

Prüfungsprotokoll

Introduction to Ergodic Theory

X. M. Zheng

09. August 2023

- Studiengang: M.Sc. Mathematics
- Prüfungsdauer: ca. 30 Minuten
- Prüfer: Dr. Ivan Yaroslavtsev
- Beisitzer: keine Angabe
- Vertiefung: Differentialgleichungen
- Belegt im: SS 2023
- Umfang: 6 ECTS
- Prüfungssprache: Englisch
- Note: 1.0
- War diese Note angemessen? Ja.

Prüfungsstil

Die Prüfung war sehr angenehm. Anders als sonst fand die Prüfung in einem Hörsaal des Geomatikums statt und statt auf Papier musste man vor der Tafel präsentieren. Ivan hatte zuvor noch angekündigt, welche Themen für die Klausur relevant waren (im Grunde alles aus der Vorlesung, was direkt mit Ergodentheorie zu tun hatte, und die Beispiele auf den Übungsblättern). Ivan fragte mich insgesamt zu drei Kapiteln ab, wobei man gut sein Wissen bei ihm präsentieren konnte. Allgemein hat er einen gut ausreden lassen und war eher fokussiert darauf, dass man alle wichtigen Definitionen / Sätze / Lemmata etc. aufsagen und erklären kann statt jetzt alle Beweise durchzukauen. Gewisse Beweise wollte er dann im Nachhinein dann präsentiert haben.

Hat sich der Besuch / Nichtbesuch der Veranstaltung für dich gelohnt?

Ich würde sagen, dass der Besuch der Vorlesung sicherlich nicht schlecht ist, aber der Nicht-Besuch auch einem nicht geschadet hätte. Ivan hat die (ziemlich vollständigen) Vorlesungsnotizen auch hochgeladen, mit denen man auch selbstständig gut klarkommen wäre. Ein Großteil der Vorlesung bestand außerdem aus einer Wiederholung von vor allem maßtheoretischen Grundlagen, die die meisten sich auch sicherlich sparen könnten. Wenn man außerdem nach Intuition sucht, so muss man sich da zum Teil selbst behelfen.

Die Übung war mehr oder weniger Pflicht, da man erst bei 50 Prozent der Punkte auch zur Klausur zugelassen wurde und die Bearbeitung nur gezählt hat, wenn man in der Übung anwesend war. Von den Leuten, die eine Aufgabe angekreuzt hatten, würde er dann einen zufällig präsentieren lassen. Diese waren zum Glück alles andere als schwer.

Wie lange und wie hast du dich alleine oder mit anderen auf die Prüfung vorbereitet?

Ich habe effektiv drei Tage weniger intensiv und vier Tage intensiv gelernt. Dies tat ich hauptsächlich alleine, wobei ich und ein Kommilitone uns am Tag vor der Prüfung nochmal gegenseitig abgefragt haben. Das war auch so ganz hilfreich gewesen. Sonst bin ich im Grunde einfach mehrfach durch das Skript durchgegangen. Die Übungsblätter habe ich mir auch angeschaut. Wirklich relevant waren dabei die Aufgaben zu *Baker's transformation*, *Arnold's cat map* und dem *right shift*. Ein paar der Aussagen zu Mixing in dem letzten Übungsblatt waren auch noch interessant.

Da die Vorlesung recht überschaubar war, ließ sich trotz kurzer Zeit eigentlich alles Klausurrelevante gut überdecken, insbesondere wenn man die Basics in Maßtheorie noch drauf hat.

Ablauf

Die untere Nummerierung von Sätzen, Lemmas etc. orientiert sich an meinem Mitschrieb.

Zuerst hat Ivan mich gefragt, was genau Ergodizität heißt und was für Äquivalenzen mir in den Sinn kommen. Ich nannte also die erste Definition zu Ergodizität, die wir in der Vorlesung hatten: Jede T-invariante Menge hat Maß 0 oder 1. Dabei habe ich dann definiert, was es heißt für eine messbare Menge oder Funktion eben T-invariant zu sein. Danach habe ich die Äquivalenzen in Proposition 6.2 genannt und habe gefragt, ob ich diese auch zeigen sollte. Ivan wollte das wohl gerade fragen, also habe ich den Ringschluss aus der Vorlesung skizziert. Da man sehr oft mit der symmetrischen Differenz umgehen muss, habe ich dabei geschaut, dass man den von mir angeschriebenen Schritten folgen konnte. Danach bemerkte Ivan, dass ich ja eigentlich nur ausnutzte, dass $f = f \circ T$ für T-invariantes f nur fast sicher gilt, obwohl ich $f = f \circ T$ zuvor geschrieben habe. Der kleine Fehler war mir aber verzeihen.

Als nächstes Thema sollte ich dann im Setting, wo T stetig, X ein kompakter, metrischer Raum und die σ -Algebra borelsch ist, erklären, was wir strukturell über den Raum $M(X)$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf X denn wissen. Dabei ging es ihm wirklich einfach darum, dass ich alle wichtigen Aussagen einfach aufsaue, Beweise waren dann erstmal auch bei Nachfrage nicht erwünscht. Nur sollte ich nochmal für den Beisitzer erklären, was die schwach* Topologie auf $M(X)$ sei. Das kumulierte dann, neben struk-

turellen Aussagen über $M(X)$ und $M(X, T)$, dem Raum aller T -invarianten Maße, eben in die Aussage, dass $M(X)$ immer ein ergodisches Maß in diesem Fall besitzt. Ein paar grobe Zusammenhänge, wie die Sätze im Beweis von anderen genutzt werden, habe ich trotzdem erwähnt. Ivan wollte dann am Ende noch den Beweis von Proposition 7.3 hören, dass $\mu \in M(X, T)$ genau dann extremal ist, wenn μ ergodisch ist. Dies konnte ich souverän wiedergeben.

Zuletzt sollte ich darüber reden, was es für Zusammenhänge zwischen der *one-point motion* und der *two-point motion* gibt. Zu $((X, \mathcal{B}, \mu), T)$ habe ich die two-point motion $((X \times X, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \mu), T \times T)$ kurz definiert und dann zum einen die Äquivalenz für starkes Mischen und danach (in aller Vollerständigkeit mit allen Begriffen) das *Mixing-Theorem* / Satz 9.4 angeschrieben. Ivan wollte zuletzt von mir dann die Richtung (iii) \implies (i) skizziert haben, falls T nicht invertierbar ist. Dies ging auch recht zügig, wobei vor allem der Trick, dass für beschränkte Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ und $a \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - a| = 0 \iff \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - a|^2 = 0$$

gilt, wichtig war. Damit war dann auch die Prüfung beendet.

Fazit

Ivan und der Beisitzer waren wohl beide sehr zufrieden mit mir gewesen, sodass der Beisitzer sogar fragte, ob ich sehr viel Spaß am Thema habe oder „einfach Mathe allgemein mag“,¹ mich in Maßtheorie spezialisieren will,² und Doktorand werden will.³ Dass ich eigentlich Graphentheorie mache, hat dann erstmal überrascht. Es war dann aber weniger überraschend, nachdem ich meinte, dass ich eigentlich nach diskreter Mathematik Stochastik am meisten mag. Da meinte ich auch, dass ich versucht habe, die Begriffe auch immer stochastisch zu deuten. Ivan meinte darauf, dass alles auch stark miteinander verbunden ist.

¹Meinte letzteres.

²Awkward.

³Mhm.