

1 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с нулевым краевым условием первого рода.

При распределении температуры влияние одного из концов стержня несущественно, можно им пренебречь. Рассмотрим первую краевую задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \varphi(0) = 0 \quad (1)$$

Доопределим нечетным образом $\varphi(x)$:

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x), & -\infty < x < +\infty \\ U(0, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Известно:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds - \text{интеграл Пуассона} \quad (4)$$

Покажем, что $u(x, t) = U(x, t)$ при $x \geq 0$, является решением (1). Проверим выполнение граничного условия:

$$u(0, t) = U(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds = \begin{cases} \text{под интегралом произведение} \\ \text{четной и нечетной функций} \\ = \text{нечетной функции} \end{cases} = 0 \quad (5)$$

Получим формулу для решения:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(\int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} - \varphi(-s) ds + \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(- \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds + \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) - \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) \right] * \varphi(s) ds \end{aligned} \quad (6)$$

В итоге, с учетом (5) и (6), имеем:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (7)$$

Значит $u(x, t)$ - есть **решение первой краевой задачи на полупрямой**.

2 Задача Гурса. Сведение к эквивалентной системе интегральных уравнений.

Классическое уравнение в частных производных 2-го порядка:

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1)$$

Поставим ему в однозначное соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (2)$$

Тогда функции (кривые), являющиеся решением (2), называются **характеристиками уравнения** (1).

Рассмотрим задачу с нелинейным уравнением гиперболического типа:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xy}(x, y) = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + f(x, y, u(x, y)), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l_1 \\ u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq l_2 \end{array} \right. \quad \text{- задача Гурса} \quad (3)$$

Для первого уравнения (3) характеристиками будут функции удовлетворяющие: $dx dy = 0$.

Получим семейство прямых вида: $x = const, y = const$.

Таким образом, наша $u(x, y)$ задается данными на характеристиках $x = 0, y = 0$.

Эквивалентная система интегральных уравнений

Пусть функция $u(x, y)$ — решение задачи Гурса (3). Тогда, интегрируя уравнение сначала по y , потом по x :

$$u(x, y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(0) + \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)u_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u_y(\xi, \eta)] \, d\eta d\xi + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) \, d\eta d\xi. \quad (4)$$

$$u_x(x, y) = \varphi'(x) + \int_0^y [a(x, \eta)u_x(x, \eta) + b(x, \eta)u_y(x, \eta)] \, d\eta + \int_0^y f(x, \eta, u(x, \eta)) \, d\eta. \quad (5)$$

$$u_y(x, y) = \psi'(y) + \int_0^x [a(\xi, y)u_x(\xi, y) + b(\xi, y)u_y(\xi, y)] \, d\xi + \int_0^x f(\xi, y, u(\xi, y)) \, d\xi. \quad (6)$$

Получим (4), (5) и (6) - система эквивалентных интегральных уравнений задаче (3).