Corto 1 - Modelacion y Simulacion

Marco Jurado 20308
Cristian Aguirre 20231

In [ ]:
```
# imports
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import poisson
```

Parte 1

Tasks 1

Suponga que usted está trabajando en la industria relacionada con meteorología, por lo cual le interesa saber la probabilidad de que haya N huracanes este año. Se sabe que la frecuencia histórica de huracanes es 7 por año, en otras palabras, el número promedio de huracanes por año es de 7.

1. ¿Es este un escenario que se pueda modelar como una variable aleatoria de Poisson? ¿Por qué?

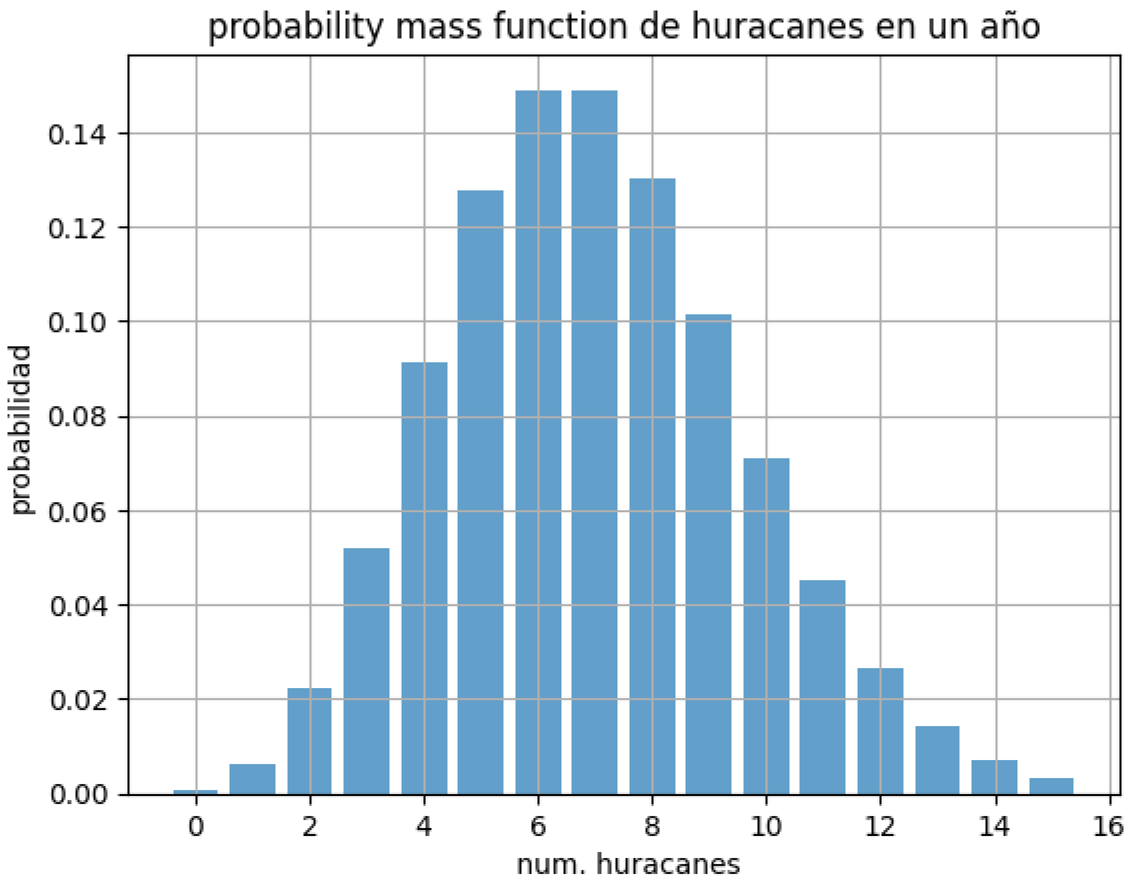
   En el caso de evaluar los huracanes al año podemos pensar en poner la variable de la cantidad de huracanes o la ocurrencia del evento que un huracan suceda como la varuable aleatoria de Poisson. Esto tambien permite darle el valor lambda o valor promedio a esta variable de 7 al año.

2. Considere que usted analizará hasta un máximo de 16 huracanes este año. Grafique PMF (probability mass function) de estos eventos

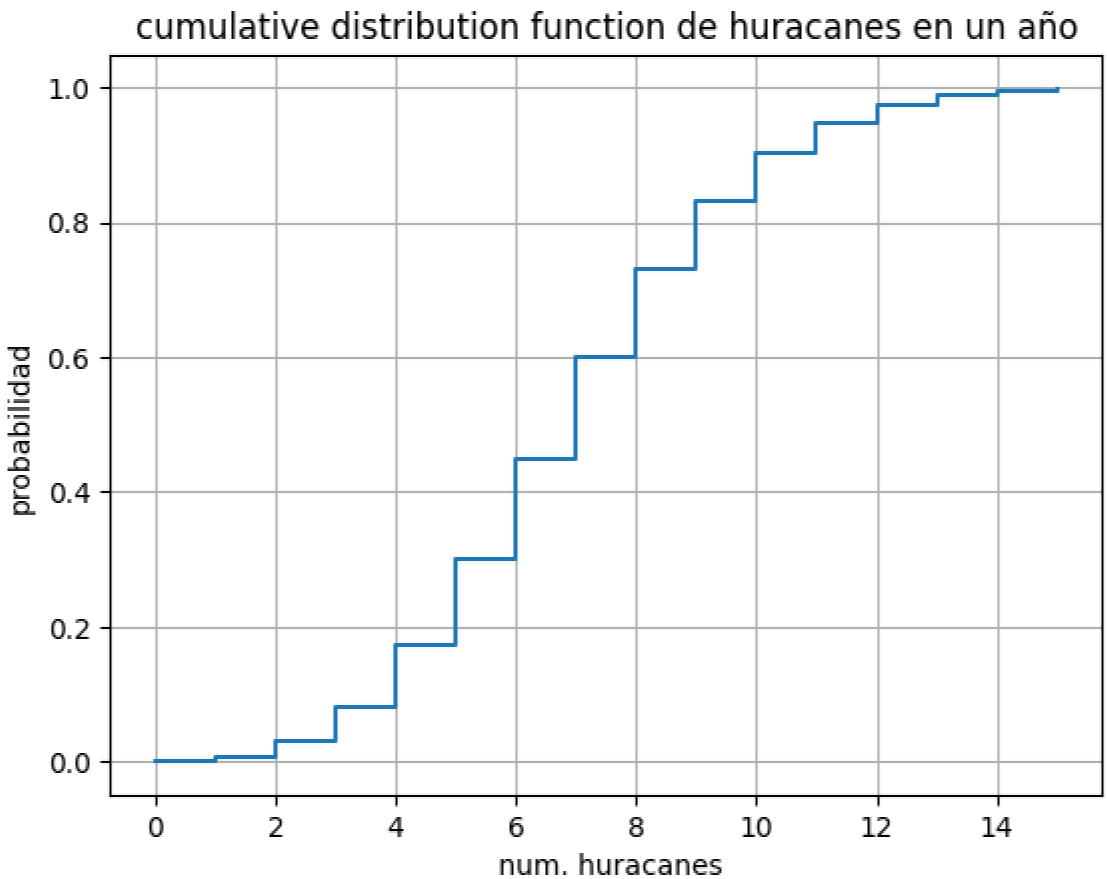
3. Considere que usted analizará hasta un máximo de 16 huracanes este año. Grafique CDF (cumulative distribution function) de estos eventos

In [ ]:
```
# pregunta 2
resultados = [i for i in range(16)] # 16 huracanes

# poisson
pmf = poisson.pmf(resultados, 7)

# grafico
plt.bar(resultados, pmf,alpha=0.7)
plt.xlabel(' num. huracanes')
```

```
plt.ylabel('probabilidad')
plt.title('probability mass function de huracanes en un año')
plt.grid(True)
plt.show()
```



In [ ]:
```
# pregunta 3
resultados = [i for i in range(16)] # 16 huracanes

# poisson
cdf = poisson.cdf(resultados, 7)

# Graficar la CDF
plt.step(resultados, cdf, where='post')
plt.xlabel(' num. huracanes')
plt.ylabel('probabilidad')
plt.title('cumulative distribution function de huracanes en un año')
plt.grid(True)
plt.show()
```



4. ¿Qué conclusiones puede sacar al observar las gráficas de los ejercicios anteriores?

   Al ver primero la gráfica de pmf se puede ver una forma de campana en el centro y esto concuerda con el valor promedio que nos dan de 7 huracanes al año. Esto tambien nos dice que al tener menos o más de este valor al año podemos ver una probabilidad constantemente menor a medida que nos vamos alejando del valor lambda.

   Luego al ver la grafica de cdf podemos ver que este va aumentando la probabilidad acumulada a medida que van comenzando a incrementarse cada vez que vamos teniendo más huracanes. Luego tenemos el salto más grande en la probabilidad justo en el valor de lambda de la distribución de poisson (7 huracanes al año) y finalmente esto va a ir incrementando cada vez más hasta llegar al valor de 15 y tener un valor 1 lo cual dice que la probabilidad acumulada de que el evento acontezca.

   Se puede concluir que la probabilidad de tener más de de 7 huracanes o menos de 7 es algo no tan probable pero posible. Sin embargo si se evaluaran más de 16 huracanes al año esto sería un evento con una probabilidad muy baja así como lo es la probabilidad de que acontezcan 0 huracanes al año.

Tasks 2

Usted es un analista de simulación encargado de modelar la llegada de clientes a una tienda minorista. Desea simular la cantidad de clientes que llegan por hora utilizando dos métodos diferentes: el método de transformación inversa y el método de rechazo.

Task 2.1

Defina la distribución de probabilidad objetivo para las llegadas de clientes en función de los datos históricos. Supongamos que ha recopilado datos y descubrió que la cantidad de clientes que llegan por hora sigue una distribución de Poisson con un promedio de 10 clientes por hora ($\lambda = 10$).

1. Implemente el método de transformación inversa para generar muestras aleatorias a partir de la distribución de Poisson.
2. Genere una muestra aleatoria de tamaño 1000 que represente el número de clientes que llegan en una hora.

Con el pseudo algoritmo investigado de: Giménez, J. (2013). Modelos y Simulación - Clase 9. Recuperado de
http://www2.famaf.unc.edu.ar/~jgimenez/Modelos_y_Simulacion/2013/clase9.pdf

Algoritmo

Si la v.a. toma un número finito de valores, el algoritmo es el siguiente:

Algorithm 1: Transformada Inversa

Generar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$;
if $U < p_0$ **then**
| $X \leftarrow x_0$ y terminar.
end
if $U < p_0 + p_1$ **then**
| $X \leftarrow x_1$ y terminar.
end
if $U < p_0 + p_1 + p_2$ **then**
| $X \leftarrow x_2$ y terminar.
end
$\vdots$

Algoritmo de la Transformada Inversa

Si $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, entonces $F(x_j) = \sum_{i=0}^{j} p_i$, y por lo tanto

$$\begin{array}{lll} X \leftarrow x_0 & \text{si} & U < p_0 = F(x_0) \\ X \leftarrow x_j & \text{si} & F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j) \end{array}$$

Se trata de hallar el intervalo $[F(x_{j-1}), F(x_j))$ donde se ubica U:

$$\boxed{U \in [F(x_{j-1}), F(x_j)) \quad \Longleftarrow \quad \text{Transformada Inversa}}$$

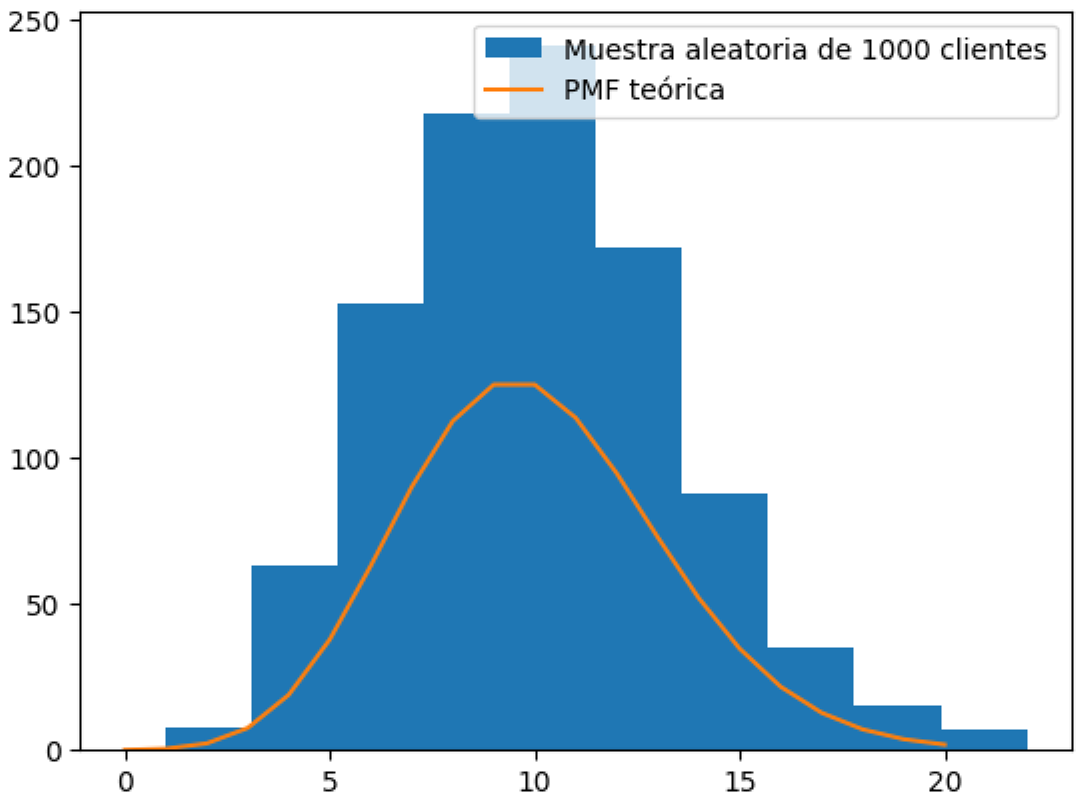
In [ ]:
```
# transformación inversa (ej1)
def ej1Inversa(elementos,temp):
    X = np.zeros(elementos)
    for j in range(elementos):
        U = np.random.uniform()
        x = 0
        s = np.exp(-temp)

        while U > s:
```

```
            x += 1
            s += np.exp(-temp) * (temp ** x) / np.math.factorial(x)

        X[j] = x

    return X
```

In [ ]:
```
# 1000 elementos con lambda 10
muestra = ej1Inversa(1000,10)
```

3. Trace un histograma de la muestra generada y compárelo con el PMF teórico de la distribución de Poisson.
4. Calcule la media y la varianza de la muestra generada y compárelas con los valores teóricos

In [ ]:
```
x = np.arange(0, 21) # mejor rango visualmente para graficar despues de probar desd
plt.hist(muestra, label="Muestra aleatoria de 1000 clientes")
pmf = poisson.pmf(x, 10) * 1000
plt.plot(x, pmf, label="PMF teórica")
plt.legend()
plt.show()
```



In [ ]:
```
media = np.mean(muestra)
varianza = np.var(muestra)

diferencia_media = 10 - media
diferencia_varianza = 10 - varianza
```

```
print(" La media obtenida en la muestra es de: ", media)
print(" La varianza obtenida en la muestra es de: ", varianza)
print("\nEsto significa que con los valores teoricos de 10 hay una diferencia en me

p_error_Media = abs(10 - media) / 10 * 100
p_error_Varianza = abs(10 - varianza) / 10 * 100

print("Porcentaje de error en la media:", p_error_Media, "%")
print("Porcentaje de error en la varianza:", p_error_Varianza, "%")
```

```
 La media obtenida en la muestra es de:  10.093
 La varianza obtenida en la muestra es de:  10.758351

Esto significa que con los valores teoricos de 10 hay una diferencia en media de -0.
09299999999999997
y una diferencia en la varianza de -0.7583509999999993


Porcentaje de error en la media: 0.9299999999999997 %
Porcentaje de error en la varianza: 7.583509999999993 %
```

Al observar los datos podemos ver que se obtuvo una varianza de 9.58 y una media de 9.83 lo cual al compararlo con los valores teoricos de 10 para esta distribución nos da una diferencia de 0.016 menos en la media y 0.41 menos en la varianza.

Esto representa un 0.16% de error en la media y un 4.19% de error en la varianza respecto al valor teorico.

Task 2.2

Defina una distribución de propuesta que sea más fácil de muestrear y que cubra el soporte de la distribución de Poisson de destino. Por ejemplo, puede elegir una distribución uniforme o geométrica.

1. Calcule la constante C para acotar la relación entre el PMF objetivo y el PMF propuesto en todo el soporte de la distribución de Poisson.
2. Implemente el método de rechazo para generar muestras aleatorias a partir de la distribución de Poisson.
3. Genere una muestra aleatoria de tamaño 1000 que represente el número de clientes que llegan en una hora utilizando el método de rechazo.
4. Trace un histograma de la muestra generada y compárelo con el PMF teórico de la distribución de Poisson.
5. Calcule la media y la varianza de la muestra generada y compárelas con los valores teóricos

In [ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import poisson
```

In [ ]:
```
lambda_v = 10
max_x = 4 * lambda_v
```

Calcular constance C

In [ ]:
```
C  = 0

for i in range(0, max_x):
    pmf = poisson.pmf(i, lambda_v)
    if pmf > C:
        C = pmf
```

In [ ]:
```
# Método de rechazo usando la distribución uniforme como propuesta
def Metodo_De_Rechazo():
    while True:
        X = np.random.randint(0, max_x)  # Generar un número aleatorio de la distri
        U = np.random.uniform(0, 1)  # Generar un número aleatorio U entre 0 y 1
        if U <= poisson.pmf(X, lambda_v) / C:
            return X
```

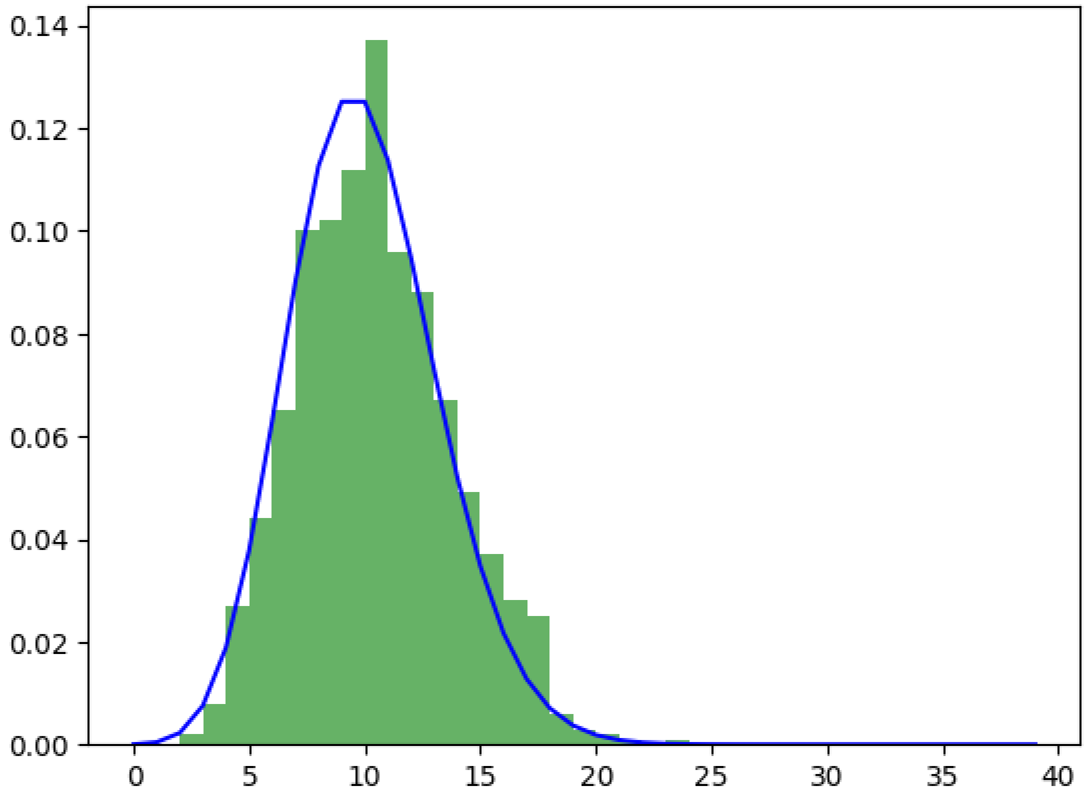
In [ ]:
```
muestras = []

for _ in range(1000):
    muestra = Metodo_De_Rechazo() # Genera una muestra utilizando la función defini
    muestras.append(muestra)
```

In [ ]:
```
media = np.mean(muestras)
varianza = np.var(muestras)
```

Generar muestra

In [ ]:
```
muestras = []

for _ in range(1000):
    muestra = Metodo_De_Rechazo() # Genera una muestra utilizando la función defini
    muestras.append(muestra)
```

In [ ]:
```
plt.hist(muestras, bins=range(0, max_x), alpha=0.6, color='g', density=True) # Aseg
k_values = np.arange(0, max_x)
plt.plot(k_values, poisson.pmf(k_values, lambda_v), 'b-', label='poisson pmf') # Ca
plt.show()
```



In [ ]:
```
# Calcular la media y la varianza de la muestra generada
print('Media de la muestra:', media)
print('Varianza de la muestra:', varianza)
```

```
Media de la muestra: 9.795
Varianza de la muestra: 9.142974999999998
```

In [ ]:
```
p_error_Media = abs(10 - media) / 10 * 100
p_error_Varianza = abs(10 - varianza) / 10 * 100

print("Porcentaje de error en la media:", p_error_Media, "%")
print("Porcentaje de error en la varianza:", p_error_Varianza, "%")
```

```
Porcentaje de error en la media: 2.0500000000000007 %
Porcentaje de error en la varianza: 8.57025000000002 %
```

Preguntas

1. Compare los resultados de los dos métodos. ¿Qué método proporciona un mejor ajuste a la distribución de Poisson objetivo?

De acuerdo con los resultados obtenidos, podemos ver que el método de transformada inversa muestra un ajuste ligeramente mejor, ya que los valores de media y varianza están más cerca de los valores teóricos. Esto tiene sentido, dado que el método de transformación inversa genera muestras directamente de la distribución de Poisson, mientras que el método de rechazo depende de una distribución uniforme que puede no ajustarse perfectamente a la distribución original.

2. Discuta las ventajas y desventajas de cada método en términos de eficiencia y precisión.

El método de transformación inversa tiene la ventaja de la exactitud, ya que genera muestras directamente de la distribución de Poisson, entonces genera valores mas acertados, sin mencionar que su implementación es relativamente sencilla. Por otra parte, una desventaja potencial de este método es su eficiencia, pues en algunos casos puede requerir cálculos adicionales.

En cuanto al método de rechazo, su mayor ventaja radica en su generalidad ya que puede ser aplicado para muestrear cualquier distribución. Además, la simplicidad de utilizar la distribución uniforme simplifica el proceso y no requiere cálculos demasiado complejos. Por otra parte la eficiencia puede ser una desventaja si la elección de la constante C no es la mejor, o si la distribución propuesta no se ajusta bien a la distribución deseada. En estos casos, pueden haber muchos rechazos, lo que resulta en un algoritmo más lento.

3. Considere diferentes escenarios, como cambiar la tasa de llegada promedio (λ) o usar diferentes distribuciones de propuestas. ¿Cómo funcionan los métodos en estos escenarios?

Transformación Inversa: Si se cambia λ, se puede afectar un poco la eficiencia del método, pero seguirá siendo exacto para la distribución de Poisson.

Método de Rechazo: Cambiar λ o usar diferentes distribuciones puede hacer que el método sea más o menos eficiente. Ya que los datos se ajustarian de distintas maneras y pueden generar varios rechazos.