

# Mathematische Knocheleien

## Teil 3 – Ein Dreieck im Trapez

Mathematik - Verständlich gemacht!\*

24. März 2023

### Problemstellung

Es sei  $T := ABCD$  ein gleichschenkliges Trapez mit den Seiten<sup>1</sup>  $a := AB$ ,  $b := BC$ ,  $c := CD$  und  $d := DA$ . Seine Höhe bezeichnen wir mit  $h_T$ . Nun ziehen wir die beiden Diagonalen  $AC$  und  $DB$  ein und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit  $S$ . Von  $C$  und  $D$  fällen wir jeweils das Lot auf  $a$ ; die entstehenden Schnittpunkte nennen wir  $S_C$  bzw.  $S_D$ . Es entsteht ein Dreieck  $\Delta := S_D S_C S$ . Bestimme den Flächeninhalt von  $\Delta$ .

### Lösung

Wir kombinieren Methoden der klassischen Geometrie und der analytischen Geometrie. Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen der nachstehenden Skizze.

**TODO: SKIZZE!**

Da  $T$  gleichschenklig ist, ist  $b = d$  und folglich  $t_1 = t_3$ . Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$t_1 = \sqrt{d^2 - h_T^2} = t_3.$$

Daraus ergeben sich unmittelbar

$$t_2 = a - t_3 = a - \sqrt{d^2 - h_T^2} \text{ und } t_4 = a - t_1 - t_3 = a - 2\sqrt{d^2 - h_T^2}.$$

Nun führen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in  $A$  ein, sodass  $a$  auf der Abszissenachse liegt. Damit lesen wir die Koordinaten von  $A, B, C$  und  $D$  ab:

$$A = (0, 0), \quad B = (a, 0), \quad C = (t_2, h_T), \quad D = (t_1, h_T).$$

---

\*Email: kontakt@mschulte-mathematik.ruhr

<sup>1</sup>Wir identifizieren Seitennamen mit ihren Längen.

Hiermit bestimmen wir Funktionsgleichungen für die Diagonalen:

$$d_1(x) = \frac{h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} x, \quad x \in [0, t_2] \quad (\text{Diagonale } AC)$$

$$d_2(x) = \frac{h_t}{\sqrt{d^2 - h_T^2} - a} x - \frac{a \cdot h_T}{\sqrt{d^2 - h_T^2} - a}, \quad x \in [t_1, a] \quad (\text{Diagonale } DB)$$

Gleichsetzen liefert den Schnittpunkt  $S$  der beiden Diagonalen:

$$S = \left( \frac{a}{2}, \frac{a \cdot h_t}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} \right).$$

Es ist also  $h = y(S)$ . Hiermit erhalten wir den gesuchten Flächeninhalt als

$$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot h \cdot t_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot h_T \cdot (a - 2\sqrt{d^2 - h_T^2})}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}}.$$

## Ergänzungen

Wir können den Flächeninhalt von  $\Delta$  natürlich auch ausrechnen, wenn  $T$  nicht gleichschenkelig ist; die Rechnungen werden lediglich algebraisch *komplizierter*, da wir keine Symmetrien mehr ausnutzen können. Wir geben hier nur die Lösungen an, der Weg zur Herleitung läuft analog zu oben.

**TODO: SKIZZIE!**

Punktkoordinaten:

$$A = (0, 0), \quad B = (a, 0), \quad C = (t_2, h_T), \quad D = (t_1, h_T).$$

Diagonalengleichungen:

$$d_1(x) = \frac{h_T}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} x, \quad x \in [0, t_2] \quad (\text{Diagonale } AC)$$

$$d_2(x) = -\frac{h_t}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} x + \frac{a \cdot h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}}, \quad x \in [t_1, a] \quad (\text{Diagonale } DB)$$

Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} d_1(x_S) &= d_2(x_S) \\ \Leftrightarrow \left( \frac{h_T}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} + \frac{h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} \right) x_S &= \frac{a \cdot h_T}{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} + 1 \right) x_S &= a. \quad (\text{Kürzen und Bruch rausmultiplizieren}) \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\frac{a - \sqrt{d^2 - h_T^2}}{a - \sqrt{b^2 - h_T^2}} + 1 =: \frac{1}{\Gamma},$$

so erhalten wir

$$x_S = \Gamma \cdot a.$$

Dies ist mit den vorherigen Ergebnissen konsistent, denn  $b = d$  ergibt  $\Gamma = \frac{1}{2}$ .  
Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} F_{\Delta} &= \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot a \cdot \left( a - \sqrt{d^2 - h_T^2} - \sqrt{b^2 - h_T^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left( a - \sqrt{b^2 - h_T^2} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{d^2 - h_T^2} - \sqrt{b^2 - h_T^2}}{2a - \sqrt{d^2 - h_T^2} - \sqrt{b^2 - h_T^2}}. \end{aligned}$$

## Quellen

Die Aufgabe entspringt eigenen Überlegungen.