Лабораторная работа №5

Модель Лотки-Вольтерры

Клюкин Михаил Александрович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Исследовать математическую модель Лотки-Вольтерры.

2 Задание

Для модели “хищник-жертва”:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -0.45x(t) + 0.046x(t)y(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = 0.47y(t) - 0.048x(t)y(t)
\end{cases}
$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также график изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 17$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории).
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

4 Выполнение лабораторной работы

Для того, чтобы построить графики нам нужно решить систему ДУ. Для этого используем язык программирования Julia и ПО OpenModelica. Затем сравним результаты.

4.1 Реализация на Julia

Решим систему ДУ, используя библиотеку `DifferentialEquations`. Построим графики с помощью библиотеки `Plots`.

```
# Подключаем библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# задания системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры
function DE(u, p, t)
    x, y = u
    a, b, c, d = p
    dx = a*x - b*x*y
    dy = -c*y + d*x*y
    return [dx, dy]
end

# Начальные условия
u0 = [7,12]
```

```
p = [-0.45, -0.046, -0.47, -0.048]
tspan = (0.0, 50.0)
problem1 = ODEProblem(DE, u0, tspan, p)
solution1 = solve(problem1, Tsit5())

# Постановка проблемы и ее решение
plot(solution1, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время",
yaxis = "Численность популяции", label = ["жертвы" "хищники"],
c = ["green" "purple"], box =:on)
```

В результате получаем графики изменения численностей хищников и жертв (рис. 4.1).

И зависимость численности хищников от численности жертв (рис. 4.2).

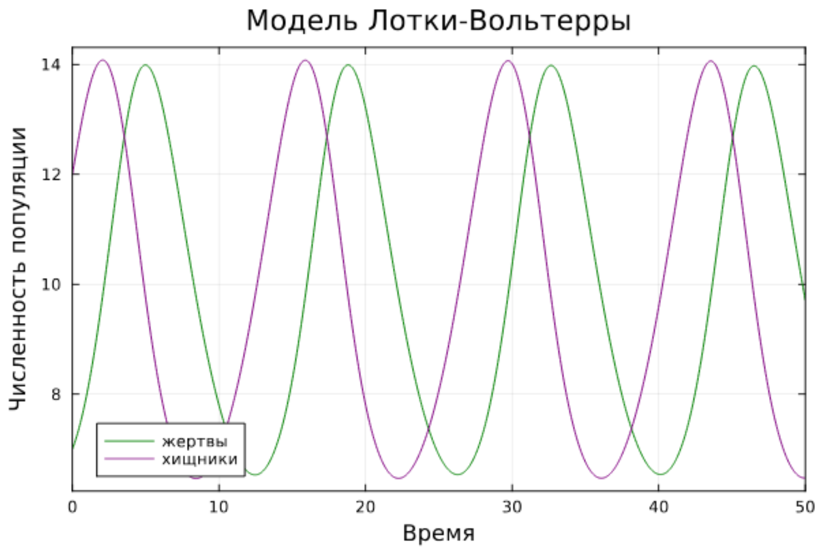

Рис. 4.1: График изменения численностей хищников и жертв

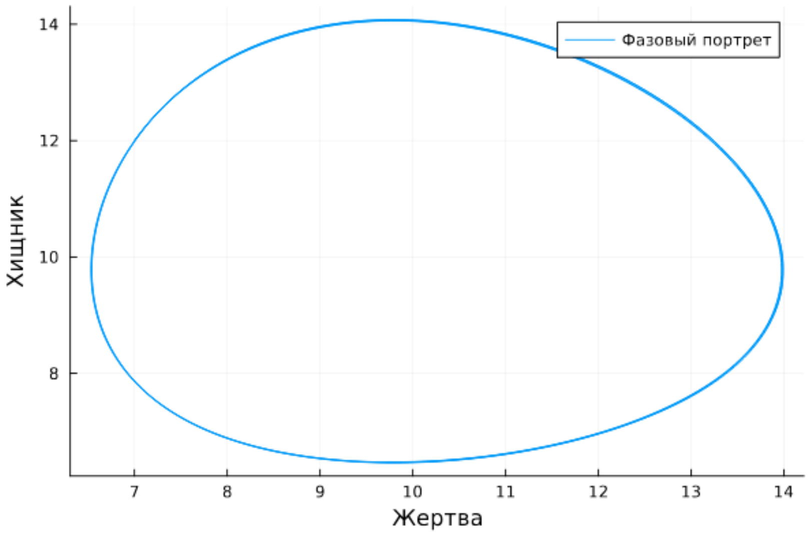

Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут. Так и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Далее найдем стационарные состояния системы по формулам:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{c}{d} \\ y_0 = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Получим, что $x_0 = 9.791$, $y_0 = 9.782$.

Проверим, что эта точка действительно является стационарной, подставив ее в начальные условия.

```
x_c = p[3]/p[4]
y_c = p[1]/p[2]


u0_c = [x_c, y_c]
problem2 = ODEProblem(DE, u0_c, tspan, p)
solution2 = solve(problem2, Tsit5())


plot(solution2, xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники", label = ["Жертвы" "Хищники"],
```

```
c = ["green" "purple"], box =:on)
```

Получим график из двух прямых, параллельных оси абсцисс. То есть численности жертв и хищников не меняются.
Так и должно быть в стационарном состоянии (рис. 4.3).

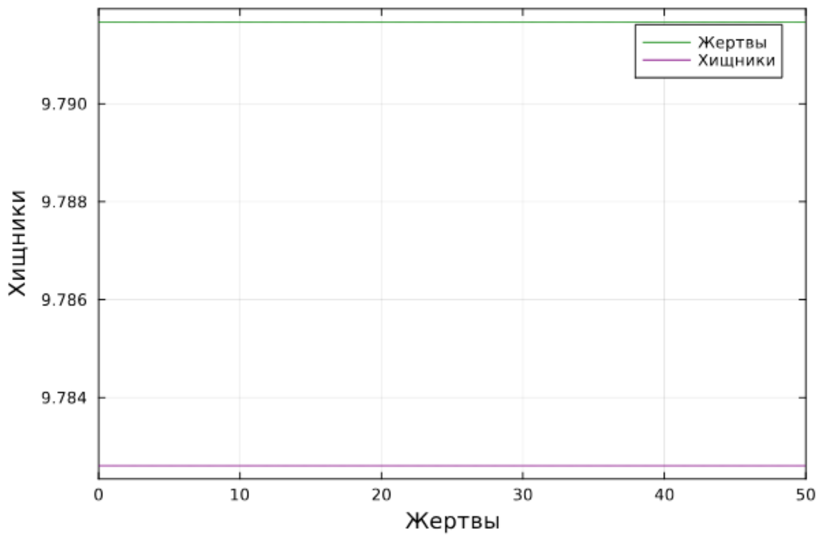

Рис. 4.3: График изменения численностей хищников и жертв в стационарном состоянии

Фазовый портрет в стационарном состоянии выглядит следующим образом (рис. 4.4).

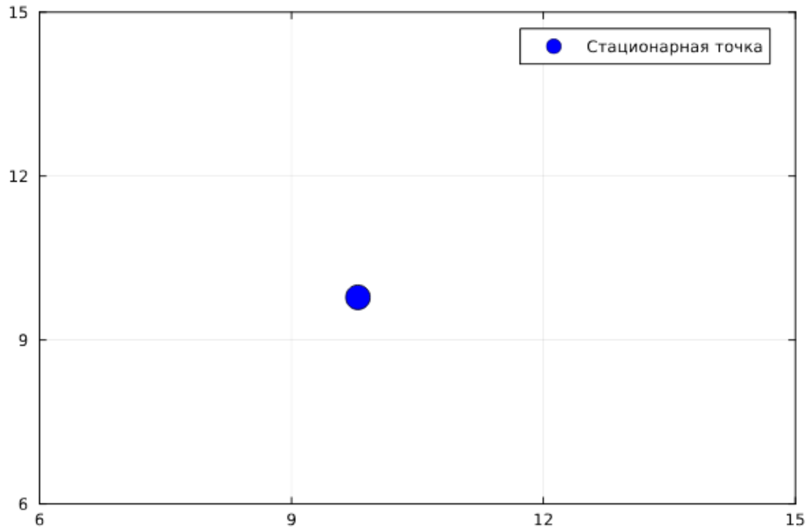

Рис. 4.4: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии

4.2 Реализация на OpenModelica

Зададим параметры и систему ДУ:

```
model mm_lab5_1
  parameter Real a = -0.45;
  parameter Real b = -0.046;
  parameter Real c = -0.47;
  parameter Real d = -0.048;
  parameter Real x0 = 7;
  parameter Real y0 = 12;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = a*x - b*x*y;
  der(y) = -c*y + d*x*y;
```

```
end mm_lab5_1;
```

Выполним симуляцию на интервале (0, 50). Получим следующие графики (рис. 4.5, 4.6).

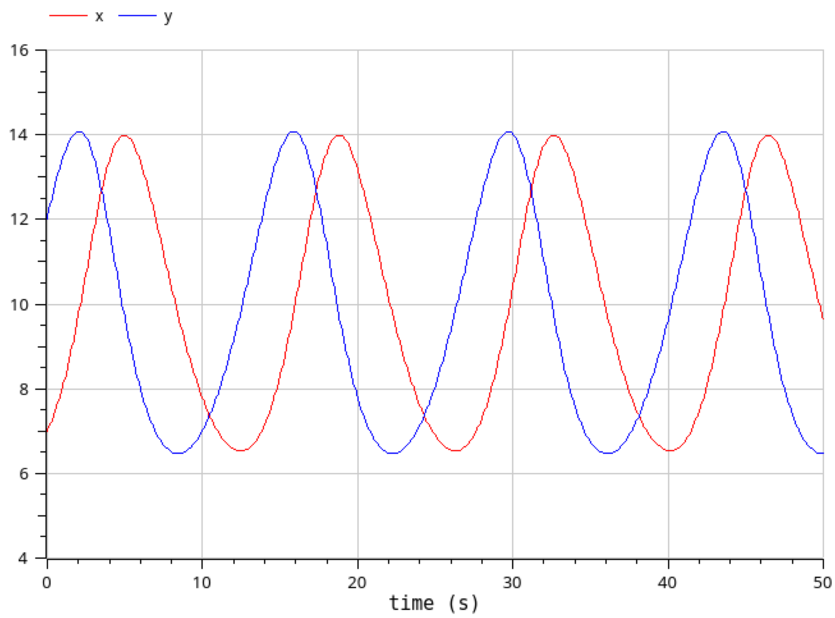

Рис. 4.5: График изменения численностей хищников и жертв в OpenModelica

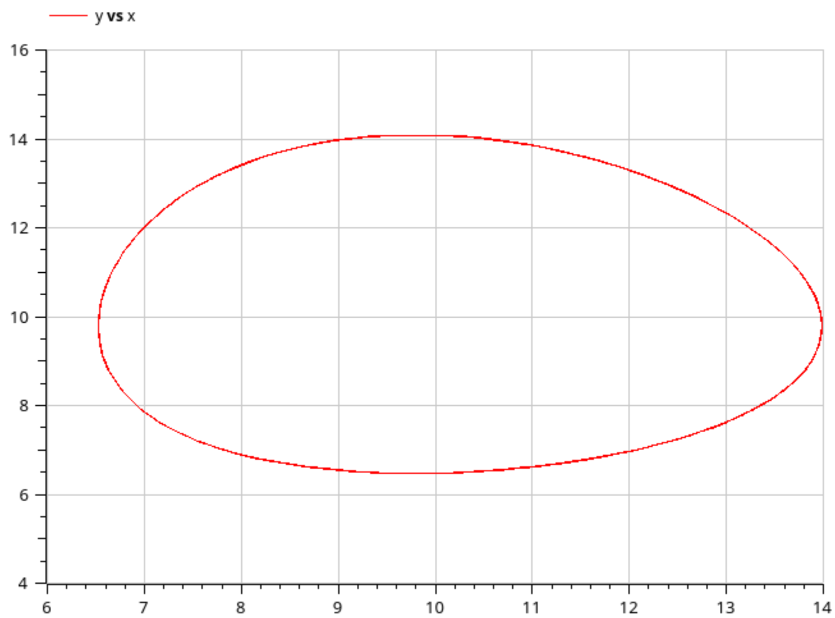

Рис. 4.6: График зависимости численности хищников от численности жертв в OpenModelica

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Также построим тут график изменения численносей хищников и жертв в стационарном состоянии (рис. 4.7).

```
model mm_lab5_2
  parameter Real a = -0.45;
  parameter Real b = -0.046;
  parameter Real c = -0.47;
  parameter Real d = -0.048;
  parameter Real x0 = c/d;
  parameter Real y0 = a/b;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = a*x - b*x*y;
  der(y) = -c*y + d*x*y;
end mm_lab5_2;
```

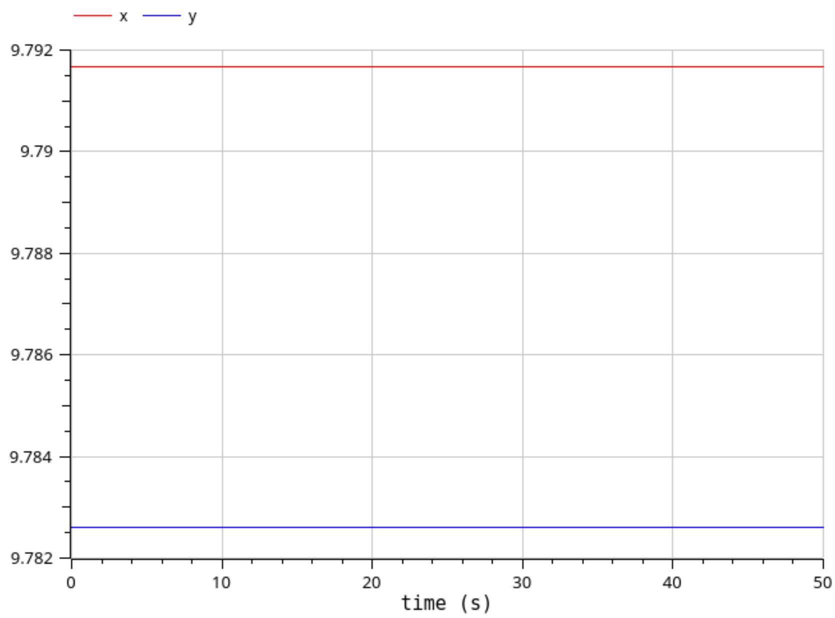

Рис. 4.7: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии в OpenModelica

4.3 Сравнение построения модели

Получили идентичные графики. Никаких особых различий не видно.

5 Выводы

Исследовали математическую модель Лотки-Вольтерры.

Список литературы