## Комбінаторні об’єкти в задачах оптимізації надійності

Паралельно-послідовна система (рис.1) складається з $r$ паралельних ланцюжків, в кожному з яких послідовно з’єднана певна кількість елементів: $k_1$ у першому, $k_2$ у другому, …, $k_r$ в $r$-му ланцюжку; $\sum_{i=1}^{r} k_i = N$ – загальна кількість елементів в системі. Отже, $k_1, k_2, \dots, k_r$ – фактично є одним з можливих варіантів розбиття натурального числа $N$ на доданки. Елементи характеризуються наперед відомими значеннями ймовірностей своїх відмов (втрати роботоздатності):

- відмова типу "обрив" $- q_о$,
- відмова типу "коротке замикання" $- q_{кз}$; $q_о + q_{кз} \ll 1$ (значно менше 1).

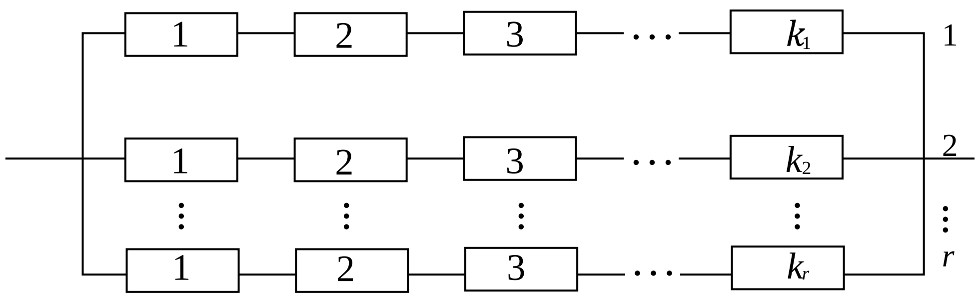


Рис. 1. Паралельно-послідовна система однотипних елементів

Якщо відбулася відмова типу "обрив" будь-якого елемента в кожному ланцюжку чи відмова типу "коротке замикання" усіх елементів хоча б в одному ланцюжку, то відбудеться відмова всієї системи. Надійність такої системи обраховується за формулою:

$$P(k_1, k_2, \dots, k_r) = \prod_{i=1}^{r} (1 - q_{кз}^{k_i}) - \prod_{i=1}^{r} (1 - (1 - q_о)^{k_i}), \qquad (1)$$

де $q_{кз}^{k_i}$ – ($q_{кз}$ у степені $k_i$) – ймовірність того, що всі елементи у ланцюжку $k_i$ вийшли з ладу через відмову типу "коротке замикання", $(1 - q_о)^{k_i}$ – ймовірність того, що у жодного з елементів $i$-го ланцюжка не відбулась відмова типу "обрив". Таким чином, надійність конкретної паралельно-послідовної структури обчислюється як ймовірність того, що жоден з ланцюжків не є коротко замкненим мінус ймовірність того, що кожен з ланцюжків цієї структури вийде з ладу через "обрив". В загальному випадку надійність паралельно-послідовної системи з $N$ елементів – це надійність такої конкретної структури $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, на якій досягається максимум (1). Отже, щоб знайти структуру з максимальним значенням (1) необхідно “пройтись” по всім розбиттям $N$ на доданки.

Знайти паралельно-послідовну структуру, яка складається з різнотипних елементів, тобто елементів з різними значеннями $q_{\text{о}}$ і $q_{\text{кз}}$ – достатньо не просто. Ця задача у порядки (!) разів складніша аналогічної задачі для однотипного резервування, і зрозуміло чому. Якщо кількість можливих реалізацій паралельно-послідовної системи з $N$ однотипних елементів визначається лише кількістю розбиттів числа $N$ на доданки, (хоча і це число зростає в експоненційній залежності від $N$), то у випадку різнотипних елементів для кожної структури існує значна кількість різних конфігурацій системи, утворених перестановками елементів різних типів в ланцюжках.

Розглянемо паралельно-послідовну систему з різнотипних елементів. Нехай кількість паралельних ланцюжків – $r$, а $m$ – кількість типів елементів. Охарактеризуємо $j$-й $(j = \overline{1,m})$ тип елементів наступними величинами: $M_j$ – кількість елементів даного типу, $Q_{\text{кз}_j}$ – ймовірність відмови типу "коротке замикання", $Q_{\text{о}_j}$ – ймовірність відмови типу "обрив", $S_{ij}$ – кількість в $i$-му $\left(i = \overline{1,r}\right)$ ланцюжку елементів типу $j$. Тоді надійність системи можемо обчислити так:

$$P = \prod_{i=1}^{r}(1 - \prod_{j=1}^{m}((\left(Q_{\text{кз}_j}\right)^{S_{ij}}) - \prod_{i=1}^{r}(1 - \prod_{j=1}^{m}((1 - Q_{\text{о}_j})^{S_{ij}}) \qquad (2)$$

**Приклад обрахунку надійності паралельно-послідовної системи конкретної конфігурації (рис.3).**

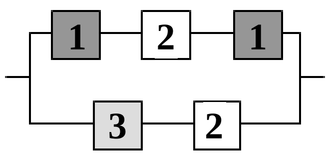

Рис.3. Приклад конфігурації системи з різнотипними елементами

$r = 2;\ \ m = 3;\ \ M_1 = 2, M_2 = 2, M_3 = 1;$

$s_{11} = 2, s_{12} = 1, s_{13} = 0, s_{21} = 0, s_{22} = 1, s_{23} = 1.$

$$P = \prod_{i=1}^{2}(1 - \prod_{j=1}^{3}\left(\left(Q_{\text{кз}_j}\right)^{S_{ij}}\right) - \prod_{i=1}^{2}(1 - \prod_{j=1}^{3}((1 - Q_{\text{о}_j})^{S_{ij}}) =$$

$$= \left(1 - \left(\left(Q_{\text{кз}_1}\right)^2 \cdot Q_{\text{кз}_2}\right)\right) \cdot \left(1 - \left(Q_{\text{кз}_2} \cdot Q_{\text{кз}_3}\right)\right) -$$

$$-(1 - \left(\left(1 - Q_{\text{о}_1}\right)^2 \cdot (1 - Q_{\text{о}_2})\right)) \cdot (1 - \left(\left(1 - Q_{\text{о}_2}\right) \cdot (1 - Q_{\text{о}_3}\right))$$

Нехай $Q_{\text{кз}_1} = 0{,}11;\ Q_{\text{кз}_2} = 0{,}09;\ Q_{\text{кз}_3} = 0{,}12;\ Q_{\text{о}_1} = 0{,}15;\ Q_{\text{о}_2} = 0{,}08;\ Q_{\text{о}_3} = 0{,}07$, тоді

$$P = (1 - (0{,}11)^2 \cdot 0{,}09) \cdot (1 - 0{,}09 \cdot 0{,}12) -$$

$$-\big(1 - (1 - 0{,}15)^2 \cdot (1 - 0{,}08)\big) \cdot \big(1 - (1 - 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}07)\big) =$$

$$= (1 - 0{,}0011) \cdot (1 - 0{,}011) - (1 - 0{,}665) \cdot (1 - 0{,}791) = 0{,}988 - 0{,}07 = 0{,}918.$$

Не всі перестановки різнотипних елементів в ланцюжках структури призводять до зміни конфігурації. Беручи до уваги формулу (2), складовими частинами якої з арифметичної точки зору є різного виду добутки (а як відомо, від перестановки множників добуток не змінюється), не важко визначити дії, які призводять до утворення еквівалентних конфігурацій. Конфігурації є еквівалентими, якщо вони:

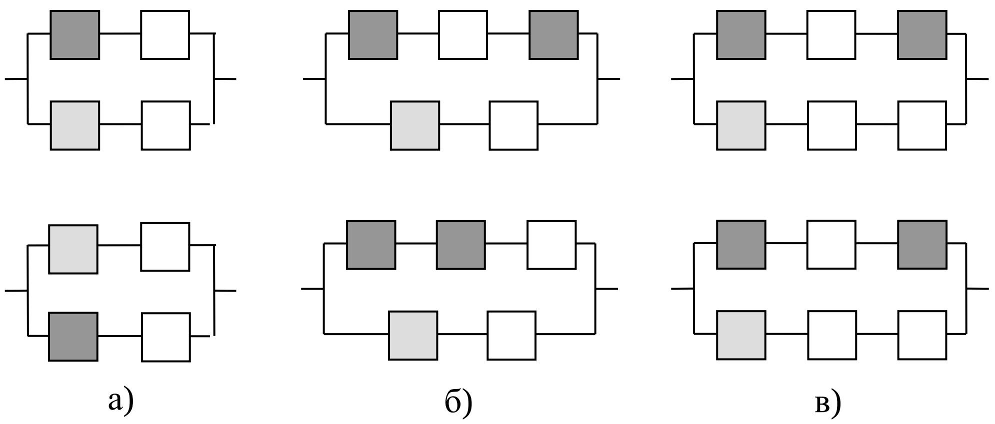


Рис. 4. Пари еквівалентних конфігурацій

- утворюються перестановкою ланцюжків без зміни кількості та складу різнотипних елементів в ланцюжках (рис. 4.а);

- будуються за рахунок перестановки елементів різного типу в ланцюжку структури без зміни їх кількості та складу (рис. 4.б);

- утворюються перестановкою однотипних елементів (рис. 4.в)

Тепер проілюструємо всі можливі конфігурації паралельно-послідовної структури, що складається з 9 елементів (рис. 5), які розміщені у трьох ланцюжках по три елементи в кожному. На рис. 5 представлені всі можливі конфігурації такої структури, в якій присутні елементи трьох типів: п’ять – першого типу, і по два – другого та третього типів. Як бачимо таких конфігурацій 7. Проте, як би всі 9 елементів були різного типу, то кількість всіх можливих конфігурацій структури, що розглядається, зросла б до 280 (!).

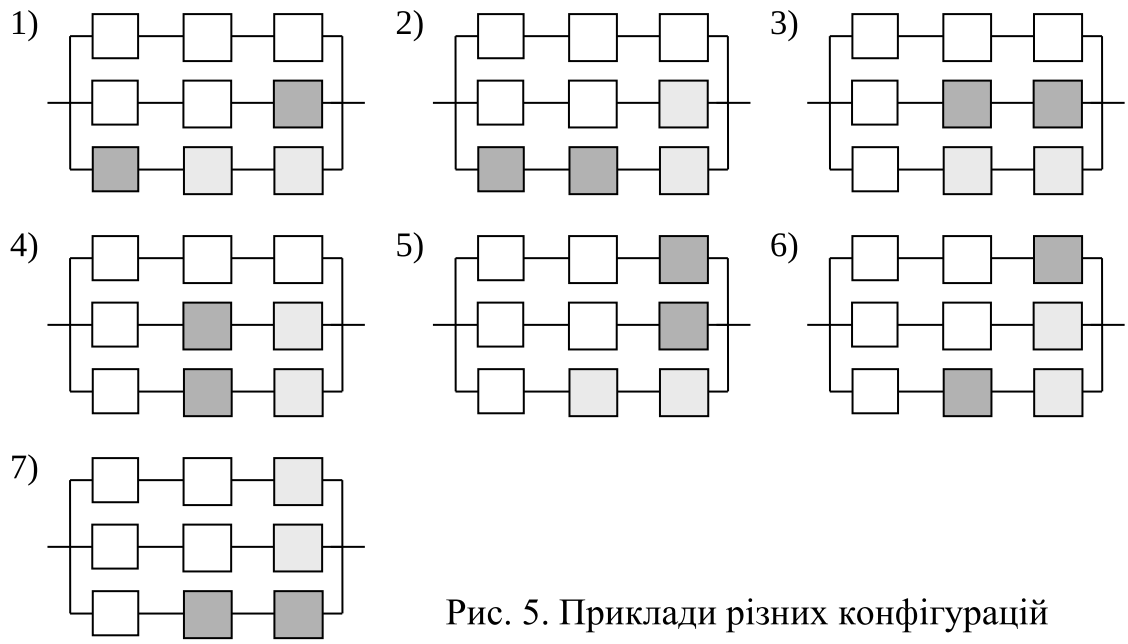


Рис. 5. Приклади різних конфігурацій

**ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ 7.**

Для заданої структури паралельно-послідовної системи знайти конфігурацію з максимальною надійністю.

**Технічні вимоги.**

*Вхід*.

Текстовий файл. Перший рядок – *структура системи* – через пропуски значення $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}$, $(\boldsymbol{k_1} < \boldsymbol{k_2} < \boldsymbol{k_3};\ \boldsymbol{k_1} > \mathbf{1};\ \boldsymbol{k_3} < \mathbf{7})$.

Другий рядок – *кількість* $\boldsymbol{K}$ всіх різнотипних елементів, з яких можна утворювати задану структуру $\boldsymbol{N} \leq \boldsymbol{K} \leq \mathbf{12},\ (\boldsymbol{N} = \boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} + \boldsymbol{k_3})$.

Наступні $\boldsymbol{K}$ рядків (у кожному) через пропуски – номер типу елемента, та значення $\boldsymbol{Q}_{\text{кз}_j}$ і $\boldsymbol{Q}_{\text{о}_j}$, $(\boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{K}})$. Кожний тип $\boldsymbol{j}$ представлений тільки одним(!) елементом (тобто $\boldsymbol{M_j} = \mathbf{1},\ \boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{K}}$).

*Вихід*.

Вивести на екран та у текстовий файл:

- задану структуру;
- кількість різнотипних елементів;
- кількість різних конфігурацій для заданої структури та кількості елементів;
- обчислену максимальну надійність;
- конфігурацію, на якій ця надійність досягається.

**<u>Приклад.</u>** Розглядається структура на рис. 6. Отже, $\boldsymbol{k_1 = 2}$, $\boldsymbol{k_2 = 3}$, $\boldsymbol{k_3 = 4}$, $\boldsymbol{N = 9}$. Нехай у нас є $\boldsymbol{K}$**=11** різнотипних елементів. Це означає, що у вхідному файлі, починаючи з 3-го рядка буде розміщена інформація про номери типів $\boldsymbol{j}$ елементів та ймовірності відмов $\boldsymbol{Q}_{\text{кз}_j}$ і $\boldsymbol{Q}_{\text{о}_j}$, і таких рядків буде 11. Таким чином, вхідний файл може мати такий вигляд:

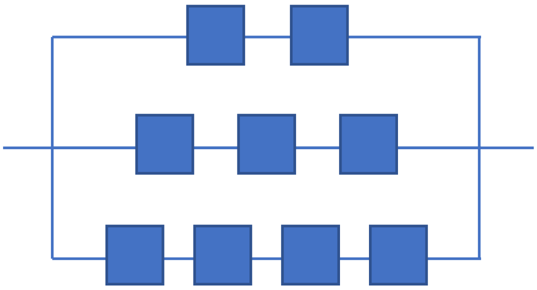

Рис. 6. Приклад структури

```
2 3 4
11
1 0.09 0.11
2 0.12 0.14
3 0.1 0.05
4 0.06 0.09
5 0.09 0.12
6 0.09 0.11
7 0.11 0.12
8 0.08 0.08
9 0.09 0.09
10 0.12 0.03
11 0.1 0.1
```

**Отриманий результат для заданого вхідного файлу:**

```
Задана структура:                  2 3 4
Кількість різнотипних елементів:   11
Кількість різних конфігурацій:     69300
Максимальна надійність:            0.98425869
досягнута на конфігурації:

4 8
3 9 10
1 5 6 11
```