Mathematische Knobeleien

Teil 3 – Ein Dreieck im Trapez

Mathematik - Verständlich gemacht![*]

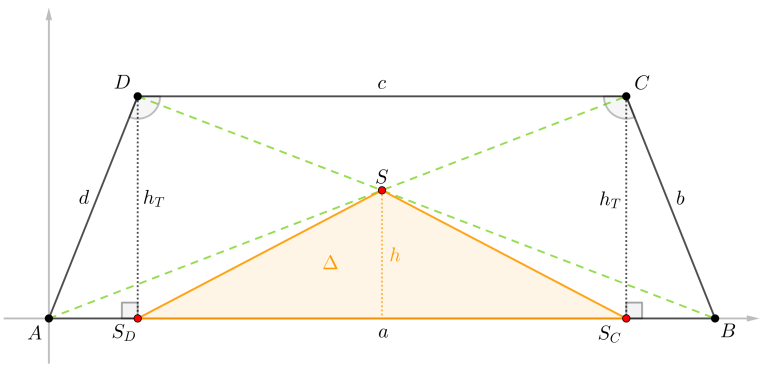
27. März 2023

Problemstellung

Es sei $T := ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit den Seiten[1] $a := AB$, $b := BC$, $c := CD$ und $d := DA$. Seine Höhe bezeichnen wir mit h_T. Nun ziehen wir die beiden Diagonalen AC und DB ein und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit S. Von C und D fällen wir jeweils das Lot auf a; die entstehenden Schnittpunkte nennen wir S_C bzw. S_D. Es entsteht ein Dreieck $\Delta := S_D S_C S$. Bestimme den Flächeninhalt von Δ.

Lösung

Wir kombinieren Methoden der klassischen Geometrie und der analytischen Geometrie. Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen der nachstehenden Skizze.



Zudem setzen wir $t_1 := AS_D$, $t_2 := AS_C$, $t_3 := S_C B$ und $t_4 := S_D S_C$.

[*]Email: kontakt@mschulte-mathematik.ruhr

[1]Wir identifizieren Seitennamen mit ihren Längen.

Da T gleichschenklig ist, ist $b = d$ und folglich $t_1 = t_3$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$t_1 = \sqrt{d^2 - h_T^2} = t_3.$$

Daraus ergeben sich unmittelbar

$$t_2 = a - t_3 = a - \sqrt{d^2 - h_T^2} \text{ und } t_4 = a - t_1 - t_3 = a - 2\sqrt{d^2 - h_T^2}.$$

Nun führen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in A ein, sodass a auf der Abszissenachse liegt. Damit lesen wir die Koordinaten von A, B, C und D ab:

$$A = (0,0),\ B = (a,0),\ C = (t_2, h_T),\ D = (t_1, h_T).$$

Hiermit bestimmen wir Funktionsgleichungen für die Diagonalen:

$$\begin{aligned} d_1(x) &= \frac{h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} x,\ x \in [0, t_2] \quad \text{(Diagonale } AC\text{)} \\ d_2(x) &= \frac{h_t}{\sqrt{d^2 - h_T^2} - a} x - \frac{a \cdot h_T}{\sqrt{d^2 - h_T^2} - a},\ x \in [t_1, a] \quad \text{(Diagonale } DB\text{)} \end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert den Schnittpunkt S der beiden Diagonalen:

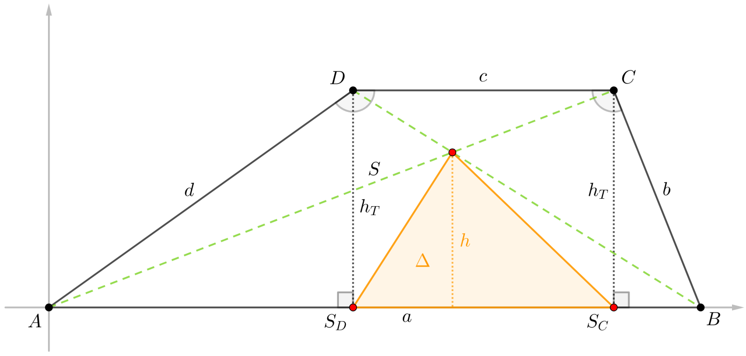
$$S = \left(\frac{a}{2}, \frac{a \cdot h_t}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} \right).$$

Es ist also $h = y(S)$. Hiermit erhalten wir den gesuchten Flächeninhalt als

$$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot h \cdot t_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot h_T \cdot \left(a - 2\sqrt{d^2 - h_T^2}\right)}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}}.$$

Ergänzungen

Wir können den Flächeninhalt von Δ natürlich auch ausrechnen, wenn T nicht gleichschenklig ist; die Rechnungen werden lediglich algebraisch *komplizierter*, da wir keine Symmetrien mehr ausnutzen können. Wir geben hier nur die Lösungen an, der Weg zur Herleitung läuft analog zu oben.



Die Bezeichnungen seien wie oben gewählt.
Punktkoordinaten:

$$A = (0,0),\ B = (a,0),\ C = (t_2, h_T),\ D = (t_1, h_T).$$

Diagonalengleichungen:

$$d_1(x) = \frac{h_T}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} x,\ x \in [0, t_2] \quad \text{(Diagonale } AC\text{)}$$

$$d_2(x) = -\frac{h_t}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} x + \frac{a \cdot h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}},\ x \in [t_1, a] \quad \text{(Diagonale } DB\text{)}$$

Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} & d_1(x_S) = d_2(x_S) \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{h_T}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} + \frac{h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} \right) x_S = \frac{a \cdot h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} + 1 \right) x_S = a. \quad \text{(Kürzen und Bruch rausmultiplizieren)} \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\frac{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} + 1 =: \frac{1}{\Gamma},$$

so erhalten wir

$$x_S = \Gamma \cdot a.$$

Dies ist mit den vorherigen Ergebnissen konsistent, denn $b = d$ ergibt $\Gamma = \frac{1}{2}$.

Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
F_\Delta &= \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot a \cdot \left(a - \sqrt{d^2 - h_T^2} - \sqrt{b^2 - h_T^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(a - \sqrt{b^2 - h_T^2} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{d^2 - h_T^2} - \sqrt{b^2 - h_T^2}}{2a - \sqrt{d^2 - h_T^2} - \sqrt{b^2 - h_T^2}}.
\end{aligned}$$

Quellen

Die Aufgabe entspringt eigenen Überlegungen.