

# گسسته

محمدیاسین داوده

۶ مهر ۱۳۹۹

## فهرست مطالب

۱	منطق و گزاره	۱
۱	۱.۱ رابط‌های اولیه و جدول درستی	۱.۱
۱	۱.۱.۱ نقیض (Not)	۱.۱.۱
۲	۲.۱.۱ ترکیب عطفی (And)	۲.۱.۱
۲	۳.۱.۱ ترکیب فصلی (Or)	۳.۱.۱
۲	۴.۱.۱ یای مانع جمع (Exclusive or)	۴.۱.۱
۳	۵.۱.۱ ترکیب شرطی	۵.۱.۱
۴	۶.۱.۱ ترکیب دوشروطی	۶.۱.۱
۴	۲.۱ خواص گزاره‌ها	۲.۱

# ۱ منطق و گزاره

گزاره<sup>۱</sup> یک جمله خبری است که یا درست است و یا نادرست. امکان درستی و نادرستی همزمان یک گزاره وجود ندارد.

## ۱.۱ رابط‌های اولیه و جدول درستی

تعداد ترکیب‌های جدول درستی برای  $n$  گزاره مبنا معادل  $2^n$  است. رابط‌های گزاره‌ای (جدول ۱) ابزارهایی برای ایجاد گزاره‌های ترکیبی بکار می‌روند.

نام	نماد	مفهوم
نقیض (Not)	$\neg$ یا $\sim$	چنین نیست
ترکیب عطفی (And)	$\wedge$	$q$ و $p$
ترکیب فصلی (Or)	$\vee$	$q$ یا $p$
پای مانع جمع (Exclusive or)	$\oplus$	فقط $p$ یا فقط $q$
ترکیب شرطی (الزام)	$\Rightarrow$	اگر $p$ آنگاه $q$
ترکیب دوشروطی	$\Leftrightarrow$	$p$ اگر و فقط اگر $q$

جدول ۱: جدول رابط‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

### ۱.۱.۱ نقیض (Not)

اگر  $p$  یک گزاره باشد، نقیض آن را به صورت  $\neg p$  یا  $\sim p$  نشان می‌دهیم. (جدول ۲) این گزاره زمانی درست است که  $p$  نادرست باشد.

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

جدول ۲: جدول رابط‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

<sup>1</sup> Statement

با توجه به جدول مقادیر (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg(\neg p) \overset{\text{هم ارزی}^*}{\equiv} p \quad (۱)$$

### ۲.۱.۱ ترکیب عطفی (And)

اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت هر دو اطمینان حاصل کنیم از ترکیب عطفی ( $p \wedge q$ ) استفاده می‌کنیم. (جدول ۳)

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول ۳: جدول مقادیر ترکیب عطفی

### ۳.۱.۱ ترکیب فصلی (Or)

اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت یکی از آنها اطمینان حاصل کنیم از ترکیب فصلی ( $p \vee q$ ) استفاده می‌کنیم. (جدول ۴)

### ۴.۱.۱ یای مانع جمع (انحصاری) (Exclusive or)

اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت **فقط یکی** از آنها اطمینان حاصل کنیم از یای انحصاری<sup>۲</sup> ( $p \oplus q$ ) استفاده می‌کنیم. (جدول ۵)

---

\* هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آنها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد  $\equiv$  نشان می‌دهیم.

<sup>2</sup>Exclusive or (Xor)

$p$	$q$	$p \vee q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

جدول ۴: جدول مقادیر ترکیب فصلی

$p$	$q$	$p \oplus q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

جدول ۵: جدول مقادیر یای انحصاری

### ۵.۱.۱ ترکیب شرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره  $p$  گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم، از ترکیب شرطی استفاده می‌کنیم (جدول ۶). برای بیان آن می‌نویسیم  $p \Rightarrow q$  که به شکل‌های زیر می‌تواند خوانده شود:

• اگر  $p$  آنگاه  $q$ .

•  $p, q$  را نتیجه می‌دهد.

•  $q$  از  $p$  نتیجه می‌دهد.

در عبارت  $p \Rightarrow q$ ،  $p$  مقدم و  $q$  تالی است.

با توجه به جدول مقادیر (۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q \quad (۲)$$

---

\* هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آن‌ها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد  $\equiv$  نشان می‌دهیم.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول ۶: جدول مقادیر ترکیب شرطی

### ۶.۱.۱ ترکیب دوشروطی

اگر بخواهیم از گزاره  $p$  گزاره  $q$  را نتیجه بگیریم و از گزاره  $q$  گزاره  $p$  را، می‌نویسیم  $p \Leftrightarrow q$  (جدول ۷).

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

جدول ۷: جدول مقادیر ترکیب دوشروطی

با توجه به جدول مقادیر (۷) می‌توان نتیجه گرفت:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \quad (۳)$$

## ۲.۱ خواص گزاره‌ها

گزاره‌ها خواصی دارند که به شرح زیر است:

$$\text{خودتوانی} \begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases} \quad (۴)$$

$$\text{جذبى} \begin{cases} p \vee (p \wedge q) & \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) & \equiv p \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{جابہ جایی} \begin{cases} p \vee q & \equiv q \vee p \\ p \wedge q & \equiv q \wedge p \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{شرکت پذیری} \begin{cases} p \vee (q \vee r) & \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) & \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{متمم} \begin{cases} p \vee \neg p & \equiv \mathbb{T} \\ p \wedge \neg p & \equiv \mathbb{F} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{قانون دمورگان (De Morgan)} \begin{cases} \neg(p \vee q) & \equiv \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) & \equiv \neg p \vee \neg q \end{cases} \quad (9)$$