Grundlagen elektrischer Maschinen

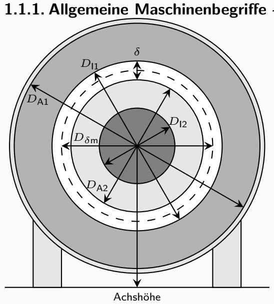
1. Grundlagen

1.1. Größen

magnetische Größen		
Durchflutung (magnetische Spannungsquelle)	Θ	$[\mathrm{A}]$
Fluss	Φ	$[\mathrm{Vs}]$
verketteter Fluss	Ψ	$[\mathrm{Vs}]$
mag. Flussdichte	$\vec{B}$	$\left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\right]$
mag. Feldstärke	$\vec{H}$	$\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$
magnetische Spannung	V_m	$[\mathrm{A}]$
magnetischer Widerstand	R_m	$\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vs}}\right]$
Streuziffer	σ	$[1]$
elektrische Größen		
Stromdichte	$\vec{s}$	$\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$
dielektrische Verschiebung	$\vec{D}$	$\left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}\right]$
el. Feldstärke	$\vec{E}$	$\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$
Strombelag	a	$\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$
spezifischer Widerstand	ρ	$[\Omega\,\mathrm{m}]$
mechanische Größen		
Drehmoment	M	$[\mathrm{Nm}]$
Massenträgheitsmoment	J	$\left[\mathrm{kg\,m}^2\right]$
Spulenwindungszahl	w_{Sp}	$[1]$
effektive Windungszahl	w_{eff}	$[1]$
Luftspalthöhe	δ	$[\mathrm{mm}]$
scheinbarer Luftspalt	δ'	$[\mathrm{mm}]$
effektiver Luftspalt	δ''	$[\mathrm{mm}]$
Anzahl der Leiter pro Nut	Z_N	$[1]$
Zahl der Einzelspulen (Kommutatorsegmente)	Z_K	$[1]$
ideelle Eisenlänge	l_i	$[\mathrm{m}]$
bewickelbare Nutfläche	A_N	$\left[\mathrm{m}^2\right]$
magnetisch aktiver Winkel	β_M	$[\mathrm{rad}]$
Drehzahl	n	$\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$
Rotornutenzahl	N	$[1]$
Rotornutenzahl pro Pol	Q	$[1]$
Anzahl paralleler Zweige	a	$[1]$
Näherungsfaktoren		
Carterfaktor	k_C	$[1]$
Eisenfüllfaktor	k_{Fe}	$[1]$
Eisenfaktor (Magnnetisierungsbedarf Eisen)	k_μ	$[1]$
Nutfüllfaktor	k_Q	$[1]$

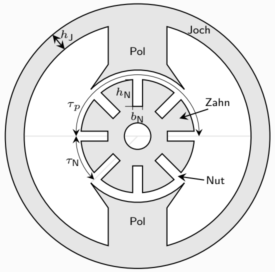
Permeabilität $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$
Permittivität $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}}$

1.1.1. Allgemeine Maschinenbegriffe - Durchmesser



Maße	
Stator Außend.	D_{A1}
Stator Innend.	D_{I1}
Rotor Außend.	D_{A2}
Rotor Innend.	D_{I2}
Mittl. Luftspaltd.	D $D_{\delta\mathrm{m}}$
Luftspalthöhe	δ

1.1.2. Allgemeine Maschinenbegriffe - Abmessungen



Maße		
Nutzahl	N	$[1]$
Nutteilung	τ_N	$[\mathrm{cm}]$
Polpaarzahl	p	$[1]$
Polteilung	τ_p	$[\mathrm{cm}]$
Nuthöhe	h_N	$[\mathrm{cm}]$
Nutbreite	b_N	$[\mathrm{cm}]$
Jochhöhe	h_J	$[\mathrm{cm}]$

$\tau_N = \frac{\pi \cdot D}{N}$ $\qquad$ $\tau_p = \frac{\pi \cdot D}{2p}$

1.2. Grundlegende Gleichungen

1.2.1. Maxwell

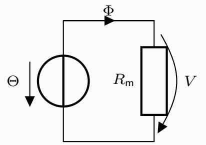
$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{s} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{s} \quad (< 10\mathrm{kHz})$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{div} \vec{D} = \gamma$

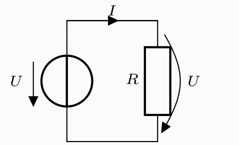
1.2.2. Durchflutungs- und Induktionsgesetz

Durchflutungsgesetz	Induktionsgesetz
$\oint_{L_A} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \iint_{A_L} \vec{s}\,\mathrm{d}\vec{A} = \Sigma i = \Theta$	$u_i = \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}\right)$ $\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} + u_i = 0$

1.2.3. Kenngrößen

magnetische Größen	elektrische Größen
$\Phi = \iint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}$	$I = \iint \vec{s}\,\mathrm{d}\vec{A}$
$V_m = \int \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l}$	$U = \int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}$
$\Theta = w \cdot I$	
$R_m = \frac{V_m}{\Phi} = \frac{l}{\mu \cdot A}$	$R = \frac{U}{I} = \rho \frac{l}{A}$
$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$	$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$
$\Psi = \Phi \cdot w = L \cdot i$	





magnetisch wirksame Fläche
$A = k_{\mathrm{Fe}} \cdot A_{\mathrm{geometrisch}}$

1.3. Entstehung des Drehmoments

1.3.1. Lorenzkraft

$$\vec{F_L} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

1.3.2. Drehmoment

$$\boxed{M_D = F \cdot r = M_L + M_R + J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$

$$m_d(t) = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \int_{-\frac{l_i}{2}}^{\frac{l_i}{2}} \int_0^{2\pi} a(\vartheta, z, t) B_\delta(\vartheta, z, t)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}z$$

1.3.3. Strombelag

$$a = \int \vec{s}\,\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\partial \sum i}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\iint_A \vec{s}\,\mathrm{d}\vec{A}\right] = -\frac{\partial \Theta}{\partial l}$$

mittlerer Strombelag $\qquad$ Amplitude

$$a_m = \frac{b_N}{\tau_N} \cdot A_{\mathrm{N}} = \frac{\sum \Theta_N}{\tau_p} \qquad A_{\mathrm{N}} = \frac{Z_N \cdot i}{b_N} = \frac{\Theta_N}{b_N}$$

1.3.4. Felderregerkurve

$$V(\vartheta) = \Theta(\vartheta) = -\frac{D}{2}\int a_{\mathrm{ges}}(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

1.4. Effektiver Luftspalt

Magnetfeld wegen Nuten inhomogen. Ausgleich durch Carterfaktor k_C (ungenutet $k_{C_i} = 1$):

$$\delta' = k_C \cdot \delta \qquad k_C = \underset{\text{Stator}}{k_{C1}} \cdot \underset{\text{Rotor}}{k_{C2}} \qquad k_{C_i} = \frac{\tau_{N_i}}{\tau_{N_i} - \gamma_i \cdot \delta}$$

$$\delta'' = k_\mu \cdot k_{\mathrm{Abfl}} \cdot \delta' \qquad \gamma_i = \frac{\left(\frac{b_{N_i}}{\delta}\right)^2}{5 + \left(\frac{b_{N_i}}{\delta}\right)} \qquad k_\mu = 1 + \frac{V_{m\mathrm{Fe}}}{2 \cdot V_{m\delta'}}$$

1.5. Streuung

1.5.1. Polstreuung

Φ_{E}: Gesamtfluss durch Polspule
Φ_{Eh}: Hauptfluss
$\Phi_{\mathrm{E}\sigma}$: Streufluss
$\Phi_{\mathrm{E}} = \Phi_{\mathrm{Eh}} + \Phi_{\mathrm{E}\sigma} = (1 + \sigma_{\mathrm{E}}) \cdot \Phi_{\mathrm{Eh}}$

$$\sigma_{\mathrm{E}} = \frac{\Phi_{\mathrm{E}\sigma}}{\Phi_{\mathrm{Eh}}}$$

1.5.2. Nut- und Zahnkopfstreuung

Φ_{N}: Gesamtfluss der in Nuten gebetteten Spulen
Φ_{Nh}: Hauptfluss
$\Phi_{\mathrm{N}\sigma}$: Streufluss (Nut- & Zahnkopfstreuung)
$\Phi_{\mathrm{N}} = \Phi_{\mathrm{Nh}} + 2\Phi_{\mathrm{N}\sigma} = (1 + \sigma_{\mathrm{N}}) \cdot \Phi_{\mathrm{Nh}}$

$$\sigma_{\mathrm{N}} = \frac{2 \cdot \Phi_{\mathrm{N}\sigma}}{\Phi_{\mathrm{Nh}}}$$

1.5.3. Stirnstreuung

Φ_{S}: Gesamtfluss Stirnstreuung
Φ_{Sh}: Hauptfluss Stirnstreuung
$\Phi_{\mathrm{S}\sigma}$: Streufluss Stirnstreuung

$$\sigma_{\mathrm{S}} = \frac{\Phi_{\mathrm{S}\sigma}}{\Phi_{\mathrm{Sh}}}$$

gesamte Streuziffer: $\sigma_{\mathrm{ges}} = \frac{\Phi_{\sigma,\mathrm{ges}}}{\Phi_{\mathrm{Sh}}}$
$\Phi_{\mathrm{S}} = \Phi_{\mathrm{Sh}} + \Phi_{\sigma,\mathrm{ges}} = (1 + \sigma_{\mathrm{ges}}) \cdot \Phi_{\mathrm{Sh}}$

1.5.4. Induktivitäten

Hauptinduktivität: $L_h = \frac{\Psi_h}{i}$
Gesamte Streuinduktivität: $L_\sigma = \frac{\Psi_\sigma}{i} = \sigma \cdot L_h$
Totale Induktivität: $L_{\mathrm{ges}} = \frac{\Psi_{\mathrm{ges}}}{i} = (1 + \sigma) \cdot L_h$

1.6. Spulen

Spulenwindungszahl	$w_{\mathrm{Sp}} = \frac{Z_N}{2 \cdot u}$
Nebeneinanderliegende Spulenseiten pro Nut	$u = \frac{Z_K}{N}$
Wellenwicklung	$a = 2$
Schleifenwicklung	$a = 2 \cdot p$

1.7. Verluste

1.7.1. Kupferverluste

$$\boxed{P_{\mathrm{Cu}} = R \cdot I^2}$$

1.7.2. Reibungsverluste

- Ventilationsverluste (Verwirbelung im Kühlmittel, Strömungsverluste)
- Lagerreibung
- Reibung an Kontaktflächen (z.B Schleifringe, Kommutator)

1.7.3. Hystereseverluste

$P_{\mathrm{FeH}} = m_{\mathrm{Fe}} \cdot v_{15\mathrm{H}} \cdot \frac{f}{50\,\mathrm{Hz}} \cdot \left(\frac{B}{1{,}5\,\mathrm{T}}\right)^2$

Verlustziffer: $v_{15\mathrm{H}}(f = 15\mathrm{Hz}, B = 1{,}5\,\mathrm{T})\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\right]$ (Herstellerangabe)

1.7.4. Wirbelstromverluste

$P_{\mathrm{FeW}} = m_{\mathrm{Fe}} \cdot v_{15\mathrm{W}} \cdot \left(\frac{f}{50\,\mathrm{Hz}}\right)^2 \cdot \left(\frac{B}{1{,}5\,\mathrm{T}}\right)^2$

Verlustziffer: $v_{15\mathrm{W}}(f = 15\mathrm{Hz}, B = 1{,}5\,\mathrm{T})\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\right]$ (Herstellerangabe)

1.7.5. Gesamte Eisenverluste

$P_{\mathrm{Fe}} = m_{\mathrm{Fe}} \cdot v_{\mathrm{Fe15}} \cdot \frac{f}{50\,\mathrm{Hz}} \cdot \left(\frac{B}{1{,}5\,\mathrm{T}}\right)^2$

1.8. Leistung

1.8.1. mechanische Leistung

$$\boxed{P_m = 2\pi \cdot n \cdot M_i = \omega_m \cdot M_i}$$

1.8.2. elektrische Leistung

$$\boxed{P_{\mathrm{el}} = U \cdot I}$$

1.9. Wirkungsgrad

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\mathrm{ab}}}{P_{\mathrm{auf}}}}$$

$$\eta_{\mathrm{Motor}} = \frac{P_m}{P_{\mathrm{el}}} \qquad \eta_{\mathrm{Generator}} = \frac{P_{\mathrm{el}}}{P_m}$$

2. Gleichstrommaschine

2.1. Größen

Maschinenkonstante (Spannung)	k_U	$[1]$
Maschinenkonstante (Drehmoment)	k_M	$[1]$
Flusskonstante	k_Φ	$\left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}\right]$
Erregerstromkonstante	k_E	$[1]$
Ankerwindungszahl	w_2	$[1]$
Bürstenübergangsspannung	U_B	$[\mathrm{V}]$
Kommutatorsegmentspannung	U_S	$[\mathrm{V}]$

2.2. Systemgleichungen

$$U_A = R_{A,\mathrm{res}} \cdot I_A + U_i + 2 \cdot U_B \qquad w_2 = \frac{N_2 \cdot Z_N}{2a}$$

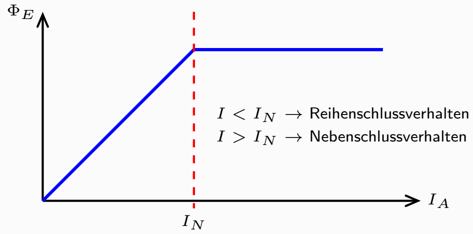
$$\Phi_E = k_\Phi \cdot I_E \qquad k_U = 4p \cdot w_2$$

$$U_i = k_U \cdot \Phi_E \cdot n \qquad k_M = \frac{k_U}{2\pi}$$

$$M_i = k_M \cdot \Phi_E \cdot I_A$$

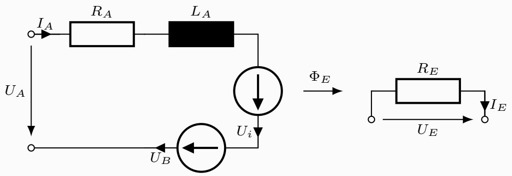
$$M_i = M_R + M_L + J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

2.3. Verhalten



2.4. Gleichstrom-Nebenschlussmaschine

2.4.1. ESB



2.4.2. Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie

$$n = \frac{U_A - 2 \cdot U_B}{k_U \cdot \Phi_E} - \frac{2\pi \cdot R_{A,\text{res}}}{(k_U \cdot \Phi_E)^2} \cdot M_i$$

2.4.3. Wichtige Betriebspunkte

Anlaufmoment: $(n = 0)$ $\quad M_{i,\text{An}} = k_M \cdot \Phi_E \cdot I_{A,\text{An}}$

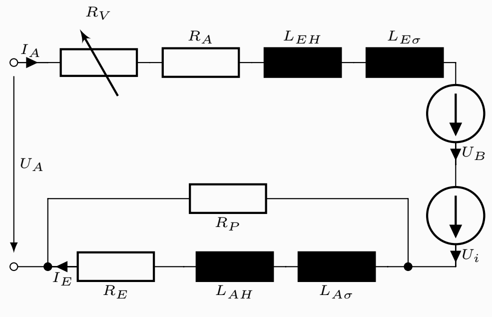
Leerlaufdrehzahl: $(M_i = 0)$ $\quad n_0 = \frac{U_A - 2 \cdot U_B}{k_U \cdot \Phi_E}$

Anlaufstrom: $(n = 0)$ $\quad I_{A,\text{An}} = \frac{U_A - 2 \cdot U_B}{R_{A,\text{res}}}$

$$n = n_0 \cdot \left(1 - \frac{M_i}{M_{i,\text{An}}}\right) \qquad M_i = M_{i,\text{An}} \cdot \left(1 - \frac{n}{n_0}\right)$$

2.5. Gleichstrom-Reihenschlussmaschine

2.5.1. ESB



$$R_{A,\text{res}} = R_V + R_A + R_E || R_P$$

2.5.2. Systemgleichungen

$$I_E = k_E \cdot I_A \quad \text{mit } k_E = \begin{cases} 1 & \text{für } R_P \to \infty \\ 0 & \text{für } R_P = 0 \\ \frac{R_P}{R_P + R_E} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Phi_E = k_\Phi \cdot I_E = k_\Phi \, k_E \cdot I_A$$

$$M_i = k_M \cdot \Phi_E \cdot I_A = k_M \, k_\Phi \, k_E \cdot {I_A}^2$$

$$U_i = k_U \cdot \Phi_E \cdot n = k_U \, k_\Phi \, k_E \cdot I_A \cdot n$$

2.5.3. Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie

$$M_i = k_M \, k_\Phi \, k_E \cdot \frac{(U_A - 2 \cdot U_B)^2}{(k_U \, k_\Phi \, k_E \cdot n + R_{A,\text{res}})^2}$$

Anlaufmoment: $(n = 0)$ $\quad M_{i,\text{An}} = k_M \, k_\Phi \, k_E \cdot \left(\frac{U_A}{R_{A,\text{res}}}\right)^2$

3. Wechselfeld - Drehfeld

3.1. Größen

Stator	Index 1	
Rotor	Index 2	
Ordnungszahl der Oberwellen	ν	[1]
elektrische Frequenz	f	[Hz]
elektrische Kreisfrequenz	ω	$\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
$\omega = 2\pi f$		
mechanische Kreisfrequenz	ω_m	$\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
Phasenwinkel	φ	[rad]
Strangachsenwinkel	ϑ	[rad]
Strangspannung	U_1	[V]
Strangstrom	I_1	[A]
komplexe Scheinleistung	$\underline{S}$	[VA]
Wirkleistung	P	[W]
Blindleistung	Q	[Var]
Strangzahl	m	[1]
Windungszahl pro Strang	w_1	[1]
Lochzahl (Nuten pro Pol und Strang)	q	[1]
Nutwinkel	α_N	[rad]
Spulenwinkel	α_{Sp}	[rad]
Polwinkel	α_p	[rad]
Spulenweite	W_{Sp}	[cm]
Zonungsfaktor	ξ_Z	[1]
Sehnungsfaktor	ξ_S	[1]
Nutschlitzbreitenfaktor	ξ_N	[1]
Schrägungsfaktor	ξ_{Schr}	[1]

3.2. Stern & Dreieckschaltung

Sternschaltung	Dreiecksschaltung
$U_1 = \frac{U_N}{\sqrt{3}}$	$U_1 = U_N$
$I_1 = I_N$	$I_1 = \frac{I_N}{\sqrt{3}}$

3.3. Einfluss realer Luftspalt

Wicklungsfaktor: $\quad \xi_{(\nu)} = \xi_{Z(\nu)} \cdot \xi_{S(\nu)} \cdot \xi_{N(\nu)}$

$$w_{\text{eff}} = w_{\text{Sp}} \cdot \xi_{(\nu)}$$

$$\alpha_N = \frac{2\pi}{N} \qquad \alpha_{\text{Sp}} = W_{\text{Sp}}(\text{absolut}) \cdot \alpha_N \qquad \alpha_p = \frac{2\pi}{2p}$$

3.3.1. Zonung

Erhöhung der Lochzahl q

(Beschränkt durch $N_{\max} = \frac{D\pi}{\tau_{N,\min}}$) mit $\tau_{N,\min} \approx 1\,\text{cm}$

$$w_{\text{eff}} = q \cdot w_{\text{Sp}} \cdot \xi_{Z(\nu)}$$

$$\xi_{Z(\nu)} = \frac{\sin\left(q \cdot \nu \frac{\alpha_N}{2} p\right)}{q \cdot \sin\left(\nu \frac{\alpha_N}{2} p\right)} = \frac{\sin\left(\nu \frac{\pi}{2} \frac{q}{Q}\right)}{q \cdot \sin\left(\nu \frac{\pi}{2} \frac{1}{Q}\right)}$$

3.3.2. Sehnung

Kürzung der Spulenweite W_{Sp} (nicht bei Einschichtwicklung möglich)

$$w_{\text{eff}} = q \cdot w_{\text{Sp}} \cdot \xi_{S(\nu)}$$

$$\xi_{S(\nu)} = \sin\left(\nu \frac{\pi}{2} \frac{W_{\text{Sp}}}{\tau_p}\right) = \sin\left(\nu \frac{\alpha_{\text{Sp}}}{\alpha_p} \frac{\pi}{2}\right)$$

3.3.3. Nutschlitzbreite

$$w_{\text{eff}} = w_{\text{Sp}} \cdot \xi_{N(\nu)}$$

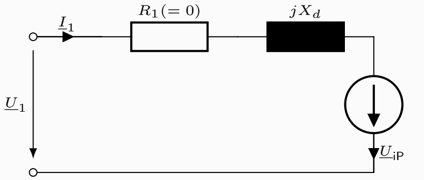
$$\xi_{N(\nu)} = \frac{\sin\left(\nu \frac{b_N}{D}\right)}{\nu \frac{b_N}{D}}$$

4. Synchronmaschine

4.1. Größen

Erregerstrom	I_2	[A]
induzierte Polradspannung	$\underline{U}_{\text{iP}}$	[V]
synchrone Reaktanz	X_d	[Ω]
Selbstinduktivität	L	[H]
Koppelinduktivität (von Rotor nach Stator)	M_{21}	[H]
Polradwinkel	ϑ	[rad]
Phasenwinkel von $\underline{Z}_1$	φ_{Z1}	[rad]
Netzleistung (Wirkleistung)	P_1	[W]
innere elektrische Leistung	P_W	[W]
Drehfeldleistung	P_δ	[W]
mechanische Leistung	P_m	[W]
Erregerleistung	P_E	[W]
Leerlaufkurzschlussstrom	I_{K0}	[A]
Dreisträngiger Dauerkurzschlussstrom	$I_{K\text{III}}$	[A]
Leerlaufkurzschlussverhältnis (LKV)	$\frac{I_{K0}}{I_N}$	[1]

4.2. ESB



$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{\text{iP}}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_d$$

$$X_d = X_{1h} + X_{1\sigma} = 2\pi f \cdot (L_{1h} + L_{1\sigma})$$

$$|\underline{U}_{\text{iP}}| = U_{\text{iP}} = \omega M_{21} \sqrt{2} \cdot I_2$$

$$\sigma = \frac{L_{1\sigma}}{L_{1h}}$$

4.3. Systemgleichungen

$$\vec{u}_1 = R_1 \cdot \vec{i}_1(t) + \frac{\partial \vec{\Psi}_1(t)}{\partial t}$$

$$\vec{\Psi}_1 = L_1 \cdot \vec{i}_1(t) + M_{21} \cdot \vec{i}_2'(t)$$

$$u_2 = R_2 \cdot i_2(t) + \frac{\partial \Psi_2(t)}{\partial t}$$

$$\Psi_2 = L_2 \cdot i_2(t) + 3 \cdot M_{21} \cdot (\vec{i}_1(t) e^{-jp\vartheta_m} + \vec{i}_1^*(t) e^{jp\vartheta_m})$$

4.4. Wichtige Gleichungen

4.4.1. Synchrone Drehzahl Luftspaltfeld

$$n_{\text{syn}} = n_N = \frac{f_1}{p}$$

4.4.2. Drehmoment

$$M_K \sim \frac{U_1}{f_1}$$

$$M_i = -\frac{3p}{\omega_1} \cdot \left[\frac{U_1 \cdot U_{\text{iP}}}{Z_1} \cdot \sin(\vartheta - \varphi_{Z1}) + \frac{{U_{\text{iP}}}^2}{Z_1} \cdot \sin(\varphi_{Z1})\right]$$

Kippmoment:

$$M_K = \frac{3p}{\omega_1} \cdot \frac{U_1 \cdot U_{\text{iP}}}{Z_1} = \frac{3p}{\omega_1} \cdot U_1 \cdot I_{K\text{III}}$$

$R_1 = 0 \Rightarrow \varphi_{Z1} = 0 \Rightarrow M_i = -M_K \cdot \sin(\vartheta)$

4.4.3. Leistung

$$\underline{S}_1 = 3 \cdot \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^*$$

$$P_1 = S_1 \cdot \cos(\varphi) = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi)$$

$$P_W = 3 \cdot U_{\text{iP}} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi)$$

$$P_\delta = \omega_m \cdot M_i = P_W - 3 \cdot R_1 \cdot {I_1}^2$$

$$P_m = 2\pi \cdot n \cdot (M_i - M_R) = \omega_m \cdot (M_i - M_R) = P_\delta - P_R$$

$$P_E = U_2 \cdot I_2$$

$$\eta = \frac{P_m}{P_1 + P_{\text{vE}}}$$

4.5. Betriebsbereiche

Bei Leerlauferregung ($I_2 = I_{20}$): $\Rightarrow U_1 = U_{\text{iP}}$

Bei linearer Leerlaufkennlinie ($X_d = \text{const.}$): $I_2 = I_{20} \cdot \frac{U_{\text{iP}}}{U_1}$

4.5.1. Leerlauf ($I_1 = 0$)

$$I_{20} = \frac{U_{\text{iP}}}{\omega M_{21}\sqrt{2}} = \frac{U_1}{\omega M_{21}\sqrt{2}}$$

4.5.2. Kurzschluss ($U_1 = 0$)

$$\underline{I}_{K\text{III}} = \frac{\underline{U}_{\text{iP}}}{\underline{Z}_1}$$

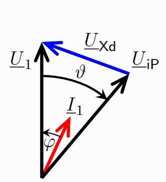
$$\underline{I}_{K0} = \underline{I}_{K\text{III}}(I_{20}) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$$

4.5.3. Betriebsarten

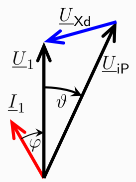
ϑ zwischen dem Zeiger von $\underline{U}_1$ nach $\underline{U}_{\text{iP}}$
φ zwischen dem Zeiger von $\underline{I}_1$ nach $\underline{U}_1$
$\underline{I}_2$ eilt $\underline{U}_{\text{iP}}$ um $90°$ nach

Phasenschieberbetrieb: $\vartheta = 0$ ($R_1 = 0$ VZS - Betrieb am starren Netz)
- Betrieb im Leerlauf
- reine Blindleistungsabgabe bzw. -aufnahme
- $\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow$
  - untererregt: $\Rightarrow \varphi = 90\,\text{deg}$
  - übererregt: $\Rightarrow \varphi = -90\,\text{deg}$

Motorbetrieb: $\vartheta < 0$ ($R_1 = 0$ VZS - Betrieb am starren Netz)

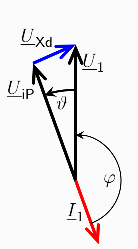


untererregt $\varphi > 0$

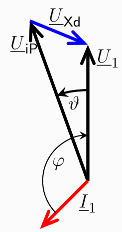


übererregt $\varphi < 0$

Generatorbetrieb: $\vartheta > 0$ ($R_1 = 0$ VZS - Betrieb am starren Netz)

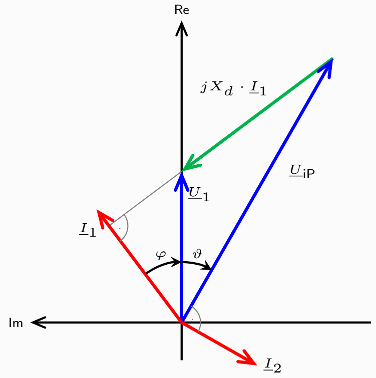


untererregt $\varphi > 0$



übererregt $\varphi < 0$

4.6. Zeigerdiagramm



4.7. Stromortskurve

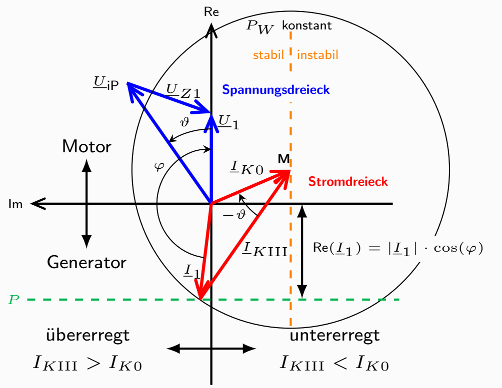
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{K0} - \underline{I}_{K\text{III}}$$

$$\underline{I}_{K\text{III}} = \frac{U_{\text{iP}}}{U_1} \cdot \underline{I}_{K0} \cdot e^{j\vartheta}$$

$$\underline{I}_{K0} = -\frac{U_1}{Z_1} \cdot j\, e^{j\varphi_{Z1}}$$

Stromortskurve

1. $\underline{U}_1$ auf reelle Achse legen
2. Richtung von $\underline{U}_{\text{iP}}$ einzeichnen
3. $\underline{I}_{K0}$ einzeichnen
   bei $R_1 = 0$: $\underline{I}_{K0}$ eilt $\underline{U}_1$ um $90°$ nach
4. konstante Erregung: Kreis um Spitze von $\underline{I}_{K0}$ mit Radius $I_{K\text{III}}$
5. Richtungen von $\underline{I}_{K\text{III}}$ und $\underline{I}_1$ festgelegt durch φ bzw. ϑ
6. bei $R_1 = 0$: Verlängerung von $\underline{U}_{\text{iP}} \perp \underline{I}_{K\text{III}}$



4.8. dq-Darstellung

Zeigerdiagramm

1. $\underline{U}_1$ auf reelle Achse legen
2. $\underline{I}_1$ einzeichnen
3. Richtung von U_{iP} legt d und q Achse fest
   (ϑ = unbekannt $\Rightarrow$ weiter bei Trick)
4. Zerlegung von $\underline{I}_1$ in $\underline{I}_d$ und $\underline{I}_q$
5. Spannungsabfall an $X_d = |X_d \cdot I_d|$
6. Spannungsabfall an $X_q = |X_q \cdot I_q|$
7. $\underline{U}_{\text{iP}} = \underline{U}_1 - jX_d \cdot \underline{I}_d - jX_q \cdot \underline{I}_q$

Trick

1. $\vartheta = \arg(\underline{U}_1 - jX_q \cdot \underline{I}_1) \Rightarrow$ Richtungsgerade von $U_{\text{iP}}(||jX_d\underline{I}_d)$
2. $\underline{U}_{\text{iP}}$ = Senkrechte von $\underline{U}_1 - jX_d \cdot \underline{I}_d$ auf Richtungsgerade

4.8.1. Systemgleichungen

$$U_d = R_1 \cdot I_d - \omega_1 L_q \cdot I_q$$

$$U_q = R_1 \cdot I_q + \omega_1 L_d \cdot I_d + \sqrt{2} \cdot U_{\text{iP}}$$

$$U_{\text{iP}} = \sqrt{2} \cdot \omega_1 M_{21} \cdot I_2$$

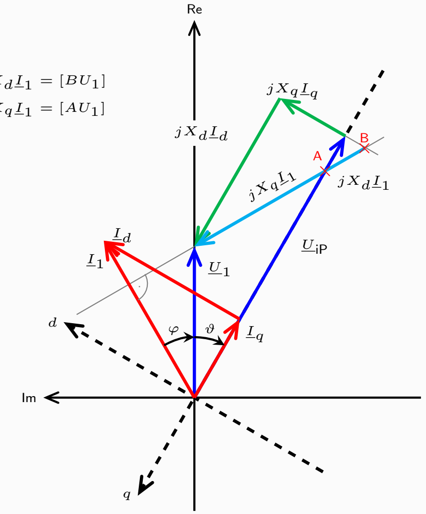
$$U_2 = R_2 \cdot I_2$$

$$M_i = 3 \cdot p \cdot M_{21} \cdot I_2 \cdot I_q$$

4.8.2. Zeigerdiagramm

$jX_d\underline{I}_1 = [BU_1]$

$jX_q\underline{I}_1 = [AU_1]$



4.9. Schenkelpolläufer

4.9.1. Drehmoment ($R_1 = 0$)

$$M_i' = -\frac{m_1 \cdot p}{\omega_1} U_1 \left[\frac{U_{\text{iP}}}{X_d}\sin(\vartheta) + \frac{U_1}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin(2\vartheta)\right]$$

Reluktanzmoment (Reaktionsmoment):

$$M_r = -\frac{m_1 \cdot p}{\omega_1} \cdot \frac{{U_1}^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin(2\vartheta)$$

Vollpolläufer entwickeln kein Reluktanzmoment wegen $L_d = L_q$.
Maximales Reluktanzmoment bei $|\vartheta| = 45\,\text{deg}$.

4.9.2. Systemgleichungen

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_d + \underline{U}_q + \underline{U}_{\text{iP}}$$

$$= jX_d \cdot \underline{I}_d + jX_q \cdot \underline{I}_q + \underline{U}_{\text{iP}}$$

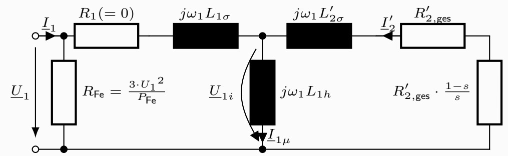
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_d + \underline{I}_q$$

5. Asynchronmaschine

5.1. Größen

Übersetzungsverhältnis	$\ddot{u}$	[1]
Schlupf	s	[1]
Kippschlupf	s_K	[1]
Kippmoment	M_K	[Nm]
Bezogener Statorwiderstand	ρ_1	[1]
Bezogener Rotorwiderstand	ρ_2	[1]
Hilfsgröße	$\Delta\rho_1$	[1]
Rotor-Statorwärmeverluste	P_{Cu}	[W]
Magnetisierungsstrom	$\underline{I}_{1\mu}$	[A]
Rotor-Vorwiderstand	R_{2V}	[Ω]

5.2. ESB



5.2.1. Übersetzungsverhältnis

Bei Schleifring-ASM gilt: $M_{21} = M_{12} = M$

$$\ddot{u} = \frac{L_{1h}}{M} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cdot \frac{w_1 \xi_1}{w_2 \xi_2} \cdot \frac{1}{\xi_{\text{Schr}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cdot \frac{w_{1,\text{eff}}}{w_{2,\text{eff}}} \cdot \frac{1}{\xi_{\text{Schr}}}$$

$$R'_{2,\text{ges}} = \ddot{u}^2 \cdot R_{2,\text{ges}} \qquad R'_{2,\text{ges}} = R'_2 + R'_{2V}$$

$$\underline{U}'_2 = \tfrac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{U}_{1i} \qquad L'_{2\sigma} = \ddot{u}^2 \cdot (L_{2\sigma} + L_{2\text{Schr}})$$

$$\underline{I}'_2 = \tfrac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2$$

5.3. Systemgleichungen

$$\vec{u}_1 = R_1 \cdot \vec{i}_1 + \frac{\partial \vec{\Psi}_1}{\partial t}, \qquad \vec{\Psi}_1 = L_1 \cdot \vec{i}_1 + M \cdot \vec{i}_2 \cdot e^{jp\vartheta_m}$$

$$0 = R_{2,\text{ges}} \cdot \vec{i}_2 + \frac{\partial \vec{\Psi}_2}{\partial t}, \qquad \vec{\Psi}_2 = L_2 \cdot \vec{i}_2 + M \cdot \vec{i}_1 \cdot e^{-jp\vartheta_m}$$

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_i - M_R - M_L$$

5.4. Wichtige Größen

5.4.1. Schlupf

$$s = \frac{n_{\text{syn}} - n}{n_{\text{syn}}} = \frac{\omega_{\text{syn}} - \omega_m}{\omega_{\text{syn}}} = \frac{\omega_1 - p \cdot \omega_m}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Gegenstrombremse	Motor	Generator
$s > 1$	$1 > s > 0$	$s < 0$

5.4.2. Drehzahl

synchrone Drehzahl	Nenndrehzahl
$n_{\text{syn}} = \frac{f}{p}$	$n_N = n_s(1 - s_N)$

5.4.3. Leistung

$$\underline{S}_1 = m_1 \cdot \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^*$$
$$P_1 = S_1 \cdot \cos(\varphi) = m_1 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi)$$
$$P_{\text{Netz}} = m_1 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_N) = P_1 + P_{\text{Fe}}$$
$$P_\delta = 2\pi \cdot n_{\text{syn}} \cdot M_i = P_1 - P_{\text{Cu1}} - P_{\text{Fe}}$$
$$P_{mi} = (1-s)P_\delta = P_\delta - P_{\text{Cu2}} - P_{2V} = \omega_m \cdot M_i$$
$$P_m = 2\pi \cdot n \cdot (M_i - M_R) = \omega_m \cdot (M_i - M_R) = P_{mi} - P_R$$
$$P_{\text{Cu2}} = s \cdot P_\delta = m_2 \cdot R_2 \cdot I_2{}^2$$

5.4.4. Phase

ASM immer induktiv $\Rightarrow \varphi > 0$

$$\varphi = \varphi_{1Z} - \varphi_{1N}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

5.4.5. Weitere Parameter

$$L_{1\sigma} = \sigma_1 \cdot L_{1h} \qquad L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma}$$
$$L'_{2\sigma} = \sigma_2 \cdot L_{1h} \qquad L'_2 = L_{1h} \cdot (1 + \sigma_2)$$
$$L_\sigma = \sigma \cdot L_1 = L_{1\sigma} + \frac{\xi_{\text{Schr}}}{1+\sigma_2} L'_{2\sigma}$$
$$\rho_1 = \frac{R_1}{\omega_1 L_1} \qquad \rho_2 = \frac{R_{2,\text{ges}}}{\omega_1 L_2} = \frac{R'_{2,\text{ges}}}{\omega_1 L'_2}$$
$$\Delta\rho_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1}{\sigma}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \rho_1{}^2}$$
$$\sigma = 1 - \frac{1}{(1+\sigma_1)\cdot(1+\sigma_2)} = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

5.5. Statorstrom

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\omega_1 L_1} \cdot \frac{\rho_2 + js}{\rho_1 \cdot \rho_2 - \sigma \cdot s + j(\rho_2 + s \cdot \rho_1)}$$

Anlaufstrom:

$$I_{1A} = |\underline{I}_1|(s=1) = \frac{U_1}{\omega_1 L_\sigma} \sqrt{\frac{1+\rho_2{}^2}{\left(1 - \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\sigma}\right)^2}}$$

Idealer Kurzschlussstrom:

$$I_{1Ki} = |\underline{I}_1|(s \to \pm\infty) = \frac{U_1}{\omega_1 L_\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1}{\sigma}\right)^2}}$$

Leerlaufstrom:

$$I_{10} = |\underline{I}_1|(s=0) = \frac{U_1}{\omega_1 L_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\rho_1{}^2}}$$

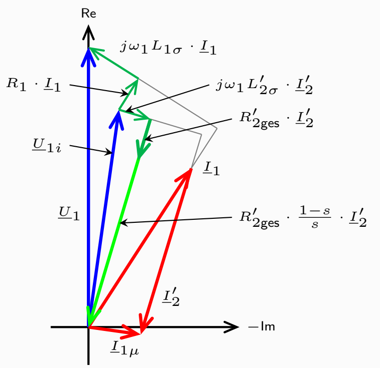
5.5.1. Magnetisierungsstrom

$$\underline{I}_\mu = \frac{\rho_2 + j \cdot s \cdot (\sigma - \sigma_1 \cdot (1-\sigma))}{\rho_1 \cdot \rho_2 - \sigma \cdot s + j \cdot (\rho_2 + s \cdot \rho_1)} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\omega_1 L_1}$$

5.6. Zeigerdiagramm

Zeigerdiagramm

1. $\underline{U}_1$ auf reelle Achse legen und $\underline{I}_1$ einzeichnen
2. $R_1 \underline{I}_1$ (gleiche Phasenlage wie $\underline{I}_1$)
   $j\omega_1 L_{1\sigma} \underline{I}_1$ (eilt $\underline{I}_1$ um $90°$ voraus)
3. $\underline{U}_{1i} = \underline{U}_1 - R_1 \underline{I}_1 - j\omega_1 L_{1\sigma} \underline{I}_1$
4. $\underline{I}_{1\mu} = \frac{\underline{U}_{1i}}{j\omega_1 L_{1h}}$ (eilt $\underline{U}_{1i}$ um $90°$ nach)
5. $\underline{I}'_2 = \underline{I}_{1\mu} - \underline{I}_1$
6. $R'_{2,\text{ges}} \underline{I}'_2$ (parallel zu $\underline{I}'_2$)
7. $j\omega_1 L'_{2\sigma} \underline{I}'_2$ (eilt $\underline{I}'_2$ um $90°$ voraus)
8. $R'_{2,\text{ges}} \cdot \frac{1-s}{s} \cdot \underline{I}'_2 = -\underline{U}_{1i} - R'_{2,\text{ges}} \underline{I}'_2 - j\omega_1 L'_{2\sigma} \underline{I}'_2$

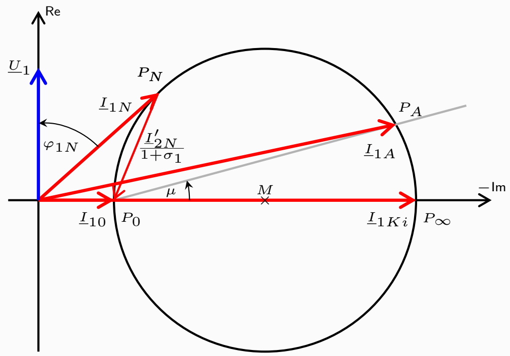


5.7. Stromortskurve

bei $R_1 = 0$ $\qquad \tan(\mu) = s_K$

Stromortskurve

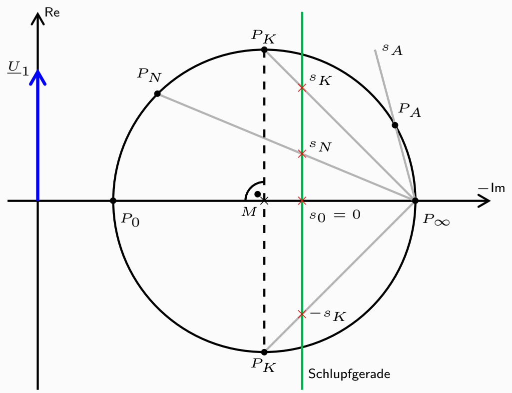
1. $\underline{U}_1$ auf reelle Achse legen $\Rightarrow \varphi_{1U} = 0$
2. $R_1 = 0 \Rightarrow \underline{I}_{10}$ und $\underline{I}_{1Ki}$ haben keinen Realteil
3. Kreismittelpunkt auf Im-Achse zwischen $\underline{I}_{1Ki}$ und $\underline{I}_{10}$
4. μ zwischen P_0 und P_A



5.7.1. Schlupfgerade

Schlupfgerade

1. Schlupfgerade an beliebiger Stelle einzeichnen
2. gesuchtes s aus Längenverhältnis zu bekanntem Schlupf bestimmen



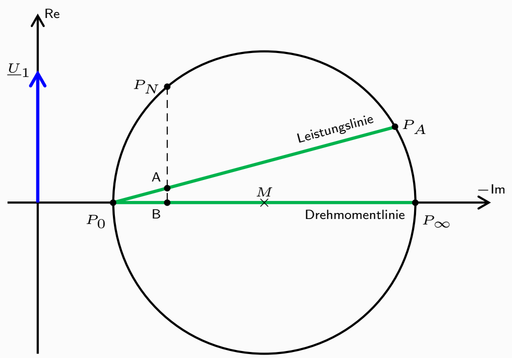
5.7.2. Maßstab

Strommaßstab	m_I	$\left[\frac{\text{A}}{\text{cm}}\right]$
Leistungsmaßstab	$m_P = 3 \cdot U_1 \cdot m_I$	$\left[\frac{\text{W}}{\text{cm}}\right]$
Drehmomentmaßstab	$m_M = \frac{m_P}{2\pi \cdot n_{\text{syn}}}$	$\left[\frac{\text{Nm}}{\text{cm}}\right]$

5.7.3. Ablesbare Werte

Aufgenommene elektrische Leistung	$P_1 = \overline{PB} \cdot m_P$
Kupferverluste Rotor	$P_{\text{Cu2}} = \overline{AB} \cdot m_P$
Abgegebene mechanische Leistung	$P_m = \overline{PA} \cdot m_P$
Inneres Drehmoment	$M_i = \overline{PB} \cdot m_M$

Definition Punkt B: Orthogonale Projektion von P auf Im-Achse



5.8. Drehmoment

$$M_K \sim \left(\frac{U_1}{f_1}\right)^2 \qquad M_N \sim \Phi_\delta \frac{U_1}{f_1}$$

$$M_i = M_R + M_L + J\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

5.8.1. Drehmomentgleichung

$$M_i = 3p(1-\sigma)\frac{U_1{}^2}{\omega_1{}^2 L_\sigma} \frac{s \cdot s_K}{\Delta\rho_1 s_K{}^2 + 2\frac{\rho_1}{\sigma}(1-\sigma)s_K s + \Delta\rho_1 s^2}$$

Kippmoment:

$$M_K = M_i(s_K) = \frac{3}{2}p \cdot (1-\sigma)\frac{U_1{}^2}{\omega_1{}^2 L_\sigma}\left(\frac{1}{\Delta\rho_1 + \frac{\rho_1}{\sigma}(1-\sigma)}\right)$$

$$(R_1 = 0): M_K = \frac{m_1 U_1 \frac{I_{1Ki} - I_{10}}{2}}{2\pi \cdot n_s}$$

Kippschlupf: $s_K = \frac{\rho_2}{\sigma}\sqrt{\frac{1+\rho_1{}^2}{1+\left(\frac{\rho_1}{\sigma}\right)^2}}$

$s_K > 0$ Motor	$s_K < 0$ Generator

5.8.2. Klossche Gleichung (Annahme $R_1 = 0$)

$$\frac{M_i}{M_K} = \frac{2 \cdot s_K \cdot s}{s_K{}^2 + s^2}$$

$$s_{1,2} = s_K \frac{M_K}{M_i} \pm \sqrt{\left(s_K \frac{M_K}{M_i}\right)^2 - s_K{}^2}$$

Nur echte Lösung wenn gilt: $\quad s < s_K$