

گسسته

محمدیاسین داوده

۱۰ مهر ۱۳۹۹

فهرست مطالب

| | |
|---|---|
| ۱ | منطق و گزاره |
| ۱ | ۱.۱ رابط‌های اولیه و جدول درستی |
| ۱ | ۱.۱.۱ نقیض (Not) |
| ۲ | ۲.۱.۱ ترکیب عطفی (And) |
| ۲ | ۳.۱.۱ ترکیب فصلی (Or) |
| ۲ | ۴.۱.۱ یای مانع جمع (انحصاری) (Exclusive or) |
| ۳ | ۵.۱.۱ ترکیب شرطی |
| ۴ | ۶.۱.۱ ترکیب دوشروطی |
| ۴ | ۲.۱ خواص گزاره‌ها |

۱ منطق و گزاره

گزاره^۱ یک جمله خبری است که یا درست است و یا نادرست. امکان درستی و نادرستی همزمان یک گزاره وجود ندارد.

۱.۱ رابطهای اولیه و جدول درستی

تعداد ترکیبهای جدول درستی برای n گزاره مبنا معادل 2^n است. رابطهای گزاره‌ای (جدول ۱) ابزارهایی برای ایجاد گزاره‌های ترکیبی بکار می‌روند.

| نام | نماد | مفهوم |
|-----------------------------|-------------------|-----------------------|
| نقیض (Not) | \neg یا \sim | چنین نیست |
| ترکیب عطفی (And) | \wedge | p و q |
| ترکیب فصلی (Or) | \vee | p یا q |
| پای مانع جمع (Exclusive or) | \oplus | فقط p یا فقط q |
| ترکیب شرطی (الزام) | \Rightarrow | اگر p آنگاه q |
| ترکیب دوشروطی | \Leftrightarrow | p اگر و فقط اگر q |

جدول ۱: جدول رابطهای اصلی گزاره‌ای و نمادهای آنها

۱.۱.۱ نقیض (Not)

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را به صورت $\neg p$ یا $\sim p$ نشان می‌دهیم. (جدول ۲) این گزاره زمانی درست است که p نادرست باشد.

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| T | F |
| F | T |

جدول ۲: جدول رابطهای اصلی گزاره‌ای و نمادهای آنها

¹ Statement

با توجه به جدول مقادیر (۲) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg(\neg p) \overset{\text{هم ارزی}^*}{\equiv} p \quad (1)$$

۲.۱.۱ ترکیب عطفی (And)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت هر دو اطمینان حاصل کنیم از ترکیب عطفی ($p \wedge q$) استفاده می‌کنیم. (جدول ۳)

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

جدول ۳: جدول مقادیر ترکیب عطفی

۳.۱.۱ ترکیب فصلی (Or)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت یکی از آنها اطمینان حاصل کنیم از ترکیب فصلی ($p \vee q$) استفاده می‌کنیم. (جدول ۴)

۴.۱.۱ یای مانع جمع (انحصاری) (Exclusive or)

اگر p و q دو گزاره باشند و بخواهیم از صحت فقط یکی از آنها اطمینان حاصل کنیم از یای انحصاری^۲ ($p \oplus q$) استفاده می‌کنیم. (جدول ۵)

* هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آنها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد \equiv نشان می‌دهیم.

²Exclusive or (Xor)

| p | q | $p \vee q$ |
|--------------|--------------|--------------|
| \mathbb{T} | \mathbb{T} | \mathbb{T} |
| \mathbb{T} | \mathbb{F} | \mathbb{T} |
| \mathbb{F} | \mathbb{T} | \mathbb{T} |
| \mathbb{F} | \mathbb{F} | \mathbb{F} |

جدول ۴: جدول مقادیر ترکیب فصلی

| p | q | $p \oplus q$ |
|--------------|--------------|--------------|
| \mathbb{T} | \mathbb{T} | \mathbb{F} |
| \mathbb{T} | \mathbb{F} | \mathbb{T} |
| \mathbb{F} | \mathbb{T} | \mathbb{T} |
| \mathbb{F} | \mathbb{F} | \mathbb{F} |

جدول ۵: جدول مقادیر یای انحصاری

۵.۱.۱ ترکیب شرطی

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از ترکیب شرطی استفاده می‌کنیم (جدول ۶). برای بیان آن می‌نویسیم $p \Rightarrow q$ که به شکل‌های زیر می‌تواند خوانده شود:

• اگر p آنگاه q .

• p, q را نتیجه می‌دهد.

• q از p نتیجه می‌دهد.

در عبارت $p, p \Rightarrow q$ مقدم p و q تالی است.

با توجه به جدول مقادیر (۶) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\neg p \vee q \quad \equiv \quad p \Rightarrow q \quad (۲)$$

* هرگاه دو گزاره مرکب — صرف نظر از ارزش مؤلفه‌های آن‌ها — ارزش‌های یکسان داشته باشند از لحاظ منطقی هم‌ارز هستند که آنرا با نماد \equiv نشان می‌دهیم.

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

جدول ۶: جدول مقادیر ترکیب شرطی

۶.۱.۱ ترکیب دوشروطی

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم و از گزاره q گزاره p را، می‌نویسیم $p \Leftrightarrow q$ (جدول ۷).

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|-----------------------|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |

جدول ۷: جدول مقادیر ترکیب دوشروطی

با توجه به جدول مقادیر (۷) می‌توان نتیجه گرفت:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \quad (۳)$$

۲.۱ خواص گزاره‌ها

گزاره‌ها خواصی دارند که به شرح زیر است:

$$\text{خودتوانی} \begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases} \quad (۴)$$

$$\text{جذبى} \begin{cases} p \vee (p \wedge q) & \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) & \equiv p \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{جابہ جایی} \begin{cases} p \vee q & \equiv q \vee p \\ p \wedge q & \equiv q \wedge p \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{شرکت پذیری} \begin{cases} p \vee (q \vee r) & \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) & \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{متمم} \begin{cases} p \vee \neg p & \equiv \mathbb{T} \\ p \wedge \neg p & \equiv \mathbb{F} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{قانون دمورگان (De Morgan)} \begin{cases} \neg(p \vee q) & \equiv \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) & \equiv \neg p \vee \neg q \end{cases} \quad (9)$$