Билет 19. Решение внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Формула Пуассона

Задача Дирихле в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(r,\varphi)|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

Или в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ u|_{r=a} = f(\varphi), 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq r \leq a \end{cases}$$

Решение:

Метод разделения переменных: $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ Подставим в задачу Дирихле в полярных координатах:

$$\frac{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const \tag{1}$$

Получим:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \lambda R(r) = 0 \tag{2}$$

Уравнение Эйлера:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{3}$$

Частное решение в виде $R = r^m, m = const$.

$$r^2(m-1)mr^{m-2} + rmr^{m-1} - \lambda r^m = 0$$
$$m = \pm\lambda^2(\lambda > 0) \text{ или } \lambda = 0$$

Если $\lambda = 0$, то $R(r) = C_0 \ln r + C_1$. Решение должно быть ограничено в центре круга при $r = 0$, поэтому из двух найденных решений берем $r^{\lambda^2} = r^n$ и $u(r,\varphi)$ должна быть непрерывной и конечной в круге.

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$
$$\Phi(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

Все частные решения: $u_n(r,\varphi) = r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), n = 0, 1...$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \tag{4}$$

Найдем A_n и B_n разложение $f(\varphi)$ в $(0, 2\pi)$ в ряде Фурье.

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{5}$$

$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi$, $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi, \quad n = 0, 1..$

$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi, \quad n = 0, 1..$

Тогда получаем: $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{6}$$

Подставим выражение для коэффициентов Фурье в формулу (6), тогда получим:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\cos n\varphi \cos n\alpha + \sin n\varphi \sin n\alpha)\right) d\alpha = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\cos n(\varphi - \alpha)\right) d\alpha$$

$$\left\{\cos n(\varphi-\alpha)=\frac{e^{in(\varphi-\alpha}+e^{-in(\varphi-\alpha}}{2}, q=\frac{r}{a}<1\right\}=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(qe^{i(\varphi-\alpha)}\right)^n+\left(qe^{-i(\varphi-\alpha)}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}}+\frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}}\right)=\frac{1}{2}\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\varphi-\alpha)+q^2}=\frac{1}{2}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\alpha)+r^2}$$

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)(a^2-r^2)}{a^2-2ar\cos(\varphi-\alpha)+r^2}\,d\alpha,\quad (r<a) \tag{7}$$

1 Теормин. Теоремы единственности и устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебания

Задача Коши для однородного уравнения колебаний: $-\infty<x<\infty$, $t>0$.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

Теорема. Пусть $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на бесконечной прямой. Тогда решение задачи Коши существует, единственно и определяется формулой Даламбера:
$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha$.

Теорема. Пусть начальные функции $\varphi_s(x)$ и $\psi_s(x)$ $(s=1,2)$ двух задач Коши, удовлетворяют условиям : $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\le\epsilon$, $x\in(-\infty;\infty)$ и $\int\limits_a^b|\psi_1(z)-\psi_2(z)|\,dz\le\epsilon^2(b-a)^2$, тогда выполняется для решений этих задач с $t\in[0,T]$ $|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\le\epsilon(1+T)$ (устойчивость).