Économie Industrielle
(UGA, L3 Éco, S2)
(responsable du cours : Sylvain Rossiaud)

Travaux dirigés : No 3
Les Cartels
(éléments de correction d'exercices)

Michal W. Urdanivia*

*UGA, Faculté d'Économie, GAEL,
e-mail : michal.wong-urdanivia@univ-grenoble-alpes.fr

1er mars 2022

1. Équilibres de concurrence à la Cournot et d'entente

2. Stratégie de déviation d'une firme(c.à.d., de tricherie)

3. Stabilité d'ententes : discussion

4. Jeu/concurrence à la Cournot infiniment répété

1. Équilibres de concurrence à la Cournot et d'entente

(1a) Concurrence à la Cournot

- Il s'agit d'un modèle de concurrence à la Cournot.
- Chaque firme a une fonction objectif qui est son profit :

$$\pi_i(q_i, q_j) = P(Q)q_i - c_i(q_i), \;\; i, j = 1, 2, \;\; i \neq j.$$

  où $P(Q)$ est la fonction de demande inverse avec $Q = q_1 + q_2$ est $c_i(q_i)$ est la fonction de coût de la firme i.
- La variable de décision est la quantité à produire q_i.
- L'équilibre est une paire (q_1^*, q_2^*) qui est un équilibre de Nash dans un jeu d'information complète.
- Avec :

$$c_i(q_i) = 40q_i \Rightarrow c_i^m(q_i) := \frac{\partial c}{\partial q_i}(q_i) = 40,$$

  et,

$$P(Q) = 400 - 4Q,$$

(1a) Concurrence à la Cournot

(q_1^*, q_2^*) est obtenu comme solution du système :

$$\begin{array}{l} q_1^* = q_1^{mr}(q_2^*) = 45 - \frac{q_2^*}{2} \\ q_2^* = q_2^{mr}(q_1^*) = 45 - \frac{q_1^*}{2} \end{array} \Rightarrow q_1^* = q_2^* = 30.$$

où rappelons que $q_i^{mr}(q_j)$ est la fonction de réponse de la firme i définie implicitement par la c.p.o dans la maximisation de $\pi(q_i, q_j)$ par rapport à q_i(c.f., cours, TDs précédents) :

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i}(q_i^{mr}(q_j), q_j) = 0.$$

- On calcule aussi que $Q^* = q_1^* + q_2^* = 60$, $P^* = P(Q^*) = 160$, $\pi_i(q_i^*, q_j^*) = 3600$.

(1b) Profit d'entente

- Les deux firmes fixent la quantité de monopole.
- Pour un niveau décidé de produit q^{ca} chacune produit $q_i^{ca} = \frac{q^{ca}}{2}$, $i = 1, 2$.
- Le profit est donné par,

$$\pi(q^{ca}) = p(q^{ca})q^{ca} - c(q^{ca}) = (400 - 4q^{ca})q^{ca} - 40q^{ca}$$

- La quantité optimale/de monopole q^{ca^*} est obtenue comme :

$$q^{ca^*} = \arg\min_{q^{ca}} \pi(q) \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial q}(q^{ca^*}) = 0 \Leftrightarrow 360 - 8q^{ca^*} = 0 \Rightarrow q^{ca^*} = 45,$$

et ainsi $q_i^{ca^*} = \frac{q^{ca^*}}{2} = 22.5$, $P^{ca^*} = P(q^{ca^*}) = 220$, $\pi_i(q_i^{ca^*}) = 4050$.

2. Stratégie de déviation d'une firme(c.à.d., de tricherie)

La firme 1 triche, la firme 2 respecte l'entente

- 2 produit donc $q_2^{ca^*} = 22.5$(c.f., question précédente).
- La meilleure réponse de 1 est $q_1^{mr}(q_2^{ca^*}) = 45 - \frac{q_2^{ca^*}}{2} = 33.75 =: q_1^{d^*}$.
- On a alors $Q^d = q_1^{d^*} + q_2^{ca^*} = 56.25$, $P^d = P(Q^d) = 400 - 4Q^d = 175$, et $\pi_1(q_1^{d^*}, q_2^{ca^*}) = 4556.25$, $\pi_2(q_1^{d^*}, q_2^{ca^*}) = 3037.5$.

3. Stabilité d'ententes : discussion

Rappels de cours

- Concurrence entre deux agents/firmes.
- La technologie de la firme $i = 1, 2$ est représentée par la fonction de coût :

$$c_i(q_i)cq_i \Rightarrow c_i^m(q_i) := \frac{\partial c}{\partial q_i}(q_i) = c,\ \ i = 1, 2, \text{pour une constante } c \text{ strictement positive.}$$

- Notons la demande inverse,

$$P(Q) = a - bQ,\ \ Q = q_1 + q_2,\ \ \text{pour de constantes } a \text{ et } b \text{ strictement positives.}$$

- La fonction objectif/de profit de la firme i est :

$$\pi_i(q_i, q_j) = P(Q)q_i - cq_i,\ \ i = 1, 2.$$

Rappels de cours

- En **concurrence à la Cournot(c.à.d., par les quantités)** :
  - Chaque firme maximise son profit par rapport à la quantité qu'elle produit et son choix optimal étant donnée la quantité produite par son concurrent est donné par sa meilleure réponse :

$$q_i^{mr}(q_j) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_j}{2}, \;\; i,j = 1,2; \;\; i \neq j.$$

  - A l'équilibre i produit q_i^* qui correspond à un équilibre de Nash tel que :

$$q_i^* = q_i^{mr}(q_j^*), \;\; i,j = 1,2; \;\; i \neq j.$$

  - On obtient ici $q_i^* = \frac{a-c}{3b}$, $i = 1,2$.
  - Prix d'équilibre : $P^*(Q^*) = a - bQ^* = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c$, avec $Q^* = 2\frac{a-c}{3b}$.
  - Profits : $pi^* = \pi_i(q_i^*, q_j^*) = \frac{(a-c)^2}{9b}$.

Rappels de cours

- En **entente** les firmes ayant des coûts identiques, elles fixent la quantité q^{ca} qui maximise le profit de monopole :

$$\pi(q^{ca}) = P(q^{ca})q^{ca} - c(q^{ca}) = (a - bq^{ca})q^{ca} - cq^{ca}, \text{ et } q_i^{ca} = \frac{q^{ca}}{2}.$$

- A l'équilibre on a alors :
  - Quantités d'équilibre : ${q^{ca}}^* = \frac{a-c}{2b}$, ${q_i^{ca}}^* = \frac{{q^{ca}}^*}{2}$.
  - Prix d'équilibre : ${P^{ca}}^* = P({q^{ca}}^*) = \frac{a-c}{2}$.
  - Profits : ${\pi_i^{ca}}^* = \pi_i({q_i^{ca}}^*, {q_j^{ca}}^*) = {P^{ca}}^* {q_i^{ca}}^* - c{q_i^{ca}}^* = \frac{(a-c)^2}{8b}$.

- Dans le cas où un des agents, **dévie de l'entente(c.à.d., triche)**, il obtient le profit :

$$\pi_i^d = \pi_i\left(q_i^{mr}(q_j^{ca^*}), q_j^{ca^*}\right) = \frac{9(a-c)^2}{64b},\ \ i,j = 1,2,\ \ i \neq j.$$

Autrement dit, i joue sa meilleure réponse par rapport à la quantité produite par j en cartel. Ce dernier obtient,

$$\pi_j^d = \pi_j\left(q_i^{mr}(q_j^{ca^*}), q_j^{ca^*}\right) = \frac{3(a-c)^2}{32b}.$$

Rappels de cours

- En fait le jeu consistant à tricher ou s'entendre s'apparente au **jeu du prisonnier** avec la représentation de forme normale et extensives suivantes :

		Firme 2	
		Tricher	Cartel
Firme 1	Tricher	$\underbrace{\frac{(a-c)^2}{9b}, \frac{(a-c)^2}{9b}}_{\text{Équilibre de Nash}}$	$\frac{9(a-c)^2}{64b}, \frac{3(a-c)^2}{32b}$
	Cartel	$\frac{3(a-c)^2}{32b}, \frac{9(a-c)^2}{64b}$	$\frac{(a-c)^2}{8b}, \frac{(a-c)^2}{8b}$

Figure 1 – Représentation de la concurrence à la Cournot sous forme normale.

Rappels de cours

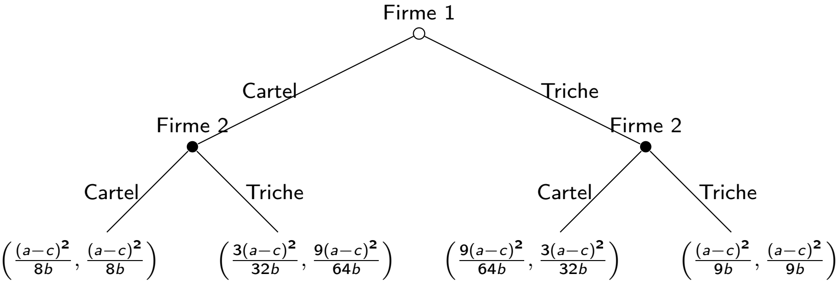

Figure 2 – Représentation de la concurrence à la Cournot sous forme extensive

Répétition du jeu

- Supposons que le jeu se répète deux fois : la firme i choisit la quantité q_{it} à la période t, pour $i = 1, 2$, et $t = 1, 2$.
- **Quel est l'équilibre en sous-jeu parfait ?**
- On résout le jeu(par induction) à rebours :
  - En $t = 2$ l'unique équilibre de Nash est $(\textit{triche}, \textit{triche})$.
  - En $t = 1$ l'unique équilibre de Nash est $(\textit{triche}, \textit{triche})$.
  - Par conséquent, l'unique équilibre en sous-jeux parfait est $((\textit{triche}, \textit{triche}), (\textit{triche}, \textit{triche}))$.
- **Autres questions** :
  - qu'en est-il de $((\textit{cartel}, \textit{cartel}), (\textit{cartel}, \textit{cartel}))$?
  - qu'en est-il de $((\textit{cartel}, \textit{triche}), (\textit{cartel}, \textit{triche}))$?
  - qu'en est-il de : la firm 1 joue $(\textit{cartel}; \textit{triche}$ si $\textit{triche}, \textit{cartel}$ si $\textit{cartel})$, et la firme 2 joue $(\textit{cartel}; \textit{triche}$ si $\textit{triche}, \textit{cartel}$ si $\textit{cartel})$?
  - du jeu à 3,..., N périodes ?

4. Jeu/concurrence à la Cournot infiniment répété

Actualisation

- Le jeu se répète un nombre infini de fois et on se demande s'il existe des équilibre en sous-jeu parfait où les firmes jouent *cartel* toutes les deux à chaque fois ?
- Pour y répondre on a besoin du concept d'actualisation :
  - Le taux d'actualisation $\delta \in [0, 1]$, mesure "l'impatience" de la firme.
  - Par exemple, la valeur actualisée de 10 euros reçus aujourd'hui et demain est $10 + \delta 10$.
  - Si $\delta = 1$, il n'y a pas de différence entre recevoir 10 euros aujourd'hui et les recevoir demain.
  - On peut poursuivre le raisonnement avec 10 euros reçus aujourd'hui, demain, et après-demain, soit $10 + \delta 10 + \delta^2 10$, raisonnement que l'on peut encore poursuivre ... à l'infini.
  - En fait, il s'agit d'une **série géométrique**. Elle a notamment la propriété :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k x = \frac{x}{1 - \delta}.$$

Cournot infiniment répété

- On note comme précédemment q_i^{ca} la quantité de cartel pour la firme i(maximisant le profit des deux firmes), et q_i^* la quantité en concurrence à la Cournot.
- Nous avons le résultat suivant :

Proposition 1

Si le taux d'actualisation δ est "suffisamment" élevé alors les stratégies suivantes constituent des équilibre de sous-jeu parfaits pour le jeu de Cournot infiniment répété :

(a) *En t, la firme i joue $q_{it} = q_i^{ca}$ si $q_{j,t-1} = q_j^{ca}$ pour $j = 1$ et $j = 2$.*

(b) *Jouer q_i^* si $q_{j,t-1} \neq q_j^{ca}$ pour soit $j = 1$ ou $j = 2$.*

- La firme i coopère tant que j coopère.
- Une fois que j triche i produit la quantité d'équilibre de Nash-Cournot pour toutes les périodes suivantes : **Nash reversion**.
- "Grim strategy" : pas de deuxième chance.
- Pour démontrer que ces strategies constituent des équilibres en sous-jeu parfaits il faut obtenir des conditions qui "prescrivent" que la meilleure réponse de la firme i étant donné celle de la firme j est aussi la meilleure réponse dans chaque sous-jeu.

Éléments de démonstration

- Pour la firme $i = 1, 2$, deux types de sous-jeu sont à considérer :
- **Sous-jeu de type 1** : Après une période où un des joueurs à triché (dont soit i, ou $j = 1, 2$, $i \neq j$) :
  - La stratégie proposée indique de jouer q_i^* pour toujours étant donné que j joue aussi cette stratégie.
  - C'est un équilibre de Nash du sous-jeu : jouer "q_i^* pour toujours" est la meilleure réponse à la stratégie de j de jouer "q_j^* pour toujours".
  - Ceci vérifie les critères d'un équilibre de sous-jeu parfait.

Éléments de démonstration

- **Sous-jeu de type 2** : Après une période sans triche.
  - La stratégie proposée indique de coopérer et jouer q_i^{ca}, avec le profit actualisé de $\frac{\pi_i^{ca}}{1-\delta}$
  - La meilleure stratégie alternative est de jouer $q_i^{mr}(q_j^{ca}) =: q_i^d$ à la période en cours, mais ceci entraîne $q_j = q_j^*$ pour toujours. Le profit actualisé est ici $\pi_i^d + \delta\left(\frac{\pi_i^*}{(1-\delta)}\right)$.
  - Pour que q_i^{ca} soit un équilibre de Nash de ce sous-jeu, il est nécessaire que,

$$\underbrace{\frac{\pi_i^{ca}}{1-\delta}}_{\text{profits sous coopération}} > \underbrace{\pi_i^d + \delta\left(\frac{\pi_i^*}{(1-\delta)}\right)}_{\text{profits sous déviation/triche}}$$

$$\Rightarrow \delta > \frac{9}{17}.$$

- Par conséquent, la **Nash reversion** indique une meilleure réponse dans ces deux sous-jeux si est "suffisamment élevé" avec $\delta > \frac{9}{17}$.
- Dans ce cas la **Nash reversion** constitue un équilibre de sous-jeu parfait.