IMA - 1.samostatná práce - Zadání 2

Letní semestr 2017

1 Úkol č.1

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$f(x) = \frac{-x^3 - 11x^2 + 8x + 30}{x^5 + 7x^4 + 17x^3 + 23x^2 + 30x + 18}$$

Rozklad jmenovatele v reálném oboru najděte pomocí Hornerova schématu. Řešení soustavy rovnic pro neurčité koeficienty můžete najít pomocí Maple (nebo jiného softwaru).

Napíšeme schéma rozkladu. Polynom v jmenovateli rozložíme. Pokud koeficienty jsou celočíselné, tak i kořen bude celočíselný a bude dělit poslední koeficient.
Možné kořeny: 1, -1, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18.

	1	**7**	**17**	**23**	**30**	**18**
~~**1**~~	~~1~~	~~8~~	~~25~~	~~48~~	~~78~~	~~96~~
-1	1	6	11	12	18	0
~~**-1**~~	~~1~~	~~5~~	~~6~~	~~6~~	~~12~~	
~~**3**~~	~~1~~	~~9~~	~~29~~	~~99~~	~~315~~	
-3	1	3	2	6	0	
-3	1	0	2	0		
~~**-3**~~	~~1~~	~~-3~~	~~11~~			
~~**-6**~~	~~1~~	~~-6~~	~~-34~~			
~~**-3**~~	~~1~~	~~-9~~	~~-79~~			
~~**-3**~~	~~1~~	~~-18~~	~~-322~~			

$$f(x) = (x+1)(x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18)$$

$$f(x) = (x+1)(x+3)(x^3 + 3x^2 + 2x + 5)$$

$$f(x) = (x+1)(x+3)^2(x^2 + 2)$$

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$f(x) = \frac{A(x+3)^2(x^2+2) + B_1(x+1)(x+3)(x^2+2) + B_2(x+1)(x^2+2) + (Cx+D)(x+1)(x+3)^2}{(x+1)(x+3)^2(x^2+2)}$$

Z výše uvedeného zápisu vyplívá, že pokud dosadíme kořen -1 zůstane v rovnici koeficient A (ostatní se vynulují) a pokud dosadíme kořen -3 zůstane koeficient B_2.

Po vynásobení rovnice jmenovatelem: $(x+1)(x+3)^2(x^2+2)$. Dostaneme rovnici:

$$A(x+3)^2(x^2+2) + B_1(x+1)(x+3)(x^2+2) + B_2(x+1)(x^2+2) + (Cx+D)(x+1)(x+3)^2 = -x^3 - 11x^2 + 8x + 30$$

Po dosazení $x = -1$:

$$A(x+3)^2(x^2+2) = -x^3 - 11x^2 + 8x + 30$$
$$A(-1+3)^2(1+2) = 1 - 11 - 8 + 30$$
$$12A = 12$$
$$A = 1$$

Po dosazení $x = -3$:

$$B_2(x+1(x^2+2) = -x^3 - 11x^2 + 8x + 30$$
$$B_2(-3+1)(9+2) = 27 - 99 - 24 + 30$$
$$-22B_2 = -66$$
$$B_2 = 3$$

Ostatní koeficienty můžeme získat tak, že roznásobíme levou stranu a upravíme ji jako polynom. Obě strany porovnáme a získáme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů.

$$A(x+3)^2(x^2+2)+B_1(x+1)(x+3)(x^2+2)+B_2(x+1)(x^2+2)+(Cx+D)(x+1)(x+3)^2 = -x^3-11x^2+8x+30$$

$$A(x^4+6x^3+11x^2+12x+18)+B_1(x^4+4x^3+5x^2+8x+6)+B_2(x^3+x^2+2x+2)+(Cx+D)(x^3+7x^2+15x+9) =$$
$$= -x^3 - 11x^2 + 8x + 30$$

$$x^4+6x^3+11x^2+12x+18+B_1x^4+4B_1x^3+5B_1x^2+8B_1x+6B_1+3x^3+3x^2+6x+6+Cx^4+Dx^3+7Cx^3+7Dx^2+$$
$$+15Cx^2 + 15Dx + 9Cx + 9D = -x^3 - 11x^2 + 8x + 30$$

$$x^4 + B_1x^4 + Cx^4 = 0$$
$$6x^3 + 4B_1x^3 + 3x^3 + Dx^3 + 7Cx^3 = -x^3$$
$$11x^2 + 5B_1x^2 + 3x^2 + 7Dx^2 + 15Cx^2 = -11x^2$$
$$12x + 8B_1x + 6x + 15Dx + 9Cx = 8x$$
$$18 + 6B_1 + 6 + 9D = 30$$

$$1 + B_1 + C = 0$$
$$6 + 4B_1 + 3 + D + 7C = -1$$
$$11 + 5B_1 + 3 + 7D + 15C = -11$$
$$12 + 8B_1 + 6 + 15D + 9C = 8$$
$$18 + 6B_1 + 6 + 9D = 30$$

Řešením této soustavy rovnic získáme koeficienty: $B_1 = 1$, $C = -2$, $D = 0$
Výsledek:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2} + \frac{-2x}{x^2+2}$$

2 Úkol č.2

Najděte asymptoty funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$.
Nejprve si určíme D_f :

$$D_f = R$$

Definiční obor jsou všechna reálná čísla, což znamená, že funkce nemá žádné svislé asymptoty.
Další na řadě jsou asymptoty se směrnicí:

$$y = kx + q$$

$$k_1 : \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - 2x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3(1 - \frac{2}{x})}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{(1 - \frac{2}{x})} = \sqrt[3]{1 - 0} = 1$$

$$k_2 : \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 - 2x^2}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3(1 - \frac{2}{x})}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{(1 - \frac{2}{x})} = \sqrt[3]{1 + 0} = 1$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

$$q_1 : \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x = \lim_{x\to\infty} (x^3 - 2x^2)^{\frac{1}{3}} - x = \lim_{x\to\infty} (x^3(1 - \frac{2}{x}))^{\frac{1}{3}} - x = \lim_{x\to\infty} x((1 - \frac{2}{x}))^{\frac{1}{3}} - x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x[((1 - \frac{2}{x}))^{\frac{1}{3}} - 1] = \lim_{x\to\infty} \frac{((1 - \frac{2}{x}))^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{-1}} = L'Hospitalovopravidlo = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{2}{x})^{\frac{-2}{3}} * \frac{2}{x^2}}{-1x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{3(1-\frac{2}{x})^{\frac{-2}{3}} x^2}}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{3(1 - \frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}} = \frac{-2}{3(1 - 0)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2}{3}$$

$$q_2 : \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x = |...\ viz\ q_1...| = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{3(1 - \frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}} = \frac{-2}{3(1 + 0)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2}{3}$$

$$q_1 = q_2 = -\frac{2}{3}$$

Teď když máme k i q můžeme sestavit rovnici asymptoty:

$$y = kx + q$$

$$y = x - \frac{2}{3}$$

3 Úkol č.3

Daným bodem $A = [a, b]$ v prvním kvadrantu vedeme přímku p tak, aby protla obě kladné poloosy; její průsečík s osou x označme X, průsečík s osou y ozna4me Y. Pro kterou přímku bude mít trojúhelník OXY, kde O je počátek souřadnic, nejmenší obsah?

Nakres:

Ze zadíní tedy vyplývá že:

$$A = [a, b]; X = [m, 0]; Y = [0, n]; a, b, m, n > 0$$

Máme hledat nejmenší obsah, tudíž budeme potřebovat vzoreček pro výpočet obsahu. V našem případě pro výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníku.

$$S = \frac{m * n}{2}$$

Dále víme, že přímka p prochází bodem A. Proto dosadíme do rovnice obecné přímky bod A a vyjádříme si neznámou k nebo q.

$$y = kx + q$$

$$b = ka + q$$

$$k = \frac{b - q}{a}$$

Nyní provedeme to stejné pro body X a Y. My ovšem máme již vyjádřené k, proto si vyjádříme m a n a následně dosadíme k.
X:

$$y = kx + q$$

$$0 = km + q$$

$$m = \frac{-q}{k}$$

$$m = \frac{-q}{\frac{b-q}{a}} = \frac{-qa}{b - q} = \frac{aq}{q - b}$$

Y:

$$y = kx + q$$

$$n = k * 0 + q$$

$$n = q$$

Teď se vrátíme ke vzorečku s obsahem a dosadíme do něj.

$$S = \frac{m * n}{2} = \frac{1}{2} * m * n = \frac{1}{2} * \frac{aq}{q - b} * q = \frac{aq^2}{2(q - b)}$$

Dále nalezneme takzvané body podezřelé z extrému. To znamená, že musíme vypočítat S' (Zderivovat náš vzoreček pro obsah).

$$[\frac{aq^2}{2(q-b)}]' = \frac{(aq^2)'(2q-2b)-(aq^2)(2q-2b)'}{(2q-2b)^2} = \frac{2aq(2q-2b)-aq^2*2}{4(q-b)^2} = \frac{2(aq(2q-2b)-ag^2)}{4(q-b)^2} =$$

$$= \frac{2aq^2-2abq-aq^2}{2(q-b)} = \frac{aq^2-2abq}{2(q-b)} = \frac{aq(q-2b)}{2(q-b)^2}$$

$$\frac{aq(q-2b)}{2(q-b)^2} = 0/*2(q-b)^2/aq$$

$$q-2b=0$$

$$q=2b$$

Teď se vrátíme ke vzorečku s vyjádřeným k ke je dosazen bod A a dosadíme sem vypočtené q.

$$k = \frac{b-q}{a} = \frac{b-2b}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$k = \frac{-b}{a}$$

Na závěr dosadíme do obecné rovnice naše k a q a tím získáme přímku p.

$$y = kx+q$$

$$y = \frac{-b}{a}x+2b$$

Hotovo máme přímku p, která protíná osu x i osu y a prochází bodem A.

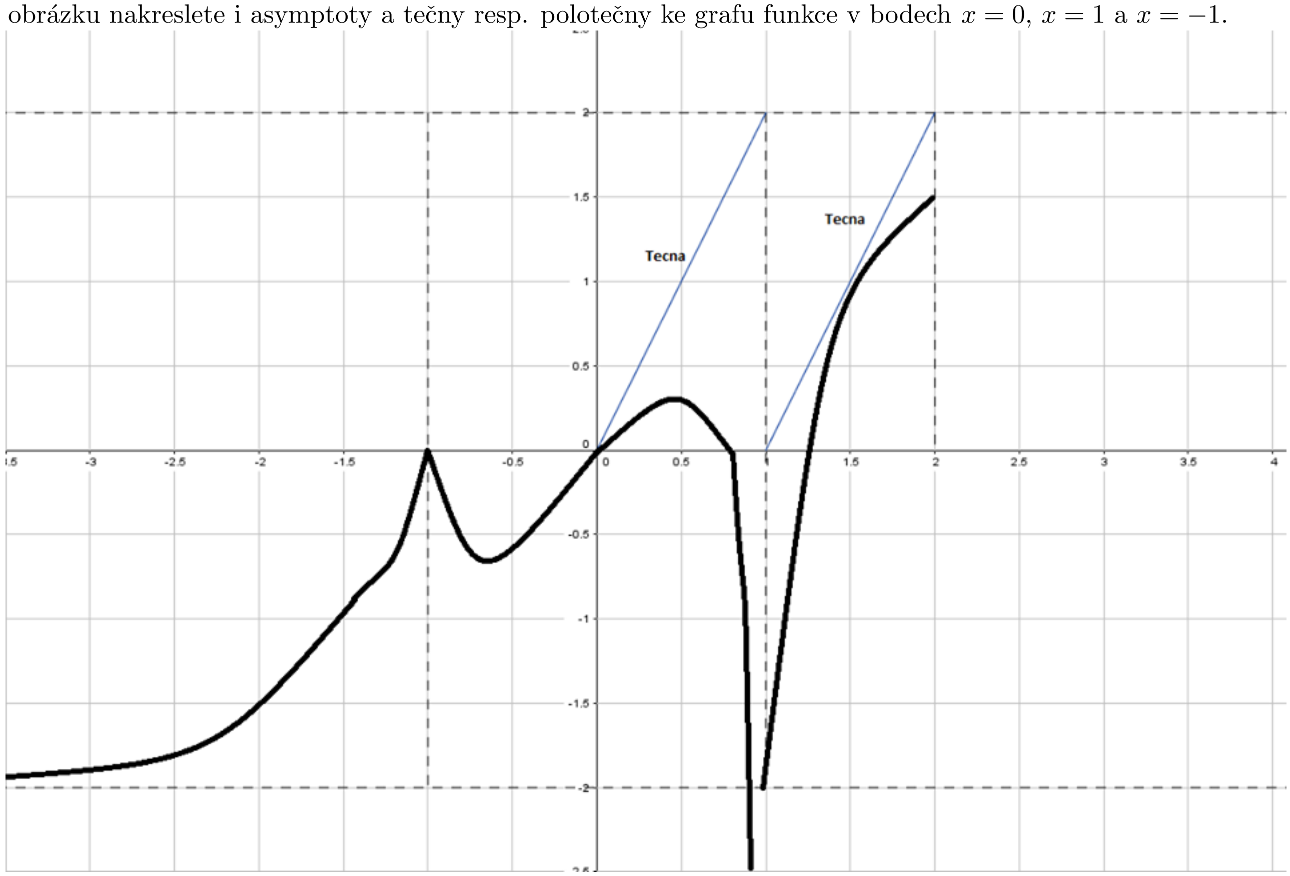
4 Úkol č.4

Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f = R - \{1\}$, pro $x = 1$ má nespojitost 2.druhu,

$$f(0) = f(-1) = 0,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2,\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = -2,\ f'(0) = 2,\ \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \infty,\ \lim_{x\to -1^+} f'(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2, f''(x) < 0\ pro\ x \in (0,1)\ a\ pro\ x \in (1,\infty), f''(x) > 0\ pro\ x \in (-\infty,-1)\ a\ pro\ x \in (-1,0).$$

Přímka $y = x - 2$ je asymptota pro $x \to \infty$.
Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny resp. polotečny ke grafu funkce v bodech $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$.



5 Úkol č.5

Najděte nejvedší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ na intervalu $< -2, 2 >$.
Nejprve určíme D_f:

$$D_f = R$$

Dalším krokem bude zderivovoat $f(x)$. Pro zjednodušení rozdělíme funkci $f(x)$ na $g(x)$ a $h(x)$, neboť víme, že platí:

$$f'(x) = (g(x) - h(x))' = g'(x) - h'(x)$$

Takže teď máme $g(x) = ((x+1)^2)^{\frac{1}{3}}$ a $h(x) = ((x-1)^2)^{\frac{1}{3}}$. Tyto funkce zderivujeme.

$$g'(x) = [((x+1)^2)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}((x+1)^2)^{\frac{-2}{3}} * [(x+1)^2]' = \frac{1}{3((x+1)^2)^{\frac{2}{3}}} * (1(x+1) + (x+1)1) =$$

$$= \frac{1}{3((x+1)^2)^{\frac{2}{3}}} * (x+1)(1+1) = \frac{2(x+1)}{3((x+1)^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$h'(x) = [((x-1)^2)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}((x-1)^2)^{\frac{-2}{3}} * [(x-1)^2]' = \frac{1}{3((x-1)^2)^{\frac{2}{3}}} * (1(x-1) + (x-1)1) =$$

$$= \frac{1}{3((x-1)^2)^{\frac{2}{3}}} * (x-1)(1+1) = \frac{2(x-1)}{3((x-1)^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Funkce máme zderivovány a můžeme je opět spojit.

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{3((x+1)^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2(x-1)}{3((x-1)^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Teď vidíme, že body podezřelé z extrému jsou na $x = -1$ a $x = 1$.
To nám rozděluje osu na tři intervaly pro které musíme určit zda funkce roste či klesá.

$$< -2, -1 >: f(-2) = \frac{2(-2+1)}{3((-2+1)^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2(-2-1)}{3((-2-1)^2)^{\frac{2}{3}}} \simeq -0.2044$$

$$(-1, 1 >: f(0) = \frac{2(0+1)}{3((0+1)^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2(0-1)}{3((0-1)^2)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

$$(1, 2 >: f(2) = \frac{2(2+1)}{3((2+1)^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2(2-1)}{3((2-1)^2)^{\frac{2}{3}}} \simeq -0.2044$$

. -1 1
$- - | - - - | - -$ Tak teď vidíme, že minimum má funkce na $x = -1$ a maximum na $x = 1$.
. \ / \ Teď již jen dopočítáme funkční hodnoty pro tato x.

$$f(-1) = \sqrt[3]{(-1+1)^2} - \sqrt[3]{(-1-1)^2} = -\sqrt[2]{4}$$

$$f(1) = \sqrt[3]{(1+1)^2} - \sqrt[3]{(1-1)^2} = \sqrt[2]{4}$$

$$Min[-1, -\sqrt[2]{4}]; \quad Max[1, \sqrt[2]{4}]$$