مدار منطقی

محمدیاسین داوده

۱۵ مهر ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۱ مبناها، مکمل و کدها

۱.۱ مبناها

یک عدد، a، با n رقم، عدد صحیح و m رقم اعشار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a = \underbrace{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}_{\text{عدد صحیح } n} . \underbrace{a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}}_{\text{عدد اعشار } m} \qquad (۱)$$

هر عدد در مبنای n شامل n رقم یکتا از 0 تا n است. هنگامی که مبنا از ۱۰ بالاتر می‌رود ارقام بالاتر از ۹ را با حروف الفبای انگلیسی نمایش می‌دهیم. مثلاً در مبنایی شانزدهی[1] مجموعه ارقام به این شکل است: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,F\}$

برای تبدیل عددی از مبنای r به مبنای ده‌دهی[2] کافیست هر رقم را در ارزش مکانی خودش ضرب کنیم و حاصل را با هم جمع کنیم:

$$\begin{aligned} a &= a_{n-1}\times r^{n-1}+\ldots+a_0\times r^0+a_{-1}\times r^{-1}+\ldots+a_{-m}\times r^{-m} \\ &= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i r^i \end{aligned} \qquad (۲)$$

بزرگترین عدد صحیح n رقمی در مبنای r همواره برابر با $\overbrace{(r-1)(r-1)\ldots(r-1)}^{\text{رقم } n}$ است. به طور مثال در مبنای ده‌دهی $999\ldots999$ و در مبنای شانزدهی $FFF\ldots FFF$ بزرگترین عدد صحیح است. مقدار این عدد به صورت زیر

[1] Hexadecimal
[2] Decimal

به دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(r-1)r^i = (r-1)\sum_{i=0}^{n-1} r^i \stackrel{\text{تصاعد هندسی}}{=} (r-1)(\frac{r^n-1}{r-1}) = r^n - 1 \qquad (۳)$$

بیشترین مقدار صحیحی که n رقم مبنای r می‌توانند نمایش دهند r^n-1 است. بزرگترین عدد اعشاری n رقمی مبنای r با m رقم اعشار می‌تواند نمایش دهند $r^n - r^{-m} - 1$ است.

بنابراین، a یا بزرگترین عدد n رقمی در مبنای ۱۰ حداقل k بیت در مبنای r احتیاج دارد. چرا که $r^n - 1 <= a$ باشد.

$$k = \lfloor \log_r a \rfloor + 1 \qquad (۴)$$

برای تبدیل قسمت صحیح عدد $(a)_{10}$ به مبنای r از تقسیم متوالی و یادداشت باقیمانده به ترتیب برعکس به دست آمده استفاده می‌کنیم. برای تبدیل قسمت اعشاری عدد $(a)_{10}$ به مبنای r از ضرب متوالی و یادداشت صورت حاصل استفاده می‌کنیم.

۲.۱ مکمل‌ها

مکمل r [3] و $r-1$ [4] عدد n رقمی a با m عدد اعشار به شکل زیر به دست می‌آید:

$$[a]_r = r^n - a = [a]_{r-1} + 1 \qquad (۵)$$

$$[a]_{r-1} = r^n - r^{-m} - a = [a]_r - r^{-m} \qquad (۶)$$

[3] Radix complement
[4] Reduced complement

مکمل یک دودویی برابر با Not آن است ($[(a)_2]_1 = \bar{a}$).
روش‌های خوانش اعداد دودویی:

- بی‌علامت: عدد به طور عادی خوانده می‌شود. ($(101100)_2 = 44$)
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^n - 1$. کوچکترین مقدار: 0.

- علامت‌دار: اولین رقم از سمت راست علامت عدد است. یک منفی و صفر مثبت است. ($(101100)_2 = -12$)
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1}-1$. کوچکترین مقدار: $-(r^{n-1}-1)$.

- مکمل ۱ ($r-1$): بزرگترین رقم ارزشی برابر منفی خودش منهای یک یا $-r^n - 1$ دارد. ($(101100)_2 = -(010011)_2 = -19$)
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1}-1$. کوچکترین مقدار: $-(r^{n-1}-1)$.

- مکمل ۲ ($r-1$): مکمل یک بعلاوه یک (طبق فرمول ۵) است. بزرگترین رقم ارزشی برابر با منفی خودش یا r^n دارد. ($(101100)_2 = -(010100)_2 = -20$)
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1} - 1$. کوچکترین مقدار: $-r^{n-1}$.
در تمام سیستم‌ها به جز این سیستم به دو روش می‌توان 0 را نمایش داد. بجز این سیستم به همین دلیل جای 0^- می‌توان عددی دیگر هم در سیستم گنجاند می‌توان عددی دیگر هم در سیستم گنجاند.
با تکرار بیت آخر در این سیستم مقدار عدد تغییر نمی‌کند[5].

برای تبدیل عددی از مبنای r به مبنای r^n به ازای هر n رقم در مبنای r باید یک رقم در مبنای r^n قرار دهیم.

در جمع عددهای مکمل دو تعداد ارقام باید برابر باشد. برای برابر کردن عدد نماد را می‌افزایم (Sign extend می‌کنیم).

در سیستم مکمل دو از کری (عدد دهگان بالاتر) آخر جمع صرف نظر می‌کنیم.

هنگامی سرریز[6] پیش می‌آید که رقم نقلی آخر و خارج شده (c_n) نامساوی با رقم نقلی یکی مانده به آخر و وارد شده (c_{n-1}) باشد. گاهی بدون داشتن

[5] Sign extension
[6] Overflow

رقم‌های نقلی می‌توان سرریز را مشخص کرد. هنگامی که جمع دو عدد منفی، مثبت می‌شود، یا بالعکس، سرریز رخ داده است.
حاصل جمع هنگام سرریز می‌کند که جواب دو عدد n رقمی را در n بیت یا کمتر دخیره کنیم. حاصل جمع دو عدد n رقمی برابر یا $1+$ آنها است.

اگر تفریق را با روش $a + [b]_2$ انجام ندهیم فلگ Carry نداریم و جای آن از Borrow استفاده می‌کنیم.

به هنگام تفریق وضعیت‌های زیر با فلگ‌های زیر پیش می‌آید:

$$a - b \begin{cases} Sign = Overflow, a >= b \\ Sign \neq Overflow, a < b \\ Zero = 1, a = b \end{cases} \tag{۷}$$

۳.۱ کدها

Decimal	BCD
۰	۰۰۰۰
۱	۰۰۰۱
۲	۰۰۱۰
۳	۰۰۱۱
۴	۰۱۰۰
۵	۰۱۰۱
۶	۰۱۱۰
۷	۰۱۱۱
۸	۱۰۰۰
۹	۱۰۰۱

جدول ۱: کدهای Coded Binary Decimals که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر 1، 2، 4 و 8 را دارند.

Decimal	Excess-۳
۰	۰۰۱۱
۱	۰۱۰۰
۲	۰۱۰۱
۳	۰۱۱۰
۴	۰۱۱۱
۵	۱۰۰۰
۶	۱۰۰۱
۷	۱۰۱۰
۸	۱۰۱۱
۹	۱۱۰۰

جدول ۲: کدهای Excess-۳

کد خود مکمل کدی است که اگر آنرا Not کنید (مکمل 1 یا $r - 1$ آنرا در دودویی بگیریم) برابر مکمل 9 یا $r - 1$ آن در ده‌دهی است. کدهای

$84\bar{2}\bar{1}$	Decimal
۰۰۰۰	۰
۰۱۱۱	۱
۰۱۱۰	۲
۰۱۰۱	۳
۰۱۰۰	۴
۱۰۱۱	۵
۱۰۱۰	۶
۱۰۰۱	۷
۱۰۰۰	۸
۱۱۱۱	۹

جدول ۳: کدهای $84\bar{2}\bar{1}$ که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر -1، -2، 4 و 8 را دارند.

2421	Decimal
۰۰۰۰	۰
۰۰۰۱	۱
۰۰۱۰	۲
۰۰۱۱	۳
۰۱۰۰	۴
۱۰۱۱	۵
۱۱۰۰	۶
۱۱۰۱	۷
۱۱۱۰	۸
۱۱۱۱	۹

جدول ۴: کدهای 2421 که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر 1، 2، 4 و 2 را دارند.

$84\bar{2}\bar{1}$، 2421 و Excess-۳ خود مکمل هستند.