ریاضیات گسسته

۱۲ آبان ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۱ منطق و گزاره

گزاره یا Statement یک جمله خبری است که یا درست است و یا نادرست. امکان درستی و نادرستی همزمان یک گزاره وجود ندارد.

۱.۱ رابطه‌های اولیه و جدول درستی

تعداد ترکیب‌های جدول درستی برای n گزارهٔ مبنا معادل ۲^n است.
رابطه‌های گزاره‌ای (۱) ابزارهایی برای ایجاد گزاره‌های ترکیبی بکار می‌روند.

جدول ۱: جدول رابطه‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

نام	نماد	مفهوم
نقیض (Not)	$\neg$، $\sim$، بار بالای متغیر، $'$ بعد از متغیر یا !	چنین نیست
ترکیب عطفی (And)	$\wedge$ یا $\cdot$	p و q
ترکیب فصلی (Or)	$\vee$ یا $+$	p یا q
یای مانع جمع (Exclusive or / Aut)	$\veebar$ یا $\oplus$	فقط p یا فقط q
ترکیب شرطی (الزام)	$\Rightarrow$	اگر p آنگاه q
ترکیب دوشرطی	$\Leftrightarrow$	p اگر و فقط اگر q

۱.۱.۱ نقیض (Not)

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را به صورت $\neg p$ نشان می‌دهیم. این گزاره زمانی درست است که p نادرست باشد.
با توجه به جدول ۲ می‌توان نتیجه گرفت هردو هم‌ارز[1] هستند:

[1] هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آن‌ها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد $\equiv$ نشان می‌دهیم.

جدول ۲: جدول رابطه‌های اصلی گزاره‌ای و نمادهای آن‌ها

$\neg p$	p
۱	۰
۰	۱

$$\neg(\neg p) \quad \overbrace{\equiv}^{\text{هم ارزی}^*} \quad p \tag{۱}$$

۲.۱.۱ ترکیب عطفی (And)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت هر دو اطمینان حاصل کنیم از ترکیب عطفی $(p \wedge q)$ استفاده می‌کنیم (جدول ۳).

جدول ۳: جدول مقادیر ترکیب عطفی

$p \wedge q$	q	p
۱	۱	۱
۰	۰	۱
۰	۱	۰
۰	۰	۰

۳.۱.۱ ترکیب فصلی (Or)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت یکی از آنها اطمینان حاصل کنیم از ترکیب فصلی $(p \vee q)$ استفاده می‌کنیم (جدول ۴).

جدول ۴: جدول مقادیر ترکیب فصلی

$p \vee q$	q	p
۱	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰
۰	۰	۰

۴.۱.۱ یای مانع جمع (انحصاری) (Exclusive or / Aut)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت **فقط یکی** از آنها اطمینان حاصل کنیم از یای انحصاری $(p \oplus q)$ استفاده می‌کنیم (جدول ۵)

۵.۱.۱ ترکیب شرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از ترکیب شرطی استفاده می‌کنیم (جدول ۶). برای بیان آن می‌نویسیم $p \Rightarrow q$ که به شکل‌های زیر می‌تواند خوانده شود:

- اگر p آنگاه q.
- p، q را نتیجه می‌دهد.
- q از p نتیجه می‌دهد.

جدول ۵: جدول مقادیر یای انحصاری

$p \oplus q$	q	p
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰
۰	۰	۰

جدول ۶: جدول مقادیر ترکیب شرطی

$p \Rightarrow q$	q	p
۱	۱	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰
۱	۰	۰

در عبارت $p \Rightarrow q$، p مقدم و q تالی است.
با توجه به جدول مقادیر (جدول ۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg p \vee q \quad \equiv \quad p \Rightarrow q \tag{۲}$$

۶.۱.۱ ترکیب دوشرطی

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم و از گزاره q گزاره p را، می‌نویسیم $p \Leftrightarrow q$ (جدول ۷).

جدول ۷: جدول مقادیر ترکیب دوشرطی

$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$	q	p
۱	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۰

با توجه به جدول مقادیر (۷) می‌توان نتیجه گرفت:

$$p \Leftrightarrow q \quad \equiv \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad \equiv \quad (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \tag{۳}$$

گزاره راستگو گزاره‌ای است که همواره برابر با ۱ باشد. گزاره‌ای که همواره ۰ است را گزاره متناقض گویند.

۷.۱.۱ خواص گزاره‌ها

گزاره‌ها خواصی دارند که به شرح زیر است:

$$\text{خودتوانی}\begin{cases} p \vee p & \equiv \quad p \\ p \wedge p & \equiv \quad p \end{cases} \tag{۴}$$

$$\text{جذبی}\begin{cases} p \vee (p \wedge q) & \equiv \quad p \\ p \wedge (p \vee q) & \equiv \quad p \end{cases} \tag{۵}$$

$$\text{جابه‌جایی}\begin{cases} p \vee q & \equiv \quad q \vee p \\ p \wedge q & \equiv \quad q \wedge p \end{cases} \tag{۶}$$

شرکت‌پذیری
$$\begin{cases} p \vee (q \vee r) & \equiv \quad (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) & \equiv \quad (p \wedge q) \wedge r \end{cases} \tag{۷}$$

توزیع‌پذیری
$$\begin{cases} p \vee (q \wedge r) & \equiv \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \wedge (q \vee r) & \equiv \quad (q \vee q) \wedge p(p \vee r) \end{cases} \tag{۸}$$

متمم
$$\begin{cases} p \vee \neg p & \equiv \quad ۱ \\ p \wedge \neg p & \equiv \quad ۰ \end{cases} \tag{۹}$$

قانون دمورگان (De Morgan)
$$\begin{cases} \neg(p \vee q) & \equiv \quad \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) & \equiv \quad \neg p \vee \neg q \end{cases} \tag{۱۰}$$

قانون همانی
$$\begin{cases} (p \wedge ۱) \equiv p \\ (p \wedge ۰) \equiv ۰ \\ (p \vee ۱) \equiv ۱ \\ (p \vee ۰) \equiv p \end{cases} \tag{۱۱}$$