Tarea 6: Experimentos con el algoritmo aproximado de contracción para el corte mínimo

María Gabriela Sandoval Esquivel

Mayo 2018

1 Introducción

El algoritmo aproximado de contracción para corte mínimo fue presentado por David R. Krager en 1996 [1]. Su desarrollo se enfoca en el problema de corte mínimo general en el que se busca encontrar el mínimo corte que divida a un grafo conectado a la mitad (o alternativamente en r sub-partes). El algoritmo consiste en un proceso iterativo en el cual, en cada corrida, se contrae sucesivamente el grafo hasta que queda reducido a un simple grafo con dos nodos y una arista entre ellos que representa una cota superior al corte mínimo. El proceso culmina cuando se encuentra la mínima de estas cotas. El proceso de contracción sucesiva del grafo consiste en elegir dos nodos al azar, que estén conectados, para contraerlos en un solo nodo que tiene como vecinos a la unión de los vecinos de los nodos que los forman. La sustentación de la efectividad de este algoritmo se basa en el hecho de que el corte mínimo regularmente está formado por relativamente pocos nodos del grafo y por lo tanto la probabilidad de elegir una arista que forme parte del corte mínimo es baja.
En esta tarea se presenta una adaptación de este algoritmo para el problema de corte mínimo s-t. Este problema se diferencia del general en el sentido en el que se tienen dos nodos s y t que necesitan quedar separados en el corte. Este problema tiene cierta dualidad con el problema de flujo máximo s-t que se resuelve con el algoritmo de Floyd-Fulkerson que se desarrolló en tareas pasadas. En este reporte se presenta la adaptación del algoritmo de Krager para este problema y pruebas que comparan la efectividad de este método de aproximación con el algoritmo de Floyd-Fulkerson que se programó en tareas pasadas.

2 Programación de funciones

Para esta tarea se programó una función para realizar la contracción sucesiva de un grafo dado de tal modo que dos nodos dados quedaran en partes separadas y que devolviera el valor del corte resultante. Tal función elegía al azar dos nodos del grafo y los contraía, formando un nuevo nodo que tenía como vecinos a la unión de vecinos de los nodos que lo formaban. La arista entre dos nodos

Table 1: Comparación del desempeño de los algoritmos (FF: Floyd Fulkerson, A: Adaptación del algoritmo de contracción.

Instancia (k,l)	Diferencia de Tiempo ((A-FF)/A)	Gap de corte mínimo (A-FF
(10,1)	39.062	0
(10,2)	31.336	0
(10,3)	12.068	0
(20,1)	1.682	0
(20,2)	1.291	0
(30,1)	2.917	0
(30,2)	37.58	0
(40,1)	103.25	2.667
(40,2)	28.678	34.14286

contraídos se eliminaba de la lista de aristas y el nuevo nodo tenía como nombre la unión de los nombres de los nodos que lo formaban. Para que dos nodos se pudieran contraer era importante verificar que no se unieran los nodos que se especificaron en un principio. Para esto, se agregó un atributo a los nodos que representaban su estatus, es decir si un nodo contenía a alguno de los nodos especificado o no. Este atributo tenía como valor inicial de cero para todos los nodos del grafo original, excepto los nodos s y t que tenían valores de 2 y 3 específicamente. Para verificar si dos nodos podían contraerse se calculaba la diferencia entre sus valores de estatus, solo si ésta era diferente a 1 los nodos podían contraerse. Una vez contraídos, el nuevo nodo heredaba el estatus de mayor valor de los nodos que lo formaron.
El algoritmo hace uso de esta función para el número de iteraciones especificado y guarda la mejor cota superior para el corte mínimo s-t en cada iteración.

3 Pruebas experimentales

A continuación, se presentan gráficas que muestran el proceso para encontrar la cota superior para el corte mínimo s-t con el algoritmo que se desarrolló. El tipo de grafos que se usaron para esta tarea son los mismos que se usaron en la tarea anterior. Son grafos formados por un enrejado de nodos de kxk en el que todos los nodos a una distancia manhattan de al menos l están conectados y existen conexiones a larga distancia con una probabilidad de $p = 0.001$. La solución óptima obtenida se muestra con la línea negra en cada gráfica.

4 Conclusiones

Las gráficas muetran que el proceso iterativo sí hace que las cota superiores convergan al corte mínimo que se obtiene con la solución obtenida por el algoritmo de Floyd Fulkerson. Sin embargo, la tabla 1 muestra que el algoritmo siempre es

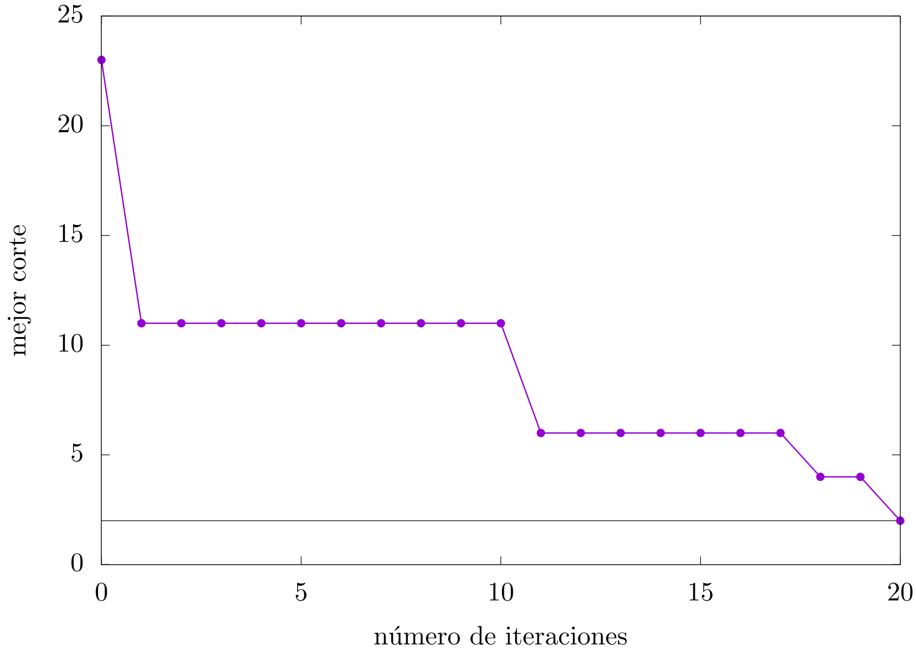

Figura 1: Resultados para k = 10, l = 1

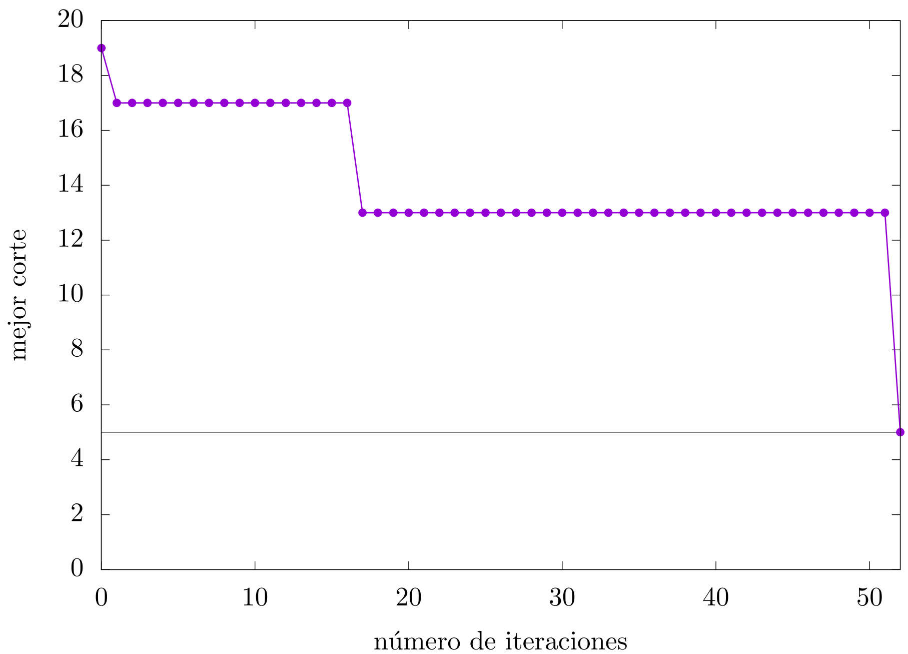

Figura 2: Resultados para k = 10, l = 2

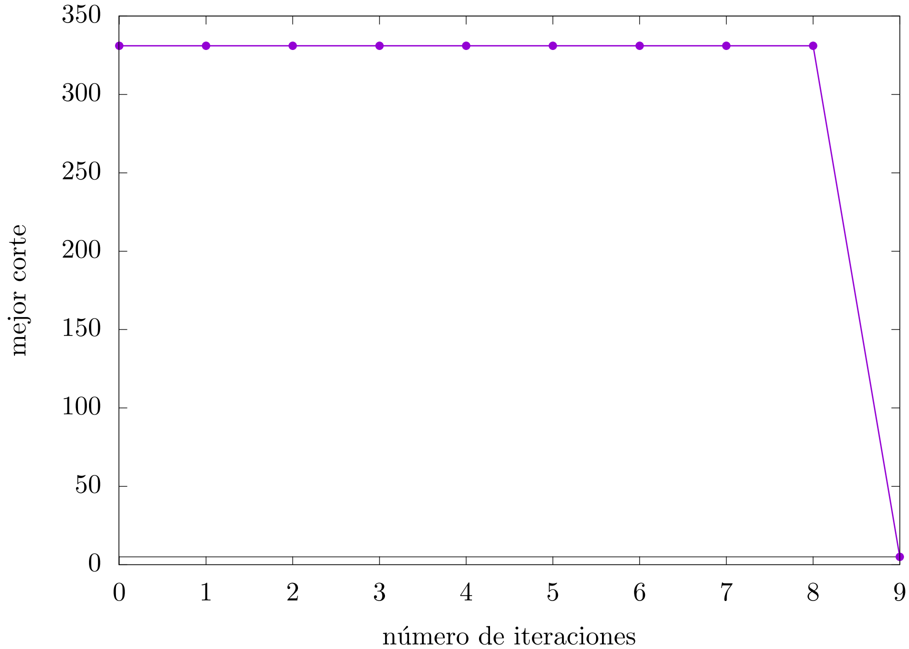

Figura 3: Resultados para k = 20, l = 2

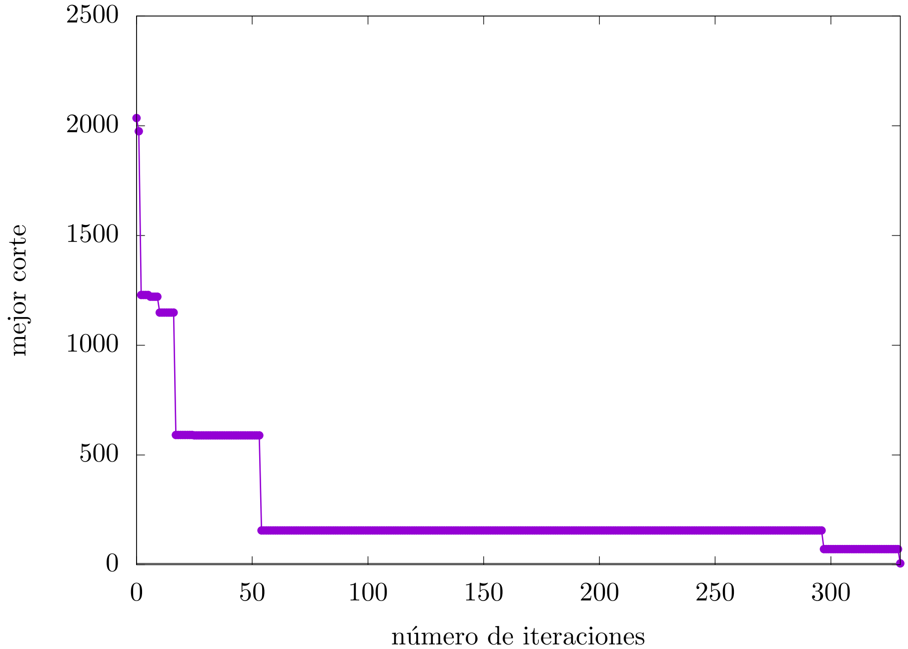

Figura 4: Resultados para k = 30, l = 2

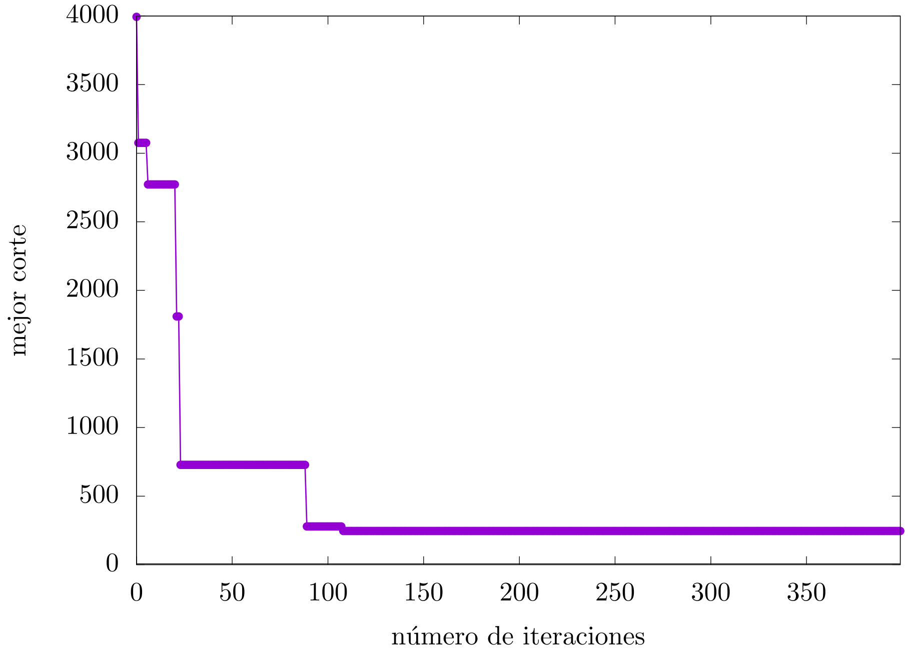

Figura 5: Resultados para k = 40, l = 2

más tardado que el Ford-Fulkerson lo que en estos casos descarta su eficiencia.

References

[1] David R Karger and Clifford Stein. A new approach to the minimum cut problem. *Journal of the ACM (JACM)*, 43(4):601–640, 1996.