

问题描述：

火箭发射过程的速度可由如下公式计算：

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - qt} \right) - gt$$

其中， v 是向上的速度， u 是燃料相对于火箭喷出的速度， m_0 是火箭在 $t=0$ 时的初始质量， q 是燃料消耗速度， g 是重力加速度。假设 $u = 1800\text{m/s}$ ， $m_0 = 160000\text{kg}$ ， $q = 2500\text{kg/s}$ ， $g = 9.8\text{m/s}^2$ ，请：

- (1) 采用不同的数值积分方法计算火箭在 30s 时能上升多高，并分析误差。
- (2) 利用数值微分方法画出火箭加速度与时间的关系图。

问题分析：

- (1) 积分，首先用 sympy 算出定积分的实际值 10879.619 作为准确值。

```
>>> v = u * log(m0 / (m0 - q * t)) - g * t
>>> integrate(v,t)
-4.9*t**2 + 1800.0*t*log(160000/(160000 - 2500*t)) + 1800.0*t + 115200.0*log(1.0*t - 64.0)
>>> integrate(v,(t,0,30))
-23276.5987672523 + 54000.0*log(32/17)
>>> -23276.5987672523 + 54000.0*log(32/17)
10879.6194048973
```

- (2) 微分，先用 sympy 算出 speed(t) 的准确导数式 diffv(t)，用中心差商法求得加速度值 accelerate(t)，取步长 $h=0.1$ ，得到结果基本准确。如图。

```
import numpy as np
import math
import sympy as sp
def speed(t):
    u = 1800
    m0 = 160000
    q = 2500
    g = 9.8
    v = u * math.log(m0 / (m0 - q * t)) - g * t
    return v
def diffv(t):
    return 720000000000 * (1 - t / 64) / (160000 - 2500 * t) ** 2 - 9.8
def accelerate(t0, h): # h是中心差商的步长
    fdx = (speed(t0 + h) - speed(t0 - h)) / (2 * h)
    return fdx
print(speed(10), diffv(10), accelerate(10, 0.1))
|
```

```
运行: zuoye5 x
D:\Download\python\python.exe D:/库/桌面/作业5/zuoye5.py
207.81826623171537 23.533333333333335 23.533371437359136
```

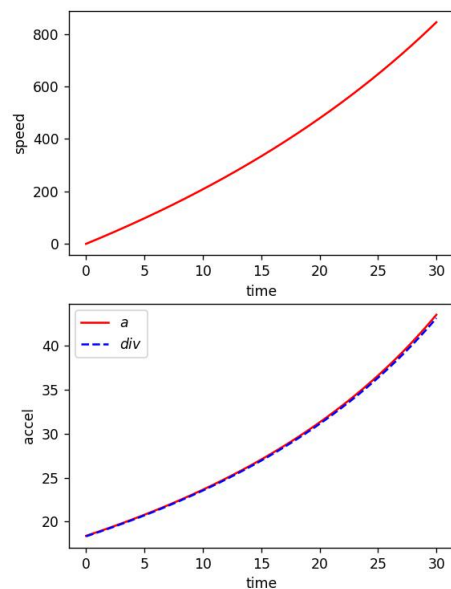
Python 程序结果

(1) 积分

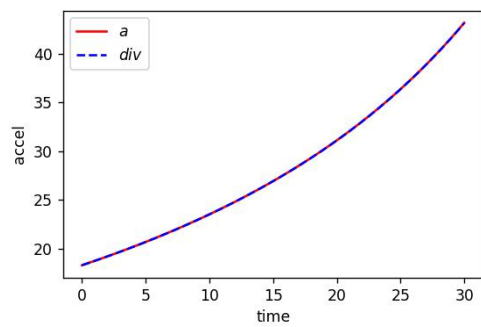
```
D:\Download\python\python.exe D:/库/桌面/作业5/zuoye5.py
梯形公式计算结果为 12668.109086074783 误差是 0.16438899327422896
Simpson公式计算结果为 10896.96329765722 误差是 0.0015941635561638762
Simpson 3/8法则结果为 10887.52511781406 误差是 0.00072665344465111
romberg方法结果为 10879.619414247922 误差是 8.594898529579948e-10
T值表:
[[12668.10908607 10896.96329766 10879.82314606 10879.62076556]
 [11339.74974476 10880.89440553 10879.62392776 10879.61941425]
 [10995.60824034 10879.70333262 10879.61948477 0.]
 [10908.67955955 10879.62472526 0. 0.]
 [10886.88843383 0. 0. 0.]
 [ 0. 0. 0. 0.]]
Gauss方法结果为 10879.427728051802 误差是 1.7617973392631703e-05
```

(2) 微分，采用中央差商。

当步长 $h=5$ 时



当步长为 1 时



可见中央差商的结果和真实值几乎没有差别。

对计算结果的进一步分析：

(1) 积分

可见 Simpson 公式 3/8 法则的误差就很小了，romberg 方法的结果误差更加小，且只需要计算到 R2 就能够达到合格的精度，效率足够高。Gauss 方法不仅结果误差小，而且方法简单，时空复杂度低，很优秀。

(2) 微分

使用中央差商的方法，步长不是很大的时候，就能够模拟出合适的结果，误差比较小。