

مدار منطقی

محمدیاسین داوده

۱۵ مهر ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۱	۱ مبناها، مکمل و کدها
۱	۱.۱ مبناها
۲	۲.۱ مکملها
۴	۳.۱ کدها

۱ مبناها، مکمل و کدها

۱.۱ مبناها

یک عدد، a ، با n رقم، عدد صحیح و m رقم اعشار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a = \underbrace{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}_{\text{عدد صحیح } n} \cdot \underbrace{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-m}}_{\text{عدد اعشار } m} \quad (۱)$$

هر عدد در مبنای n شامل n رقم یکتا از ۰ تا n است. هنگامی که مبنا از ۱۰ بالاتر می‌رود ارقام بالاتر از ۹ را با حروف الفبای انگلیسی نمایش می‌دهیم. مثلاً در مبنای شانزدهی^۱ مجموعه ارقام به این شکل است: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, F\}$ برای تبدیل عددی از مبنای r به مبنای دهدهی^۲ کافیت هر رقم را در ارزش مکانی خودش ضرب کنیم و حاصل را با هم جمع کنیم:

$$a = a_{n-1} \times r^{n-1} + \dots + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \dots + a_{-m} \times r^{-m} \\ = \sum_{i=-m}^{n-1} a_i r^i \quad (۲)$$

بزرگترین عدد صحیح n رقمی در مبنای r همواره برابر با $\overbrace{(r-1)(r-1)\dots(r-1)}^{n \text{ رقم}}$ است. به طور مثال در مبنای دهدهی ۹۹۹...۹۹۹ و در مبنای شانزدهی $FFF\dots FFF$ بزرگترین عدد صحیح است. مقدار این عدد به صورت زیر

^۱Hexadecimal

^۲Decimal

به دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (r-1)r^i = (r-1) \sum_{i=0}^{n-1} r^i \quad (3)$$

$$\stackrel{\text{تصادف هندسی}}{=} (r-1) \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) = r^n - 1$$

بیشترین مقدار صحیحی که n رقم مبنای r می‌توانند نمایش دهند $r^n - 1$ است. بزرگترین عدد اعشاری n رقمی مبنای r با m رقم اعشار می‌تواند نمایش دهند $r^n - r^{-m} - 1$ است. بنابراین، a یا بزرگترین عدد n رقمی در مبنای 10 حداقل k بیت در مبنای r احتیاج دارد. چرا که $r^n - 1 \leq a$ باشد.

$$k = \lfloor \log_r a \rfloor + 1 \quad (4)$$

برای تبدیل قسمت صحیح عدد $(a)_{10}$ به مبنای r از تقسیم متوالی و یادداشت باقیمانده به ترتیب برعکس به دست آمده استفاده می‌کنیم. برای تبدیل قسمت اعشاری عدد $(a)_{10}$ به مبنای r از ضرب متوالی و یادداشت صورت حاصل استفاده می‌کنیم.

۲.۱ مکمل‌ها

مکمل r^3 و $r^4 - 1$ عدد n رقمی a با m عدد اعشار به شکل زیر به دست می‌آید:

$$[a]_r = r^n - a = [a]_{r-1} + 1 \quad (5)$$

$$[a]_{r-1} = r^n - r^{-m} - a = [a]_r - r^{-m} \quad (6)$$

³Radix complement

⁴Reduced complement

مکمل یک دودویی برابر با Not آن است $\neg((a)_2)_1 = \bar{a}$.
روش‌های خوانش اعداد دودویی:

- بی‌علامت: عدد به طور عادی خوانده می‌شود. $((101100)_2 = 44)$.
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^n - 1$. کوچکترین مقدار: 0.
 - علامت‌دار: اولین رقم از سمت راست علامت عدد است. یک منفی و صفر مثبت است. $((101100)_2 = -12)$.
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1} - 1$. کوچکترین مقدار: $-(r^{n-1} - 1)$.
 - مکمل ۱ $(r - 1)$: بزرگترین رقم ارزشی برابر منفی خودش منهای یک یا $-r^n - 1$ دارد. $((101100)_2 = -(010011)_2 = -19)$.
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1} - 1$. کوچکترین مقدار: $-(r^{n-1} - 1)$.
 - مکمل ۲ $(r - 1)$: مکمل یک بعلاوه یک (طبق فرمول ۵) است.
بزرگترین رقم ارزشی برابر با منفی خودش یا r^n دارد. $((101100)_2 = -(010100)_2 = -20)$.
بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1} - 1$. کوچکترین مقدار: $-r^{n-1}$.
در تمام سیستم‌ها به جز این سیستم به دو روش می‌توان 0 را نمایش داد. بجز این سیستم به همین دلیل جای 0^- می‌توان عددی دیگر هم در سیستم گنجانده می‌توان عددی دیگر هم در سیستم گنجانده با تکرار بیت آخر در این سیستم مقدار عدد تغییر نمی‌کند.^۵
- برای تبدیل عددی از مبنای r به مبنای r^n به ازای هر n رقم در مبنای r باید یک رقم در مبنای r^n قرار دهیم.
- در جمع عددهای مکمل دو تعداد ارقام باید برابر باشد. برای برابر کردن عدد نماد را می‌افزایم (Sign extend می‌کنیم).
- در سیستم مکمل دو از کری (عدد دهگان بالاتر) آخر جمع صرف نظر می‌کنیم.
- هنگامی سرریز^۶ پیش می‌آید که رقم نقلی آخر و خارج شده (c_n) نامساوی با رقم نقلی یکی مانده به آخر و وارد شده (c_{n-1}) باشد. گاهی بدون داشتن

^۵ Sign extension

^۶ Overflow

رقم‌های نقلی می‌توان سرریز را مشخص کرد. هنگامی که جمع دو عدد منفی، مثبت می‌شود، یا بالعکس، سرریز رخ داده است. حاصل جمع هنگام سرریز می‌کند که جواب دو عدد n رقمی را در n بیت یا کمتر ذخیره کنیم. حاصل جمع دو عدد n رقمی برابر یا $+1$ آنها است. اگر تفریق را با روش $a + [b]_2$ انجام ندهیم فلگ Carry نداریم و جای آن از Borrow استفاده می‌کنیم. به هنگام تفریق وضعیت‌های زیر با فلگ‌های زیر پیش می‌آید:

$$a - b \begin{cases} \text{Sign} = \text{Overflow}, a > b \\ \text{Sign} \neq \text{Overflow}, a < b \\ \text{Zero} = 1, a = b \end{cases} \quad (Y)$$

۳.۱ کدها

Excess-۳	Decimal	BCD	Decimal
۰۰۱۱	۰	۰۰۰۰	۰
۰۱۰۰	۱	۰۰۰۱	۱
۰۱۰۱	۲	۰۰۱۰	۲
۰۱۱۰	۳	۰۰۱۱	۳
۰۱۱۱	۴	۰۱۰۰	۴
۱۰۰۰	۵	۰۱۰۱	۵
۱۰۰۱	۶	۰۱۱۰	۶
۱۰۱۰	۷	۰۱۱۱	۷
۱۰۱۱	۸	۱۰۰۰	۸
۱۱۰۰	۹	۱۰۰۱	۹

جدول ۲: کدهای Excess-۳

جدول ۱: کدهای Coded Binary
Decimals که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر ۱، ۲، ۴ و ۸ را دارند.

کد خود مکمل کدی است که اگر آنرا Not کنید (مکمل ۱ یا $r - 1$ آنرا در دودویی بگیریم) برابر مکمل ۹ یا $r - 1$ آن در دهدهی است. کدهای

2421	Decimal
....	۰
...۱	۱
..۱۰	۲
..۱۱	۳
.۱۰۰	۴
۱۰۱۱	۵
۱۱۰۰	۶
۱۱۰۱	۷
۱۱۱۰	۸
۱۱۱۱	۹

جدول ۴: کدهای 2421 که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر 1، 2، 4 و 8 را دارند.

8421̄	Decimal
....	۰
.۱۱۱	۱
.۱۱۰	۲
.۱۰۱	۳
.۱۰۰	۴
۱۰۱۱	۵
۱۰۱۰	۶
۱۰۰۱	۷
۱۰۰۰	۸
۱۱۱۱	۹

جدول ۳: کدهای 8421̄ که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر -1، -2، 4 و 8 را دارند.

8421̄، 2421 و Excess-۳ خود مکمل هستند.