گسسته

محمدیاسین داوده

۱۵ مهر ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۱ منطق و گزاره

گزاره[1] یک جمله خبری است که یا درست است و یا نادرست. امکان درستی و نادرستی همزمان یک گزاره وجود ندارد.

۱.۱ رابطه‌های اولیه و جدول درستی

تعداد ترکیب‌های جدول درستی برای n گزارهٔ مبنا معادل 2^n است.
رابطه‌های گزاره‌ای (جدول ۱) ابزارهایی برای ایجاد گزاره‌های ترکیبی بکار می‌روند.

نام	نماد	مفهوم
نقیض (Not)	$\neg$ یا $\sim$	چنین نیست
ترکیب عطفی (And)	$\wedge$	p و q
ترکیب فصلی (Or)	$\vee$	p یا q
یای مانع جمع (Exclusive or)	$\oplus$	فقط p یا فقط q
ترکیب شرطی (الزام)	$\Rightarrow$	اگر p آنگاه q
ترکیب دوشرطی	$\Leftrightarrow$	p اگر و فقط اگر q

جدول ۱: جدول رابطه‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

۱.۱.۱ نقیض (Not)

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را به صورت $\neg p$ یا $\sim p$ نشان می‌دهیم. (جدول ۲)
این گزاره زمانی درست است که p نادرست باشد.

p	$\neg p$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

جدول ۲: جدول رابطه‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

[1] Statement

با توجه به جدول مقادیر (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg(\neg p) \quad \overbrace{\equiv}^{\text{هم ارزی*}} \quad p \qquad (۱)$$

۲.۱.۱ ترکیب عطفی (And)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت هر دو اطمینان حاصل کنیم از ترکیب عطفی $(p \wedge q)$ استفاده می‌کنیم. (جدول ۳)

p	q	$p \wedge q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

جدول ۳: جدول مقادیر ترکیب عطفی

۳.۱.۱ ترکیب فصلی (Or)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت یکی از آنها اطمینان حاصل کنیم از ترکیب فصلی $(p \vee q)$ استفاده می‌کنیم. (جدول ۴)

۴.۱.۱ یای مانع جمع (انحصاری) (Exclusive or)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت **فقط یکی** از آنها اطمینان حاصل کنیم از یای انحصاری[۲] $(p \oplus q)$ استفاده می‌کنیم. (جدول ۵)

* هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آن‌ها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد $\equiv$ نشان می‌دهیم.

[2] Exclusive or (Xor)

p	q	$p \vee q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

جدول ۴: جدول مقادیر ترکیب فصلی

p	q	$p \oplus q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

جدول ۵: جدول مقادیر یای انحصاری

۵.۱.۱ ترکیب شرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از ترکیب شرطی استفاده می‌کنیم (جدول ۶). برای بیان آن می‌نویسیم $p \Rightarrow q$ که به شکل‌های زیر می‌تواند خوانده شود:

- اگر p آنگاه q.
- p، q را نتیجه می‌دهد.
- q از p نتیجه می‌دهد.

در عبارت $p \Rightarrow q$، p مقدم و q تالی است.
با توجه به جدول مقادیر (۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg p \vee q \quad \equiv \quad p \Rightarrow q \tag{۲}$$

* هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آن‌ها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد $\equiv$ نشان می‌دهیم.

p	q	$p \Rightarrow q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

جدول ۶: جدول مقادیر ترکیب شرطی

۶.۱.۱ ترکیب دوشرطی

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم و از گزاره q گزاره p را، می‌نویسیم $p \Leftrightarrow q$ (جدول ۷).

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

جدول ۷: جدول مقادیر ترکیب دوشرطی

با توجه به جدول مقادیر (۷) می‌توان نتیجه گرفت:

$$p \Leftrightarrow q \quad \equiv \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad \equiv \quad (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \tag{۳}$$

گزاره راستگو گزاره‌ای است که همواره برابر با $\mathbb{T}$ باشد. گزاره‌ای که همواره $\mathbb{F}$ است را گزاره متناقض گویند.

۲.۱ خواص گزاره‌ها

گزاره‌ها خواصی دارند که به شرح زیر است:

$$\text{خودتوانی}\begin{cases} p \vee p & \equiv \quad p \\ p \wedge p & \equiv \quad p \end{cases} \tag{۴}$$

$$\text{جذبی}\begin{cases} p \vee (p \wedge q) & \equiv & p \\ p \wedge (p \vee q) & \equiv & p \end{cases} \tag{۵}$$

$$\text{جابه‌جایی}\begin{cases} p \vee q & \equiv & q \vee p \\ p \wedge q & \equiv & q \wedge p \end{cases} \tag{۶}$$

$$\text{شرکت‌پذیری}\begin{cases} p \vee (q \vee r) & \equiv & (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) & \equiv & (p \wedge q) \wedge r \end{cases} \tag{۷}$$

$$\text{توزیع‌پذیری}\begin{cases} p \vee (q \wedge r) & \equiv & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \wedge (q \vee r) & \equiv & (q \vee q) \wedge p(p \vee r) \end{cases} \tag{۸}$$

$$\text{متمم}\begin{cases} p \vee \neg p & \equiv & \mathbb{T} \\ p \wedge \neg p & \equiv & \mathbb{F} \end{cases} \tag{۹}$$

$$\text{(De Morgan) قانون دمورگان}\begin{cases} \neg(p \vee q) & \equiv & \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) & \equiv & \neg p \vee \neg q \end{cases} \tag{۱۰}$$

$$\text{قانون همانی}\begin{cases} (p \wedge \mathbb{T}) \equiv p \\ (p \wedge \mathbb{F}) \equiv \mathbb{F} \\ (p \vee \mathbb{T}) \equiv \mathbb{T} \\ (p \vee \mathbb{F}) \equiv p \end{cases} \tag{۱۱}$$