=≠∩∪{}\∈∉∧∨⊆¬∅𝝉

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1)

¬(Y\Z)=¬(Z\Y)  
U \ (Y \ Z) = U \ (Z \ Y)  
x ∈ U ∧ x ∉ (Y \ Z) = x ∈ U ∧ x ∉ (Z \ Y)  
x ∈ U ∧ (x ∉ Y ∨ x ∈ Z) ≠ x ∈ U ∧ (x ∉ Z ∨ x ∈ Y)  
Porovnáme závorky a vidíme že každá z nich vyžaduje opačné podmínky pro výběr x. Tudíž není možné aby byla levá strana rovná právě straně.  
  
U = { 1; 2; 3; 4; 5 }  
Y = { 1; 2; 3 }  
Z = { 3; 4 }  
L = U \ (Y \ Z) = U \ ( { 1; 2; 3 } \ { 3; 4 } ) = U \ { 1; 2} = { 1; 2; 3; 4; 5 } \ { 1; 2} = { 3; 4; 5 }  
P = U \ (Z \ Y) = U \ ( { 3; 4 } \ { 1; 2; 3 } ) = U \ { 4 } = { 1; 2; 3; 4; 5 } \ { 4 } = { 1; 2; 3; 5 }  
L ≠ P  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  
X \ (Y ∩ Z) = (X \ Y) ∪ Z  
x ∈ X ∧ x ∉ (Y ∩ Z) = x ∈ (X \ Y) ∨ x ∈ Z  
x ∈ X ∧ (x ∉ Y ∨ x ∉ Z) = (x ∈ X ∧ x ∉ Y) ∨ x ∈ Z  
(x ∈ X ∧ x ∉ Y ) ∨ (x ∈ X ∧ x ∉ Z) ≠ (x ∈ X ∧ x ∉ Y) ∨ x ∈ Z

Vidíme že levá strana se nerovná pravé straně. Levá strana nesmí obsahovat x z množiny Z narozdíl od pravé strany.

X = { 1; 2; 3 }  
Y = { 3; 4; 5 }  
Z = { 1; 5; 6 }  
L = X \ ( { 3; 4; 5 } ∩ { 1; 5; 6 } ) = X \ { 5 } = { 1; 2; 3 } \ { 5 } = { 1; 2; 3 }  
P = ( X \ Y) ∪ Z = ( {1; 2; 3 } \ { 3; 4; 5 } ) ∪ Z = { 1; 2 } ∪ Z = { 1; 2 } ∪ { 1; 5; 6 } = { 1; 2; 5; 6 }  
L ≠ P  
  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  
X ∪ (Y \ Z) = (X ∩ Y) \ (X ∪ Z)  
x ∈ X ∨ x ∈ (Y \ Z) = x ∈ (X ∩ Y) ∧ x ∉ (X ∪ Z)  
x ∈ X ∨ (x ∈ Y ∧ x ∉ Z) = ( x ∈ X ∧ x ∈ Y) ∧ ( x ∉ X ∧ x ∉ Z)  
(x ∈ X ∨ x ∈ Y) ∧ (x ∈ X ∨ x ∉ Z) ≠ ( x ∈ X ∧ x ∈ Y) ∧ ( x ∉ X ∧ x ∉ Z)  
Vidíme že prvky množiny X budou do levé strany vždy patřit a do právě strany nebude patřit nikdy. Tudíž pokud X je neporažená množina, tak nemůže dojít k rovnosti.

X = { 1; 2; 3 }  
Y = { 3; 4; 5 }  
Z = { 1; 5; 6 }  
L = X ∪ (Y \ Z) = X ∪ ( { 3; 4; 5; } \ { 1; 5; 6 } ) = X ∪ { 3; 4 } = { 1; 2; 3 } ∪ { 3; 4 } = { 1; 2; 3; 4 }  
P = (X ∩ Y) \ (X ∪ Z) = ( { 1; 2; 3 } ∩ { 3; 4; 5 } ) \ ( { 1; 2; 3 } ∪ { 1; 5; 6 } ) = { 3 } \ { 1; 2; 3; 4; 5 } = { } = ∅  
L ≠ P  
  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  
X ∩ (Y \ Z) = (X ∪ Y) \ (X ∩ Z)  
x ∈ X ∧ x ∈ (Y \ Z) = x ∈ ( X ∪ Y) ∧ x ∉ (X ∩ Z)  
x ∈ X ∧ (x ∈ Y ∧ x ∉ Z) = ( x ∈ X ∨ x ∈ Y) ∧ ( x ∉ X ∨ x ∉ Z)  
(x ∈ X ∧ x ∈ Y) ∧ (x ∈ X ∧ x ∉ Z) ≠ ( x ∈ X ∨ x ∈ Y) ∧ ( x ∉ X ∨ x ∉ Z)

Zde opět vidíme, že levá strana se jednoznačně nerovná pravé.  
  
X = { 1; 2; 3 }  
Y = { 3; 4; 5 }  
Z = { 1; 5; 6 }  
L = X ∩ (Y \ Z) = X \ ( { 3; 4; 5 } \ { 1; 5; 6 } ) = X \ { 3; 4 } = { 1; 2; 3 } \ { 3; 4 } = { 1; 2 }  
P = (X ∪ Y) \ (X ∩ Z) = ( { 1; 2; 3 } ∪ { 3; 4; 5 } ) \ ( { 1; 2; 3 } ∩ { 1; 5; 6 } ) = { 1; 2; 3; 4; 5 } \ { 1 } = { 2; 3; 4; 5 }  
L ≠ P  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  
(X ∪ Y) ∩ (Y \ X) = Y  
x ∈ (X ∪ Y) ∧ x ∈ (Y \ X) = x ∈ Y  
(x ∈ X ∨ x ∈ Y) ∧ (x ∈ Y ∧ x ∉ X) = x ∈ Y   
  
X = { 1; 2; 3 }  
Y = { 3; 4; 5 }  
Z = { 1; 5; 6 }  
L = (X ∪ Y) ∩ (Y \ X) = ( { 1; 2; 3 } ∪ { 3; 4; 5 } ) ∩ ( { 3; 4; 5 } \ { 1; 2; 3 } ) = { 1; 2; 3; 4; 5 } ∩ { 4; 5 } = { 1; 2; 3 }  
P = Y = { 3; 4; 5 }  
L ≠ P  
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2)

Máme množinu X = { 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 } a relaci R = { (x, y); x, y ∈ X; 4y | 3x }  
Vytvoříme potenční množinu 2x z níž vybereme prvky splňující podmínku: 3x modulo 4y = 0

Prvky relace R jsou:  
R = { (4, 1); (4, 3); (8, 1); (8, 2); (8, 3); (8, 6) }  
Definiční obor z relace R je:

Dom R = { 4; 8 }  
Obor hodnot relace R je:

Im R = { 1; 2; 3; 6 }  
Reversní relace k relaci R jest:

R**-1** = { (1, 4); (3, 4); (1, 8); (2, 8); (3, 8); (6, 8) }

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

3)

Buď X = N, 𝝉 = { W; W ⊆ X, X \ W je konečná } ∪ {∅}. Dokažte, že (X,𝝉) je topologický prostor.

(i) ∅ ∈ 𝝉 ?; X ∈ 𝝉 ?;

Ze zadání vidíme, že ∅ ∈ 𝝉. Nyní provedeme X \ X = ∅ z čehož vyvodíme, že se jedná o konečnou množinu, takže X ∈ 𝝉. (i) axiom prověřen.

(ii) Nechť ui ∈ 𝝉 pro všechna i ∈ I, pak ∪ui ∈ 𝝉.

Víme ze zadání, že X \ ui je konečná množina, takže za pomoci Demorganových vrozců upravíme výraz X \ ∪ui = ∩(X \ ui). Tímto jsme prověřili (ii) axiom.

(iii) Nechť u,v ∈ 𝝉. Zjištěme zda X \ (u ∩ v) jest konečná množina.

Upravme výraz X \ (u ∩ v) = (X \ u) ∪ (X \ v). (X \ v) a (X \ u) jsou konečné množiny. (iii) axiom jest také prověřen.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

4) Nechť R relace na X taková, že R−1 je reflexivní a tranzitivní relace na X. Dokažte, že  
R ∩ R−1 je ekvivalence na X. [Lukáš Prokop]

1. Je R ∩ R−1 reflexivní? Zvolme x ∈ X, pak (x,x) ∈ R-1  
   Dvojice má stejné složky, takže i po přehození (x,x) ∈ R, odkud (x,x) ∈ R ∩ R−1.  
   Tedy R ∩ R−1 je reflexivní.
2. Je R ∩ R−1 symetrická? Nechť (x,y) ∈ R ∩ R−1.  
   Pak (x,y) ∈ R ∧ (x,y) ∈ R-1.  
   Pak (y,x) ∈ R-1 ∧ (y,x) ∈ R, takže (y,x) ∈ R-1 ∩ R = R ∩ R-1.  
   Tedy R ∩ R−1 je symetrická.
3. Je R ∩ R−1 tranzitivní? Předpokládejme, že (x,y) ∈ R ∩ R−1 a (y,z) ∈ R ∩ R−1.  
   Pak (x,y) ∈ R ∧ (x,y) ∈ R-1 ∧ (y,z) ∈ R ∧ (y,z) ∈ R−1.  
   Pak (y,x) ∈ R-1 ∧ (x,y) ∈ R-1 ∧ (z,y) ∈ R ∧ (y,z) ∈ R−1.  
   Pak (x,z) ∈ R-1 ∧ (z,x) ∈ R-1.  
   Tedy (x,z) ∈ R ∧ (x,z) ∈ R-1.  
   Odkud (x,z) ∈ R ∩ R−1.  
   Tedy R ∩ R−1 je tranzitivní.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

5) Na příklad se někdo ptal na cvičení s Kovárem a on k tomu říkal nějaké info. Tak sem píši, co mám poznačené. Moc rozumu z toho nemám, ale třeba to nějak pomůže. [Lukáš Prokop]

- zvolí se 2 sady vstupů x1, x2, y1, y2  
- pokud v relaci x1 a y1 a x2 a y2, tak OK

(A,+,\*) … (množina A, plus, krát)

podmínky kongruence:

* pro každé x1, x2, y1, y2 je prvkem A platí:  
  x1, y1 ∈ R a x2, y2 ∈ R, tak x1 + y1 a x2 + y2 je prvkem R  
  x1, y1 ∈ R a x2, y2 ∈ R, tak x1 × y1 a x2 × y2 je prvkem R

nápad: (x1,y1) ∈ R znamená, že 4 dělí její rozdíl  
 existuje k ∈ Z, x1 - y1 = 4k  
 existuje l ∈ Z, x2 - y2 = 4l  
  
 sčítací metoda → (x1+x2) - (y1 + y2) = 4k + 4l  
  
 x1 = y1 + 4k  
 x2 = y2 + 4l  
  
 násobení → (x1 × x2) = (y1 + 4k) × (y2 + 4l) → roznásobit…  
  
 ⇒ tím bude dokázáno  
  
 4 třídy - násobky 4, 4+1, 4+2, 4+3  
  
 vezmu množinu tříd A / R třída, kde je 0,1,0,3  
 budu dělat operace a + b = [....]  
 a \* b = [....]

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

9. Pro každé n je větší nebo rovno 3 je počet stromů na daných n vrcholech roven n^n-2

10)

x - z = 1

2x + y = -2

3x - y = -3

x + y + 2z = 0



Hodnost matice A je 3.



Hodnost rozšířené matice je 4.

Z těchto výsledků vyplývá, že přímky p,q jsou **mimoběžné**.

(Viz. tabulka “Vzájemná poloha dvou přímek” ve skriptech “Maticový a tenzorový počet” strana 11)