ریاضیات گسسته

محمدیاسین داوده

۱۶ دی ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۱ منطق و گزاره

گزاره یا Statement یک جمله خبری است که یا درست است و یا نادرست. امکان درستی و نادرستی همزمان یک گزاره وجود ندارد.

۱.۱ رابطه‌های اولیه و جدول درستی

تعداد ترکیب‌های جدول درستی برای n گزارهٔ مبنا معادل 2^n است.
رابطه‌های گزاره‌ای (جدول ۱) ابزارهایی برای ایجاد گزاره‌های ترکیبی بکار می‌روند.

جدول ۱: جدول رابطه‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

نام	نماد	مفهوم
نقیض (Not)	$\neg$، $\sim$، ! یا بار بالا یا $'$ بعد از متغیر	چنین نیست
ترکیب عطفی (And)	$\wedge$ یا $\cdot$	p و q
ترکیب فصلی (Or)	$\vee$ یا $+$	p یا q
یای مانع جمع (Xor / Aut)	$\veebar$ یا $\oplus$	فقط p یا فقط q
ترکیب شرطی (الزام)	$\Rightarrow$	اگر p آنگاه q
ترکیب دوشرطی	$\Leftrightarrow$	p اگر و فقط اگر q

۱.۱.۱ نقیض (Not)

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را به صورت $\neg p$ نشان می‌دهیم. این گزاره زمانی درست است که p نادرست باشد.

جدول ۲: جدول رابطه‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

p	$\neg p$
۰	۱
۱	۰

با توجه به جدول ۲ می‌توان نتیجه گرفت هردو هم‌ارز[1] هستند:

$$\neg(\neg p) \overbrace{\equiv}^{\text{هم ارزی*}} p \qquad (1)$$

۲.۱.۱ ترکیب عطفی (And)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت هر دو اطمینان حاصل کنیم از ترکیب عطفی $(p \wedge q)$ استفاده می‌کنیم (جدول ۳).

جدول ۳: جدول مقادیر ترکیب عطفی

p	q	$p \wedge q$
۱	۱	۱
۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۰

۳.۱.۱ ترکیب فصلی (Or)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت یکی از آنها اطمینان حاصل کنیم از ترکیب فصلی $(p \vee q)$ استفاده می‌کنیم (جدول ۴).

۴.۱.۱ یای مانع جمع (انحصاری) (Exclusive or / Aut)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت **فقط یکی** از آنها اطمینان حاصل کنیم از یای انحصاری $(p \veebar q)$ استفاده می‌کنیم (جدول ۵)

[1] هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آن‌ها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد $\equiv$ نشان می‌دهیم.

جدول ۴: جدول مقادیر ترکیب فصلی

$p \vee q$	q	p
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰
۰	۰	۰

جدول ۵: جدول مقادیر یای انحصاری

$p \veebar q$	q	p
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰
۰	۰	۰

۵.۱.۱ ترکیب شرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از ترکیب شرطی استفاده می‌کنیم (جدول ۶). برای بیان آن می‌نویسیم $p \Rightarrow q$ که به شکل‌های زیر می‌تواند خوانده شود:

- اگر p آنگاه q.
- p، q را نتیجه می‌دهد.
- q از p نتیجه می‌دهد.

در عبارت $p \Rightarrow q$، p مقدم و q تالی است.

جدول ۶: جدول مقادیر ترکیب شرطی

$p \Rightarrow q$	q	p
۱	۱	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰
۱	۰	۰

با توجه به جدول مقادیر (جدول ۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q \tag{۲}$$

۶.۱.۱ ترکیب دوشرطی

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم و از گزاره q گزاره p را، می‌نویسیم $p \Leftrightarrow q$ (جدول ۷).
با توجه به جدول مقادیر (۷) می‌توان نتیجه گرفت:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \tag{۳}$$

گزاره راستگو گزاره‌ای است که همواره برابر با 1 باشد. گزاره‌ای که همواره 0 است را گزاره متناقض گویند.

۷.۱.۱ خواص گزاره‌ها

گزاره‌ها خواصی دارند که به شرح زیر است:

جدول ۷: جدول مقادیر ترکیب دوشرطی

$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$	q	p
۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۰

خودتوانی
$$\begin{cases} p \lor p \equiv p \\ p \land p \equiv p \end{cases} \qquad (۴)$$

جذبی
$$\begin{cases} p \lor (p \land q) \equiv p \\ p \land (p \lor q) \equiv p \end{cases} \qquad (۵)$$

جابه‌جایی
$$\begin{cases} p \lor q \equiv q \lor p \\ p \land q \equiv q \land p \end{cases} \qquad (۶)$$

شرکت‌پذیری
$$\begin{cases} p \lor (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor r \\ p \land (q \land r) \equiv (p \land q) \land r \end{cases} \qquad (۷)$$

توزیع‌پذیری
$$\begin{cases} p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r) \\ p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r) \end{cases} \qquad (۸)$$

متمم
$$\begin{cases} p \lor \neg p \equiv 1 \\ p \land \neg p \equiv 0 \end{cases} \qquad (۹)$$

قانون دمورگان
$$\begin{cases} \neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q \\ \neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q \end{cases} \qquad (۱۰)$$

قانون همانی
$$\begin{cases} (p \land 1) \equiv p \\ (p \land 0) \equiv 0 \\ (p \lor 1) \equiv 1 \\ (p \lor 0) \equiv p \end{cases} \qquad (۱۱)$$

۲.۱ استنتاج

به طور کل منظور از استنتاج یا Inference آن است که بتوانیم با داشتن گزاره‌های درست، درستی گزاره دیگری را نتیجه بگیریم. مثلاً می‌توان دانست که q درست است اگر $p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n$ درست باشد.

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q \equiv p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n \Rightarrow q \qquad (۱۲)$$

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array} \qquad (۱۳)$$

۱.۲.۱ قوانین استنتاج

۱. ساده‌سازی عطفی

$$\frac{p \wedge q}{p} ; \frac{p \wedge q}{q} \tag{۱۴}$$

۲. ترکیب‌ها

(آ) فصلی

$$\frac{p}{p \vee q} ; \frac{q}{p \vee q} \tag{۱۵}$$

(ب) عطفی

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q} \tag{۱۶}$$

۳. قیاس‌ها

(آ) استثنایی

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \Rightarrow q \end{array}}{q} \tag{۱۷}$$

(ب) صوری

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r} \tag{۱۸}$$

(ج) دفع

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p} \tag{۱۹}$$

(د) فصلی

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q} \tag{۲۰}$$

۳.۱ استقرای ریاضی

استقرای ریاضی ابزاری مؤثر برای اثبات انواع خاصی از گزاره‌های ریاضی است که در آن یک خاصیت برای تمامی اعداد صحیح یا اعداد صحیح مثبت با شروع از نقطه خاصی برقرار است. در استقرای ریاضی ابتدا برقراری گزاره اول ثابت می‌شود. سپس ثابت می‌کنیم اگر یکی از گزاره‌ها درست باشد گزاره بعدی نیز درست است. به این ترتیب تمامی گزاره‌ها ثابت می‌شود.

به بیان دیگر مراحل استقرا به شرح زیر است:

۱. پایه استقرا $p(1)$: ثابت کنید گزاره برای $n = 1$ درست است یا اگر تصریح شده باشد که گزاره برای $n \leq a$ برقرار است، آنگاه درستی گزاره را برای $n = a$ ثابت کنید.

۲. فرض استقرا $p(k)$: گزاره را بطور دقیق برای $n = k$ (فرض مسئله) بنویسید.

۳. حکم استقرا $p(k+1)$: گزاره را به طور دقیق برای $n = k + 1$ ثابت کنید.

برای مثال، مجموع n عدد صحیح با شروع از صفر برابر $\frac{1}{2}n(n+1)$ است. حال برای اثبات $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ اینگونه از استقرا استفاده می‌کنیم:

۱. پایه:

$$n = 0 \implies 0 = \frac{1}{2}0(0+1)$$

۲. فرض: مجموع k عدد صحیح با شروع از صفر برابر $\frac{1}{2}k(k+1)$ است: $0+1+\ldots+(k-1)+k = \frac{1}{2}k(k+1) \implies \sum_{i=0}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$

۳. حکم: فرض برای $k+1$ برقرار است: $0+1+\ldots+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

۴. اثبات حکم: بر اساس فرمول زیر گزاره برای $n > 0$ برقرار است.

$$\begin{aligned}
\underbrace{0+1+\ldots+k}_{\text{فرض}} + (k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\
&= (k+1)(\frac{1}{2}k+1) \\
&= (k+1)(\frac{1}{2}(k+2)) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

در مثالی دیگر می‌توان خواست که با فرض $n \in \mathbb{N}$ داریم $3+6+\ldots+3n = \frac{3(n^2+n)}{2}$.

۱. پایه: $n = 1 \implies 3(1) = \frac{3(1^2+1)}{2}$.

۲. فرض: $3+6+\ldots+3k = \frac{3(k^2+k)}{2}$.

۳. حکم:

$$\begin{aligned}
3+6+\ldots+3(k+1) &= \frac{3((k+1)^2+(k+1))}{2} \\
&= \frac{3(k+1)(k+1+1)}{2} \\
&= \frac{3}{2}(k+1)(k+2) \\
&= \frac{3(k^2+k)}{2} + 3(k+1) \\
&= \frac{3k(k+1)}{2} + \frac{6}{2}(k+1) \\
&= \frac{3k(k+1)+6(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(3k+6)}{2} = \frac{3(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

علاوه بر آن می‌توان نشان داد که[۲] $\forall n \in \mathbb{N} \implies 1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$.

$$\begin{aligned}
p(1) &: 1^3 = 1^2 \\
p(k) &: 1^3+2^3+\ldots+k^3 = (1+2+\ldots+k)^2 \\
p(k+1) &: 1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = \underbrace{(1+2+\ldots+k+(k+1))^2}_{I}
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

[۲] $\forall$: برای تمام

اثبات[۳]:

$$
\begin{aligned}
I &= (1+2+\ldots+k)^2 + 2(1+2+\ldots+k)(k+1) + (k+1)^2 \\
&= 1^3+2^3+\ldots+k^3 + 2(\frac{k(k+1)}{2})(k+1) + (k+1)^2 \\
&= 1^3+2^3+\ldots+k^3 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 \\
&= 1^3+2^3+\ldots+k^3 + (k+1)^2(k+1) \\
&= 1^3+2^3+\ldots+k^3 + (k+1)^3
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

درنهایت می‌توان مشابه این مثال بخش‌پذیری اعداد را ثابت کرد. نشان دهید که $\forall n \in \mathbb{N}$ عبارت $11^{n+2}+12^{2n+1}$ بر 133 بخش‌پذیر است.

$$
\begin{aligned}
p(1) &: 11^{1+2}+12^{2\times 1+1} = 3059 = 133\times 23 = 133m \\
p(k) &: 11^{k+2}+12^{2k+1} = 133m \\
p(k+1) &: 11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1} = 133m
\end{aligned} \tag{۲۵}
$$

$$
\begin{aligned}
p(k) &\implies 11^{k+2} = 133m - 12^{2k+1} \\
p(k+1) &: 11^{(k+1)+2}+12^{2(k+1)+1} = 11\times 11^{k+2} + 12^2\times 12^{2k+1}
\end{aligned} \tag{۲۶}
$$

$$
\begin{aligned}
11\times 11^{k+2}+12^2\times 12^{2k+1} &= 11\times(133m-12^{2k+1}) + 12^2\times 12^{2k+1} \\
&= 11\times 133m - 11\times 12^{2k+1} + 12^2\times 12^{2k+1} \\
&= 11\times 133m - 12^{2k+1}(-11+12^2) \\
&= 133\times 11m - 133\times 12^{2k+1} \\
&= 133(\underbrace{11m-12^{2k+1}}_{n}) \\
&= 133n
\end{aligned} \tag{۲۷}
$$

۲ مجموعه‌ها

مجموعه گروهی از اشیا یا عناصر کاملاً مشخص و معین است که با نام بردن اعضا یا معرفی خاصیت مشترک آنها تعریف می‌شود. از لحاظ ریاضی مجموعه هنگامی معین است که اشیا تشکیل دهنده آن کاملاً مشخص باشند؛ صفاتی مانند کوچکی، خوشمزگی وغیره که تعریف دقیقی ندارند نمی‌توانند مشخص کننده مجموعه باشند.

عرف است که مجموعه‌ها را با حروف بزرگ نامگذاری کنند. اعضا داخل {} و با جداکننده‌ای (معمولاً کاما) از یکدیگر جدا می‌شوند. اعضا مجموعه عناصر داخل مجموعه هستند. با $\in$ (در) عنصری را عضوی از مجموعه‌ای و با $\notin$ نقض آنرا نشان می‌دهیم. اجتماع یا Union دو مجموعه با $\cup$ و اشتراک یا Intersect آنها با $\cap$ نمایش داده می‌شود. مکمل هر مجموعه شامل تمام اعضایی است که در آن نیست و با Not کردن آن به دست می‌آید (معمولاً با $'$ نمایش داده می‌شود) و در نهایت اختلاف مجموعه A و B به صورت $A-B$ نوشته می‌شود و تمام عضوهای A را که عضو B نباشند دارد.

در مجموعه‌ها ترتیب نوشتن اعضا اهمیتی ندارد. علاوه بر آن عضوهای تکراری در مجموعه تغییری در آن ایجاد نمی‌کنند.

مجموعه متناهی، محدود یا Finite مجموعه‌ای است که تعداد محدودی عضو دارد. به بیانی دیگر می‌توان گفت که اگر اعضای آن را بشمارید می‌توانید به پایان آن برسید. این در حالی است که **مجموعه نامتناهی**، نامحدود یا Infinite پایانی ندارد. مجموعه‌های متناهی می‌توانند **قابل شمارش** باشند. به طور مثال مجموعه $\mathbb{N}$ مجموعه‌ای نامتناهی ولی قابل شمارش است. به این معنی که یکی پس از دیگری فردی می‌تواند شروع به لیست کردن تمام اعضا کند هرچند هرگز به پایان لیست نمی‌رسد. در مقابل آن مجموعه نامتناهی غیرقابل شمارش است (مانند $\mathbb{R}$). اشتراک و اجتماع دو مجموعه متناهی نیز متناهی است.

مجموعه‌ها را می‌توان به **صورت توصیفی** بیان کرد. در این نمایش از خاصیت مشترک بین اعضای مجموعه استفاده می‌شود. به طور مثال اگر $p(x)$ بیانگر خاصیت مشترک مربوط به x و S مجموعه حاوی هر x باشد که به ازای آن $p(x)$ درست است می‌نویسیم: $S=\{x|p(x)\}$.

[۳] تصاعد هندسی: $\sum_{i=1}^{n} = 1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

$$
\begin{aligned}
&A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}\\
&c\in B; c\notin B\\
&X=\{2,3,4,4\}, Y=\{2,4,3\} \implies Y=X\\
&\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}\\
&\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\ldots\}\\
&\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}\\
&\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}|a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\}\\
&\pi\in\mathbb{Q}'; e\in\mathbb{Q}'; \sqrt{2}\in\mathbb{Q}'\\
&\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'
\end{aligned}
\tag{۲۸}
$$

بازه ابتدا و انتهای یک برد عددی را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم مجموعه اعداد حقیقی را به صورت **فاصلهٔ بازه** نشان دهیم از پرانتز (یعنی عدد آخر شامل نیست) و برای نشان دادن **فاصلهٔ بسته** از قلاب (براکت مربعی) استفاده می‌کنیم (یعنی عدد آخر و اول شامل بازه است).

$$
\begin{aligned}
(a,b)&=\{x|a<x<b\}\\
(a,b]&=\{x|a<x\le b\}\\
[a,b)&=\{x|a\le x<b\}\\
[a,b]&=\{x|a\le x\le b\}\\
(a,+\infty]&=\{x|x>a\}\\
[-\infty,b]&=\{x|x\le b\}
\end{aligned}
\tag{۲۹}
$$

مجموعه جهانی یا Universal مجموعه‌ای شامل تمام مجموعه‌ها یا تمام مجموعه‌هایی است که می‌خواهیم روی آنها محاسبات انجام دهیم. این مجموعه را با U یا M نمایش می‌دهیم.
تعداد اعضای هر مجموعه را با $|S|$ یا $n(S)$ نشان می‌دهند.
هرگاه تمامی اعضای A عضوی از B باشند می‌گوییم A **زیرمجموعه** B است و آنرا با $A\subseteq B$ نمایش داده و با $A\nsubseteq B$ نقض می‌کنیم. در صورتی که B شامل حداقل یک عضو بیشتر است که در A نیست (یعنی $A\neq B$) آنگاه مجموعه A زیرمجموعه سره یا Proper B است و می‌توان آنرا با $A\subsetneq B$ یا $A\subset B$ نشان داد. در نهایت اگر A به هیچ نحوی زیرمجموعه B نیست با$A\not\subset B$ آنرا نمایش می‌دهیم.

$$
A\subset B, B\subset A \iff A=B \tag{۳۰}
$$

مجموعه توانی یا Power set هر مجموعه، مجموعه‌ای است شامل تمام زیرمجموعه‌های ممکن آن مجموعه که آنرا با $P(S)$ نشان می‌دهیم. این زیرمجموعه‌ها شامل مجموعه تهی و خود مجموعه، تمام مجموعه‌های تک عضوی، تمام مجموعه‌های دوعضوی وغیره آن است.

$$
\begin{aligned}
&A=\{a,b,c\}\\
&P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}\\
&|P(A)|=2^{|A|}=2^3=8
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

مجموعه تهی یا Null مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد، بنابراین $\{\}=\emptyset$. تهی زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست.
ضرب دکارتی یا Cartesian product شامل زوج‌های مرتبی طبق فرمول روبروست: $A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$.
x همچنین داریم $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n\}$

۱.۲ خواص عملیات‌های مجموعه‌ها

۱. جابه‌جایی اجتماع: $A\cup B=B\cup A$

۲. جابه‌جایی اشتراک: $A\cap B = B\cap A$

۳. شرکت‌پذیری: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ و $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

۴. توزیع‌پذیری: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ و $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۵. قانون دمورگان: $(A\cap B)'=A'\cup B'$ و $(A\cup B)'=A'\cap B'$

۶. $A-B=A\cap B'$

۷. $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

۳ رابطه‌ها

رابطه R دو مجموعه A و B زیرمجموعه ضرب آنهاست ($R\subset A\times B$). اگر $a\in A$ با $b\in B$ رابطه‌ای داشته باشد بجای $(a,b)\in R$ می‌نویسیم aRb و در غیر این صورت داریم $a\not R b$.

دامنه رابطه مؤلفه‌های اول زوج مرتب مربوط و برد آن مؤلفه‌های دوم است.

برای نمایش یک رابطه می‌توان از ماتریس‌ها، گراف، مختصات یا نقشه‌های نمودار ون استفاده کرد.

رابطه معکوس را با R^{-1} نشان می‌دهیم. اگر ماتریس M ماتریسی بولی برای R باشد و دامنه سطرهای آن و برد ستون‌های آن باشد، آنگاه $M_{R^{-1}}=M_R^T$ است[۴].

اگر $A=B$ رابطه بین آنها **رابطه دودویی** است.

ترکیب رابطه را می‌توان به عنوان زنجیری از رابطه‌ها فرض کرد. به طور مثال اگر R از A به B باشد و S از B به C باشد، ترکیب RoS رابطه‌ای از A به C است که به صورت روبرو تعریف می‌شود[۵]: $a(RoS)c \iff \exists b\in B; aRb, bSc$.
با توجه به تعریف نکات زیر را داریم:

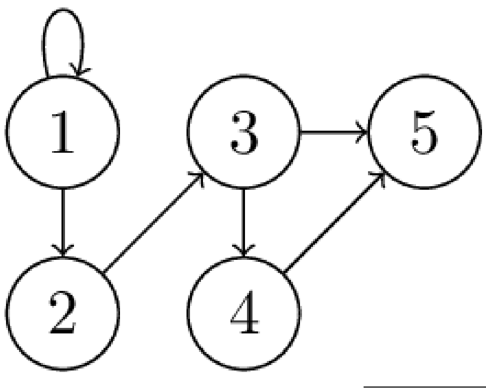
۱. $RoR=R^2$ یا به عبارتی تمام مسیرهای با هزینه دو حرکت روی گراف

۲. رابطه R^∞ (R^+) **رابطه وجود مسیر** نامیده می‌شود و $(a,b)\in R^\infty$. اگر و فقط اگر از a به b حداقل یک مسیر – با طولی غیر از صفر – باشد آنگاه داریم $R^\infty = R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n$ که در آن $n=|A|$ است.

۳. رابطه R^* **رابطه دسترسی‌پذیری** است و $(a,b)\in R^*$ اگر $(a,b)\in R^\infty$ یا $a=b$ باشد.

مثال زیر به درک بهتر ضوابط کمک می‌کند.

$$\begin{aligned}
A&=\{1,2,3,4,5\}, R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,5),(3,4),(4,5)\}\\
R^2&=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4),(2,5),(3,5)\}\\
R^3&=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,5)\}\\
R^4&=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,5)\}=R^5\\
R^\infty&=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4\cup R^5\\
R^*&=R^\infty\cup\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}
\end{aligned}\tag{۳۲}$$



[۴] M^T: ترانهاده یا Transpose

[۵] $\exists$: وجود دارد

۱.۳ خواص رابطه‌های دودویی (یک مجموعه)

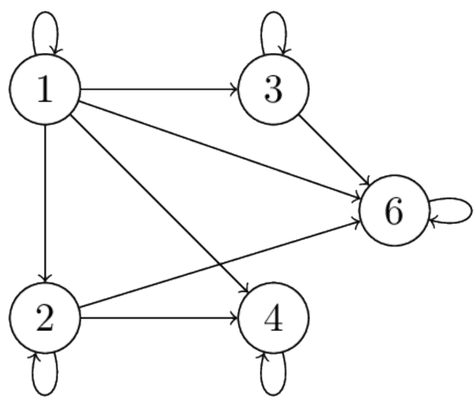
اگر R یک رابطه بر مجموعه A باشد، رابطه R:

- **بازتابی** است اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم aRa.
- **تقارن** است اگر aRb ایجاب کند که bRa.
- **پادتقارن** است اگر aRb و bRa تساوی $a = b$ را ایجاب کند.
- **تعدی** (ترایایی) است اگر aRb و bRc ایجاب کند که aRc.

اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a \neq 0$ می‌گوییم a **عاد می‌کند** b را و می‌نویسیم $a|b$ در صورتیکه b بر a بخش‌پذیر باشد: $a|b \iff \exists k \in \mathbb{Z}; b = ka$ (تقسیم b بر a یک عدد صحیح باشد و باقیمانده نداشته باشد).

اگر $A = \{1, \dots, 6\}$ و رابطه R به A به صورت $xRy \iff x|y$ تعریف شده باشد، داریم:

$$
\begin{aligned}
R =& \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\} \\
R^{-1} =& \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(6,6)\} \\
\text{بازتابی} :& \forall x \in \mathbb{Z}; x = 1 \times x \implies x|x \implies xRx\checkmark \\
\text{تقارن} :& \forall y \in \mathbb{Z}; xRy \implies x|y \implies y \nmid x \\
\text{پادتقارن} :& \forall x, y \in \mathbb{Z}; xRy, yRx \implies \begin{cases} y|x \implies y = k_1 x \\ x|y \implies x = k_2 y \end{cases} \implies x = \pm y \\
\text{تعدی} :& \forall x, y, z \in \mathbb{Z}; \begin{cases} xRy \implies x|y \implies y = k_1 x \\ yRz \implies y|z \implies z = k_2 y \end{cases} \implies z = k_2(k_1 x) = kx \implies x|z\checkmark
\end{aligned}
\tag{۳۳}
$$



۲.۳ ماتریس روابط

اگر R یک رابطه از A به B باشد می‌توان ماتریس $n \times m$ مثل $M_R = [m_{ij}]$ را نمایش داد: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

$$
\begin{aligned}
&M_R = [m_{ij}] \\
&m_{ij} \begin{cases} 1 & a_i R b_j \\ 0 & a_i \not R b_j \end{cases}
\end{aligned}
\tag{۳۴}
$$

با توجه به اینکه این ماتریس بولی است آنگاه می‌توان $A \vee B$ و $A \wedge B$ را تعریف کرد.

$$
\begin{aligned}
A \vee B_{ij} &= \begin{cases} 1 & a_{ij} \vee b_{ij} \\ 0 & \neg(a_{ij} \vee b_{ij}) \end{cases} \\
A \vee B_{ij} &= \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & \neg(a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1) \end{cases}
\end{aligned} \tag{۳۵}
$$

علاوه بر این **ضرب بولی** دو ماتریس A و B را با $A \odot B$ نشان می‌دهیم و برای اعمال آن مانند ضرب معمولی ماتریس عمل کرده اما با این تفاوت که از عملیات ضرب و جمع بولی به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$\oplus$	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

$\ominus$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

اگر A و B دو ماتریس بولی هم مرتبه باشند می‌گوییم A ضعیف‌تر از B است و می‌نویسیم $A \leq B$ $(A << B)$ هرگاه $\forall i, j; a_{ij} \leq b_{ij}$.

۱.۲.۳ خواص رابطه‌ها

اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه روی A با ماتریس مجاورت M_R باشد، رابطه R:

۱. بازتابی است در صورتیکه درایه‌های قطر اصلی M_R همگی یک باشند.

۲. متقارن است در صورتیکه $M_R = M_R^T$.

۳. پادمتقارن است در صورتیکه $M_R \wedge M_R^T \leq I$.

۴. تعدی است در صورتیکه $M_R^2 = M_R \odot M_R \leq M_R$.

به این طریق می‌توان مارتیس مجاورت را بررسی کرد.

$$
\begin{aligned}
A =& \{a, b, c\} \\
R =& \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c)\} \\
M_R =& \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies M_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies M_R^T \wedge M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
M_R \odot M_R =& \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
M_R^2 =& \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lll \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{تعدی} : & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark
\end{aligned} \tag{۳۶}
$$

رابطه R برمجموعه A یک **رابطه هم ارزی** است در صورتیکه R دارای سه خاصیت بازتابی، تقارن و تعدی باشد. ایده اصلی برای رابطه هم ارزی آن است که این رابطه یه رده‌بندی از اشیایی است که به نوعی «شبیه» می‌باشند.

اگر فرض کنیم m عددی صحیح و مثبت باشد، دو عدد صحیح a و b **هم نهشت به پیمانه** m گوییم و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ هرگاه $m|a-b$. به طور مثال $(4 \times 2 = 8 \implies 8 = 3 - 11|4)3 \overset{4}{\equiv} 11$.

فرض کنید R یک رابطه هم ارزی در مجموعه A باشد و به ازای هر $x \in A$ مجموعه تمامی اعضا A که با a رابطه دارند کلاس هم ارزی a نامیده می‌شود و با نماد $[a]$ نشان می‌دهیم: $[a] = \{x|xRa\}$.

۳.۳ افرازها یا پارتیشن

مجموعه S توسط زیرمجموعه‌های غیرتهی $A_1, A_2, \dots A_k$ افراز یا Partition شده است هرگاه:

۱. $\forall i, j : A_i \cap A_j = \emptyset$.

۲. $\cup_{i=1}^{k} A_i = S$.

۴.۳ بستارها یا کلوژر

اگر R یک رابطه در A باشد ممکن است برخی از خصوصیات هم‌ارزی را نداشته باشد. می‌خواهیم با افزودن زوج‌هایی به R رابطه‌ای بدست آوریم که ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد.

۱.۴.۳ بازتابی

اگر R رابطه‌ای در A باشد که بازتابی نباشد برخی از زوج‌های رابطه Δ در R را اضافه می‌کنیم تا کوچکترین رابطه بازتابی شامل R تشکیل شود (Δ رابطه تساوی است). به بیان دیگر کوچکترین رابطه شامل رابطه R که خاصیت بازتابی داشته باشد بستار بازتابی می‌گویند.

$$R \cup \Delta; \Delta = \{(x,x)|x \in A\} \tag{۳۷}$$

$$\begin{aligned} A &= \{(1, \dots, 4\} \\ R &= \{(1,1),(2,3),(3,1),(1,4),(4,1)\} \\ R \cup \Delta &= \{(1,1),(\mathbf{2},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{4},\mathbf{4}),(2,3),(3,1),(1,4),(4,1)\} \\ R \cup X &= \{(\mathbf{3},\mathbf{2}),(\mathbf{1},\mathbf{3}),(1,1),(2,3),(3,1),(1,4),(4,1)\} \\ R^{\infty} &= \{(1,1),(1,4),(\mathbf{2},\mathbf{1}),(2,3),(\mathbf{2},\mathbf{4}),(3,1),(\mathbf{3},\mathbf{4}),(4,1),(\mathbf{4},\mathbf{4})\} \end{aligned} \tag{۳۸}$$

۲.۴.۳ تقارن

اگر R رابطه‌ای در A باشد که متقارن نباشد $(\exists x, y; xRy, y\cancel{R}x)$ بدیهی است اگر $(x,y) \in R$ آنگاه $(y,x) \in R^{-1}$. بنابراین برای تبدیل به رابطه متقارن باید زوج‌های رابطه R^{-1} را به R اضافه کنیم. $R \cup R^{-1}$ بستار تقارنی R و کوچکترین رابطه متقارن است.

رسم این بستار به طور هندسی ساده است. به این ترتیب که همه یال‌های دو طرفه در $R \cup R^{-1}$ تبدیل می‌شوند.

۳.۴.۳ تعدی

کوچکترین رابطه شامل R که خاصیت تعدی داشته باشد. اگر R رابطه‌ای روی مجموعه متناهی A باشد بستار متعدی رابطه R همان R^{∞} است.

۴ گراف‌ها

اگر $V \neq \emptyset$ و $E \subseteq V \times V$ باشد، $G = (V, E)$ را یک گراف می‌نامند. V مجموعه رئوس یا Vertices و E را مجموعه لبه‌ها، یال‌ها یا Edges می‌گویند. اگر ترتیب قرارگرفتن رأس‌ها مهم باشد **گراف جهت‌دار** است و یال از v_1 به v_2 را با $e = (v_1, v_2)$ و در غیر این صورت در گراف بی‌جهت آنرا با $e = \{v_1, v_2\}$ نمایش می‌دهند.

تعداد رئوس یک گراف را **مرتبه** و تعداد یال‌های آن را **اندازه** گراف می‌نامند. یک گراف از مرتبه p و اندازه q را (اگر مهم باشد) (p, q) گراف می‌گویند.

گرهٔ منفرد یا Isolated گره‌ای است که به هیچ گره‌ای متصل نباشد و **گراف پوچ** یا Null گرافی است که فقط گره منفرد دارد. **گره‌های مجاور** گره‌هایی هستند که بین آنها یالی باشد یا به بیان دیگر متصل باشند.

یالی که مبدأ و مقصد آن یکی باشد یک طوقه، Loop یا **حلقه** است. اگر بین دو گره چند یال داشته باشیم آنها را یال‌های چندگانه یا **موازی** گویند. **درجه گره** یا Degree در یک گراف بدون جهت تعداد یال‌هایی می‌باشد که از آن می‌گذرد؛ در گرافی جهت‌دار، درجه ورودی یک رأس تعداد یال‌های ورودی به آن $-$ و درجه خروجی تعداد یال‌های خروجی آن است $+$ است. گوییم یک رأس هنگامی زوج یا فرد است که درجه‌اش زوج یا فرد باشد.

- تعداد رؤس درجه فرد یک گراف همواره زوج است.
- کوچکترین درجه در G را $\delta(G)$ می‌خوانیم.
- بزرگترین درجه در G را $\Delta(G)$ می‌خوانیم.
- **قضیه دست دادن**: برای هر گراف بی‌جهت داریم $|E| = \frac{\sum_{v_i} \delta(v_i)}{2}$ و برای هر گراف جهت‌دار $|E| = \sum_{v_i} \delta^-(v_i) = \sum_{v_i} \delta^+(v_i)$.

به طور مثال مربع (یا C_4) گرافی است که $\forall v_i \in V : \delta(G) = \delta(v_i) = \Delta(G) = 2$.

به همین صورت می‌توان تعداد $|V|$ را می‌توان از $|E|$ و درجه‌ها نتیجه‌گیری کرد. مثلاً اگر $|E| = 10$ و دو گره درجه ۴ و سایر گره‌ها درجه سه باشد می‌توان تعداد گره‌ها را به این صورت محاسبه کرد:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{v_i} \delta(v_i) = 2|E| \\
&\qquad \implies 2 \times 4 + (|V| - 2) \times 3 = 2 \times 10 \\
&\qquad \implies 3|V| = 18 \\
&\qquad \implies |V| = 6
\end{aligned} \tag{۳۹}
$$

۱.۴ انواع گراف

گراف ساده گرافی بدون جهت، حلقه و یال‌های موازی است. در نهایت **گراف وزن‌دار** یا Weighted گرافی است که هر یال در آن وزن/هزینه‌ای دارد.

گراف منتظم گرافی است که درجه تمام رئوس آن برابر باشد. یک گراف را n منتظم می‌گوییم وقتی درجه هر رأس آن برابر با n باشد. به بیان دیگر G گرافی n منتظم است اگر با x رأس $\forall i = v_1, \dots, v_x, \delta(v_i) = n$.

گراف مرتبه n **کامل** یا مش است هرگاه دو رأس دلخواه آن همواره متصل باشند. این گراف را با κ_n نشان می‌دهند و درجه هر رأس $n-1$ است در نتیجه گراف یک $(n-1)$ منتظم نیز می‌باشد. در نهایت $|E_{\kappa_n}| = \frac{n(n-1)}{2}$.

با این دانسته به طور مثال می‌توان گفت که ۳ـ منتظم با افزایش ۶ یال به گراف کامل تبدیل می‌شود. اینگونه می‌توانید آنرا پیدا کنید:

$$
\begin{aligned}
\text{منتظم } r: 2|E_i| = |V_i|r &\overset{r=3}{\Rightarrow} 2|E_i| = 3|V_i| \implies |E_i| = \frac{3}{2}|V_i| \\
|E_\kappa| = \frac{n(n-1)}{2} &\implies |E_i| + 6 = \frac{n(n-1)}{2} \implies \frac{3}{2}n + 6 \\
&= 3n + 12 = n(n-1) \implies \begin{cases} n = 6 \\ n = 9 \end{cases}
\end{aligned} \tag{۴۰}
$$

گراف متمم G به صورت $\bar{G} = (V, \bar{E})$ تعریف می‌شود. گرافی است که در آن $(u, v) \notin E \iff (u, v) \in \bar{E}$.

اگر بتوان رأس‌های یک گراف را دو پارتیشن کرد به طوری که هر یال یک رأس از مجموعه V_1 را به یک رأس از مجموعه V_2 وصل کند و بین رأس‌های V_1 و V_2 (درون مجموعه‌ای) یالی موجود نباشد. چنین گرافی را **گراف دوبخشی** نامیده و با $G(V_1, V_2)$ نشان می‌دهند. گراف دوبخشی از نوع $\kappa_{1,m-1} = S_m$ را **گراف ستاره‌ای** می‌نامند.

اگر تناظر یک به یک بین گره‌ها و یال‌های دو گراف وجود داشته باشد به طوری که مجاورت گره‌ها و همچنین جهت یال‌ها –درصورت جهت‌دار بودن– حفظ شود، دو **گراف یکریخت** داریم.

گراف همبند گرافی است که بین دو رأس حتماً یک مسیر وجود دارد. انواع همبندی:

۱. قوی: در گراف جهت‌دار هر رأس دلخواه در گراف از رأس دیگری قابل دسترسی باشد.

۲. یک‌طرفه: در گراف جهت‌دار برای هر دو گره دلخواه‌آن حداقل از دیگری قابل دسترسی باشد.

۳. اگر از جهت یال‌ها صرف نظر کنیم و یک گراف غیر جهت‌دار همبند به دست آوریم به آن گراف همبند یا متصل ضیعف گویند.

وقتی فقط یک قسمت از یک گراف را که خود یک گراف است در نظر می‌گیریم به آن یک **زیرگراف** می‌گوییم. به بیان دیگر $G' = (V', E')$ به شرط اینکه $E' \subseteq E$ و $V' \subseteq V$. وقتی همه یال‌های رئوس انتخاب شده زیرگراف هم باشند، زیرگرفا **القایی** است به همین صورت اگر همه رئوس گراف اصلی را داشته باشیم –ولو بدون وجود همه یال‌ها– زیرگراف **پوشا** است.

بزرگترین زیرگراف همبند قوی را **مؤلفه همبند قوی** می‌گویند. مؤلفه‌های گراف را با $K(G)$ نشان می‌دهیم. $1 \leq K(G) \leq |V|$

۲.۴ ماتریس‌های گراف

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times m$ با تعریف زیر باشد:

$$A = (a_{ij})$$
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists\{v_i, v_j\} \\ 0 \end{cases} \tag{۴۱}$$

A **ماتریس مجاور** یا ارتباط G نام دارد.

اگر $M = (m_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ به صورت زیر باشد:

$$M = (m_{ij})$$
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i \text{ روی } e_i \text{ واقع باشد.} \\ 0 \end{cases} \tag{۴۲}$$

به آن **ماتریس وقوع** G می‌گوییم. در این ماتریس:

- $\delta(v_i)$ برابر با مجموع عناصر سطری آن است.
- برای گراف جهت‌دار مجموع سطری درجه خروجی و مجموع ستونی درجه ورودی است.
- در گراف بدون جهت تعداد یک‌ها در ماتریس مجاورت دو برابر $|E|$ و در جهت‌دار برابر $|E|$ است.

ماتریس تلاقی فقط برای گراف بی‌جهت است.

۳.۴ گردش‌ها

یک گردش یا Walk دنباله‌ای از رئوس پیاپی و متصل است. در گردش‌ها ممکن است رأس یا یال تکراری پیموده شود. یک **گذر** یا Trail گردشی است که در آن اجازه نداریم از یال تکراری عبور کنیم. این در حالی است که در یک **مسیر** یا Path امکان عبور از رأس تکراری را هم نداریم. **مدار** یا Circuit گذری بسته است و یک **دور** یا Cycle مسیری بسته است. دور C_n از n رأس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ و یال‌های $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$ تشکیل شده است. بنابراین C_3 به شکل یک مثلث، C_4 مربع و... می‌باشد.

گذر اویلری یا Eulerian گذری است که از همه یال‌های گراف فقط یکبار عبور کند. گرافی دارای گذر اویلری است که همبند باشد و فقط دو رأس با درجه فرد داشته باشد. در گراف‌های جهت‌دار مداری دارای گذر اویلری است که همبند باشد و درجه ورودی و خروجی همه رئوس با هم برابر باشند –بجز دو رأس که رئوس ابتدایی و انتهایی گذر هستند که در آنها درجه خروجی و در آخری درجه ورودی بیشتر است. به همین صورت **مدار اویلری** مداری است که از تمام رئوس

گراف عبور کرده باشد. بدیهی است که گرافی که دارای رأس منفرد است نمی‌تواند دارای مدار اویلری باشد. گرافی که دارای مدار اویلری است که همبند باشد و درجه همه رئوس آن زوج باشد. در گراف جهت‌دار، مدار اویلری وجود دارد اگر گراف همبند باشد و $\forall v_i \in V, \delta^-(v_i) = \delta^+(v_i)$.
مسیر و مدار همیلتونی مسیر و مداری هستند که از همه گره‌ها فقط و فقط یکبار عبور می‌کنند.

- اگر در یک گراف n رأسی ساده و یا جهت‌دار بدون حلقه برای دو گره غیرمجاور v_1 و v_2 رابطه $\delta(v_1)+\delta(v_2) \geq n-1$ برقرار باشد، مسیر همیلتونی خواهد داشت.
- اگر در یک گراف n رأسی ساده برای هر دو گره غیرمجاور v_1 و v_2 رابطه $\delta(v_1) + \delta(v_2) \geq n - 1$ برقرار باشد مدار همیلتونی خواهد داشت.
- گراف‌های κ_{2n+1} دارای مسیر اویلری و مدار اویلری و مسیر همیلتونی و دور همیلتونی هستند.
- یک گراف ساده و یا جهت‌دار بدون حلقه با n گره مدار همیلتونی دارد اگر $|E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$.