Лабораторная работа №5

Модель Лотки-Вольтерры

Клюкин Михаил Александрович

Содержание

# 1 Цель работы

Исследовать математическую модель Лотки-Вольтерры.

# 2 Задание

Для модели “хищник-жертва”:

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также график изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: . Найдите стационарное состояние системы.

# 3 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории).
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

В этой модели – число жертв, - число хищников. Коэффициент описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников . Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены и в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

# 4 Выполнение лабораторной работы

Для того, чтобы построить графики нам нужно решить систему ДУ. Для этого используем язык программирования Julia и ПО OpenModelica. Затем сравним результаты.

## 4.1 Реализация на Julia

Решим систему ДУ, используя библиотеку DifferentialEquations.  
Построим графики с помощью библиотеки Plots.

# Подключаем библиотеки  
using DifferentialEquations, Plots;  
  
# задания системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры  
function DE(u, p, t)  
 x, y = u  
 a, b, c, d = p  
 dx = a\*x - b\*x\*y  
 dy = -c\*y + d\*x\*y  
 return [dx, dy]  
end  
  
# Начальные условия  
u0 = [7,12]  
p = [-0.45, -0.046, -0.47, -0.048]  
tspan = (0.0, 50.0)  
problem1 = ODEProblem(DE, u0, tspan, p)  
solution1 = solve(problem1, Tsit5())  
  
# Постановка проблемы и ее решение  
plot(solution1, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время",   
yaxis = "Численность популяции", label = ["жертвы" "хищники"],   
c = ["green" "purple"], box =:on)

В результате получаем графики изменения численностей хищников и жертв (рис. 1).  
И зависимость численности хищников от численности жертв (рис. 2).

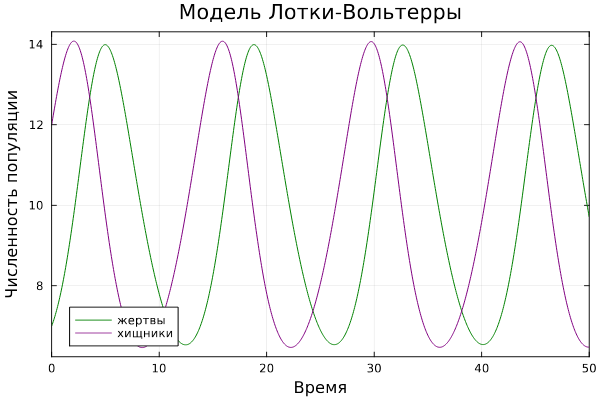


Рис. 1: График изменения численностей хищников и жертв

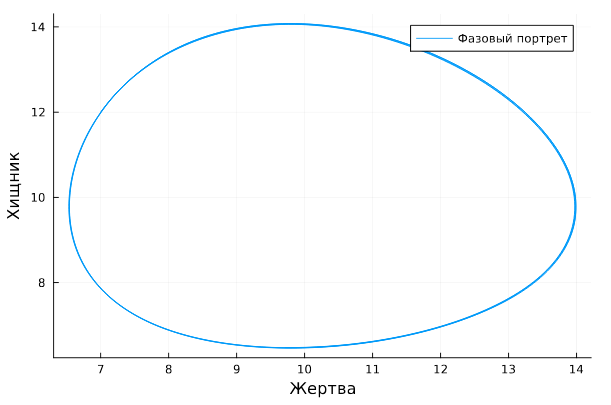


Рис. 2: График зависимости численности хищников от численности жертв

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут. Так и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Далее найдем стационарные состояния системы по формулам:

Получим, что , .

Проверим, что эта точка действительно является стационарной, подставив ее в начальные условия.

x\_c = p[3]/p[4]  
y\_c = p[1]/p[2]  
  
u0\_c = [x\_c, y\_c]  
problem2 = ODEProblem(DE, u0\_c, tspan, p)  
solution2 = solve(problem2, Tsit5())  
  
plot(solution2, xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники", label = ["Жертвы" "Хищники"],   
c = ["green" "purple"], box =:on)

Получим график из двух прямых, параллельных оси абсцисс. То есть численности жертв и хищников не меняются.  
Так и должно быть в стационарном состоянии (рис. 3).

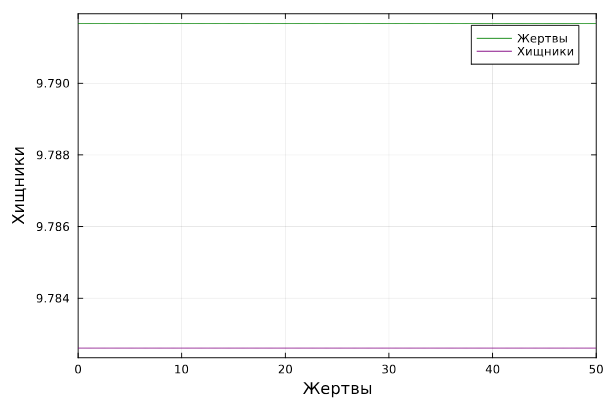


Рис. 3: График изменения численностей хищников и жертв в стационарном состоянии

Фазовый портрет в стационарном состоянии выглядит следующим образом (рис. 4).

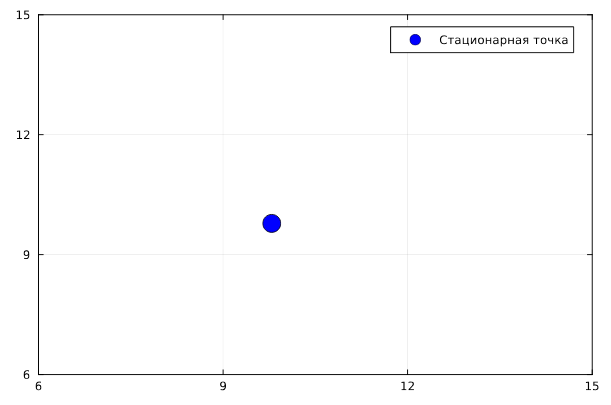


Рис. 4: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии

## 4.2 Реализация на OpenModelica

Зададим параметры и систему ДУ:

model mm\_lab5\_1  
 parameter Real a = -0.45;  
 parameter Real b = -0.046;  
 parameter Real c = -0.47;  
 parameter Real d = -0.048;  
 parameter Real x0 = 7;  
 parameter Real y0 = 12;  
  
 Real x(start=x0);  
 Real y(start=y0);  
equation  
 der(x) = a\*x - b\*x\*y;  
 der(y) = -c\*y + d\*x\*y;  
end mm\_lab5\_1;

Выполним симуляцию на интервале (0, 50). Получим следующие графики (рис. 5, 6).

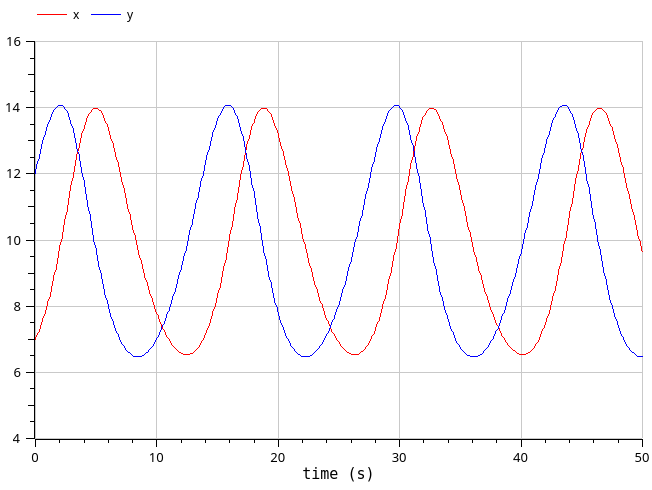


Рис. 5: График изменения численностей хищников и жертв в OpenModelica

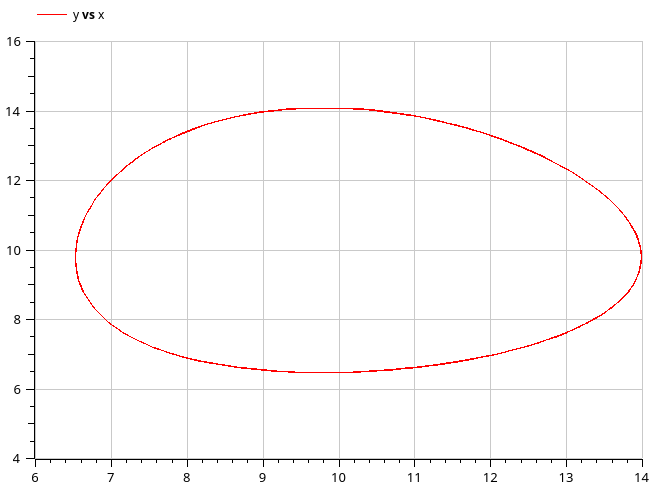


Рис. 6: График зависимости численности хищников от численности жертв в OpenModelica

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Также построим тут график изменения численносей хищников и жертв в стационарном состоянии (рис. 7).

model mm\_lab5\_2  
 parameter Real a = -0.45;  
 parameter Real b = -0.046;  
 parameter Real c = -0.47;  
 parameter Real d = -0.048;  
 parameter Real x0 = c/d;  
 parameter Real y0 = a/b;  
  
 Real x(start=x0);  
 Real y(start=y0);  
equation  
 der(x) = a\*x - b\*x\*y;  
 der(y) = -c\*y + d\*x\*y;  
end mm\_lab5\_2;

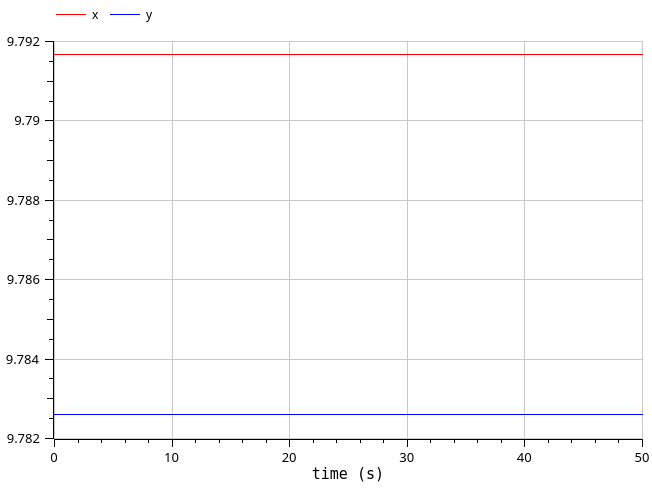


Рис. 7: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии в OpenModelica

## 4.3 Сравнение построения модели

Получили идентичные графики. Никаких особых различий не видно.

# 5 Выводы

Исследовали математическую модель Лотки-Вольтерры.

# Список литературы