Mathematische Knobeleien

Teil 2 – Logarithmen

Mathematik - Verständlich gemacht![*]

21. März 2023

Problemstellung

Es seien $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Bestimme den Wert von

$$x = \frac{1}{1 + \log_a(bc)} + \frac{1}{1 + \log_b(ac)} + \frac{1}{1 + \log_c(ab)}.$$

Lösung

Wir benutzen die Formel

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}, a \in (0, \infty) \setminus \{1\}, \tag{$*$}$$

wobei $\log x$ der natürliche Logarithmus von x ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} x &\overset{(*)}{=} \frac{1}{1 + \frac{\log(bc)}{\log a}} + \frac{1}{1 + \frac{\log(ac)}{\log b}} + \frac{1}{1 + \frac{\log(ab)}{\log c}} \\ &= \frac{\log a}{\log a + \log(bc)} + \frac{\log b}{\log b + \log(ac)} + \frac{\log a}{\log c + \log(ab)}. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir das Logarithmusgesetz

$$\log x + \log y = \log(xy), x, y > 0, \tag{$**$}$$

und erhalten

$$x \overset{(**)}{=} \frac{\log a}{\log(abc)} + \frac{\log b}{\log(abc)} + \frac{\log c}{\log(abc)} \overset{(**)}{=} \frac{\log(abc)}{\log(abc)} = 1.$$

[*]Email: kontakt@mschulte-mathematik.ruhr

Ergänzungen

1. Die Formel $(*)$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} b = \log_a(x) &\Leftrightarrow a^b = a^{\log_a(x)} = x \\ &\Leftrightarrow \log(a^b) = \log x \\ &\Leftrightarrow b \cdot \log a = \log x \\ &\Leftrightarrow b = \frac{\log x}{\log a}. \end{aligned}$$

   Hierbei dürfen wir äquivalent umformen, da Potenzfunktionen und die natürliche Logarithmusfunktion bijektiv sind.

2. Die Formel $(**)$ sieht man beispielsweise wie folgt ein:

$$\begin{aligned} \log x + \log y = \log(xy) &\Leftrightarrow e^{\log x + \log y} = e^{\log(xy)} \\ &\Leftrightarrow e^{\log x} \cdot e^{\log y} = xy \\ &\Leftrightarrow x \cdot y = xy. \checkmark \end{aligned}$$

   Hier dürfen wir äquivalent umformen, da die natürliche Exponentialfunktion bijektiv ist und die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

   erfüllt.

3. Die Voraussetzung $a, b, c \neq 1$ erklärt sich dadurch, dass Logarithmen zur Basis 1 keinen Sinn ergeben. So wäre $\log_1(x)$ die Lösung der Gleichung $1^x = b$; hier gibt es für $b \neq 1$ keine Lösung und für $b = 1$ unendlich viele Lösungen.
   Algebraisch können wir dies auch mit Formel $(*)$ einsehen:

$$b = \log_1(x) \Leftrightarrow b = \frac{\log x}{\log 1} = \frac{\log x}{0} = \infty. \lightning$$

Quellen

Die Problemstellung entstammt aus

Heinrich Hemme: Heureka! Mathematische Rätsel 2023: Tageskalender mit Lösungen. 2022. München. Anaconda Verlag. ISBN 978-3-7306-1077-0.

Es handelt sich um das Rätsel vom 15.03.2023.