Aproksymacja

Martyna Olszewska

Treść zadania

Dla $f(x) \ = \ e^{cos(x)}$ (gdzie x jest z przedziału [-4π, 4π]) wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując: aproksymację średniokwadratową trygonometryczną. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

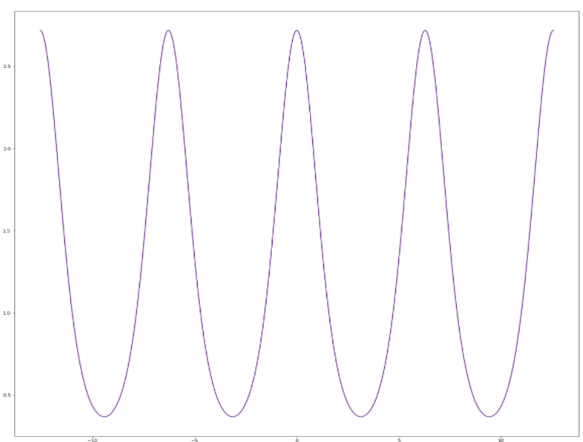
SPECYFIKACJE

Do obliczeń używałam języka python, na systemie operacyjnym Ubuntu 20.04.4 LTS. Procesor komputera to Intel Core i3-4030U CPU @ 1.90GHz × 4 , RAM: 8GB. Do generowania wykresów użyłam biblioteki matplotlib, a dokładniej narzędzia pyplot. Do wyznaczenia równoodległych węzłów użyłam narzędzia linspace z biblioteki numpy. Korzystam również z biblioteki math
(wartość liczby pi, funkcja cosinus, wartość liczby e oraz funkcja rozwiązująca równanie liniowe).

BADANA FUNKCJA

$f(x) \ = \ e^{cos(x)}$

x jest z przedziału [-4π, 4π]



WYNIKI

Aby uzyskać wyniki, które następnie zebrałam w tabeli, uruchomiłam program za każdym dla innej liczby węzłów. Najpierw dla węzłów równoodległych. Wykresy były generowane na podstawie 1000 równoodległych punktów w przedziale [-4π, 4π]. Jednorazowe uruchomienie programu dla danej liczby węzłów i stopnia wielomianu, generowało wykres funkcji aproksymowanej i aproksymującej wraz z zaznaczonymi punktami dyskretyzacji, błąd średniokwadratowy oraz maximum z różnicy wartości obydwu funkcji w tych samych punktach.

Przy wykonywaniu obliczeń wzięto pod uwagę to, że punkty z przedziału muszą być podczas wyliczania wartości wartości funkcji aproksymacji mapowane na przedział [0, 2π]:

$$p(x) \ = \ \frac{2\pi(x-a)}{b-a}$$

OPIS WYKRESÓW

W dalszej części opracowania wykresy porównujące funkcje aproksymowane i aproksymujące są zbudowane z takich samych elementów. Wykres funkcji aproksymowanej jest zaznaczony kolorem fioletowym, natomiast aproksymującej kolorem niebieskim. Różowe punkty to węzły. Wykresy przedstawiający jak rozkładają się różnice między wartościami funkcji na przedziale są oznaczone kolorem różowym.

APROKSYMACJA FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI

Poniższe tabele zawierają wartości błędów uzyskanych aproksymując funkcję wyjściową wielomianami różnych stopni oraz z różną ilością punktów dyskretyzacji.

Ilość punktów	**Stopień funkcji bazowej**				
	3	5	10	20	30
5	4.35376				
8	0.04675	0.10274			
10	0.02963	0.03542	0.04672		
20	0.00742	0.00877	0.01225	4.11434	
30	0.00331	0.0039	0.00544	0.00863	4.24551
50	0.0012	0.0014	0.00196	0.00311	0.0043
100	0.00031	0.00035	0.00049	0.00078	0.00107
200	9,00E-05	9,00E-05	0.00012	0.00019	0.00027

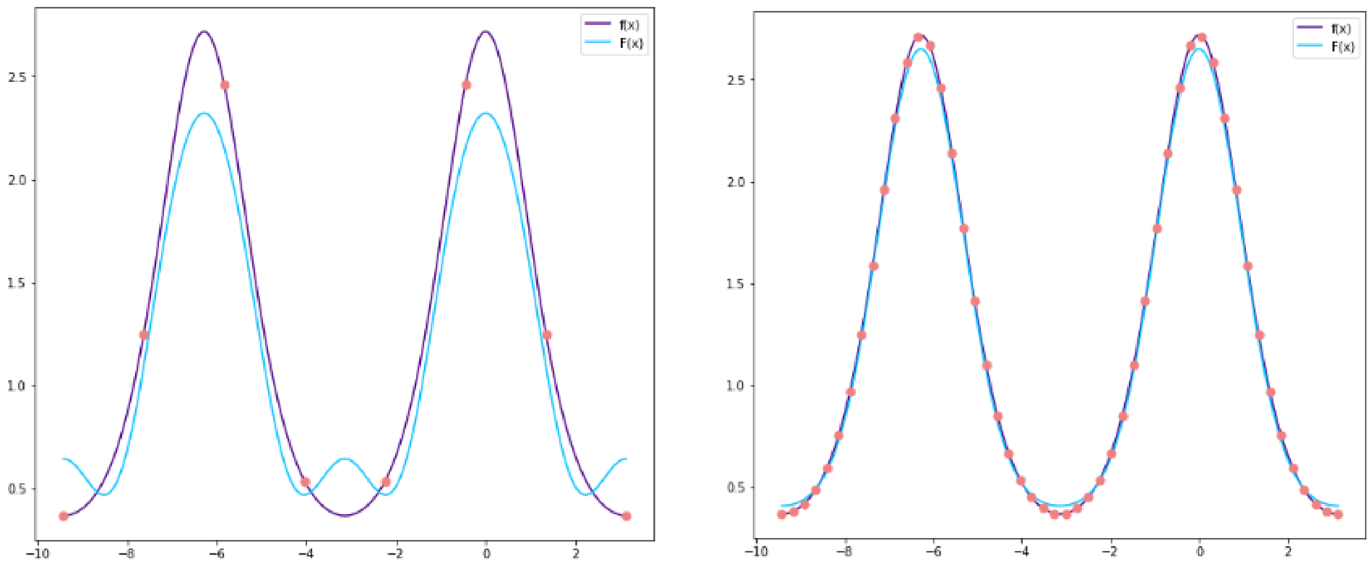
Tabela 1. wartości błędu średniokwadratowego dla różnej ilości punktów dyskretyzacji

Ilość punktów	**Stopień funkcji bazowej**				
	3	5	10	20	30
5	4.67206	9.02089			
8	0.39638	0.66743			
10	0.31411	0.37232	4.83645		
20	0.16007	0.1839	0.36788	4.96793	
30	0.10873	0.12259	0.24525	0.49051	5.00221
50	0.06767	0.07353	0.14715	0.2943	0.44146
100	0.03687	0.03675	0.07358	0.14715	0.22073
200	0.02147	0.01835	0.03679	0.07358	0.11036

Tabela 2. Wartości maximum z różnicy odległości pomiędzy funkcjami dla różnej ilości punktów dyskretyzacji

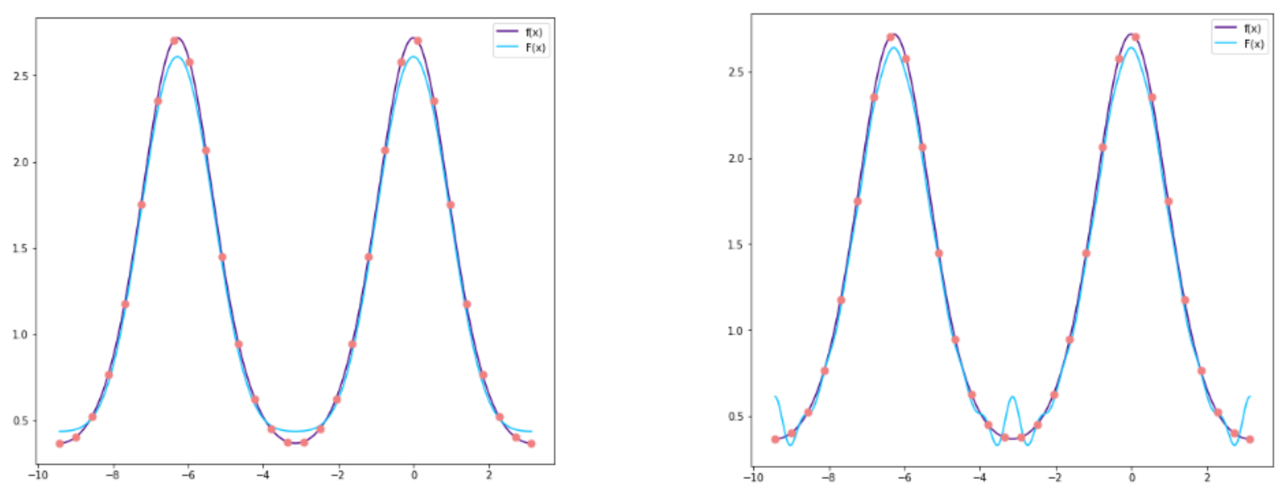
Analizując powyższe tabele można zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby punktów rośnie również dokładność.Można zauważyć również, że dla takiej samej ilości punktów dyskretyzacji, ale różnym stopniu funkcji bazowych błąd rośnie.
Kiedy stopień funkcji bazowych była mniejsza od ilości punktów błąd był bardzo duży, dlatego, że pomiędzy tymi wartościami powinna być zależność $m < \frac{N-1}{2}$, gdzie m to stopień wielomianu, a N to liczba punktów dyskretyzacji.

GRAFICZNE PRZEDSTAWIENIE



Rys 1.Funkcje aproksymujące dla stopnia 3 oraz ilości punktów odpowiednio 8 oraz 30

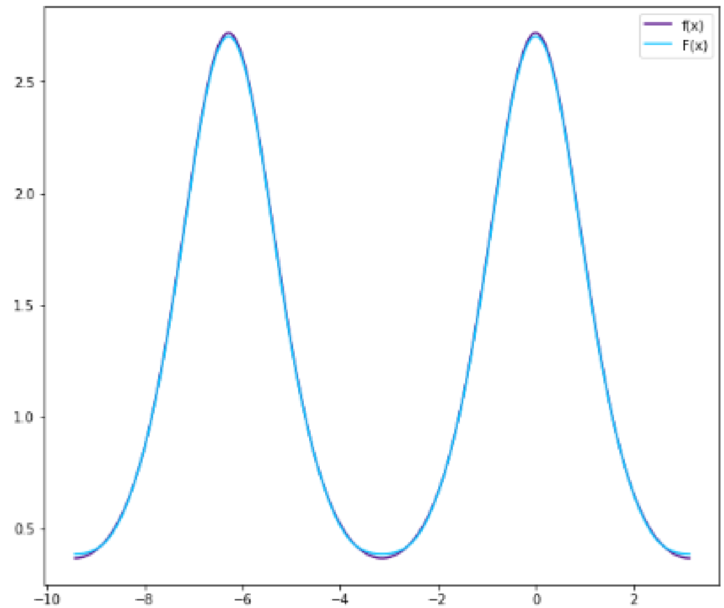
Można zauważyć, że kiedy mamy większą liczbę punktów dla takiego samego stopnia to funkcja aproksymująca staje się dokładniejsza.



Rys 2.Funkcje aproksymujące dla stopnia 3 i 10 oraz ilości punktów 30

Analizując powyższe wykresy można spostrzec, że dla takiej samej ilości punktów i rosnącej liczby liczby funkcji bazowych dokładność funkcji aproksymującej maleje.

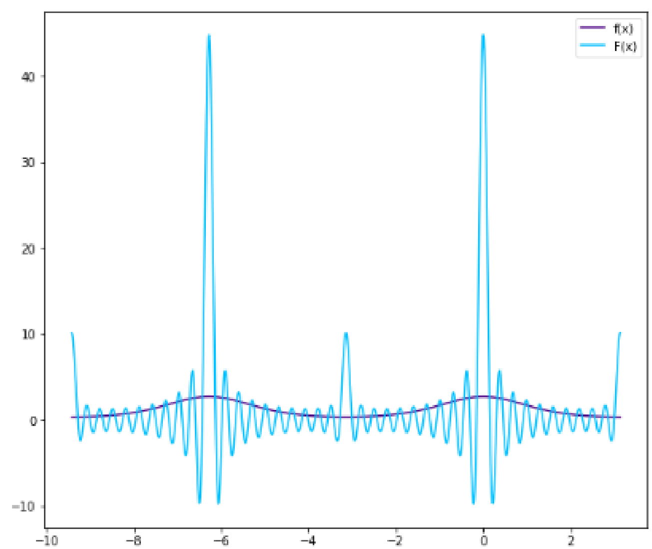
Najlepsze dopasowanie uzyskałam przy pomocy 200 punktów i z stopniem równym 5.



Rys 3. Funkcja aproksymująca dla 200 punktów i maksymalny stopień 5

Próbując dokonać obliczeń dla jeszcze większej ilości punktów wartość błędu staje się mniejsza, ale jest to już nieznaczna różnica.

Jeśli ilość punktów będzie mniejsza o połowę od ilości funkcji bazowych wtedy, aproksymacja nie spełnia swojej funkcji i wartość błędu staje się bardzo duża. Na przykład dla ilości punktów równej 5 i ilości funkcji bazowych równej 20 błąd średniokwadratowy wynosi już ponad 40.



Rys 4. Funkcja aproksymująca dla 5 punktów i ilości funkcji bazowych 20

WNIOSKI

- Porównując funkcje aproksymujące wielomianami oraz funkcjami trygonometrycznymi, można stwierdzić, że druga opcja jest minimalnie lepsza, może to wynikać z tego, że funkcja aproksymowana też jest w postaci funkcji trygonometrycznej.
- Błąd razem ze zwiększającą się liczbą punktów maleje
- Dla stałej liczby punktów, ale rosnącej liczby funkcji bazowych błąd rośnie.
- Aby przybliżenie stało się dokładnie to musi zostać spełniona zasada, że liczba punktów musi być większa od liczby funkcji bazowych