Mathematische Knobeleien

Teil 1 – Gezinkte Würfel

Mathematik - Verständlich gemacht![*]

21. März 2023

Problemstellung

Zwei Würfel werden gezinkt. Beim ersten Würfel steigt die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu werfen, auf $\frac{1}{5}$; beim zweiten Würfel steigt hingegen die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu werfen, auf $\frac{1}{5}$.
Um wie viel ändert sich die Wahrscheinlichkeit im Vergleich mit zwei fairen Würfeln, mit den gezinkten Würfeln die Augensumme 7 zu werfen?

Lösung

Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, mit zwei fairen Würfeln eine 7 zu werfen. Da wir faire Würfel betrachten, ist die Augenzahl jedes Wurfs gleichverteilt auf $\{1, \ldots, 6\}$ und die Würfe sind unabhängig voneinander. Es sei X die Zufallsvariable, die die Augensumme der beiden Würfe beschreibt. Ferner sei $\mathbb{P}$ das Produktmaß zur Laplace-Verteilung auf $\{1, \ldots, 6\}^2$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X = 7) = \mathbb{P}(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Nun modellieren wir die beiden gezinkten Würfel.

1. Es sei $\mathbb{P}_1$ das Wahrscheinlichkeitsmaß zur Verteilung des ersten gezinkten Würfels. Dann gilt bei Annahme einer Gleichverteilung von $\omega \in \{2, \ldots, 6\}$:
$$\mathbb{P}_1(\{1\}) = \frac{1}{5},\ \mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \frac{1 - 1/5}{5} = \frac{4}{25},\ \omega \in \{2, \ldots, 6\}.$$
2. Analog ergibt sich für den zweiten Würfel mit (analog konstruiertem) Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_2$:
$$\mathbb{P}_2(\{6\}) = \frac{1}{5},\ \mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \frac{1 - 1/5}{5} = \frac{4}{25},\ \omega \in \{1, \ldots, 5\}.$$

[*]Email: kontakt@mschulte-mathematik.ruhr

Nun betrachten wir das Produktexperiment bzw. das Produktmaß aus beiden Würfen. Hierzu sei Y die Zufallsvariable, die die Augensumme beider gezinkten Würfel beschreibt und $\mathbb{P}_Y$ das Produktmaß aus $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$, d.h.

$$\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2.$$

Damit folgt

$$\mathbb{P}_Y(Y = 7) = \mathbb{P}_Y(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}).$$

Unter Ausnutzung der Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsmaße und disjunkte Mengen folgt

$$\mathbb{P}_Y(Y = 7) = \mathbb{P}_Y(\{(1,6)\}) + \ldots + \mathbb{P}_Y(\{(6,1)\}).$$

Hier benutzen wir nun die Eigenschaft des Produktmaßes

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)(A) = \mathbb{P}_1(A) \cdot \mathbb{P}_2(A)$$

und erhalten

$$\mathbb{P}_Y(Y = 7) = \mathbb{P}_1(\{1\}) \cdot \mathbb{P}_2(\{6\}) + \ldots + \mathbb{P}_1(\{6\}) \cdot \mathbb{P}_2(\{1\}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{4}{25} = \frac{126}{750}.$$

Wegen $\frac{1}{6} = \frac{125}{750}$ ist die Antwort auf die eingangs formulierte Fragestellung:
Die Wahrscheinlichkeit, mit den gezinkten Würfeln eine 7 zu werfen, erhöht sich um $\frac{1}{750} \approx 0.13\%$.

Quellen

Die Problemstellung entstammt aus

Heinrich Hemme: Heureka! Mathematische Rätsel 2023: Tageskalender mit Lösungen. 2022. München. Anaconda Verlag. ISBN 978-3-7306-1077-0.

Es handelt sich um das Rätsel vom xx.02.2023.