

真空の透磁率の数値について (暫定版)

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2005 年 11 月 14 日

現在, SI (国際単位系) では真空の透磁率は $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ と定義されているが, この奇妙な数値の由来について調べておく. この数値 $4\pi \times 10^{-7}$ を変化させることは, 電磁的単位 H (ヘンリ) の大きさを変えることを意味する. 例えばこの数値を 2 倍しても, 普遍定数である μ_0 の大きさは変化するわけではないので, 1 H をもとの半分の量に定義し直すことになる. $H = J/A^2$ であることを考慮すると, 1 A が表す電流の量を $\sqrt{2}$ 倍にしなければならない. それに応じて $1 V = 1 W/A$ が表す電圧の量を $1/\sqrt{2}$ 倍にしなければならない. J, W は力学的に定義されている. このように, μ_0 をある単位で表したときの数値は電磁的な単位達の大きさを決めるという役割を担っている.

SI に対する批判の仕方の 1 つは数値 $4\pi \times 10^{-7}$ の唐突さを指摘することである. しかし, この数値は電磁的単位の大きさを決める自由度に対応しており, SI では従来から使われてきた実用的単位を継承するために, その自由度を行使して, この特定の数値を選んだに過ぎず, 上記の批判は的外れである.

ビオ・サバールの式

$$F = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d} (I_2 l) = 2 \frac{\dot{I}_1}{d} (\dot{I}_2 l) \quad (1)$$

は距離 d 隔てて電流 I_1, I_2 が平行に流れているとき, 一方の電流 I_2 の長さ l の部分に働く力 F を表す.

CGS 電磁単位系 (emu) で用いられる $\dot{I} \equiv \sqrt{\mu_0/4\pi} I$ は正規化された電流で, その次元は $\dot{I} \sim \sqrt{N}$ であり, 力学的なものになっている. 同様にして, 電圧や抵抗も

$$\dot{V} = \sqrt{4\pi\mu_0} V \sim \sqrt{N} \cdot \text{m/s}, \quad \dot{R} = (4\pi\mu_0) R \sim \text{m/s} \quad (2)$$

のように正規化される. \sim は両辺が同じ物理的次元を持つことを表す.

CGS 電磁単位系における正規化された電流の単位は上の式において, $F = 1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$, $d = l = 1 \text{ cm}$ と置くことで求めることができる. すなわち,

$$\dot{I}_{0,\text{emu}} = 1 \sqrt{\text{dyn}} = \sqrt{10^{-5} \text{ N}} \quad (3)$$

である. ダイン $\text{dyn} = \text{g} \cdot \text{cm/s}^2$ は CGS 単位系における力の単位である. 同様に, 正規化された電圧の単位と抵抗の単位も定まる.

$$\begin{aligned} \dot{V}_{0,\text{emu}} &= 1 \sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{cm/s} = \sqrt{10^{-9} \text{ N}} \cdot \text{m/s}, \\ \dot{R}_{0,\text{emu}} &= 1 \text{ cm/s} = 10^{-2} \text{ m/s} = 1 \text{ cm/s} \end{aligned} \quad (4)$$

電流の力学的作用に基づいて定められた, これらの単位は絶対単位と呼ばれた (ウエーバ; 1840 年ごろ).

当時, 実際的な分野で一般的に使われていた単位は実用単位と呼ばれるもので, 電気的あるいは化学的な手法で定義された. 電流は一定時間に電気分解される物質の量で, 電圧は定められた方法で作られた電池の起電力で, 抵抗は純粋な物質で作られた抵抗体を基準にしていた.

実用単位の大きさは通常の電気実験で扱われる量の大きさと整合しているが, 単位間の一貫性という点で絶対単位にはかなわない. 一方, 絶対単位は電圧が $\sim 10 \text{ nV}$, 抵抗が $\sim 1 \text{ n}\Omega$ と実用的には小さすぎることが問題であった. そこで, 実用単位のボルトとオームを絶対単位を基準に再定義することになった (英国科学振興協会; 1873 年).

$$\begin{aligned} 1 \text{ V} &= V_{0,\text{abpu}} = 10^8 \times \sqrt{\mu_0/4\pi} \times \dot{V}_{0,\text{emu}} \\ 1 \Omega &= R_{0,\text{abpu}} = 10^9 \times (\mu_0/4\pi) \times \dot{R}_{0,\text{emu}} \end{aligned} \quad (5)$$

この過程で端数は捨てられた. その後, 電流の単位として

$$1 \text{ A} = I_{0,\text{abpu}} = 10^{-1} \times \sqrt{4\pi/\mu_0} \times \dot{I}_{0,\text{emu}} \quad (6)$$

が定められた (第 1 回国際電気学会; 1881 年). アンペアという呼称はこのとき初めて導入された. それにしても実用単位と絶対単位の間調整に必要な因子が 10 のべき乗で済んでいるのは不思議なことである.

[これは筆者の推理にすぎないが, 実用単位系に用いられた電池の起電力がおおよそ 1 V であることが原因ではないかと考える. (ダニエル電池の起電力は 1.08 V である.) ナイプに電池の起電力を電圧の単位に採用し, 力学的単位系として MKS を用いたとして, オームの法則 $V = IR$ と電力の式 $P = IV$ を満たす抵抗と電流の単位は (10%以内

の精度で) 今の 1Ω , 1A になる. 一方の絶対単位の方は今の単位で表すとちょうど 10nV である. まったく独立した 2 つの量の比がたまたま 10 のべき乗に近かったのは幸運だった. たとえ, この偶然の一致がなくても, オーダ (指数部) は実用単位に近くなるように選び, 仮数部は絶対単位を尊重して 1 にするのが自然のなりゆきだったのかも知れない.]

MKSA 単位系 (第 10 回国際度量衡委員会, 1954 年) における単位の選定にあたっては, 上記のアンペアをそのまま利用することになった. 式 (6) から,

$$1\text{A} = 10^{-1} \times \sqrt{4\pi/\mu_0} \times \sqrt{10^{-5}\text{N}} \quad (7)$$

すなわち,

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{N/A}^2 \quad (8)$$

と, μ_0 の値を決めればよい. このように数値 $4\pi \times 10^{-7}$ はいくつかの歴史的経緯を担って定められた量なのである. すなわち, emu とアンペアの比, 有理系と非有理系の比, MKS (N) と CGS (dyn) の比から構成されていることがわかる.

この数値をもって式 (1) を読むと, SI におけるアンペアの定義「アンペアは, 真空中に 1 メートルの間隔で平行に配置された無限に小さい円形断面積を有する無限に長い二本の直線状導体のそれぞれを流れ, これらの導体の長さ 1 メートルにつき 2×10^{-7} ニュートンの力を及ぼし合う一定の電流である」が再現される.

電磁気における単位の歴史は混乱そのものであり, 実際は上に述べたより遥かに複雑である. ここでの議論は, 現在の視点から, 推測も交えて大胆に簡単化したものであることをお断りしておく.