} + u_{1i} \\ y_{2i} = b_{1,0}z_{1i} + b_{2,0}z_{2i} + u_{2i} \end{cases}, \text{ avec } \mathrm{E}[\mathbf{u}_i|\mathbf{z}_i] = 0, \text{et } \mathrm{E}[\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i'|\mathbf{z}_i] = \mathbf{\Omega} \tag{2.2}$$

et on note :

$$\mathbf{a}_0 \equiv \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{3,0} \end{bmatrix}$$

(a) Qu'implique $a_{1,0} = 0$ pour pour z_{1i} ?

(b) Qu'implique $a_{1,0} = 0$ pour y_{2i} dans l'équation de y_{1i} ?

(c) Montrer que $\mathbf{b}_0$ et $\mathbf{a}_0$ sont juste-identifiés dans le modèle (2.2) (à certaines conditions) ?

(d) Proposer deux méthodes d'estimation de $\mathbf{b}_0$ et $\mathbf{a}_0$ et définir les estimateurs (convergents) correspondants. On utilisera les notations :

$$\mathbf{x}_{1,i} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{2i}, y_{2i} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{X}_1 \equiv \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_2 & \underline{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix}_{N\times 2}$$

(9) On suppose que pour le modèle (2.1) $a_{1,0} = a_{2,0} = b_{2,0} = 0$. Montrez qu'alors les estimateurs des VI et des MCI de $a_{3,0}$ et $b_{1,0}$ sont égaux.

2.2. **Modèles non récursifs.** Les vecteurs de variables aléatoires $(y_{1i}, y_{2i}, z_{1i}, z_{2i}, z_{3i})$ sont indépendants, identiquement distribués pour $i = 1, \ldots, N$. Ils satisfont en outre les conditions de régularité requises par les applications de la loi des grands nombres et du théorème central limite nécessaires pour la normalité as. des estimateurs considérés (lorsqu'ils sont employés de manière pertinente). On considère ici différentes version du modèle suivant :

$$\begin{cases} y_{1i} = a_{1,0}z_{1i} + a_{2,0}z_{2i} + a_{3,0}z_{3i} + a_{4,0}y_{2i} + u_{1i} \\ y_{2i} = b_{1,0}z_{1i} + b_{2,0}z_{2i} + b_{3,0}z_{3i} + b_{4,0}y_{1i} + u_{2i} \end{cases}, \text{ avec } \mathrm{E}[\mathbf{u}_i|\mathbf{z}_i] = 0 \text{ et } \mathrm{E}[\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i'|\mathbf{z}_i] = \mathbf{\Omega} \tag{2.3}$$

On notera :

$$\mathbf{y}_i \equiv \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \end{bmatrix},\ \mathbf{z}_i \equiv \begin{bmatrix} z_{1i} \\ z_{2i} \\ z_{3i} \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_i \equiv \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \end{bmatrix},\ \mathbf{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{bmatrix}$$

et aussi :

$$\mathbf{a}_0 \equiv \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{2,0} \\ a_{3,0} \\ a_{4,0} \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_0 \equiv \begin{bmatrix} b_{1,0} \\ b_{2,0} \\ b_{3,0} \\ b_{4,0} \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_{1i} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ y_{2i} \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_{2i} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ y_{1i} \end{bmatrix}$$

,

et supposera que $\mathrm{Var}[\mathbf{z}_i]$ est inversible.

(1) Déterminer les variables exogènes et endogènes de chacune des équations du système et du système.

(2) Qualifier le modèle décrit par le système d'équations (2.3).

(3) Définir $\mathbf{\Gamma}_0$ et $\mathbf{G}_0$ pour écrire le modèle (2.3) sous la forme matrielle matricielle :

$$\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{y}_i = \mathbf{G}_0\mathbf{z}_i + \mathbf{u}_i.$$

(4) Déterminer la forme réduite du modèle (2.3) en la notant :

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_i + \mathbf{v}_i,$$

où

$$\mathbf{v}_i \equiv \begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \end{bmatrix}$$

sont les erreur du modèle réduit. On utilisera aussi la notation :

$$\mathbf{\Pi} \equiv \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1' \\ \boldsymbol{\pi}_2' \end{bmatrix}$$

(5) Analyser l'identification des paramètres $\mathbf{b}_0$ et $\mathbf{a}_0$.

(6) On suppose que dans le modèle (2.3) $a_{1,0} = a_{2,0} = a_{3,0} = 0$.

(a) Montrer que $a_{4,0}$ est le seul élément identifiable de $\mathbf{a}_0$ et $\mathbf{b}_0$.

(b) Proposer un estimateur convergent de $a_{4,0}$ et de ω_{11}. On utilisera les notations :

$$\underline{\mathbf{y}}_k \equiv \begin{bmatrix} y_{k,1} \\ \vdots \\ y_{k,N} \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad \text{pour } k = 1, 2.$$

et :

$$\underline{\mathbf{z}}_k \equiv \begin{bmatrix} z_{k,1} \\ \vdots \\ z_{k,N} \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \text{ et aussi } \mathbf{Z} \equiv \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_1 & \underline{\mathbf{z}}_2 & \underline{\mathbf{z}}_3 \end{bmatrix}_{N\times 3}.$$

(c) Montrer que $\hat{a}_{4,N}^{2MC}$ utilise $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{2,N}^{MCO}$, l'estimateur des MCO de $\boldsymbol{\pi}_2$ estdans la forme réduite du modèle de y_{2i}.

(d) Montrer que $\hat{a}_{4,N}^{2MC}$ utilise un estimateur de la projection linéaire de y_{2i} sur $\mathbf{z}_i$.

(7) On suppose maintenant que dans le modèle (2.3) $a_{1,0} = a_{2,0} = 0$ et $b_{3,0} = 0$. Et on utilisera dorénavant les notations :

$$\mathbf{a}_0 \equiv \begin{bmatrix} a_{3,0} \\ a_{4,0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_0 \equiv \begin{bmatrix} b_{1,0} \\ b_{2,0} \\ b_{4,0} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_{1i} \equiv \begin{bmatrix} z_{3i} \\ y_{2i} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_{2i} \equiv \begin{bmatrix} z_{1i} \\ z_{2i} \\ y_{1i} \end{bmatrix}.$$

(a) Montrer que $\mathbf{a}_0 \equiv (a_{3,0}, a_{4,0})$ et ($\mathbf{b}_0 \equiv (b_{1,0}, b_{2,0}, b_{4,0})$ sont identifiables à priori.

(b) Proposer des estimateurs convergents et rapidement calculables de $\mathbf{a}_0$ et $\mathbf{b}_0$.

(c) Montrer que l'estimateur des 2MC de $\mathbf{b}_0$ dans l'équation de y_{2i} avec $\mathbf{z}_i$ pour vecteur d'instruments est égal à l'estimateur des VI correspondant.

(d) Proposer un estimateur convergent de $\boldsymbol{\Omega}$ et écrire la forme de cet estimateur.

(8) On suppose maintenant que dans (2.3) $a_{1,0} = a_{2,0} = a_{3,0} = b_{2,0} = b_{3,0} = b_{4,0} = 0$.

(a) Déterminer la forme réduite du modèle (2.3)) sous cette condition sur les paramètres. Cela sous la forme :

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\pi} z_{1i} + \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} z_{1i} + \mathbf{v}_i$$

(b) Déterminer les paramètres de la forme structurelle en fonction de ceux de la forme réduite et en déduire l'estimateur des MCI de $a_{4,0}$ noté $\hat{a}_{4,N}^{MCI}$.

(c) Déterminer la distribution as. du vecteur :

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_N \equiv \begin{bmatrix} \hat{\pi}_1^{MCO} \\ \hat{\pi}_2^{MCO} \end{bmatrix}$$

(d) Utiliser la propriété suivante, dite "Méthode du delta", pour déterminer la distribution as. de $\hat{a}_{4,N}^{MCI}$.

Remarque 1. (**Rappel sur Méthode du Delta**) Si :

$$\sqrt{N}\left(\mathbf{a}_N - \mathbf{a}_0\right) \underset{N\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_0\right).$$

et si $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ est continûment différentiable sur le domaine de définition de $\mathbf{a}$ alors :

$$\sqrt{N}\left(\mathbf{g}(\mathbf{a}_N) - \mathbf{g}(\mathbf{a}_0)\right) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{a}'}(\mathbf{a}_0)\mathbf{\Sigma}_0\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}_0)'\right).$$