Interpolacja

Martyna Olszewska

Treść zadania

Dla $f(x) = e^{cos(x)}$ (gdzie x jest z przedziału [-4π, 4π]) wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów . Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa . Ocenić dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję, poszukać wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukać stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go. Porównać z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

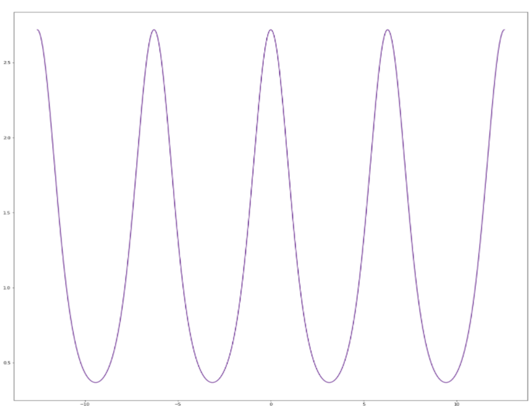
SPECYFIKACJE

Do obliczeń używałam języka python, na systemie operacyjnym Ubuntu 20.04.4 LTS. Procesor komputera to Intel Core i3-4030U CPU @ 1.90GHz × 4 , RAM: 8GB. Do generowania wykresów używałam biblioteki matplotlib, a dokładniej narzędzia pyplot. Do wyznaczenia równoodległych węzłów używałam narzędzia linspace z biblioteki numpy. Korzystam również z biblioteki math (wartość liczby pi, funkcja cosinus).

BADANA FUNKCJA

$f(x) = e^{cos(x)}$

x jest z przedziału [-4π, 4π]



WYNIKI

Aby uzyskać wyniki, które następnie zebrałam w tabeli, uruchomiłam program za każdym dla innej liczby węzłów. Najpierw dla węzłów równoodległych, następnie dla węzłów Czebyszewa. Wyznaczałam wielomian interpolujący w dwóch postaciach- Lagrange'a i Newtona. Wykresy były generowane na podstawie 1000 równoodległych punktów w przedziale [-4π, 4π]. Jednorazowe uruchomienie programu dla danej liczby węzłów, generowało wykres funkcji interpolowanej i interpolującej wraz z zaznaczonymi węzłami, błąd średniokwadratowy oraz maximum z różnicy wartości obydwu funkcji w tych samych punktach.

OPIS WYKRESÓW

W dalszej części opracowania wykresy porównujące funkcje interpolowane i interpolujące są zbudowane z takich samych elementów. Wykres funkcji f(x) jest zaznaczony kolorem fioletowym, natomiast F(x) kolorem niebieskim. Różowe punkty to węzły. Wykresy przedstawiający jak rozkładają się różnice między wartościami funkcji na przedziale są oznaczone kolorem różowym.

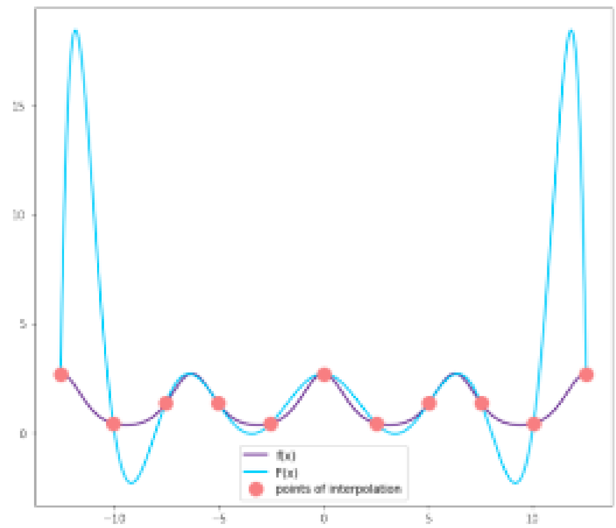
POSTAĆ LAGRANGE'A

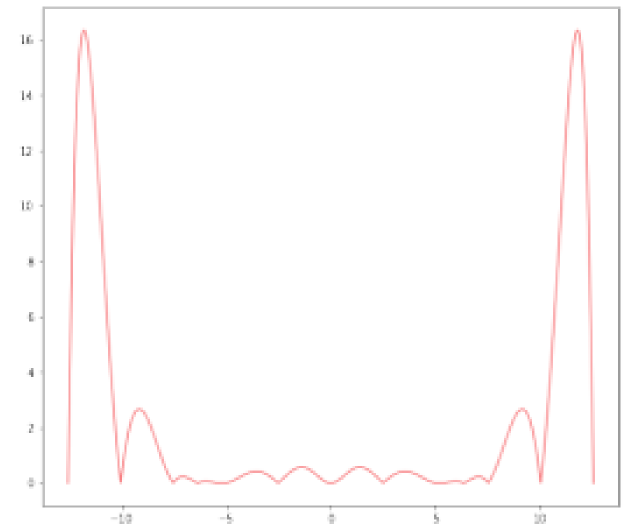
Poniższa tabela zawiera wartości błędów uzyskanych przy użyciu metody Lagrange'a .

	Węzły równoodległe		Węzły Czebyszewa	
Liczba węzłów	**Max z różnicy odległości**	**MSE**	**Max z różnicy odległości**	**MSE**
3	2.3755026388744382	1.1221272278600862	1.757344543996716	0.7293290694747262
5	2.398555441361721	1.1896082518311286	2.570007931387028	1.2561026000605076
7	2.200579250671337	0.8065630130042443	2.9736406682798546	0.9114613873532773
10	16.341121394814884	24.360670503218607	1.4417623553786267	0.45358251647227915
15	13.540590326635986	10.831421252409823	0.6366745625433965	0.05444760898618177
20	1109.1387259570827	48810.18995125597	0.4725816751057548	0.043464087204890936
25	1211.5087697815675	45594.062710948725	0.21685791967736234	0.0043724719670455645
30	87856.26055843124	191532153.96628693	0.07895847250598731	0.001177084622333799

MSE - błąd średniokwadratowy dla 1000 punktów

Analizujac tabele możemy łatwo zauważyć w którym miejscu pojawia się już efekt Runge'go. Jest to już 10 węzłów.. Na wykresie poniżej możemy zaobserwować ten efekt. Wykres po prawej stronie pokazuje jak rozkładają się różnice między wartościami funkcji na przedziale.

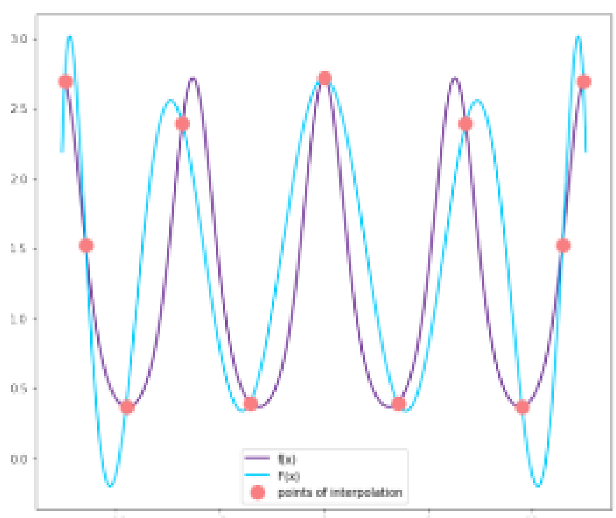


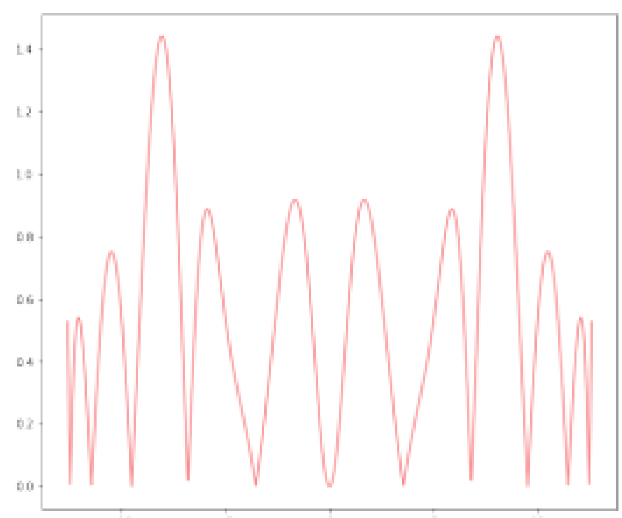


Rys.1: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 10 węzłami równoodległymi

Rys.2: Wykres różnicy wartości

Obserwując wykresy dla takiej samej ilości węzłów, ale przy rozmieszczeniu Czebyszewa widzimy, że różnice te są znacznie mniejsze i ich rozpiętość znajduje się w o wiele mniejszym zakresie . Zatem dokładność uzyskanych wyników jest większa.

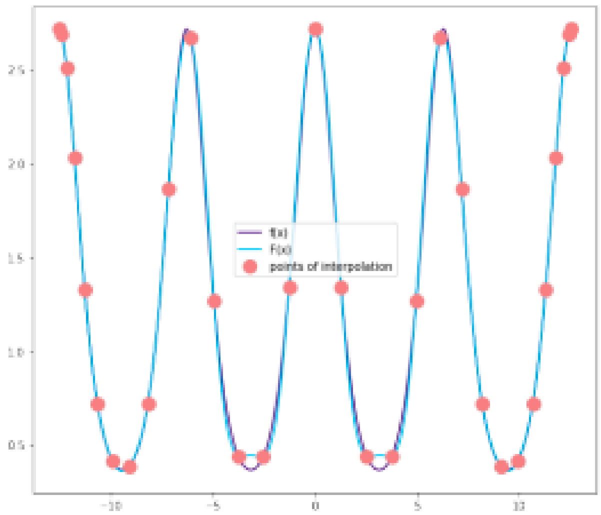


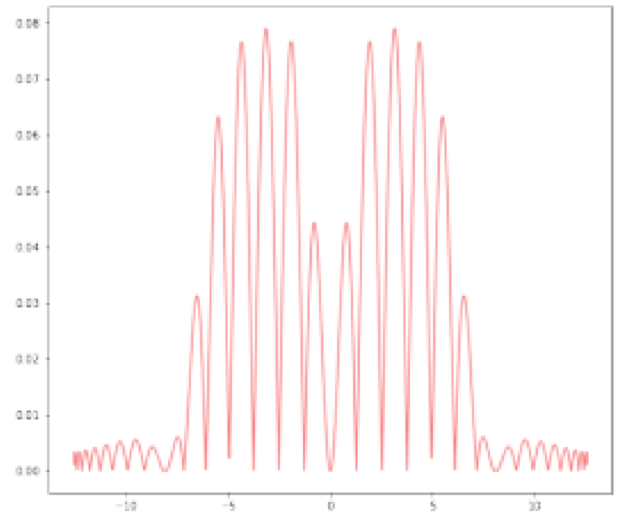


Rys.3: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 10 węzłami czebyszewa

Rys.4: Wykres różnicy wartości

Najlepszą dokładność przybliżenia uzyskałam dla 30 węzłów Czebyszewa. Jak widać na poniższym wykresie błędy nie przekraczają wartości 0,08.



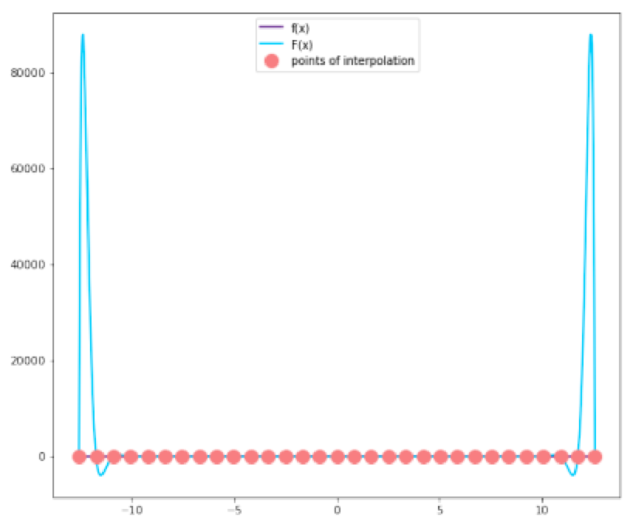


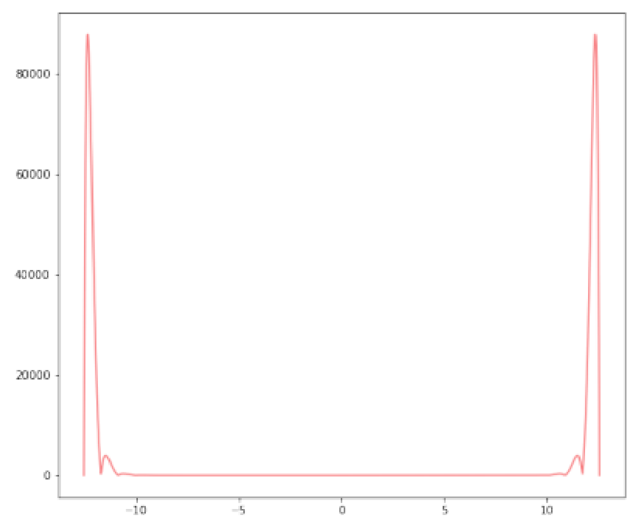
Rys 5: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 30 węzłami czebyszewa

Rys. 6: Wykres różnicy wartości

Jak można też zauważyć efekt Runge'go praktycznie nie występuje przy korzystaniu z węzłów Czebyszewa, gdzie dla węzłów równoodległych jest bardzo widoczny i bardzo zmienia on uzyskane wyniki.

Dla porównania wykres dla takiej samej ilości węzłów, ale równoodległych wygląda tak:





Rys.7: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 30 węzłami równoodległymi

Rys.8: Wykres różnicy wartości

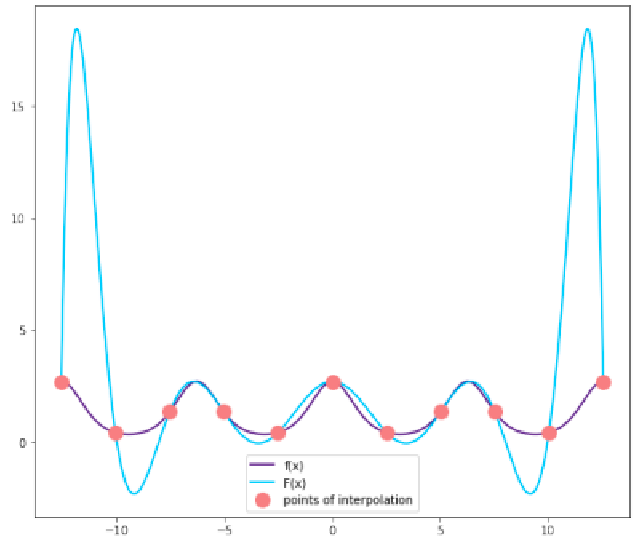
POSTAĆ NEWTONA

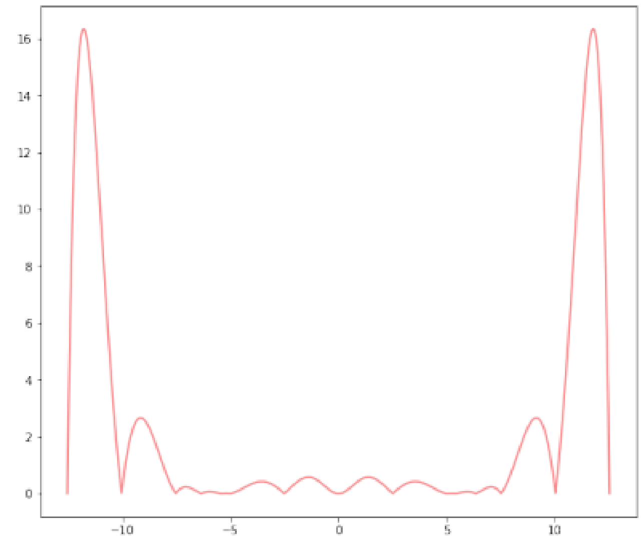
Poniższa tabela zawiera wartości błędów uzyskanych przy użyciu metody Lagrange'a .

	Węzły równoodległe		Węzły Czebyszewa	
Liczba węzłów	**Max z różnicy odległości**	**MSE**	**Max z różnicy odległości**	**MSE**
3	2.375502638874438	1.1221272278600862	1.757344543996716	0.7293290694747262
5	2.3985554413617214	1.1896082518311288	2.570007931387028	1.2561026000605078
7	2.200579250671337	0.8065630130042415	2.9736406682798573	0.9114613873532758
10	16.341121394814945	24.36067050321905	1.441762355378621	0.4535825164722645
15	13.54059032663595	10.831421252338037	0.6366745625435928	0.0544476089861459
20	1109.1387259618523	48810.18995126504	0.4725816751372984	0.04346408720409221
25	1211.5087699750952	45594.06271749676	0.2168579196765003	0.00437247189906436
30	87856.26056504193	191532154.04286712	0.0789584725074449	0.00117708464439004

MSE - błąd średniokwadratowy dla 1000 punktów

Podobnie jak korzystając z metody Lagrange’a zauważamy efekt Runge’go przy ilości około 10 węzłów równoodległych. Na wykresie poniżej możemy zaobserwować ten efekt.

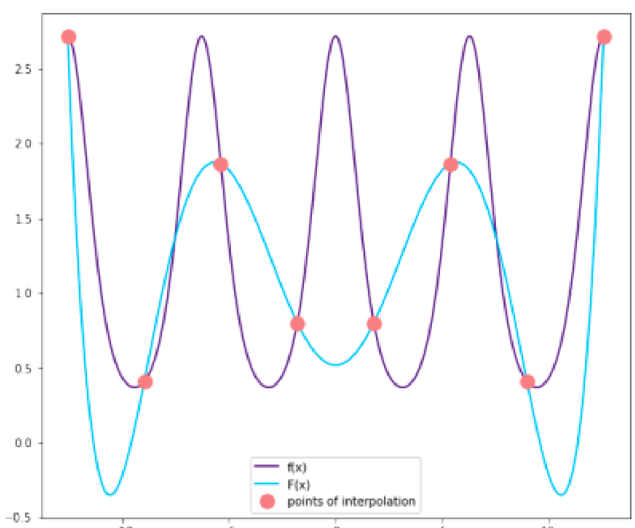


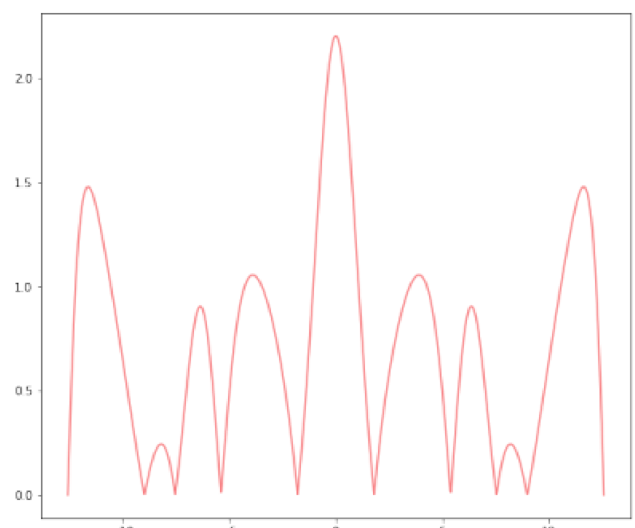


Rys.9: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 10 węzłami równoodległymi

Rys.10: Wykres różnicy wartości

Dla porównania przy ilości 8 węzłów równoodległych błąd jeszcze nie jest tak widoczny.

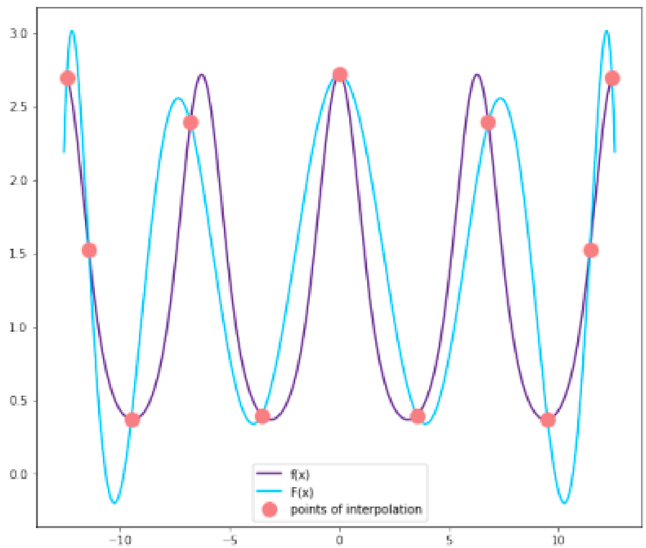


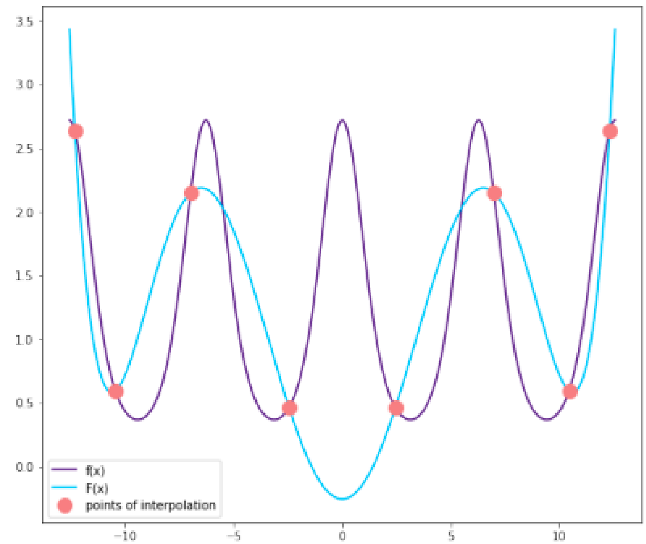


Rys.11: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 8 węzłami równoodległymi

Rys.12: Wykres różnicy wartości na przedziale

Obserwując wykresy dla takiej samej ilości węzłów, ale przy rozmieszczeniu Czebyszewa widzimy, że różnice te są znacznie mniejsze i ich rozpiętość znajduje się w o wiele mniejszym zakresie . Zatem dokładność uzyskanych wyników jest większa, podobnie jak przy metodzie Lagrange'a.

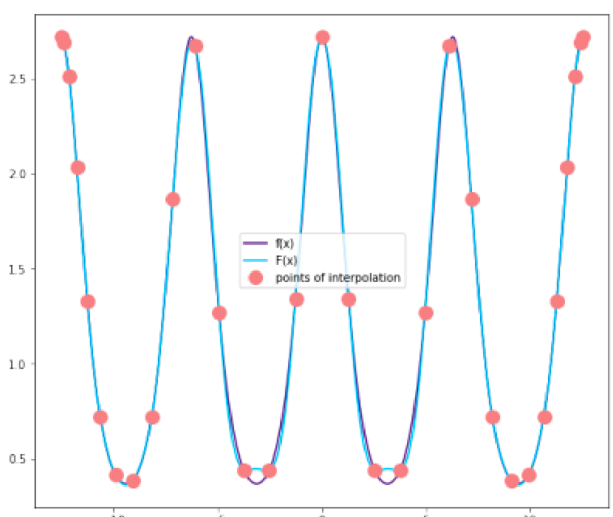


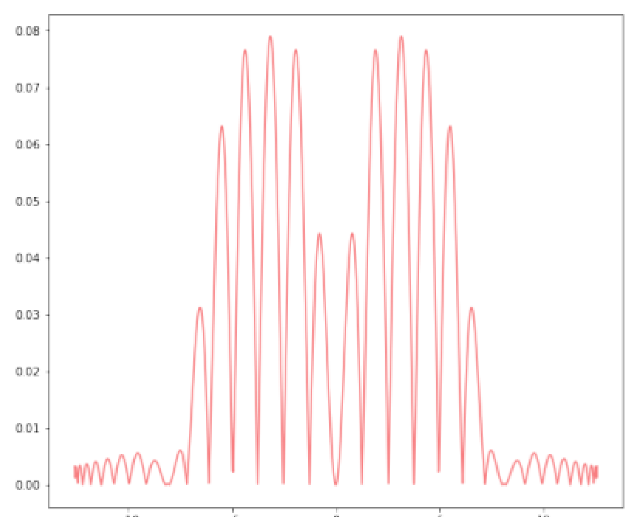


Rys.13: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 10 węzłami czebyszewa

Rys.14: Wykres różnicy wartości na przedziale

Przy wykorzystaniu metody Newtona najlepszą dokładność przybliżenia uzyskałam ponownie dla 30 węzłów Czebyszewa. Dokładność jest na bardzo podobnym poziomie co przy metodzie Lagrange'a.





Rys.15: Wykres funkcji f(x) i F(x) z 30 węzłami czebyszewa

Rys.16: Wykres różnicy wartości na przedziale

Porównując wykresy dla takiej samej ilości węzłów dla obydwu metod zauważamy, że są one bardzo podobne, to samo możemy stwierdzić analizując wyniki zapisane w obu tabelach.

WNIOSKI

- Efekt Runge’go jest dużo mniejszy jeśli wykorzystujemy węzły Czebyszewa
- Dla małej liczby węzłów funkcje interpolujące mają identyczne wartości błędów dla węzłów równoodległych i Czebyszewa.
- Dla dużej liczby węzłów (> 40) interpolacja staje się coraz mniej dokładna
- Przy korzystaniu z węzłów Czebyszewa błędy dla większych ilości węzłów są bardzo małe, zatem dokładność interpolacji jest wysoka
- Metoda Lagrange’a i Newtona działają tak samo
- Efekt Runge’go rośnie wraz z zwiększaniem liczby węzłów