

---

# Aproksymacja

Martyna Olszewska

## Treść zadania

Dla  $f(x) = e^{\cos(x)}$  (gdzie  $x$  jest z przedziału  $[-4\pi, 4\pi]$ ) wyznaczyć jej wartości w  $n$  dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując: • aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

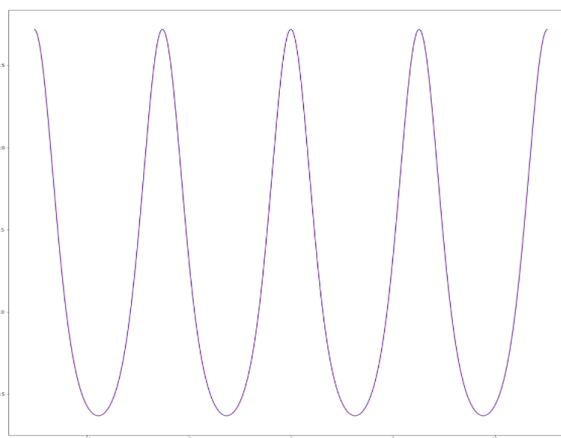
## SPECYFIKACJE

Do obliczeń użyłam języka python, na systemie operacyjnym Ubuntu 20.04.4 LTS. Procesor komputera to Intel Core i3-4030U CPU @ 1.90GHz  $\times$  4, RAM: 8GB. Do generowania wykresów użyłam biblioteki matplotlib, a dokładniej narzędzia pyplot. Do wyznaczenia równoodległych węzłów użyłam narzędzia linspace z biblioteki numpy. Korzystam również z biblioteki math (wartość liczby pi, funkcja cosinus, wartość liczby e oraz funkcja rozwiązująca równanie liniowe).

## BADANA FUNKCJA

$$f(x) = e^{\cos(x)}$$

$x$  jest z przedziału  $[-4\pi, 4\pi]$



## WYNIKI

Aby uzyskać wyniki, które następnie zebrałam w tabeli, uruchomiłam program za każdym dla innej liczby węzłów. Najpierw dla węzłów równoodległych. Wykresy były generowane na podstawie 1000 równoodległych punktów w przedziale  $[-4\pi, 4\pi]$ . Jednorazowe uruchomienie programu dla danej liczby węzłów i stopnia wielomianu, generowało wykres funkcji aproksymowanej i aproksymującej wraz z zaznaczonymi punktami dyskretyzacji, błąd średniokwadratowy oraz maximum z różnicy wartości obydwu funkcji w tych samych punktach.

## OPIS WYKRESÓW

W dalszej części opracowania wykresy porównujące funkcje aproksymowane i aproksymujące są zbudowane z takich samych elementów. Wykres funkcji aproksymowanej jest zaznaczony kolorem fioletowym, natomiast aproksymującej kolorem niebieskim. Różowe punkty to węzły. Wykresy przedstawiający jak rozkładają się różnice między wartościami funkcji na przedziale są oznaczone kolorem różowym.

## APROKSYMACJA WIELOMIANAMI JAKO FUNKCJAMI BAZOWYMI

Poniższe tabele zawierają wartości błędów uzyskanych aproksymując funkcję wyjściową wielomianami różnych stopni oraz z różną ilością punktów dyskretyzacji.

Max Stopień	Ilość punktów					
	10	15	20	25	30	35
3	0,78586	0,70508	0,69268	0,68696	0,68368	0,68158
5	0,66191	0,63788	0,63318	0,63184	0,63106	0,6305
6	0,55262	0,50246	0,4981	0,49505	0,4928	0,49114
8	0,55262	0,54347	0,49716	0,49505	0,48891	0,4863
11		2,40899	0,25239	0,49214	0,48891	0,2396
12		2,40899	0,02711	0,24472	0,24131	0,07699
14		179,92163	2,20203	0,10123	0,08143	0,02718
16		1156,9248	2358,80724	0,16042	0,02642	0,03037
19		8034,11542	2360,22227	1,07725	4,588551	0,02378
21			8286,8739	237,59822	4,85581	0,32116
24			541535,446	1760,65573	2105,57759	8,98838
27				12851,9781	63006,48332	19,8684
30					7576,69261	247454,16165
32					245609,3985	544,85461
34						1621,20239

Tabela 1. wartości błędu średniokwadratowego dla różnej ilości punktów dyskretyzacji

Max Stopień	Ilość punktów					
	10	15	20	25	30	35
3	1,82939	1,63053	1,59702	1,58019	1,56936	1,56145
5	1,74408	1,73874	1,70451	1,69442	1,68891	1,68498
6	2,06838	1,64435	1,66255	1,6569	1,65799	1,6606
8	2,06838	1,47365	1,58842	1,6569	1,6057	1,60533
11	24,36067	2,29248	0,97934	1,60163	1,6057	1,03248
12		6,16375	2,04859	1,01258	1,02682	0,614
14		54,41593	0,33334	1,05585	0,74411	0,31591
16		143,15323	6,99407	0,3738	0,3122	0,43248
19		381,15782	240,33685	1,91324	0,76331	0,38913
21			445,83098	88,73598	0,38181	3,4482
24			3679,33095	229,60219	13,53824	19,56263
27				644,57597	292,98866	29,53051
30					1521,5034	3527,35261
32					3138,80855	156,31856
34						371,51508

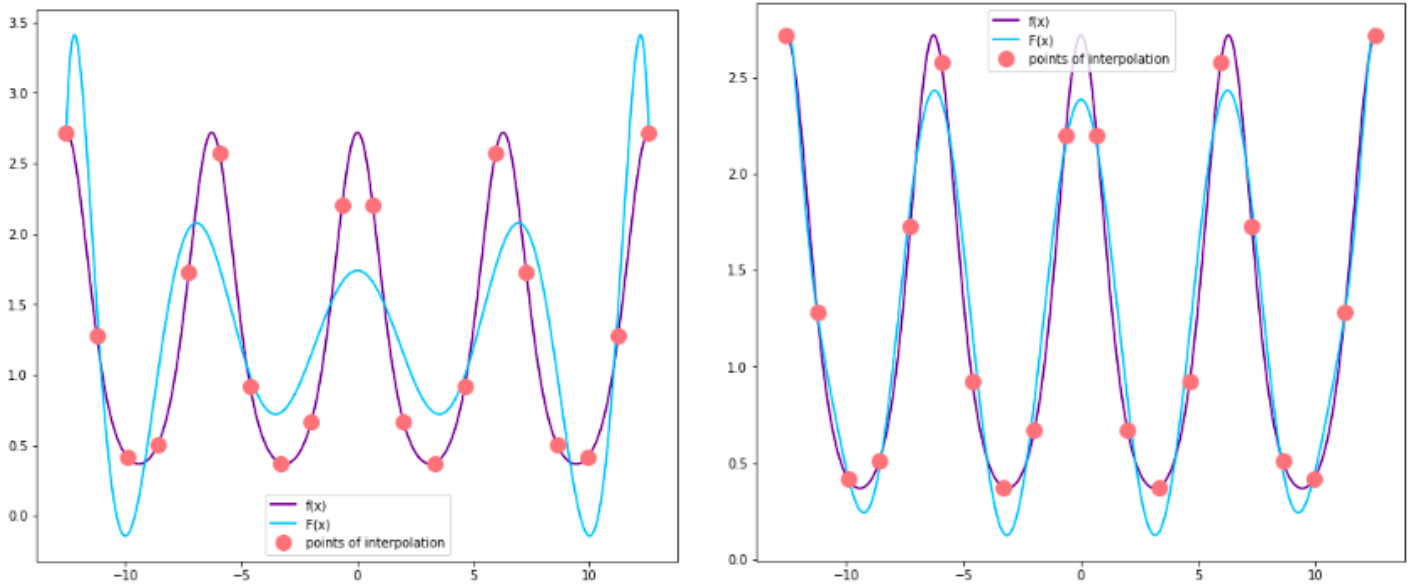
Tabela 2. Wartości maximum z różnicy odległości pomiędzy funkcjami dla różnej ilości punktów dyskretyzacji

Analizując powyższe tabele można zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby punktów rośnie również dokładność, jednakże kiedy maksymalne stopnie są bliskie liczbie punktów to błąd znowu rośnie i staje się bardzo duży.

Można zauważyć również, że dla takiej samej funkcji bazowej ilość punktów dyskretyzacji nieznacznie zmienia błąd dla małego maksymalnego stopnia.

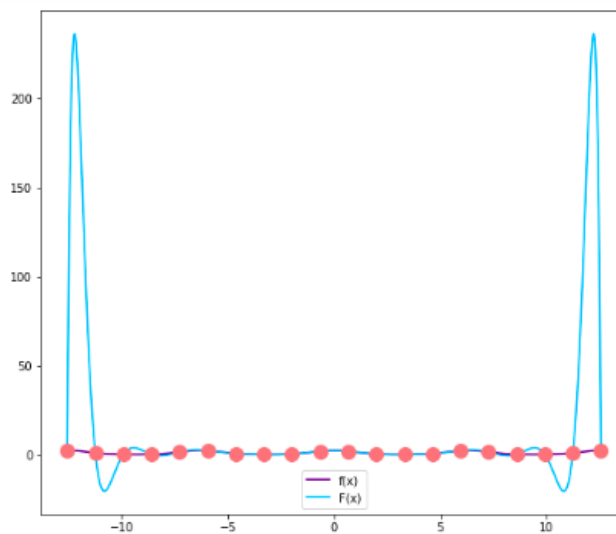
Kiedy maksymalny stopień wielomianu był większy od ilości punktów, błędy były bardzo duże, zatem funkcja nie aproksymuje dobrze.

## GRAFICZNE PRZEDSTAWIENIE



Rys 1. Funkcje aproksymujące dla 20 punktów i maksymalny stopień odpowiednio 10 i 15

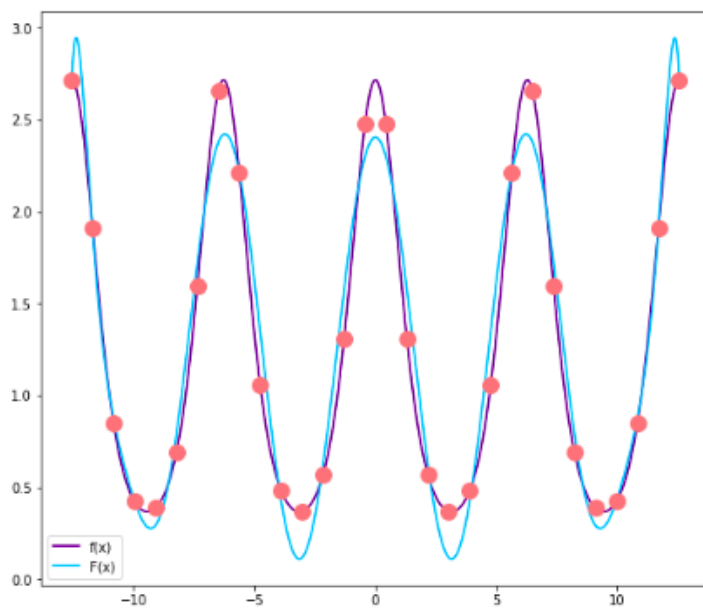
Można zauważyć, że kiedy mamy większy maksymalny stopień wielomianu to dokładność funkcji aproksymującej jest większa.



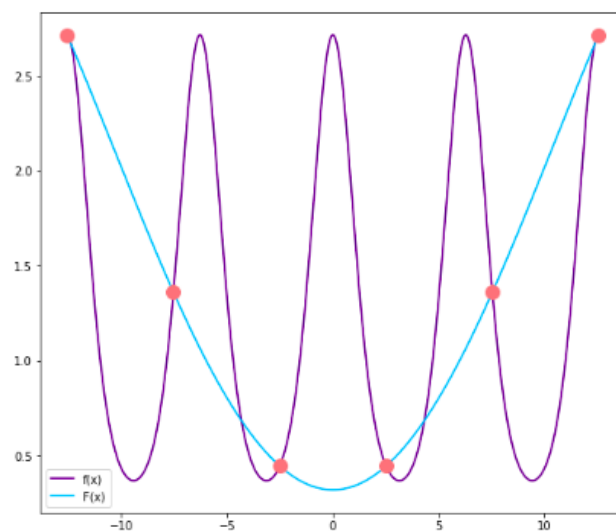
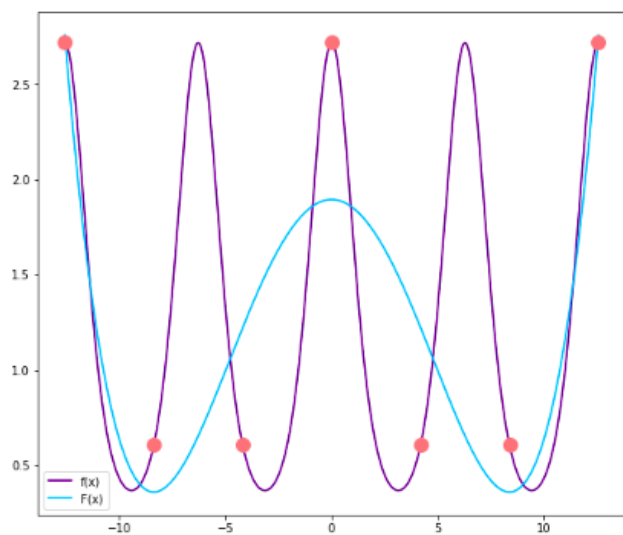
Rys 2. Funkcja aproksymująca dla 20 punktów i maksymalny stopień 18

Dla maksymalnego stopnia 18 funkcja posiada bardzo duży błąd przy końcach przedziałów, co wizualnie przypomina efekt Runge'go przy interpolacji.

Najlepsze dopasowanie uzyskałam przy pomocy 30 punktów i z maksymalnym stopniem równym 15.



Rys 3. Funkcja aproksymująca dla 30 punktów i maksymalny stopień 15



Rys 3. Funkcja aproksymująca dla 7 punktów i 6 punktów

---

## WNIOSKI

- Dla stałej liczby punktów przybliżenie jest dokładniejsze przy rosnącej liczbie funkcji bazowych.
- Kiedy maksymalny stopień wielomianu jest większy od liczby węzłów aproksymacji to funkcja aproksymująca nie spełnia swojej roli.
- Dla liczby węzłów mniejszej niż 7 funkcja ma bardzo słabą dokładność, więc nie ma sensu używać zbyt małej liczby.
- Aby przybliżenie stało się dokładne to musi zostać spełniona zasada, że liczba punktów musi być większa od liczby funkcji bazowych. Najlepsze wyniki uzyskałam kiedy liczba funkcji bazowych była około połowę mniejsza od liczby punktów dyskretyzacji.