Funkcje sklejane

Martyna Olszewska

Treść zadania

Dla $f(x) = e^{cos(x)}$ (gdzie x jest z przedziału [-4π, 4π]) wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych. Podobnie jak poprzednio określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby przedziałów i dla różnych warunków brzegowych. Porównać interpolację funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki. Opisać dokładnie przyjęte warunki brzegowe.

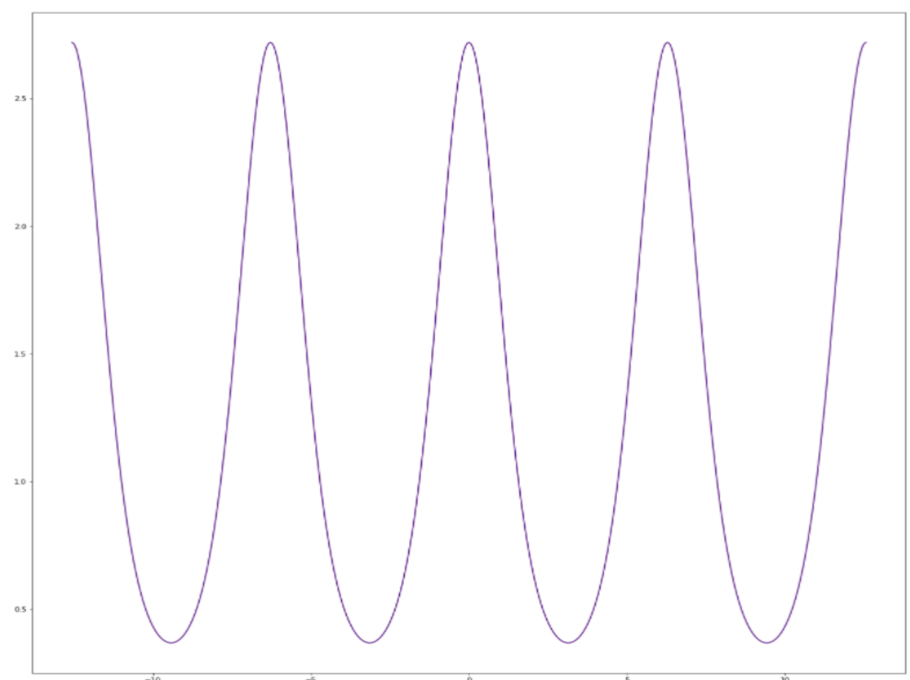
SPECYFIKACJE

Do obliczeń używałam języka python, na systemie operacyjnym Ubuntu 20.04.4 LTS. Procesor komputera to Intel Core i3-4030U CPU @ 1.90GHz × 4 , RAM: 8GB. Do generowania wykresów używałam biblioteki matplotlib, a dokładniej narzędzia pyplot. Do wyznaczenia równoodległych węzłów używałam narzędzia linspace z biblioteki numpy. Korzystam również z biblioteki math (wartość liczby pi, funkcja cosinus).

BADANA FUNKCJA

$f(x) = e^{cos(x)}$

x jest z przedziału [-4π, 4π]



WYNIKI

Aby uzyskać wyniki, które następnie zebrałam w tabeli, uruchomiłam program za każdym dla innej liczby węzłów. Najpierw dla węzłów równoodległych.Wykresy były generowane na podstawie 1000 równoodległych punktów w przedziale [-4π, 4π]. Jednorazowe uruchomienie programu dla danej liczby węzłów, generowało wykres funkcji interpolowanej i interpolującej wraz z zaznaczonymi węzłami, błąd średniokwadratowy oraz maximum z różnicy wartości obydwu funkcji w tych samych punktach.

OPIS WYKRESÓW

W dalszej części opracowania wykresy porównujące funkcje interpolowane i interpolujące są zbudowane z takich samych elementów. Wykres funkcji f(x) jest zaznaczony kolorem fioletowym, natomiast F(x) drugiego stopnia kolorem niebieskim. F(x) stopnia trzeciego jest kolorem żółtym. Różowe punkty to węzły. Wykresy przedstawiający jak rozkładają się różnice między wartościami funkcji na przedziale są oznaczone odpowiednio dla drugiego i trzeciego stopnia kolorami niebieskim i żółtym.

WARUNKI BRZEGOWE

Splajn naturalny jest uzyskiwany przez dodanie do definicji funkcji sklejanej dwóch kolejnych warunków - drugie pochodne na końcach przedziału, na którym jest określony splajn muszą wynosić 0, zatem $f''\left(x_0\right) = 0 = f''\left(x_n\right)$. Drugim warunkiem jest splajn paraboliczny. W tym rodzaju funkcje określone na pierwszym i ostatnim przedziale czyli $f'_0(x)\ oraz\ f'_{n-1}(x)$ są zdefiniowane jako funkcje kwadratowe. Dla funkcji sklejanej drugiego stopnia drugim warunkiem brzegowym jest pierwsza funkcja liniowa. Splajn naturalny w tym przypadku jest uzyskiwany przez wyzerowanie pierwszych pochodnych.

FUNKCJE SKLEJANE DRUGIEGO STOPNIA

Poniższa tabela zawiera wartości błędów uzyskanych przy użyciu funkcji sklejanych stopnia drugiego dla dwóch różnych warunków brzegowych.

	Splajn naturalny		Pierwsza funkcja liniowa	
Liczba węzłów	**Max z różnicy odległości**	**MSE**	**Max z różnicy odległości**	**MSE**
4	3.1674	1.93771	3.21486	2.36242
7	3.16756	2.18301	3.16756	2.08428
10	2.45577	1.42772	2.45577	1.52711
12	0.87669	0.14638	2.16737	0.25395
15	0.88491	0.2244	1.90564	0.31316
20	0.35369	0.03096	1.42647	0.07623
25	0.99253	0.1988	1.05994	0.22044
30	0.06601	0.00093	0.80313	0.01176
35	0.05327	0.00029	0.62171	0.006

Tabela 1. Wartości błędów MSE i maximum z różnicy odległości dla funkcji sklejanych drugiego stopnia.

MSE - błąd średniokwadratowy dla 1000 punktów

FUNKCJE SKLEJANE TRZECIEGO STOPNIA

Poniższa tabela zawiera wartości błędów uzyskanych przy użyciu funkcji sklejanych stopnia trzeciego dla dwóch różnych warunków brzegowych.

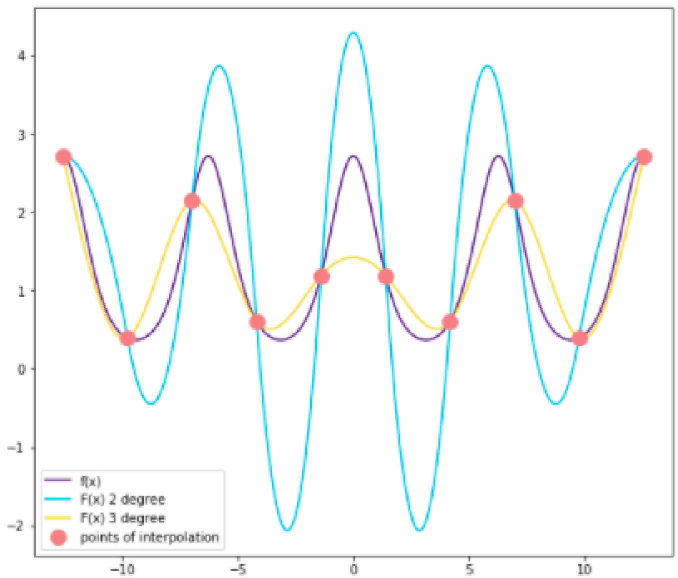
	Splajn naturalny		Warunek paraboliczny	
Liczba węzłów	**Max z różnicy odległości**	**MSE**	**Max z różnicy odległości**	**MSE**
4	2, 4283	1.18768	2, 4283	1.13528
7	2.53829	1.22802	2.53829	1.19554
10	1.29671	0.20578	1.29671	0.26699
12	0.85346	0.08028	0.85346	0.08971
15	0.56603	0.04492	0.56603	0.04898
20	0.26536	0.00929	0.30564	0.0105
25	0.18774	0.00175	0.17072	0.00149
30	0.13023	0.00078	0.08929	0.00047
35	0.09204	0.0003	0.04394	0.00011

Tabela 2. Wartości błędów MSE i maximum z różnicy odległości dla funkcji sklejanych trzeciego stopnia.

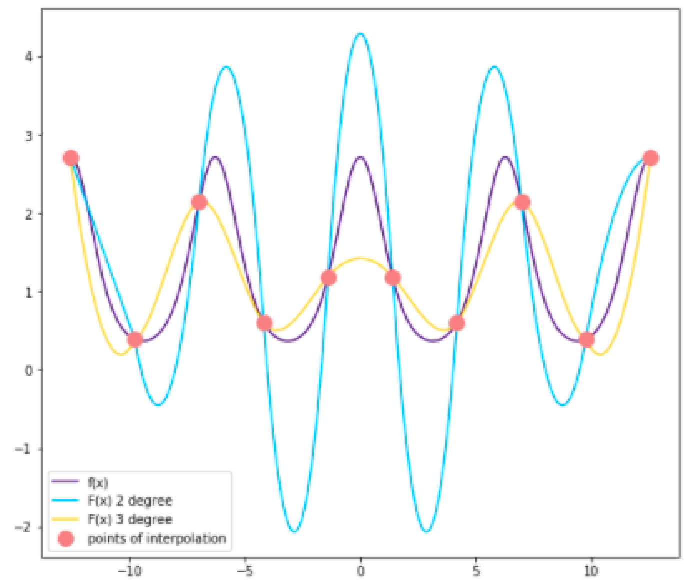
MSE - błąd średniokwadratowy dla 1000 punktów

Analizując powyższe tabele można stwierdzić, że wraz ze wzrostem liczby węzłów dokładność funkcji interpolujących rośnie zarówno dla funkcji stopnia drugiego jak i trzeciego.

Można również zauważ, że warunki brzegowe nieznacznie zmieniają otrzymane wyniki. Różnice w funkcjach interpolujacych zauważamy w okolicach krańców przedziałów.

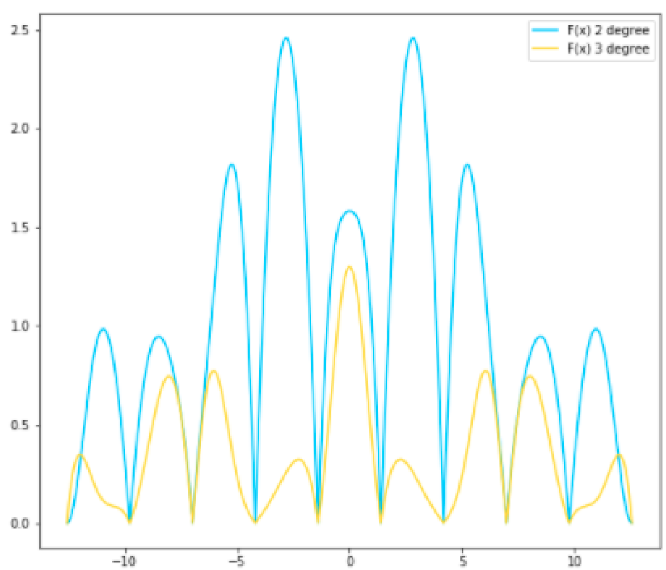


Rys. 1 Wykresy dla 10 węzłów . Naturalny Splajn

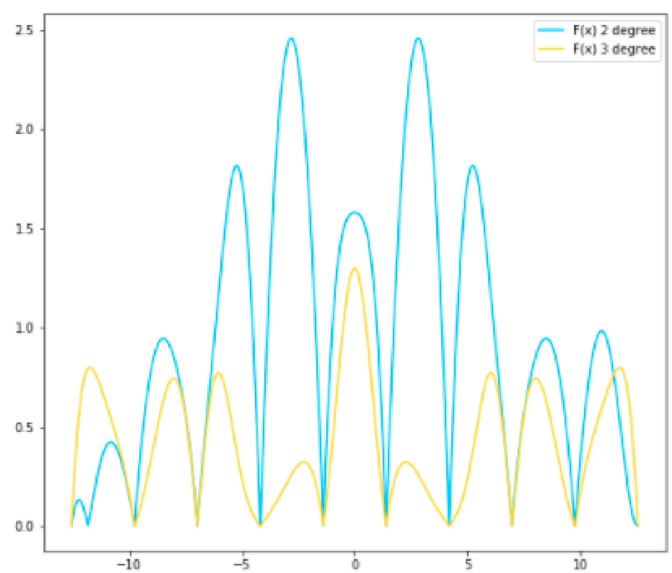


Rys 2. Wykresy dla 10 węzłów. Drugie warunki brzegowe

Jak widać na powyższych rysunkach funkcje interpolujące różnią się tylko przy końcach przedziału. Dla funkcji trzeciego stopnia z warunkiem parabolicznym zauważamy, że wykres jest bardziej wklęsły niż dla splajnu naturalnego. Dla funkcji stopnia drugiego możemy zauważyć, że dla warunku z funkcją liniową wykres rzeczywiście staje się prostą przy lewym brzegu, gdzie dla warunku naturalnego jest wypukły.



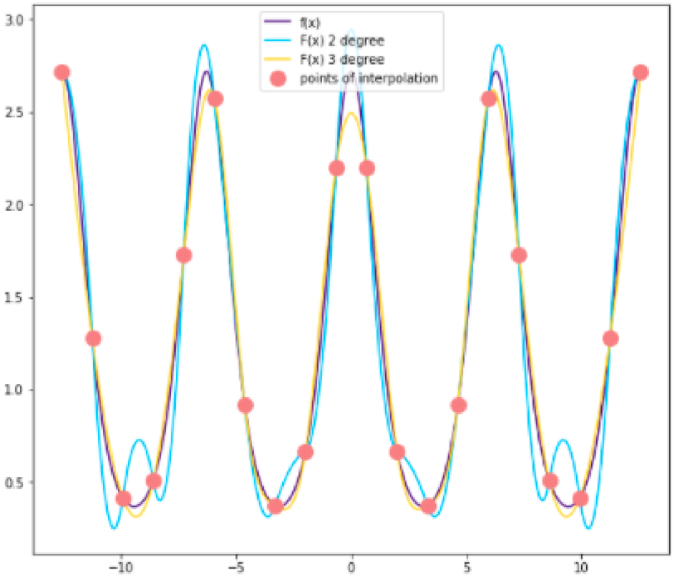
Rys. 3 Różnice odległości dla 10 węzłów . Naturalny Splajn



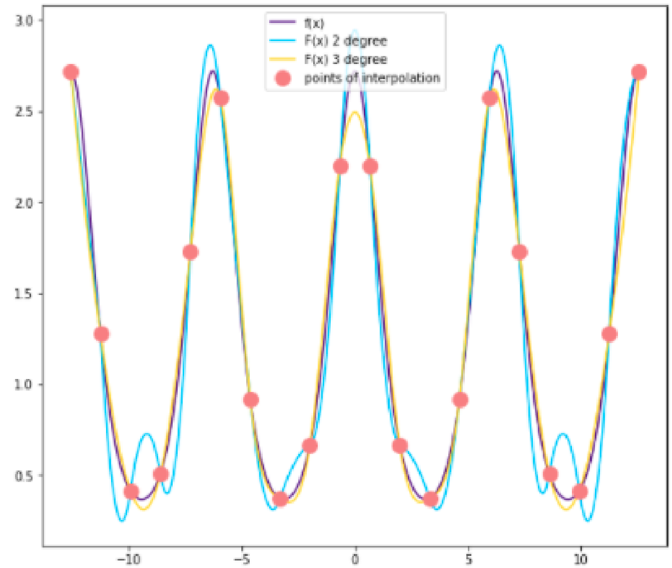
Rys 4. Różnice odległości dla 10 węzłów. Drugie warunki brzegowe

Wartości błędów dla obydwu warunków brzegowych są bardzo podobne. Różnią się tylko przy końcach przedziałów. Dla funkcji stopnia trzeciego te wartości są tam większe dla drugiego warunku.

Dla 20 węzłów dokładność dla funkcji stopnia trzeciego staje się już bardzo dobra. Dla stopnia drugiego wartości posiadają wahania między węzłami. Poniższe rysunki ilustrują ten efekt.



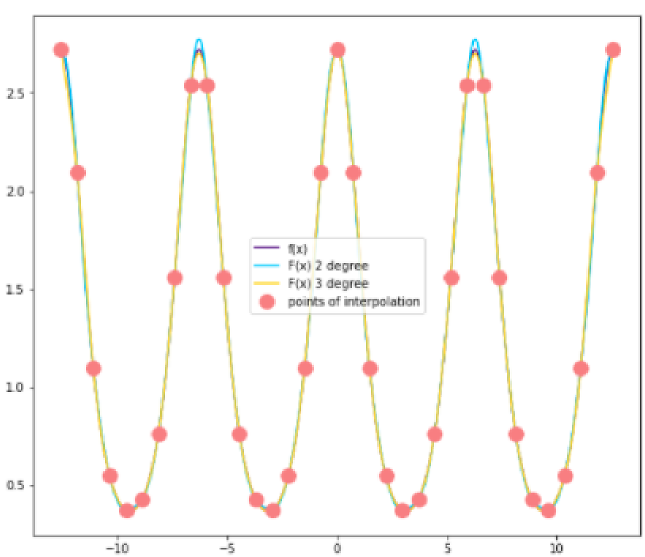
Rys. 5 Wykresy dla 20 węzłów . Naturalny Splajn



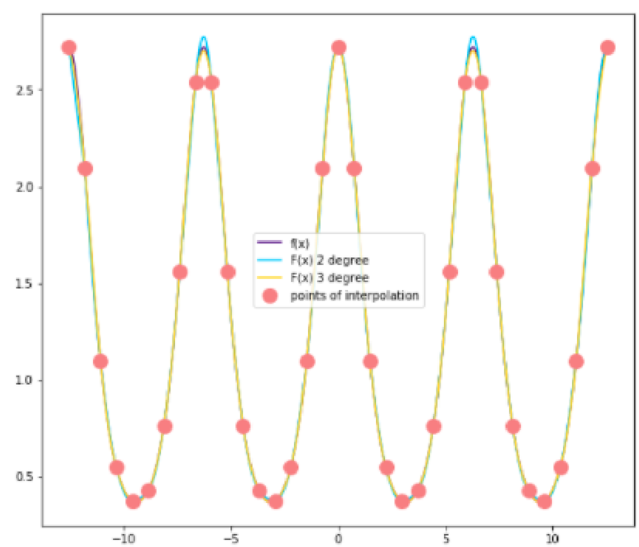
Rys 6. Wykresy dla 20 węzłów. Drugie warunki brzegowe

Jak widać różnice pomiędzy obydwoma rysunkami są niemal niezauważalne. Tak jak dla 10 węzłów, można je dostrzec jedynie na krańcach przedziałów.

Najlepszą dokładność funkcji interpolującej stopnia trzeciego otrzymałam dla ilości 35 węzłów z warunkiem parabolicznym. Dla funkcji stopnia drugiego najdokładniejszy wykres jest dla warunku naturalnego i ilości również 35 węzłów. Różnice między wykresami są znowu praktycznie niezauważalne.

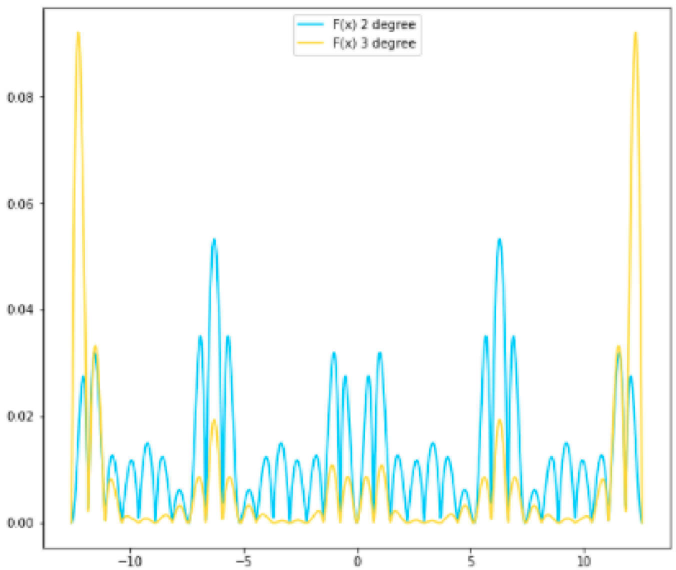


Rys. 7 Wykresy dla 35 węzłów . Naturalny Splajn

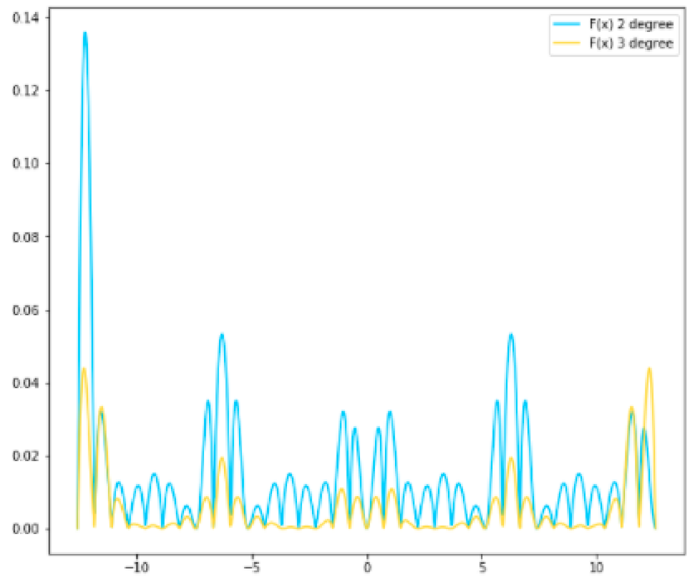


Rys 8. Wykresy dla 35 węzłów. Drugie warunki brzegowe

Dla 35 węzłów wartości różnicy pomiędzy wartościami funkcji interpolujacych i interpolowanej są bardzo małe. Dla funkcji trzeciego stopnia z warunkiem naturalnym te wartości są na podobnym poziomie na przedziale, jednakże na krańcach są wysokie. Dla funkcji drugiego stopnia wartości te nie odbiegają tak bardzo od siebie. Dla porównania dla warunku brzegowego drugiego na lewym końcu przedziału wartość błędu bardzo odstaje od wartości na pozostałej części przedziału. Dla funkcji trzeciego stopnia wartości błędów są symetryczne.



Rys. 9 Różnice odległości dla 35 węzłów . Naturalny Splajn



Rys. 10 Różnice odległości dla 35 węzłów. Drugie warunki brzegowe

WNIOSKI

- Funkcja trzeciego stopnia dla obydwu warunków brzegowych przybliża lepiej funkcje interpolowaną niż funkcja drugiego stopnia.
- Dla dużej liczby przedziałów wartości błędów stają się podobne i różnice między dwoma funkcjami interpolującymi są niewielkie.
- Im większa liczba węzłów tym dokładność jest większa.
- W porównaniu do interpolacji Lagrange'a i Newtona nie występuje tu efekt Runge'go dla węzłów równoodległych.
- Nie trzeba używać węzłów Czebyszewa.
- Funkcja drugiego stopnia ma charakterystyczne wahania pomiędzy węzłami.
- Warunki brzegowe nie mają znacznego wpływu na przebieg wykresu funkcji.