مدار منطقی

محمدیاسین داوده

۲۵ آبان ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۱ مبناها، مکمل و کدها

۱.۱ مبناها

یک عدد، a، با n رقم، عدد صحیح و m رقم اعشار را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a = \underbrace{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}_{\text{عدد صحیح } n} . \underbrace{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-m}}_{\text{عدد اعشار } m}$$

هر عدد در مبنای n شامل n رقم یکتا از 0 تا n است. هنگامی که مبنا از ۱۰ بالاتر می‌رود ارقام بالاتر از ۹ را با حروف الفبای انگلیسی نمایش می‌دهیم ($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, F\}$).
برای تبدیل عددی از مبنای r به مبنای ده‌دهی (Decimal) کافیست هر رقم را در ارزش مکانی خودش ضرب کنیم و حاصل را با هم جمع کنیم:

$$\begin{aligned} a &= a_{n-1} \times r^{n-1} + \dots + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \dots + a_{-m} \times r^{-m} \\ &= \sum_{i=-m}^{n-1} a_i r^i \end{aligned} \tag{۱}$$

بزرگترین عدد صحیح n رقمی در مبنای r همواره برابر با $(r-1)(r-1)\dots(r-1)$ است. به طور مثال در مبنای ده‌دهی $999\dots999$ و در مبنای شانزدهی $FFF\dots FFF$ بزرگترین عدد صحیح است. مقدار این عدد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(r-1)r^i = (r-1)\sum_{i=0}^{n-1} r^i \overset{\text{تصاعد هندسی}}{=} (r-1)(\frac{r^n-1}{r-1}) = r^n - 1 \tag{۲}$$

بیشترین مقدار صحیحی که n رقم مبنای r می‌توانند نمایش دهند r^n-1 است. بزرگترین عدد اعشاری n رقمی مبنای r با m رقم اعشار می‌تواند نمایش دهند $r^n-r^{-m}-1$ است.

۲.۱ مکمل‌ها

مکمل r (Radix complement) و $r-1$ (Reduced complement) عدد n رقمی a با m عدد اعشار به شکل زیر به دست می‌آید:

$$[a]_r = r^n - a = [a]_{r-1} + 1 \quad (۳)$$

$$[a]_{r-1} = r^n - r^{-m} - a = [a]_r - r^{-m} \quad (۴)$$

مکمل یک دودویی برابر با Not آن است ($[(a)_2]_1 = \bar{a}$).
روش‌های خوانش اعداد دودویی:

- بی‌علامت: عدد به طور عادی خوانده می‌شود ($(101100)_2 = 44$).
  - بزرگترین مقدار با n رقم: r^n-1.
  - کوچکترین مقدار: 0.
- علامت‌دار: اولین رقم از سمت راست علامت عدد است. یک منفی و صفر مثبت است ($(101100)_2 = -12$).
  - بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1}-1$.
  - کوچکترین مقدار: $-(r^{n-1}-1)$.
- مکمل ۱ ($r-1$): بزرگترین رقم ارزشی برابر منفی خودش منهای یک یا $-r^n-1$ دارد ($(101100)_2 = -(010011)_2 = -19$).
  - بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1}-1$.
  - کوچکترین مقدار: $-(r^{n-1}-1)$.
- مکمل ۲ (r): مکمل یک بعلاوه یک (طبق فرمول ۳) است. بزرگترین رقم ارزشی برابر با منفی خودش یا $-r^n$ دارد ($(101100)_2 = -(010100)_2 = -20$).
  - بزرگترین مقدار با n رقم: $r^{n-1}-1$.
  - کوچکترین مقدار: $-r^{n-1}$.

در تمام سیستم‌ها به جز مکمل ۲ به دو روش می‌توان 0 را نمایش داد. بجز این سیستم به همین دلیل جای 0^- می‌توان عددی دیگر هم در سیستم گنجاند می‌توان عددی دیگر هم در سیستم گنجاند. با تکرار بیت آخر در این سیستم مقدار عدد تغییر نمی‌کند (Sign extension).

۳.۱ تبدیل

برای تبدیل عددی از مبنای r به مبنای r^n به ازای هر n رقم در مبنای r باید یک رقم در مبنای r^n قرار دهیم.

در جمع عددهای مکمل دو تعداد ارقام باید برابر باشد. برای برابر کردن عدد نماد را می‌افزایم (Sign extend می‌کنیم).

در سیستم مکمل دو از کری (عدد مرتبه بالاتر) آخر جمع صرف نظر می‌کنیم.

هنگامی سرریز پیش می‌آید که رقم نقلی آخر و خارج شده (c_n) نامساوی با رقم نقلی یکی مانده به آخر و وارد شده (c_{n-1}) باشد. گاهی بدون داشتن رقم‌های نقلی می‌توان سرریز را مشخص کرد. هنگامی که جمع دو عدد منفی، مثبت می‌شود، یا بالعکس، سرریز رخ داده است. حاصل جمع هنگامی سرریز می‌کند که جواب دو عدد n رقمی را در n بیت یا کمتر ذخیره کنیم. حاصل جمع دو عدد n رقمی برابر یا $n+1$ آنها است.

اگر تفریق را با روش $a+[b]_2$ انجام ندهیم فلگ Carry نداریم و جای آن از Borrow استفاده می‌کنیم.

به هنگام تفریق وضعیت‌های زیر با فلگ‌های زیر پیش می‌آید:

$$a-b\begin{cases}Sign = Overflow, a >= b\\ Sign \neq Overflow, a < b\\ Zero = 1, a = b\end{cases} \tag{۵}$$

بنابر فرمول ۲ a یا بزرگترین عدد n رقمی در مبنای ۱۰ حداقل k بیت در مبنای r احتیاج دارد. چرا که $r^n - 1 <= a$ باشد.

$$k = \lfloor \log_r a \rfloor + 1 \tag{۶}$$

برای تبدیل قسمت صحیح عدد $(a)_{10}$ به مبنای r از تقسیم متوالی و یادداشت باقیمانده به ترتیب برعکس به دست آمده استفاده می‌کنیم. برای تبدیل قسمت اعشاری عدد $(a)_{10}$ به مبنای r از ضرب متوالی و یادداشت صورت حاصل استفاده می‌کنیم.

۴.۱ کدها

جدول ۱: کدهای Binary Coded Decimals که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر 1، 2، 4 و 8 را دارند.

Decimal	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

جدول ۲: کدهای Excess-۳

Decimal	Excess-3
0	0011
1	0100
2	0101
3	0110
4	0111
5	1000
6	1001
7	1010
8	1011
9	1100

کد خود مکمل کدی است که اگر آنرا Not کنید (مکمل 1 یا $r-1$ آنرا در دودویی بگیریم)، برابر مکمل 9 یا $r-1$ آن در ده‌دهی است. کدهای $84\bar{2}\bar{1}$، 2421 و Excess-۳ خود مکمل هستند.

۱.۴.۱ گری (Gray)

کد خاکستری، Gray یا انعکاسی کدی است که در آن هر عدد با عدد بعدی فقط در یک رقم تفاوت دارد.

برای تبدیل دودویی به گری می‌توان عدد سمت چپ را نوشت و سپس عدد سمت راست را با آن xor (بررسی تفاوت) می‌کنیم و حاصل را جای عدد سمت راست می‌نویسیم.

جدول ۳: کدهای $84\bar{2}\bar{1}$ که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر -1، -2، 4 و 8 را دارند.

Decimal	$84\bar{2}\bar{1}$
0	0000
1	0111
2	0110
3	0101
4	0100
5	1011
6	1010
7	1001
8	1000
9	1111

جدول ۴: کدهای 2421 که در آن بیت‌ها به ترتیب مقادیر 1، 2، 4 و 2 را دارند.

Decimal	2421
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	1011
6	1100
7	1101
8	1110
9	1111

جدول ۵: مثال کد دودویی به گری

Binary	Gray
0000	0000
0001	0001
0010	0011
0011	0010
0100	0110
0101	0111
0110	0101
0111	0100
1000	1100
1001	1101
...	

جدول ۶: کد گری حلزونی که در جدول کارنو حالتی پیچشی دارد.

Binary	Gray
0000	0101
0001	0111
0010	1111
0011	1101
0100	1100
0101	0100
0110	0000
0111	0001
1000	0011
1001	0010
1010	0110
1011	1110
1100	1010
1101	1011
1110	1001
1111	1000

۲.۴.۱ اسکی

اسکی به حالت استاندارد ۷ بیت است. به طور افزوده ۸ بیت که شامل علائم خاص خطالرسم لاتین نیز می‌باشد. سه بیت به عنوان ستون و چهار بیت به عنوان سطرهای یک جدول خوانده می‌شوند.

جدول ۷: جدول اسکی

	000	001	010	011	100	101	110	111
00000	NUL (Null)	DLE (Data Line Escape)	SP (Space)	0	@	P	‘	p
00001	SOH (Start of Heading)	DC1 (Device Control 1 (oft. XON))	!	1	A	Q	a	q
00010	STX (Start of Text)	DC2 (Device Control 2)	”	2	B	R	b	r
00011	ETX (End of Text)	DC3 (Device Control 3 (oft. XOFF))	#	3	C	S	c	s
00100	EOT (End of Transmission)	DC4 (Device Control 4)	$	4	D	T	d	t
00101	ENQ (Enquiry)	NAK (Negative Acknowledgement)	%	5	E	U	e	u
00110	ACK (Acknowledgment)	SYN (Synchronous Idle)	&	6	F	V	f	v
00111	BEL (Bell)	ETB (End of Transmit Block)	’	7	G	W	g	w
01000	BS (Back Space)	CAN (Cancel)	(	8	H	X	h	x
01001	HT (Horizontal Tab)	EM (End of Medium)	)	9	I	Y	i	y
01010	LF (Line Feed)	SUB (Substitute)	*	:	J	Z	j	z
01011	VT (Vertical Tab)	ESC (Escape)	+	;	K	[	k	{
01100	FF (Form Feed)	FS (File Separator)	,	<	L	\	l	|
01101	CR (Carriage Return)	GS (Group Separator)	−	=	M	]	m	}
01110	SO (Shift Out / X-On)	RS (Record Separator)	.	>	N	^	n	~
01111	SI (Shift In / X-Off)	US (Unit Separator)	/	?	O	_	o	(Delete)

۵.۱ توازن (Parity)

بیت‌های توازن بیت‌هایی مازاد بر داده هستند که به عیب‌یابی و در مواردی حل آن کمک می‌کنند.

به طور کل برای ایجاد توازن بیت‌های یک را می‌شمارند. اگر هدف در ایجاد توازن فرد است، سعی می‌کنیم تعداد بیت‌های یک را فرد کنیم (بیت توازن، هنگام زوجی بیت‌های یک داده، یک می‌شود). اگر هدف در ایجاد توازن زوج است، سعی می‌کنیم تعداد زوج‌های یک را فرد کنیم (بیت توازن، هنگام زوجی بیت‌های یک داده، یک می‌شود).

هنگامی که بیت سمت چپ یک است توازن زوج بهتر جواب می‌دهد.*

۱.۵.۱ همپوشان (Overlapping)

توازن برای بلوکی از داده‌ها را توازن همپوشان (Overlapping) می‌خوانند. به این صورت است که توازن را از ستون‌ها و سطرهای بلاک می‌گیریم.

جدول ۸: مثال توازن همپوشان زوج

1	0	1	1	1
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0
0	0	1	1	0

توازن همپوشان قابلیت پیدا کردن بیت خطادار را به ما می‌دهد.

جدول ۹: مشخص بودن مکان بیت خطادار

1	0	1	1	1
0	~~1~~	1	0	**1**
1	0	1	0	0
0	**0**	1	1	0

۲.۵.۱ سرجمع (Checksum)

سرجمع به طور کل با جمع تمام بیت‌ها صحت داده را بررسی می‌کند.
در سرجمع‌ها داده‌ها را با یکدیگر جمع کرده و در صورت وجود کری:

- در Single-precision آنرا دور می‌اندازیم.
- در Double-precision آنرا ذخیره کرده و تا نزدیکترین 2^n صفر به آن اضافه می‌کند.
- در Residue آنرا با سرجمع دوباره جمع می‌کنیم.

در سرجمع Honeywell با سطرهای زوج و فرد دو بلاک درست کرده و آنها را به یکدیگر پیوند می‌دهیم و از آن جمع می‌گیریم.

جدول ۱۰: سرجمع‌ها

0000	0000	0000	
0101	0101	0101	
1111	1111	1111	00000101
0010	0010	0010	11110010
0110	00010110	0111	11110111
Single	Double	Residue	Honeywell

۳.۵.۱ همینگ (Hamming)

کد همینگ کدی برای تشخیص و تصحیح است.
فاصله همینگ تفاوت بین بیت‌های دو عدد a و b است ($d(a,b)$) به طور مثال:

$$d(111001,\\ 010110) = 5$$

$$d(000000,\\ 111000) = 3$$

همینگ برای کدی که فاصلهٔ d دارد می‌تواند:

- $d-1$ خطا را تشخیص دهد.
- $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ خطا را تصحیح کند.

بیت‌های توازن کد همینگ در جایگاه‌های توان دوی داده ($1, 2, 4, 8 \ldots$) قرار می‌گیرند.
برای هر عدد n رقمی r بیت توازن لازم است که از $2^r - 1 >= n + r$ به دست می‌آید.
به طور کل هر بیت توازن تمام بیت‌های پیش‌روی خودی را شامل می‌شود که and بیتی موقعیت بیت توازن با موقعیت آن بیت صفر نباشد.
بنابراین اگر رشتهٔ زیر را داشته باشیم که از تعدادی بیت توازن p و داده d تشکیل شده است:

$$\overset{p_1}{[]}\overset{p_2}{[]}\overset{d_3}{0}\overset{p_4}{[]}\overset{d_5}{1}\overset{d_6}{0}\overset{d_7}{1}$$

- بیت p_1 حاوی وضعیت توازن تمام بیت‌هایی است که $\wedge$ موقعیت آنها با 1 ناصفر است ($1, 3, 5, 7, 9, \ldots$).
- بیت p_2 حاوی وضعیت توازن تمام بیت‌هایی است که $\wedge$ موقعیت آنها با 2 ناصفر است ($2, 3, 6, 7, 10, 11, \ldots$).
- بیت p_4 حاوی وضعیت توازن تمام بیت‌هایی است که $\wedge$ موقعیت آنها با 4 ناصفر است ($[4-7], [12-15], [20-23], \ldots$).
- بیت p_8 حاوی وضعیت توازن تمام بیت‌هایی است که $\wedge$ موقعیت آنها با 8 ناصفر است ($[8-15], [24-31], [40-47], \ldots$).

وضعیت توازن با $\oplus$ بیت‌های تحت دامنهٔ هر بیت توازن است. بنابرین برای عدد بالا 0101 بیت‌های پریتی اینگونه پر خواهند شد:

$$\begin{aligned} p_1 &= d_3 \oplus d_5 \oplus d_7 \\ p_2 &= d_3 \oplus d_6 \oplus d_7 \\ p_4 &= d_5 \oplus d_6 \oplus d_7 \end{aligned} \tag{۷}$$

در نتیجه عدد با توازن برابر 0110101 خواهد بود.

$$\overset{p_1}{0}\overset{p_2}{1}\overset{d_3}{1}\overset{p_4}{0}\overset{d_5}{1}\overset{d_6}{0}\overset{d_7}{1}$$

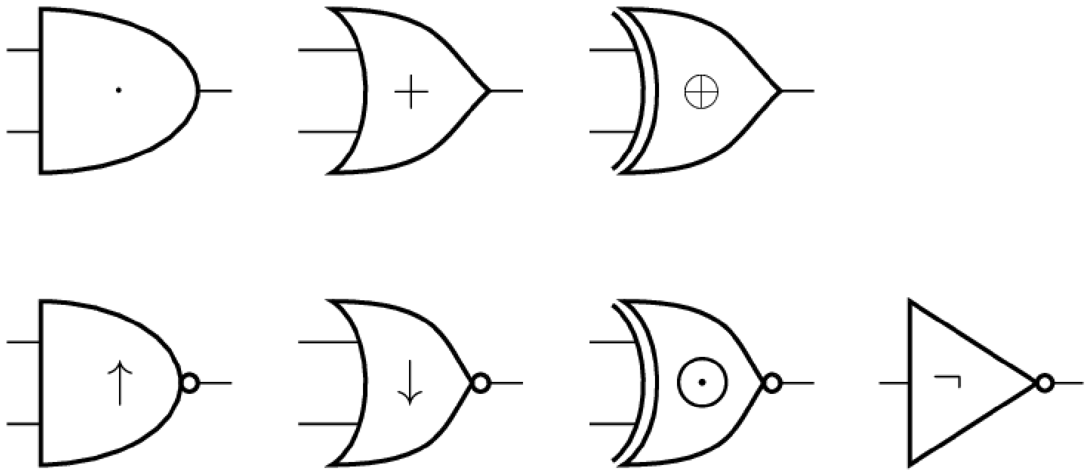
گیرنده با $\oplus$ کردن خود بیت توازن با داده‌های تحت دامنه می‌تواند به خطا یا بی‌خطا بودن پی ببرد.

$$\begin{aligned} c_1 &= p_1 \oplus d_3 \oplus d_5 \oplus d_7 \\ c_2 &= p_2 \oplus d_3 \oplus d_6 \oplus d_7 \\ c_3 &= p_4 \oplus d_5 \oplus d_6 \oplus d_7 \end{aligned} \tag{۸}$$

با زنجیری نوشتن c_1 تا c_n عددی به دست می‌آید که مکان خطا را نشان می‌دهد. صفر یعنی خطایی وجود ندارد.

۲ جبر بول، ساده‌ساز، EPI و PI

نقطه سفید پایپ را $\neg$ می‌کند.
یک Product term رویه‌ای از ضرب ($\wedge$) چندین عبارت و $\neg$ است. یک Sum term رویه‌ای از حاصل جمع ($\vee$) چندین عبارت و $\neg$ است. یک تک عبارت به تنهایی هم Product و هم Sum term است.
دوگانی (Duality) با تعویض $\wedge$ها با $\vee$ها و $\neg$ کردن صفرها و یک‌های ثابت هر عبارت معادل آن به دست می‌آید که به آن دوگان می‌گویند.
یک Min-term نوعی عبارت ضربی است که هر ورودی تابع آن دقیقاً یک بار در آن تکرار می‌شود. مین‌ترم با m نشان داده می‌شود و فقط یک حالت یک می‌شود. یک Max-term نوعی عبارت جمعی است که هر ورودی تابع آن دقیقاً یک بار در آن تکرار می‌شود. ماکس‌ترم با M نشان داده می‌شود و فقط یک حالت صفر می‌شود.



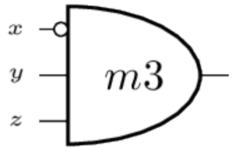
شکل ۱: گیت‌های عملگرهای رایج منطقی

جدول ۱۱: مین‌ترم‌های سه ورودی

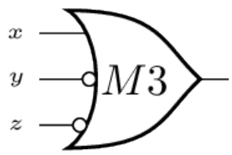
			$m0$	$m1$	$m2$	$m3$	$m4$	$m5$	$m6$	$m7$
x	y	z	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	$x \wedge \bar{y} \wedge z$	$x \wedge y \wedge \bar{z}$	$x \wedge y \wedge z$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

جدول ۱۲: ماکس‌ترم‌های سه ورودی

			$M0$	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	$M5$	$M6$	$M7$
x	y	z	$x \vee y \vee z$	$x \vee y \vee \bar{z}$	$x \vee \bar{y} \vee z$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	$\bar{x} \vee y \vee z$	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0



شکل ۲: مین‌ترم $\bar{x}yz$ که فقط عدد سه دودویی آنرا یک می‌کند.



شکل ۳: ماکس‌ترم $x + \bar{y} + \bar{z}$ که فقط عدد سه دودویی آنرا صفر می‌کند.

به عبارات ضربی که بین آنها جمع اتفاق بیوفتد SOP یا Sum of Products می‌گویند. به عبارات جمعی که بین آنها ضرب اتفاق بیوفتد POS یا Product of Sums می‌گویند.

به طور خلاصه می‌توان SOP (جمع مین‌ترم‌ها) را به صورت $\sum_{xyz}(a, b, c, \dots)$ می‌نویسند که در آن a، b، c شماره مین‌ترم‌های مورد نظر است. بنابراین $(\bar{x}\bar{y}z) + (\bar{x}y\bar{z}) + (\bar{x}yz) + (x\bar{y}\bar{z})$ را که بر اساس جدول ۱۱ معادل $m1 + m2 + m3 + m4$ است را به صورت $\sum_{xyz}(1, 2, 3, 4)$ نگاشت.

مشابه SOP می‌توان جمع ماکس‌ترم‌ها یا POS را به صورت $\prod_{xyz}(a, b, c, \dots)$ نوشت که در آن a، b، c شماره ماکس‌ترم‌های مورد نظر است. بنابراین $(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$ را که بر اساس جدول ۱۲ معادل $M3 + M4 + M5$ است را به صورت $\prod_{xyz}(3, 4, 5)$ نگاشت.