ÉCONOMIE INDUSTRIELLE [1]
(UGA, L3 E2AD, S2)
TRAVAUX DIRIGÉS : TD 3
JEUX RÉPÉTÉS ET COLLUSION

Michal W. Urdanivia*

*UGA, Faculté d'Économie, GAEL,
e-mail : michal.wong-urdanivia@univ-grenoble-alpes.fr

4 mars 2024

1. Responsable du cours : Alexis Garapin.

1. Rappels de cours

Outline

1. Rappels de cours

- Il s'agit d'un modèle de concurrence à la Cournot.
- Chaque firme a une fonction objectif qui est son profit :

$$\pi_i(q_i, q_j) = P(Q)q_i - c_i(q_i),\ i, j = 1, 2,\ i \neq j.$$

où $P(Q)$ est la fonction de demande inverse avec $Q = q_1 + q_2$ est $c_i(q_i)$ est la fonction de coût de la firme i.

- La variable de décision est la quantité à produire q_i.
- L'équilibre est une paire (q_1^*, q_2^*) qui est un équilibre de Nash dans un jeu d'information complète.
- En outre le modèle de base suppose les formes suivantes pour $c_i(\cdot)$ et $P(\cdot)$:

$$c_i(q_i) := cq_i \Rightarrow \underbrace{c_i^m(q_i)}_{\substack{\text{Coût}\\ \text{Marginal}}} := \frac{\partial c}{\partial q_i}(q_i) = c,\ c \in \mathbb{R}_+^*,$$

$$P(Q) := a - bQ,\ a, b \in \mathbb{R}_+^* \times \in \mathbb{R}_+^*.$$

- Le choix optimal de la firme i est donné par sa **fonction de meilleure réponse**, $q_i^{mr}(q_j)$ qui est définie implicitement comme solution du problème :

$$q_i^* = \arg\max_{q_i} \pi_i(q_i, q_j) =: q_i^{mr}(q_j)$$

où $\pi(q_i, q_j)$ est la fonction de profit de la firme i :

$$\pi_i(q_i, q_j) := P(Q)q_i - c_i(q_i).$$

- L'équilibre (q_1^*, q_2^*) est alors obtenu comme solution du système :

$$q_i^* = q_i^{mr}(q_j^*), \ i, j = 1, 2; \ i \neq j,$$

Autrement dit, chaque firme joue sa meilleure réponse.

- Avec les fonctions $c_i(q_i) := cq_i$ et $P(Q) := a - bQ$, $q_i^{mr}(q_j)$ est explicitée à partir de la condition du 1er ordre associée à la maximisation de $\pi_i(\cdot)$ par rapport à q_i :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i}(q_i^*, q_j) = 0 \Leftrightarrow a - 2bq_i^* - bq_j = c \Leftrightarrow q_i^* = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_j}{2} =: q_i^{mr}(q_j).$$

- On calcule l'équilibre comme solution en (q_1^*, q_2^*) du système :

$$\begin{cases} q_1^* = q_1^{mr}(q_2^*) \\ q_2^* = q_2^{mr}(q_1^*) \end{cases}$$

ce qui donne avec les fonction de meilleure réponse $q_1^{mr}(q_2) := \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_2}{2}$, et $q_2^{mr}(q_1) := \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_1}{2}$.

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}. \tag{1}$$

- Et on calcule aussi les profits et prix du bien sur le marché :

$$p^* = \frac{a}{3} + \frac{2c}{3},\ \pi_1^* = \pi_2^* = \frac{(a-c)^2}{9b},$$

- Les deux firmes fixent la quantité de monopole notée q^{ca} qu'elles décident en maximisant un profit de Monopole.
- Pour un niveau décidé de produit q^{ca} chacune produit alors $q_i^{ca} = \frac{q^{ca}}{2}$, $i = 1, 2$.
- Pour obtenir q^{ca} on considère le profit donné par,

$$\pi(q^{ca}) = P(q^{ca})q^{ca} - cq^{ca} = (a - bq^{ca})q^{ca} - cq^{ca}$$

- La quantité optimale/de monopole q^{ca^*} est obtenue comme :

$$q^{ca^*} = \arg\min_{q^{ca}} \pi(q) \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial q}(q^{ca^*}) = 0 \Leftrightarrow q^{ca^*} = \frac{(a-c)}{2b}.$$

D'où le prix d'équilibre et le profit du cartel :

$$p^{ca^*} := P(q^{ca^*}) = a - b\left(q^{ca^*}\right) = \frac{(a-c)}{2},$$
$$\pi^{ca^*} := p^{ca^*} q^{ca^*} - cq^{ca^*} = \frac{(a-c)^2}{4b}.$$

Le profit de la firme i étant alors :

$$\pi_i^{ca^*} := \frac{\pi^{ca^*}}{2} = \frac{(a-c)^2}{8b}.$$

- Supposons que la firme i dévie/triche par rapport à l'entente.
- Dans ce cas alors que j joue la quantité de l'entente $q_j^{ca^*} := \frac{q^{ca^*}}{2} = \frac{(a-c)}{4b}$, i joue sa meileure réponse et fait le choix $q_i^{d^*}$ par :

$$q_i^{d^*} :== q_i^{mr}(q_j^{ca^*}) = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{q_j^{ca^*}}{2} = \frac{(a-c)}{2b} - \frac{(a-c)}{8b} = \frac{3(a-c)}{8b},$$

ce qui lui donne un profit,

$$\pi_i^{d^*} = \frac{9(a-c)^2}{64b}.$$

- En fait le jeu consistant à tricher ou s'entendre s'apparente au **jeu du prisonnier** avec la représentation de forme normale et extensives suivantes :

		Firme 2	
		Tricher	Cartel
Firme 1	Tricher	$\underbrace{\dfrac{(a-c)^2}{9b}, \dfrac{(a-c)^2}{9b}}_{\text{Équilibre de Nash}}$	$\frac{9(a-c)^2}{64b}, \frac{3(a-c)^2}{32b}$
	Cartel	$\frac{3(a-c)^2}{32b}, \frac{9(a-c)^2}{64b}$	$\frac{(a-c)^2}{8b}, \frac{(a-c)^2}{8b}$

FIGURE 1 – Représentation de la concurrence à la Cournot sous forme normale.

Rappels de cours

Stabilité de l'entente

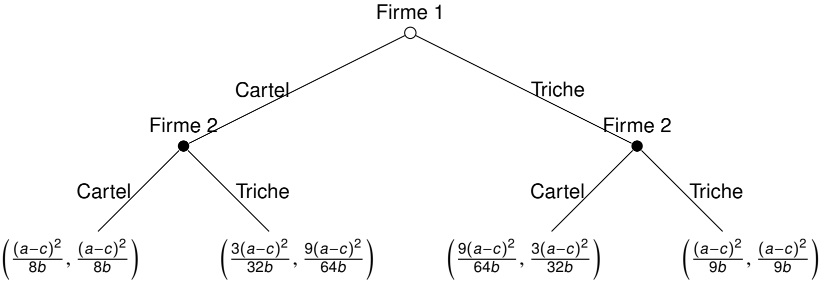

Figure 2 – Représentation de la concurrence à la Cournot sous forme extensive

- Supposons que le jeu se répète deux fois : la firme i choisit la quantité q_{it} à la période t, pour $i = 1, 2$, et $t = 1, 2$.
- **Quel est l'équilibre en sous-jeu parfait ?**
- On résout le jeu(par induction) à rebours :
  - En $t = 2$ l'unique équilibre de Nash est $(triche, triche)$.
  - En $t = 1$ l'unique équilibre de Nash est $(triche, triche)$.
  - Par conséquent, l'unique équilibre en sous-jeux parfait est $((triche, triche), (triche, triche))$.
- **Autres questions** :
  - qu'en est-il de $((cartel, cartel), (cartel, cartel))$?
  - qu'en est-il de $((cartel, triche), (cartel, triche))$?
  - qu'en est-il de : la firm 1 joue $(cartel$; $triche$ si $triche$, $cartel$ si $cartel)$, et la firme 2 joue $(cartel$; $triche$ si $triche$, $cartel$ si $cartel)$?
  - du jeu à 3,..., N périodes ?

- On note comme précédemment q_i^{ca} la quantité de cartel pour la firme i(maximisant le profit des deux firmes), et q_i^* la quantité en concurrence à la Cournot.
- Nous avons le résultat suivant :

Proposition 1

Si le taux d'actualisation δ est "suffisamment" élevé alors les stratégies suivantes constituent des équilibre de sous-jeu parfaits pour le jeu de Cournot infiniment répété :

(a) *En t, la firme i joue $q_{it} = q_i^{ca}$ si $q_{j,t-1} = q_j^{ca}$ pour $j = 1$ et $j = 2$.*

(b) *Jouer q_i^* si $q_{j,t-1} \neq q_j^{ca}$ pour soit $j = 1$ ou $j = 2$.*

- La firme i coopère tant que j coopère.
- Une fois que j triche i produit la quantité d'équilibre de Nash-Cournot pour toutes les périodes suivantes : **Nash reversion**.
- “Grim strategy” : pas de deuxième chance.
- Pour démontrer que ces strategies constituent des équilibres en sous-jeu parfaits il faut obtenir des conditions qui "prescrivent" que la meilleure réponse de la firme i étant donné celle de la firme j est aussi la meilleure réponse dans chaque sous-jeu.

- Pour la firme $i = 1, 2$, deux types de sous-jeu sont à considérer :
- **Sous-jeu de type 1** : Après une période où un des joueurs à triché (dont soit i, ou $j = 1, 2$, $i \neq j$) :
  - La stratégie proposée indique de jouer q_i^* pour toujours étant donné que j joue aussi cette stratégie.
  - C'est un équilibre de Nash du sous-jeu : jouer "q_i^* pour toujours" est la meilleure réponse à la stratégie de j de jouer "q_j^* pour toujours".
  - Ceci vérifie les critères d'un équilibre de sous-jeu parfait.

- **Sous-jeu de type 2** : Après une période sans triche.
  - La stratégie proposée indique de coopérer et jouer q_i^{ca}, avec le profit actualisé de $\frac{\pi_i^{ca}}{1-\delta}$
  - La meilleure stratégie alternative est de jouer $q_i^{mr}(q_j^{ca}) =: q_i^d$ à la période en cours, mais ceci entraîne $q_j = q_j^*$ pour toujours. Le profit actualisé est ici $\pi^{d_i^*} + \delta\left(\frac{\pi_i^*}{(1-\delta)}\right)$.
  - Pour que q_i^{ca} soit un équilibre de Nash de ce sous-jeu, il est nécessaire que,

$$\underbrace{\frac{\pi_i^{ca^*}}{1-\delta}}_{\text{profits sous coopération}} > \underbrace{\pi^{d_i^*} + \delta\left(\frac{\pi_i^*}{(1-\delta)}\right)}_{\text{profits sous déviation/triche}}$$

$$\Leftrightarrow \delta > \frac{\pi^{d_i^*} - \pi_i^{ca^*}}{\pi^{d_i^*} - \pi_i^*},$$

  et avec les expressions de $\pi_i^{ca^*}$, $\pi^{d_i^*}$, et π_i^* on obtient que : $\delta > \frac{9}{17} \approx 0.529$.

- Par conséquent, la **Nash reversion** indique une meilleure réponse dans ces deux sous-jeux si est "suffisamment élevé" avec $\delta > \frac{9}{17}$.
- Dans ce cas la **Nash reversion** constitue un équilibre de sous-jeu parfait.