Tarea 4: Experimentos con el algoritmo de Floyd-Warshall

María Gabriela Sandoval Esquivel

Abril 2018

1 Introducción

El algoritmo de Floyd-Warshall que se desarrolló en la tarea anterior da como resultado una matriz con las distancias entre todo par de nodos dentro de un grafo [1]. Este resultado es útil para calcular una propiedad estructural de los grafos: la distancia promedio d. La distancia promedio se obtiene sumando todos los elementos de la matriz de Floyd-Warshall y dividiendo el resultado por el número de nodos al cuadrado.

Otra propiedad estructural de los grafos es el coeficiente de agrupamiento. Éste se define para cada nodo del grafo midiendo la densidad del grafo inducido por su vecindad. En este sentido, el coeficiente de agrupamiento define qué tan crucial es cada nodo para mantener conectados a los nodos en su vecindad. En contraste con la distancia promedio, que es una medida global del grafo, el coeficiente de agrupamiento define una propiedad local.

Estas dos propiedades varían conforme incrementa la probabilidad de que un par de nodos se conecte dentro de un grafo. En este reporte se incluyen algunos ejemplos que ilustran esta variación para diferentes tipos de grafos. Estas medidas son útiles en la práctica para analizar características de mundo pequeño (*small-world*) en redes como por ejemplo para evaluar índices de infección de algún virus [2].

En esta tarea se programaron funciones para construir grafos circulares con ciertas propiedades de conectividad y para calcular las medidas de distancia promedio y coeficiente de agrupamiento. Se hicieron pruebas para evaluar los resultados de estas dos medidas conforme incrementaba la probabilidad de conectar cada par de nodos en el grafo. Así mismo se hicieron más pruebas del desempeño del algoritmo de Floyd-Warshall, en cuanto a su complejidad computacional, con los grafos circulares donde cada nodo tiene al menos dos vecinos.

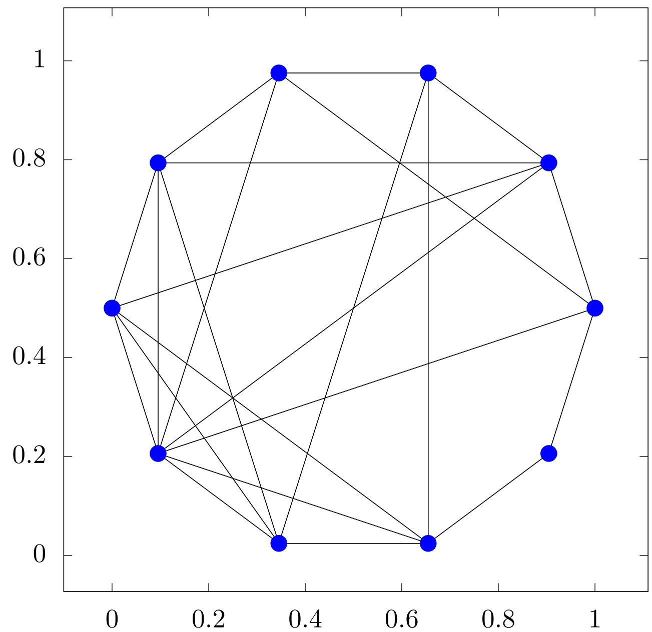

Figura 1: Ejemplo de grafo circular con 10 nodos.

2 Programación de funciones

Primero se creó una función para generar grafos circulares donde se especifica el mínimo número de vecinos que tiene cada nodo k y la probabilidad de generar vecinos adicionales p. Para esta función los nodos se posicionen equitativamente espaciados en un círculo unitario. Después se conecta cada nodo con sus k vecinos más cercanos y para el resto de las parejas de nodos se decide si se conectan de acuerdo con la probabilidad de p. En la figura 1 se ilustra un grafo de este tipo con 10 nodos, un k igual a uno y una probabilidad p igual a 2^{-2}.

Para la función que calcula la distancia promedio simplemente se suman todos los elementos de la matriz de Floyd-Warshall y se divide el resultado por el número de nodos al cuadrado. Por otro lado, para la función del coeficiente de agrupamiento se calcula para cada nodo la densidad del grafo inducido por su vecindad. La densidad del sub-grafo se calcula dividiendo el número de aristas del grafo entre el máximo número de aristas posibles.

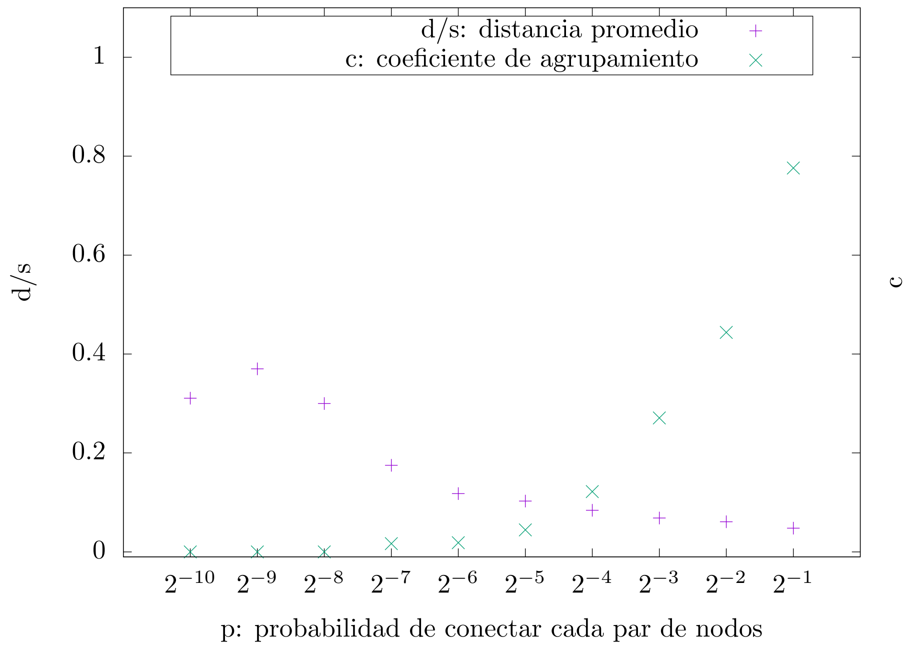

Figura 2: Resultados para k = 1

3 Pruebas experimentales

A continuación, se presentan gráficas que muestran el comportamiento de las propiedades estructurales conforme crece la probabilidad de conectar cada par de nodos en escala logarítmica. Estas pruebas se hacen en grafos circulares de 50 nodos generados aleatoriamente variando p y k. En estas gráficas el coeficiente de agrupamiento ya tiene un rango entre cero y uno, pero para normalizar la distancia promedio se calcula la distancia máxima posible en un grafo de esas características. La distancia máxima se define por la siguiente fórmula:

$$(n/2)/k$$

Esta fórmula se deriva se deriva del razonamiento de que, si en un grafo los nodos se conectan con sus k nodos más cercanos, los nodos más alejados se encuentran opuestos en el círculo y así se obtiene el camino más corto entre ellos.

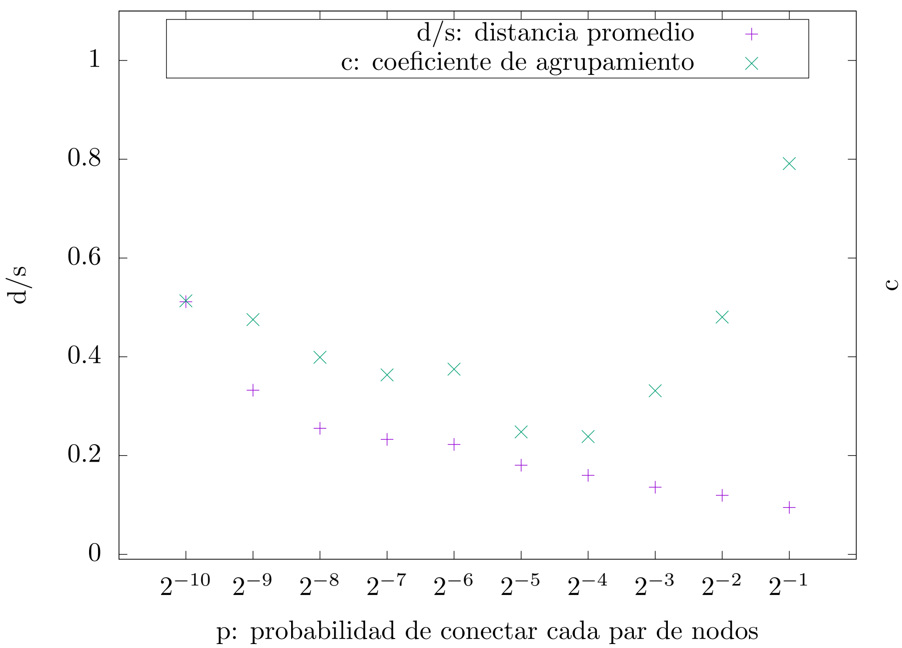

Figura 3: Resultados para k = 2

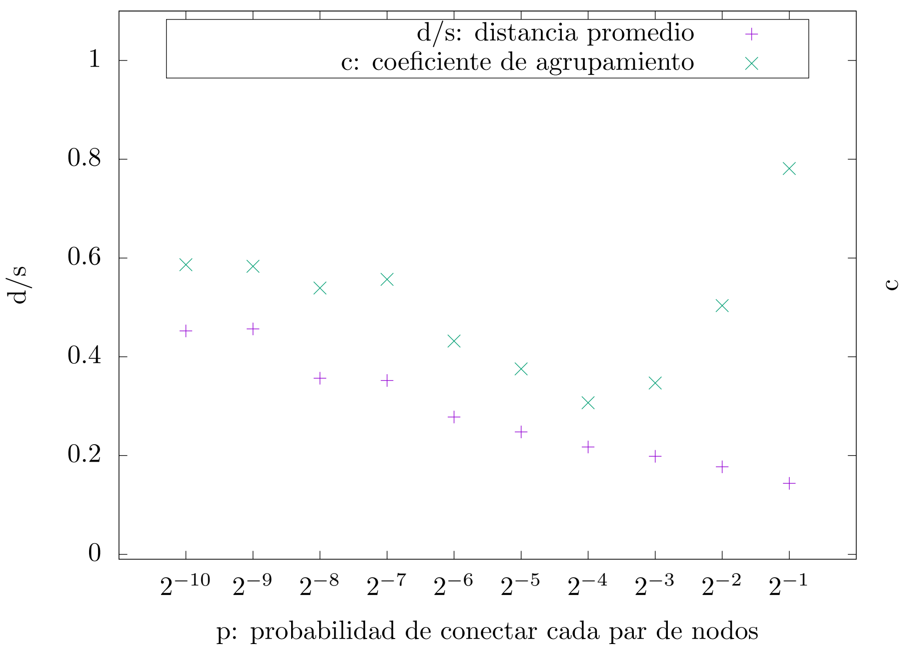

Figura 4: Resultados para k = 3

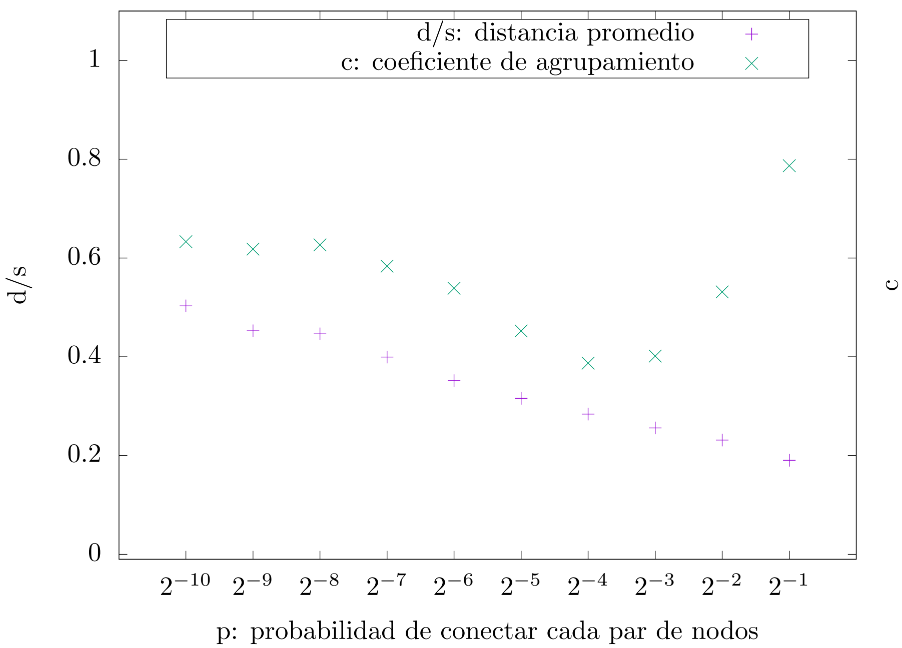

Figura 5: Resultados para k = 4

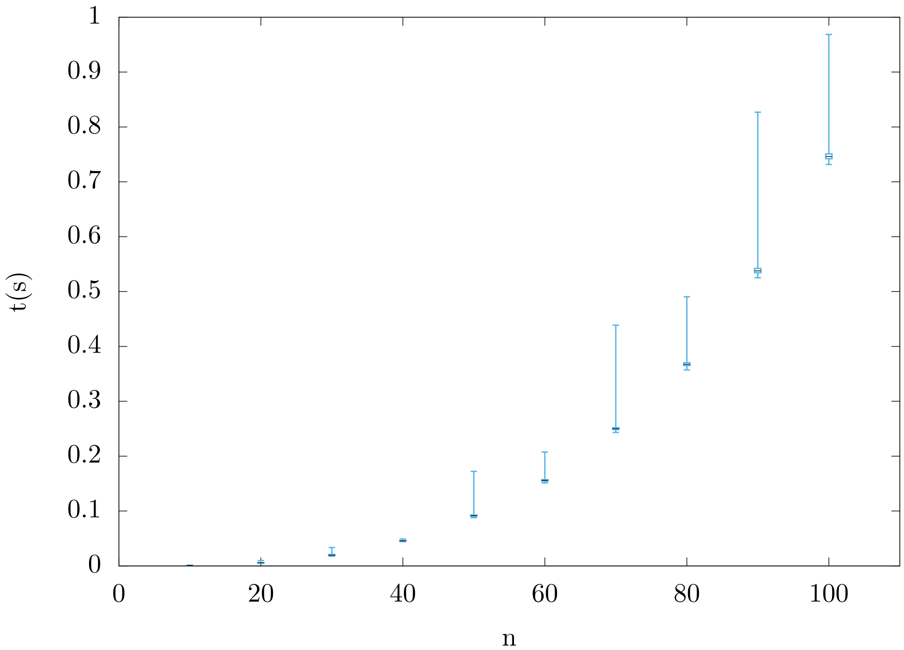

Figura 6: Resultados del Algoritmo de Floyd-Warshall

La gráfica en la figura 6 las pruebas de la complejidad computacional del algoritmo de Floyd-Warshall con este tipo de grafos. Estas pruebas se hicieron con 300 muestras de grafos aleatorios para cada tamaño de grafo. Los grafos que se generaron tienen un $k = 2$, es decir que cada nodo del mismo tiene al menos dos vecinos y el resto de los pares de nodos se conectan con una probabilidad de 2^{-2}.

4 Conclusiones

Las gráficas que comparan a las propiedades estructurales muestran que conforme aumenta la probabilidad de conexión la distancia promedio siempre se reduce progresivamente, mientras que el coeficiente de agrupamiento en general tiende a bajar para valores pequeños de p pero finalmente crece de manera casi exponencial. Por otro lado, los resultados de la complejidad computacional del algoritmo de Floyd-Warshall muestran un crecimiento consistente y progresivamente más variable conforme aumenta el número de nodos en el grafo.

References

[1] Robert W Floyd. Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6):345, 1962.

[2] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of 'small-world'networks. *nature*, 393(6684):440, 1998.