Round 13 试题分析

Gromah

A. 「壶中的大银河」

按照题意去做就行了。

时间复杂度：$O(n)$。

出题人代码

B. 「龙颈之玉 -五色的弹丸 -」

首先维护地图中每个格子有没有食物是很简单的。然后考虑用队列来维护蛇的形态，其中蛇头是队尾，蛇尾是队首，每次吃到食物就不 pop 队首，没吃到就 pop 队首。最后按照题目要求把蛇身和蛇头对应的格子变成 “X” 和 “@” 即可。

时间复杂度：$O(nm+q)$。

出题人代码

C. 「佛御石之钵 -不碎的意志 -」

简单版

每次询问暴力修改每个格子，再暴力求解连通块个数即可。

时间复杂度：$O(qnm)$。

出题人代码

困难版

每个格子只会经历一次从 0 变成 1，我们希望只在每个格子从 0 变成 1 的时候才去访问它。

考虑给每一行开一个并查集，每个格子在并查集中的祖先表示包括其在内的右边第一个为 0 的格子，这样我们在处理一次操作 $(x_1, y_1)-(x_2, y_2)$ 的时候就可以枚举操作所给的子矩阵中的每一行 $r\,(x_1 \le r \le x_2)$，然后从 (r, y_1) 开始沿着并查集不断地去找下一个 0 格子并进行处理，直到列号超过 y_2 为止。

那么现在问题在于如何处理新加的一个 1 格子。这个也很简单，就再开一个并查集维护所有 1 格子的连通性，顺便维护当前 1 格子构成的连通块个数即可。

时间复杂度：$O(nm\alpha(nm)+nq)$。

出题人代码：按秩合并、不按秩合并。

D.「火鼠的皮衣 -不焦躁的内心 -」

出题人做法

可以转化一下求和式：

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a^i b^{n-2i} \binom{n}{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{a}^i b^{n-i} \binom{n}{i} [i\%2 == 0] \end{aligned}$$

考虑把 $[i\%2 == 0]$ 写成 $\frac{1^i+(-1)^i}{2}$，那么有：

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{a}^i b^{n-i} \binom{n}{i} [i\%2 == 0] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{a}^i b^{n-i} \binom{n}{i} \frac{1^i + (-1)^i}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{a}^i b^{n-i} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} (-\sqrt{a})^i b^{n-i} \binom{n}{i} \right) \end{aligned}$$

根据二项式定理，可得：

$$ans = \frac{1}{2} \left((b + \sqrt{a})^n + (b - \sqrt{a})^n \right)$$

再根据特征根的理论，当 a, b 固定时，不妨令 F_x 为当 $n = x$ 时的答案，那么 F_x 是满足一个二项递推式的，即 $F_x = A \times F_{x-1} + B \times F_{x-2}$。本题一方面因为 a 不一定有二次剩余，所以不能用快速幂来做，另一方面因为 p 不一定是质数，所以不能用 BM 算法求出 A, B（有一个求逆元的步骤）。不过可以通过手算 F_0, F_1, F_2, F_3 然后解一个二元一次方程组来算出 A, B。

正经做法的话，考虑特征根方程：$x^2 = Ax + B$，即 $x^2 - Ax - B = 0$，方程的两个解理应为答案式子中两个特征根 $b + \sqrt{a}, b - \sqrt{a}$。再根据韦达定理，可知 A 为两根之和 $(b + \sqrt{a}) + (b - \sqrt{a}) = 2b$，$-B$ 为两根之积，即 $B = -(b + \sqrt{a})(b - \sqrt{a}) = a - b^2$。那么求出 $F_0 = 1, F_1 = b$ 之后用矩阵乘法就可以在 $O(\log n)$ 的时间内算出答案了。

时间复杂度：$O(T \log n)$。

出题人代码

另一个做法

可以从这个式子的组合意义来入手：

考虑长度为 n 的序列里选出 $2i$ 个位置，从左往右依次两两配对组成 i 个位置对，每个位置对有 a 种颜色，没选到的位置有 b 种颜色。问整个序列有多少种染色方案。

这样的话做法就很简单了，设 $Dp[i][0/1]$ 表示前 i 个位置里没有/有一个位置准备和之后的另一个数配对，（如有的话）除去这个位置之外剩下位置的染色方案数是多少。转移有：

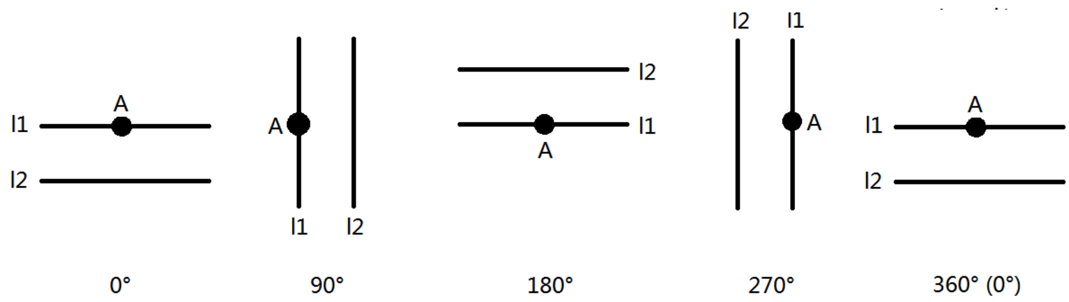
$$\begin{cases} Dp[i][0] = Dp[i-1][0] \times b + Dp[i-1][1] \times a \\ Dp[i][1] = Dp[i-1][0] \times 1 + Dp[i-1][1] \times b \end{cases}$$

最后答案就是 $Dp[n][0]$。利用矩阵快速幂加速递推同样可以把时间复杂度降到 $O(T \log n)$。

E. 「燕的子安贝 -永命线 -」

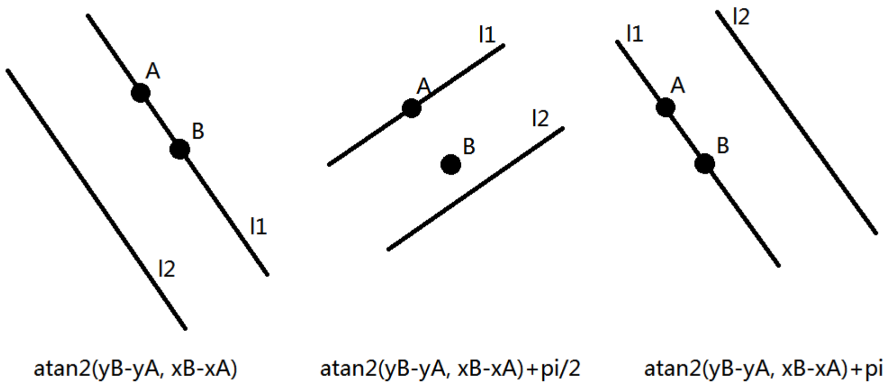
直线 l 确定后，对答案有贡献的点一定是在某两条平行线 l_1, l_2 之间的（其中 l_1, l_2 的距离为 $2d$），而且我们可以通过调整使得 l_1 经过某个给定的点。

接下来就考虑枚举这个经过 l_1 的点 A，可知 l_1, l_2 有 $360°$ 的变化，如图：

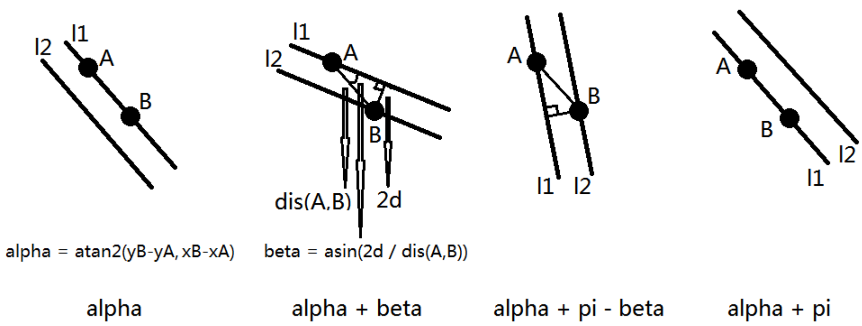


对于其他的点 B，可以算出当旋转角为哪些区间的时候 B 会在 l_1, l_2 之间，分两种情况：

- $dis(A,B) \leq 2d$，记 $\alpha = atan2(y_B - y_A, x_B - x_A)$，则可行区间为：$[\alpha, \alpha + \pi]$



- $dis(A,B) > 2d$，记 $\alpha = atan2(y_B - y_A, x_B - x_A), \beta = asin(\frac{2d}{dis(A,B)})$，可知 $\beta < \frac{\pi}{2}$，则可行区间为：$[\alpha, \alpha + \beta] \bigcup [\alpha + \pi - \beta, \alpha + \pi]$



所以问题就变成了：给定若干个区间，求一个被尽可能多的区间覆盖的点。这是一个经典的线段覆盖的贪心问题，这里就不再赘述。需要注意的是本题的区间是角度区间，需要把负角度的部分加上 2π，比如 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 就要拆成 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 和 $[\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$。

时间复杂度：$O(n^2 \log n)$。

出题人代码

F. 「蓬莱的弹枝 -七色的弹幕 -」

这题一开始只有 1,3 两种操作，后来发现用两套平衡树就可以很简单地做出来，所以加了一个区间加的操作。

标程是用分块来做这个题的。不妨设块大小为 K，自然整个序列就被分成 $\frac{n}{K}$ 块。对于每一块维护以下信息：

- offset：偏移量标记
- add：增量标记
- cnt：块大小
- num[]：块中元素（offset 为该块对应区间的第一个数，存储的值等于真实值减去 add）
- fix[]：fix[x] 表示块内等于 x （考虑增量标记的话实际上应该是 $x + \text{add}$）的数的个数

考虑题目中的三种操作所对应的处理方法：

- 区间左移：
  设最左边和最右边的零散块分别为 b_l, b_r，则对于 $[b_l, b_r]$ 中的每个块，都会恰好进来一个数字，弹出一个数字。其中对于 b_l 和 b_r，其只会在块中的一个区间进行左移，不妨就暴力处理；对于 (b_l, b_r) 之间的块，因为是整体左移，所以可以维护偏移量标记 offset 来实现整体左移。可知这部分复杂度是 $O(K + \frac{n}{K})$ 的。
- 区间加：
  这个操作就很经典了，也是两边的散块暴力加，中间的整块维护增量标记 add 即可。这部分的时间复杂度也是 $O(K + \frac{n}{K})$ 的。
- 找最近相同数：
  首先在询问点 x 所在的块 b_x 找相同的数，然后从 $b_x - 1$ 开始往左访问每个块，因为每个块有 fix[] 信息，所以可以 $O(1)$ 地查询当前块是否存在某个元素，这样找到第一个有 a_x 元素的块之后再暴力枚举这个块的所有元素确定其位置，$b_x + 1$ 往右也是同理。这样就可以得到三组结果，取最优的即可。这部分时间复杂度也是 $O(K + \frac{n}{K})$ 的。

综上，令 $K = \sqrt{n}$，那么整个题的时间复杂度就是 $O(n + q\sqrt{n})$。

出题人代码