# Mathematische Knobeleien

## Teil 3 – Ein Dreieck im Trapez

Mathematik - Verständlich gemacht![*]

27. März 2023

## Problemstellung

Es sei $T := ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit den Seiten[1] $a := AB$, $b := BC$, $c := CD$ und $d := DA$. Seine Höhe bezeichnen wir mit $h_T$. Nun ziehen wir die beiden Diagonalen $AC$ und $DB$ ein und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit $S$. Von $C$ und $D$ fällen wir jeweils das Lot auf $a$; die entstehenden Schnittpunkte nennen wir $S_C$ bzw. $S_D$. Es entsteht ein Dreieck $\Delta := S_D S_C S$. Bestimme den Flächeninhalt von $\Delta$.

## Lösung

Wir kombinieren Methoden der klassischen Geometrie und der analytischen Geometrie. Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen der nachstehenden Skizze.
**TODO: SKIZZE!**
Da $T$ gleichschenklig ist, ist $b = d$ und folglich $t_1 = t_3$. Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$t_1 = \sqrt{d^2 - h_T^2} = t_3.$$

Daraus ergeben sich unmittelbar

$$t_2 = a - t_3 = a - \sqrt{d^2 - h_T^2} \text{ und } t_4 = a - t_1 - t_3 = a - 2\sqrt{d^2 - h_T^2}.$$

Nun führen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in $A$ ein, sodass $a$ auf der Abszissenachse liegt. Damit lesen wir die Koordinaten von $A, B, C$ und $D$ ab:

$$A = (0,0),\ B = (a,0),\ C = (t_2, h_T),\ D = (t_1, h_T).$$

[*]Email: kontakt@mschulte-mathematik.ruhr

[1]Wir identifizieren Seitennamen mit ihren Längen.

Hiermit bestimmen wir Funktionsgleichungen für die Diagonalen:

$$\begin{aligned}
d_1(x) &= \frac{h_T}{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}x,\ x\in[0,t_2]\quad \text{(Diagonale } AC\text{)}\\
d_2(x) &= \frac{h_t}{\sqrt{d^2-h_T^2}-a}x-\frac{a\cdot h_T}{\sqrt{d^2-h_T^2}-a},\ x\in[t_1,a]\quad \text{(Diagonale } DB\text{)}
\end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert den Schnittpunkt $S$ der beiden Diagonalen:

$$S=\left(\frac{a}{2},\frac{a\cdot h_t}{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}\right).$$

Es ist also $h=y(S)$. Hiermit erhalten wir den gesuchten Flächeninhalt als

$$F_\Delta=\frac{1}{2}\cdot h\cdot t_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot h_T\cdot\left(a-2\sqrt{d^2-h_T^2}\right)}{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}.$$

## Ergänzungen

Wir können den Flächeninhalt von $\Delta$ natürlich auch ausrechnen, wenn $T$ nicht gleichschenklig ist; die Rechnungen werden lediglich algebraisch *komplizierter*, da wir keine Symmetrien mehr ausnutzen können. Wir geben hier nur die Lösungen an, der Weg zur Herleitung läuft analog zu oben.
**TODO: SKIZZE!**
Punktkoordinaten:

$$A=(0,0),\ B=(a,0),\ C=(t_2,h_T),\ D=(t_1,h_T).$$

Diagonalengleichungen:

$$\begin{aligned}
d_1(x) &= \frac{h_T}{a-\sqrt{b^2-h_T^2}}x,\ x\in[0,t_2]\quad \text{(Diagonale } AC\text{)}\\
d_2(x) &= -\frac{h_t}{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}x+\frac{a\cdot h_T}{a-\sqrt{d^2-h_T^2}},\ x\in[t_1,a]\quad \text{(Diagonale } DB\text{)}
\end{aligned}$$

Schnittpunkt:

$$\begin{aligned}
&d_1(x_S)=d_2(x_S)\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{h_T}{a-\sqrt{b^2-h_T^2}}+\frac{h_T}{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}\right)x_S=\frac{a\cdot h_T}{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}{a-\sqrt{b^2-h_T^2}}+1\right)x_S=a.\quad \text{(Kürzen und Bruch rausmultiplizieren)}
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\frac{a-\sqrt{d^2-h_T^2}}{a-\sqrt{b^2-h_T^2}}+1=:\frac{1}{\Gamma},$$

so erhalten wir

$$x_S=\Gamma\cdot a.$$

Dies ist mit den vorherigen Ergebnissen konsistent, denn $b=d$ ergibt $\Gamma=\frac{1}{2}$.
Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}F_\Delta&=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\cdot a\cdot\left(a-\sqrt{d^2-h_T^2}-\sqrt{b^2-h_T^2}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(a-\sqrt{b^2-h_T^2}\right)\cdot\frac{a-\sqrt{d^2-h_T^2}-\sqrt{b^2-h_T^2}}{2a-\sqrt{d^2-h_T^2}-\sqrt{b^2-h_T^2}}.\end{aligned}$$

## Quellen

Die Aufgabe entspringt eigenen Überlegungen.