Corrigé exercice collusion Eta et Zeta

$P = A - Q$

les firmes ont un coût marginal constant

1) Montrer que le facteur d'escompte critique est tel que $\delta_c^* \geq 0{,}529$ si les firmes se font concurrence en quantités

i) Calcul du profit de monopole Π_M^* et du profit de cartel $\frac{\Pi_M^*}{2}$

$$RT = P(Q) \cdot Q = AQ - Q^2$$

$$Rm = \frac{dRT}{dQ} = A - 2Q$$

Max π tel que $A - 2Q = c$

$$\Rightarrow Q_M^* = \frac{A-c}{2} \quad \left(\text{en cartel } q_A^* = q_B^* = \frac{q_M^*}{2} = \boxed{\frac{A-c}{4}}\right)$$

$$\Rightarrow P^* = A - \left(\frac{A-c}{2}\right)$$

$$P^* = \frac{2A - A + c}{2} = \boxed{\frac{A+c}{2}}$$

$$\Pi_M^* = \left(\frac{A+c}{2}\right)\left(\frac{A-c}{2}\right) - \left(\frac{A-c}{2}\right)c$$

$$\Pi_M^* = \frac{A^2 - Ac + Ac - c^2}{4} - \frac{(Ac - c^2)}{2}$$

$$\Pi_M^* = \frac{A^2 - c^2 - 2Ac + 2c^2}{4} = \frac{(A-c)^2}{4}$$

En cartel $\Pi_A = \Pi_B = \frac{\Pi_M^*}{2} = \boxed{\frac{(A-c)^2}{8}}$

ii) Équilibre de Cournot

$$\Pi_A = (A - (q_A + q_B))\, q_A - c q_A$$

$$\Pi_A = A q_A - q_A^2 - q_A q_B - c q_A$$

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial q_A} = 0 \Rightarrow \quad A - 2q_A - q_B - c = 0$$

$$FR_A = \quad q_A^* = \frac{A - q_B - c}{2}$$

$$FR_B = \quad q_B^* = \frac{A - q_A - c}{2}$$

$$\begin{cases} q_A^* = \dfrac{A - q_B - c}{2} \\ q_B^* = \dfrac{A - q_A - c}{2} \end{cases} \Rightarrow q_A^* = \frac{A - \left(\frac{A - q_A - c}{2}\right) - c}{2}$$

$$q_A^* = \frac{\frac{A + q_A + c - 2c}{2}}{2} = \frac{A + q_A - c}{4}$$

$$q_A^* = \frac{A + q_A - c}{4} = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}q_A - \frac{1}{4}c$$

$$\frac{3}{4}q_A^* = \frac{A - c}{4} \Rightarrow q_A^* = \left(\frac{A - c}{\cancel{4}}\right) \times \frac{\cancel{4}}{3}$$

$$\begin{cases} q_A^* = \boxed{\dfrac{A - c}{3}} \\ q_B^* = \boxed{\dfrac{A - c}{3}} \end{cases}$$

$$Q^* = 2\left(\frac{A - c}{3}\right)$$

$$Q^* = \frac{2A - 2c}{3}$$

$$P^* = A - \frac{2A - 2c}{3} = \boxed{\frac{A + 2c}{3}}$$

$$\Pi_A = \Pi_B = \left(\frac{A+2c}{3}\right)\left(\frac{A-c}{3}\right) - \left(\frac{A-c}{3}\right)c$$

$$\Pi_A = \Pi_B = \frac{A^2 - Ac + 2Ac - 2c^2}{9} - \left(\frac{Ac - c^2}{3}\right)$$

$$\Pi_A = \Pi_B = \frac{A^2 + Ac - 2c^2}{9} - \left(\frac{3Ac - 3c^2}{9}\right)$$

$$\Pi_A = \Pi_B = \frac{A^2 - 2Ac + c^2}{9} = \frac{(A-c)^2}{9}$$

iii) <u>Profit de déviation sur une période</u>

- Supposons qu'une firme produise sa part de cartel $\frac{q^*_m}{2} = \frac{A-c}{4}$
- La meilleure réponse en courant est telle que

$$q = \frac{A - \frac{A-c}{4} - c}{2} = \frac{\frac{4A - A + c - 4c}{4}}{2} = \frac{3A - 3c}{8} = \frac{3(A-c)}{8}$$

- le profit de déviation est =

$$\Pi^D = \left(\frac{3(A-c)}{8}\right)\left(\frac{A+c}{2}\right) - \left(\frac{3(A-c)}{8}\right)c = \boxed{\frac{9(A-c)^2}{64}}$$

$$> \frac{\pi^*_n}{2}$$

iv) Calcul du facteur d'escompte critique

Application de la formule du cours $\dfrac{\pi^D - \frac{1}{2}\pi^*_M}{\pi^D - \pi^N}$

$$\delta^* = \frac{\dfrac{9(A-c)^2}{64} - \dfrac{(A-c)^2}{8}}{\dfrac{9(A-c)^2}{64} - \dfrac{(A-c)^2}{9}}$$

Comme tout dépend de $(A-c)^2$ on peut simplifier :

$$\delta^* = \frac{\dfrac{9}{64} - \dfrac{1}{8}}{\dfrac{9}{64} - \dfrac{1}{9}} = \frac{9}{17} = \boxed{0{,}529}$$

2) Montrer que le facteur d'escompte critique est tel que $\delta^*_B \geqslant 0,5$ en cas de concurrence sur les prix

Si les firmes s'entendent, le profit de collusion reste le même $\pi_A = \pi_B = \frac{(A-c)^2}{8}$

En duopole de Bertrand, l'équilibre de Nash est $\pi = 0$ (Cm est constant)

Si chaque firme dévie, elle capte le profit de monopole $\frac{(A-c)^2}{4}$

On obtient donc

$$\delta^* = \frac{\pi^D - \frac{1}{2}\pi^M}{\pi^D - \pi^N} = \frac{\frac{(A-c)^2}{4} - \frac{(A-c)^2}{8}}{\frac{(A-c)^2}{4} - 0}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \boxed{0,5}$$