Interpolacja

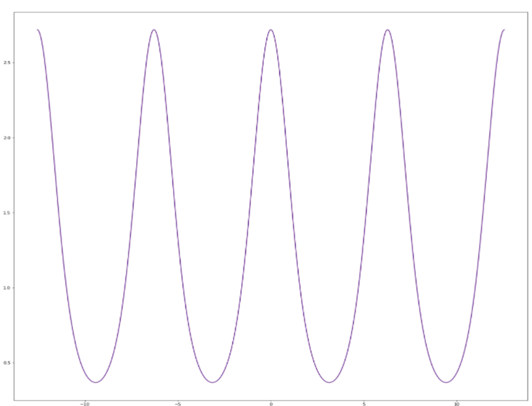
Martyna Olszewska

Treść zadania

Dla $f(x) = e^{cos(x)}$ (gdzie x jest z przedziału [-4π, 4π]) wyznacz dla zagadnienia Hermite'a wielomian interpolujący. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów . Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa . Ocenić dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję, poszukać wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukać stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go. Porównać z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

SPECYFIKACJE

Do obliczeń używałam języka python, na systemie operacyjnym Ubuntu 20.04.4 LTS. Procesor komputera to Intel Core i3-4030U CPU @ 1.90GHz × 4 , RAM: 8GB. Do generowania wykresów użyłam biblioteki matplotlib, a dokładniej narzędzia pyplot. Do wyznaczenia równoodległych węzłów użyłam narzędzia linspace z biblioteki numpy. Korzystam również z biblioteki math (wartość liczby pi, funkcja cosinus).



BADANA FUNKCJA

$f(x) = e^{cos(x)}$

x jest z przedziału [-4π, 4π]

WYNIKI

Aby uzyskać wyniki, które następnie zebrałam w tabeli, uruchomiłam program za każdym dla innej liczby węzłów. Najpierw dla węzłów równoodległych, następnie dla węzłów Czebyszewa. Wykresy były generowane na podstawie 1000 równoodległych punktów w przedziale [-4π, 4π]. Jednorazowe uruchomienie programu dla danej liczby węzłów, generowało wykres funkcji interpolowanej i interpolującej wraz z zaznaczonymi węzłami, błąd średniokwadratowy oraz maximum z różnicy wartości obydwu funkcji w tych samych punktach.

OPIS WYKRESÓW

W dalszej części opracowania wykresy porównujące funkcje interpolowane i interpolujące są zbudowane z takich samych elementów. Wykres funkcji f(x) jest zaznaczony kolorem fioletowym, natomiast F(x) kolorem niebieskim. Różowe punkty to węzły. Wykresy przedstawiający jak rozkładają się różnice między wartościami funkcji na przedziale są oznaczone kolorem różowym.

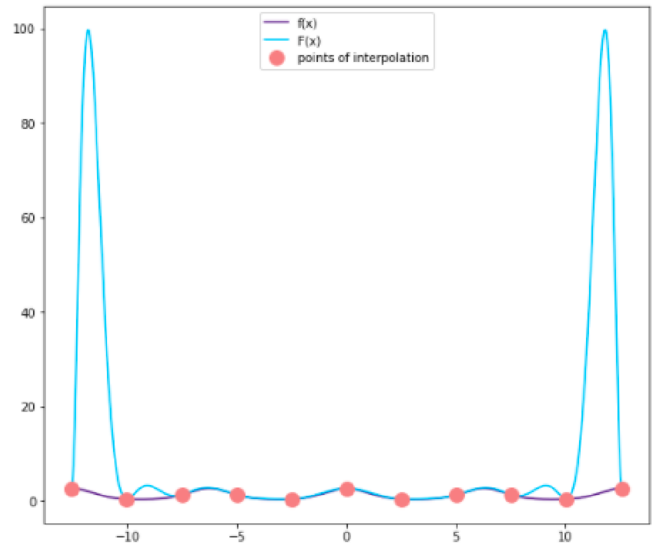
ZAGADNIENIE HERMITE'A

Poniższa tabela zawiera wartości błędów uzyskanych przy użyciu metody Hermite'a przy użyciu bazy Newtona.

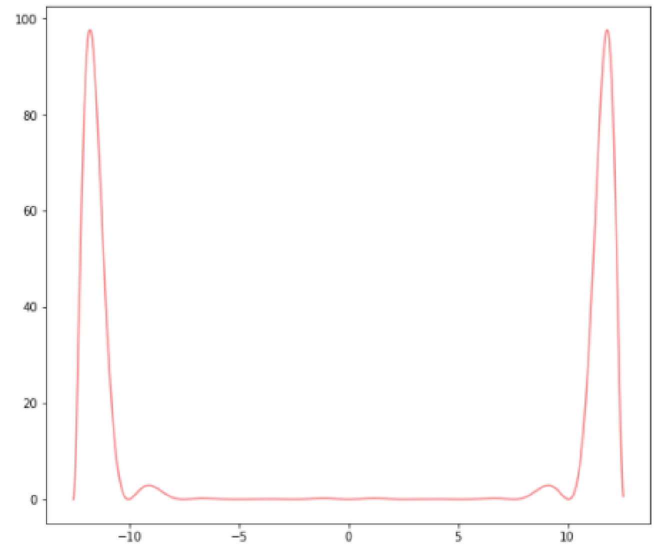
	Węzły równoodległe		Węzły Czebyszewa	
Liczba węzłów	**Max z różnicy odległości**	**MSE**	**Max z różnicy odległości**	**MSE**
3	3.39686	2.41418	2.12042	1.26202
5	4.37429	3.21407	3.67394	3.40401
7	7.1713	5.48529	1.53378	0.34907
8	1.03492	0.18948	0.94295	0.14064
10	97.67366	621.8575	1.43899	0.16188
12	127.14165	841.54488	0.2669	0.01259
15	3784.7035	575230.84917	0.17112	0.00342
18	41509.56427	55922883.19192	0.06135	0.00038
20	189587.85555	1031600016.67847	0.07027	0.00011

MSE - błąd średniokwadratowy dla 1000 punktów

Analizujac tabele możemy zauważyć w którym miejscu pojawia się efekt Runge'go. Jest to liczba 10 węzłów. Na wykresie poniżej możemy zaobserwować ten efekt. Przy większej ilości węzłów błędy stają się już bardzo duże. Wynika to z tego, że wielomian jest bardzo wysokiego stopnia, dla 20 węzłów jest to już wielomian 38 stopnia. Dla 40 węzłów byłby on 78 stopnia.

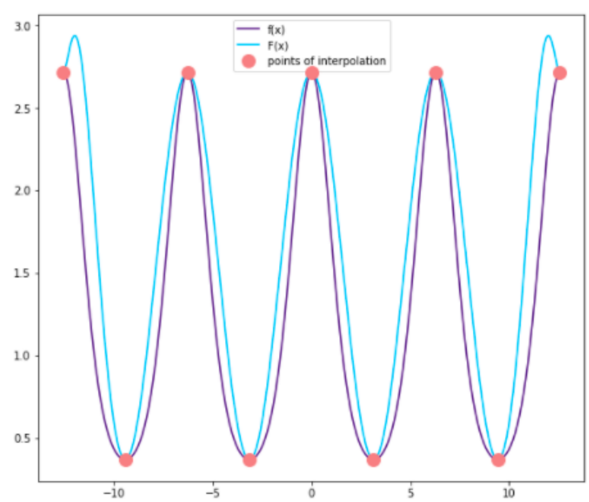


Rys.1: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 10 węzłami równoodległymi

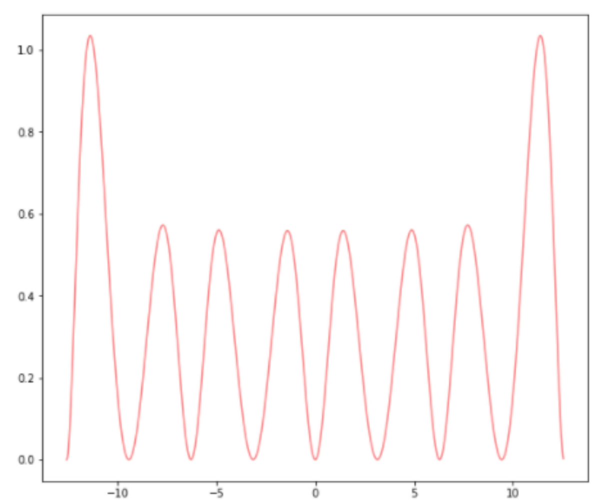


Rys.2: Wykres różnicy wartości

Ciekawym jest, że dwa liczby 8 węzłów dokładność przy użyciu węzłów równoodległych jest bardzo wysoka. I jest to najlepsze dopasowanie jakie udało mi się uzyskać przy użyciu tych węzłów.

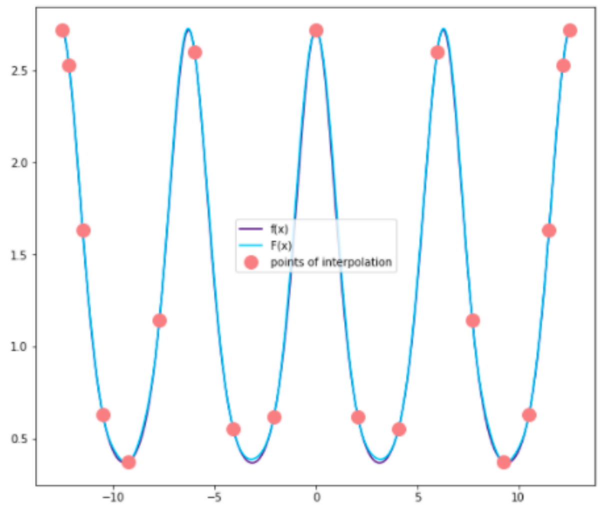


Rys.3: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 8 węzłami równoodległymi

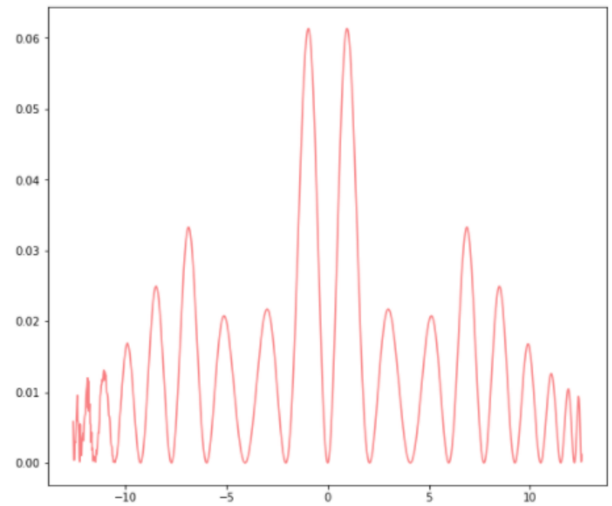


Rys.4: Wykres różnicy wartości

Najlepszą dokładność przybliżenia uzyskałam dla 18 węzłów Czebyszewa. Jak widać na poniższym wykresie błędy nie przekraczają wartości 0,07.

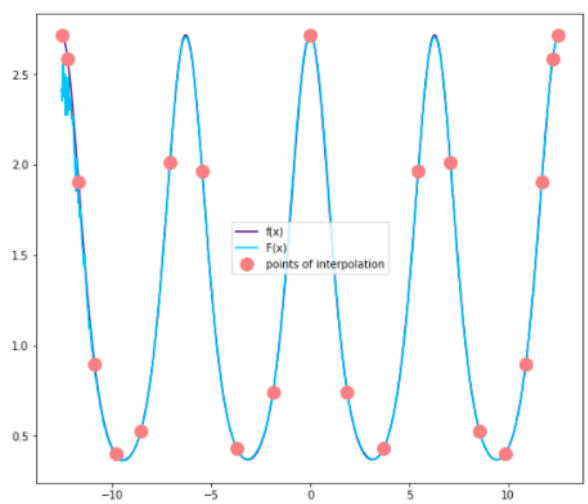


Rys 5: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 18 węzłami czebyszewa

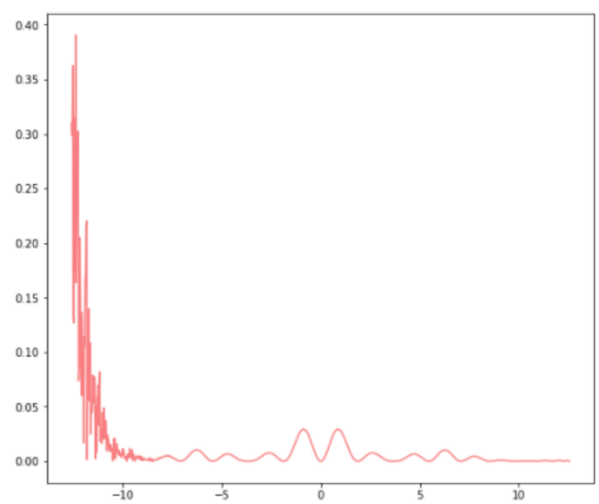


Rys. 6: Wykres różnicy wartości

W tabeli jest jeszcze wartość błędu dla 20 węzłów, jednakże postanowiłam nie brać jej pod uwagę, ponieważ dla takiej ilości wkradają się już duże błędy związane z arytmetyką komputera i obliczenia stały się niedokładne. Poniżej znajduję się wykres funkcji dla takiej liczby węzłów Czebyszewa na którym można zobaczyć co się dzieje z funkcją interpolującą na początku przedziału.



Rys.7: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 20 węzłami czebyszewa



Rys.8: Wykres różnicy wartości

Jak można też zauważyć efekt Runge'go praktycznie nie występuje przy korzystaniu z węzłów Czebyszewa, gdzie dla węzłów równoodległych jest bardzo widoczny i bardzo zmienia on uzyskane wyniki.

WNIOSKI

- Efekt Runge'go jest dużo mniejszy jeśli wykorzystujemy węzły Czebyszewa
- Dla małej liczby węzłów funkcje interpolujące mają identyczne wartości błędów dla węzłów równoodległych i Czebyszewa.
- W metodzie Hermiet'a stosowanie węzłów Czebyszewa również zapobiega występowaniu efektu Runge'go.
- Efekt Runge'go rośnie wraz z zwiększaniem liczby węzłów równoodległych.
- Przy liczbie węzłów większej od 20 wkradają się już błędy związane z arytmetyką komputera, bo stopnie wielomianów stają praktycznie dwa razy większe.
- Porównując jeszcze dwie poprzednie metody (Newtona i Lagrange'a) najlepiej dopasowaną funkcje dawały właśnie te metody dla 30 węzłów Czebyszewa (błędy w obydwu przypadkach były praktycznie takie same).
- Dla wszystkich trzech metod bardziej dopasowane funkcje dostajemy przy używaniu węzłów Czebyszewa.
- Metoda Hermiet'a dawała najlepiej dopasowaną funkcje dla liczby 18 węzłów, jednakże dla większej liczby węzłów, szybko wkradały się błędy związane z arytmetyką komputera.