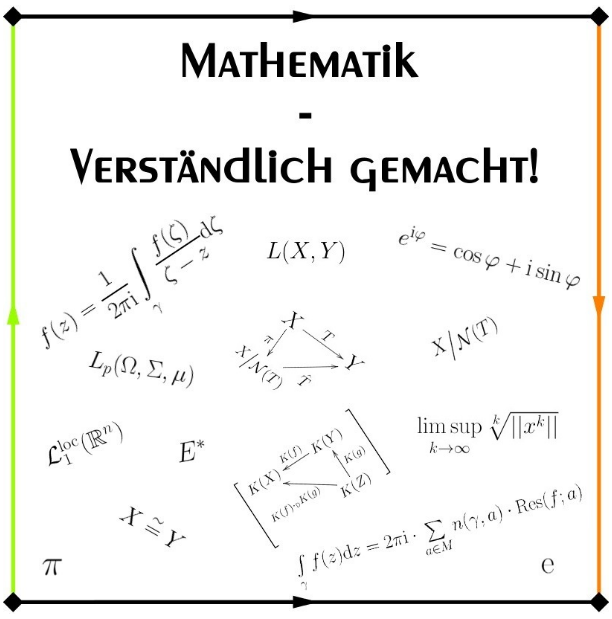
Skript[1]

Hilbertraumtheorie

M.Sc. Matthias Schulte[2]



[1]Version vom 30. April 2024.

[2]kontakt@mschulte-mathematik.ruhr.

Inhaltsverzeichnis

Übersicht 5

1 Skalarprodukte 7

2 Orthogonalität 13

3 Orthonormalsysteme 21

4 Hilbertbasen 31

5 Charakterisierung von Hilberträumen 37

6 Duale Operatoren 41

7 Adjungierte Operatoren 43

8 Operatorenklassen 45

9 Selbstadjungierte Operatoren 47

10 Normale Operatoren 51

11 Unitäre Operatoren 53

Epilog 55

Literaturverzeichnis 59

Übersicht

In diesem Kurs wollen wir uns mit den Grundlagen der Hilbertraumtheorie beschäftigen. Ausgehend von der Definition eines Skalarprodukts ($\rightarrow$ Kapitel 1) diskutieren wir ein allgemeines Konzept der Orthogonalität ($\rightarrow$ Kapitel 2). Dann schauen wir uns Orthonormalsysteme in Hilberträumen an ($\rightarrow$ Kapitel 3) und verallgemeinern das Konzept von Orthonormalbasen auf Systeme überabzählbar vieler Vektoren ($\rightarrow$ Kapitel 4). Wir charakterisieren alle (!) Hilberträume und zeigen insbesondere, dass der Raum ℓ_2 „der" prototypische Hilbertraum ist ($\rightarrow$ Kapitel 5). Anschließend diskutieren wir duale ($\rightarrow$ Kapitel 6) und adjungierte Operatoren ($\rightarrow$ Kapitel 7). Mit deren Hilfe studieren wir dann die wichtigsten Klassen von Operatoren zwischen Hilberträumen: Selbstadjungierte ($\rightarrow$ Kapitel 9), normale ($\rightarrow$ Kapitel 10) und unitäre Operatoren ($\rightarrow$ Kapitel 11).

1 Skalarprodukte

***Definition* 1.1.**
Es sei H ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ heißt **Halbskalarprodukt**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ gilt $\langle \alpha x_1 + x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ und $\langle x, \beta y_1 + y_2 \rangle = \overline{\beta} \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$.

2. Für alle $x, y \in H$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

3. Für alle $x \in H$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$.

Gilt $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$, so heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **definit**. Sind all diese Voraussetzungen erfüllt heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein **Skalarprodukt (auf *H*)**. Das Tupel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt dann **Innenproduktraum**.

Wir beweisen nun zwei grundlegende Rechenregeln für (Halb-)Skalarprodukte, bevor wir anschließend *Hilberträume* definieren können.

***Lemma* 1.2 (*Binomische Formel*).**
Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum und $x, y \in H$. Dann gilt

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle . \tag{1.1}$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Satz* 1.3 (*Schwarzsche Ungleichung*).**
Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum. Dann gilt für $x, y \in H$:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle . \tag{1.2}$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 1

Gemäß der Schwarzschen Ungleichung wird also auf einem Innenproduktraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ durch

$$\|x\|_H := \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in H, \tag{1.3}$$

eine Norm definiert[3].

Definition **1.4.**

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum und $\|\cdot\|_H$ die Norm aus (1.3). Ist $(H, \|\cdot\|_H)$ vollständig, so heißt H ein **Hilbertraum**.

In Hilberträumen schreibt sich die Schwarzsche Ungleichung also als

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|_H^2 \cdot \|y\|_H^2 .$$

Wir betrachten nun Beispiele.

Beispiel **1.5.**

Alle nun folgenden Räume sind unter dem angegebenen Skalarprodukt Hilberträume.

1. $H := \mathbb{K}^n$, $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$, $x := (x_1, \dots, x_n)$, $y := (y_1, \dots, y_n)$.
2. $H := \ell_2$, $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}$, $x := (x_n)$, $y := (y_n)$.
3. X Maßraum, μ positives Maß auf X, $H := L^2(X, \mu)$, $\langle f, g \rangle := \int_X f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu$, $f, g \in H$.

Wir klären nun, in welchem Sinne wir ein Skalarprodukt als lineares Funktional auffassen können.

Satz **1.6.**

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum und $y \in H$. Dann wird für $x \in H$ durch

$$\phi_y(x) := \langle x, y \rangle$$

ein stetiges lineares Funktional auf H mit $\|\phi_y\| = \|y\|_H$ definiert; es gilt also $\phi_y \in H'$.

Beweis. Im Videokurs. ■

[3] Lediglich die Dreiecksungleichung ist hier zu zeigen, alle weiteren Eigenschaften ergeben sich aus den Eigenschaften des Skalarprodukts. Für die Dreiecksungleichung beginnt man mit dem Term $\|x + y\|_H^2$ und wendet die Definition, die Binomische Formel und die Schwarzsche Ungleichung an.

Wir können nun ein erstes – relativ elementares – Kriterium beweisen, um festzustellen, ob ein gegebener Innenproduktraum ein Hilbertraum ist[4].

[4]Im Sinne von: Gilt (1.4) *nicht*, so ist der entsprechende Raum *kein* Hilbertraum.

Satz 1.7.

1. Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Dann gilt für $x, y \in H$ die **Parallelogrammgleichung**
$$\|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 = 2\left(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2\right). \tag{1.4}$$

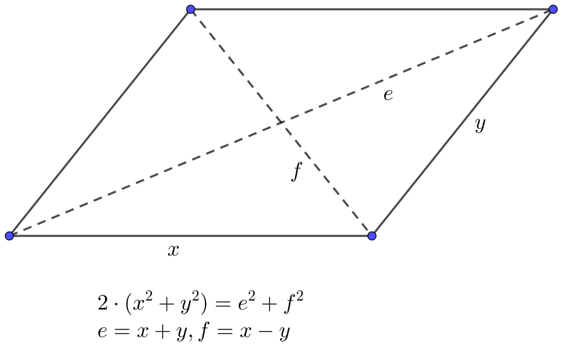


Abbildung 1: Eine Veranschaulichung des Begriffes *Parallelogrammgleichung* in $\mathbb{R}^2$. Identifizieren wir die Strecken mit ihren Längen und den zugehörigen Vektoren, so ergibt sich obige Formel (1.4).

2. Es gilt der **Satz von Jordan-Neumann**: Gilt in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|_V)$ die Parallelogrammgleichung (1.4), so gibt es ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\times V}$ auf V, welches $\|\cdot\|_V$ erzeugt:
$$\|x\|_V^2 = \langle x, x\rangle_{V\times V} \ \forall x \in V.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 2

Die Parallelogrammgleichung liefert uns eine interessante Aussage zur Existenz eindeutiger Proxima, die besonders in der konvexen Analysis von Interesse ist.

Satz 1.8.
Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum und $M \subset H$ nichtleer, konvex und vollständig. Dann gibt es genau ein $x_0 \in M$ mit

$$\|x_0\|_H = \inf\{\|x\|_H : x \in M\}.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ∎

Skizze!

Bemerkung 1.9.
Die Konvexität von M in Satz 1.8 wird in dessen Beweis also nur für die Eindeutigkeit benötigt. Insbesondere sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, wenn H ein Hilbertraum und M abgeschlossen ist.

ENDE – FOLGE 3

2 Orthogonalität

Aus der linearen Algebra ist für zwei Vektoren $0 \neq u, v \in \mathbb{R}^2$ bekannt, dass für den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\angle(u, v) \in [0, \pi]$ gilt:

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle_2}{\|u\|_2 \cdot \|v\|_2},$$

wobei $\langle u, v \rangle_2 := u_1 v_1 + u_2 v_2$ das euklidische Standardskalarprodukt bezeichnet.

Geometrisch stehen u und v orthogonal zueinander, wenn $\angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$, entsprechend $90°$, gilt. Es ist also

$$\angle(u, v) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\langle u, v \rangle_2}{\|u\|_2 \cdot \|v\|_2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle_2 = 0.$$

Gilt umgekehrt $\langle u, v \rangle_2 = 0$, so folgt

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle_2}{\|u\|_2 \cdot \|v\|_2} = \arccos(0) \overset{\angle(u,v) \in [0,\pi]}{=} \frac{\pi}{2},$$

also können wir die Orthogonalität von u und v durch die Bedingung $\langle u, v \rangle_2 = 0$ charakterisieren.

In allgemeinen Innenprodukträumen können wir diese Bedingung umgekehrt zur Definition erheben.

***Definition* 2.1.**

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum und $x, y \in H$.

1. Gilt $\langle x, y \rangle = 0$, so nennen wir x und y **orthogonal** und schreiben $x \perp y$.

2. Ist $M \subset H$ und $x \perp m$ für alle $m \in M$, so schreiben wir $x \perp M$. Ferner definieren wir $M^\perp := \{x \in H : x \perp M\}$. Für $x \in H$ kürzen wir ab: $x^\perp := \{x\}^\perp$.

Bemerkung 2.2.

1. Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts folgt, dass $x^\perp$ ein Unterraum von H ist. Da das Funktional ϕ_x aus Satz 1.6 stetig ist, ist $x^\perp$ wegen $x^\perp = \mathcal{N}(\phi_x)$ ein abgeschlossener Unterraum von H.

2. Wegen $M^\perp = \cap_{x\in M} x^\perp$ ist auch $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H. Dies gilt unabhängig davon, ob M selbst ein Unterraum war!

ENDE – FOLGE 4

Wir wollen nun das aus der linearen Algebra bekannte Konzept *orthogonaler Projektionen* verallgemeinern. Hierzu betrachten wir zunächst wieder den zweidimensionalen Fall.

Es sei $U = \langle v \rangle$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus U$ und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Wir wissen, dass dann $U^\perp = \langle v^\perp \rangle$ gilt. Nach Satz 1.8 gibt es nun genau ein $x^* \in U$, welches den Abstand zu x minimiert:

$$\|x^* - x\|_2 = \inf\left\{\|u - x\|_2 : u \in U\right\}.$$

Das Infimum ist in diesem Fall sogar ein Minimum, da U ein abgeschlossener Unterraum ist. Dieses x^* ergibt sich geometrisch gerade als der Schnitt von U und $x + U^\perp$; man sagt auch, dass x^* die *metrische Projektion von x auf U* ist.
Folglich gibt es also $x^* \in U$ und $(x^*)^\perp \in U^\perp$ mit

$$x = x^* + (x^*)^\perp.$$

Wir können also den ganzen Raum $\mathbb{R}^2$ zerlegen in die direkte Summe $\mathbb{R}^2 = U \oplus U^\perp$. Diese Idee trägt nun auch im allgemeinen Fall.

Satz 2.3.

Es sei H ein Innenproduktraum und M ein vollständiger Unterraum von H. Dann gelten:

1. Es gibt eindeutig bestimmte stetige lineare Operatoren $P : H \to M$ und $Q : H \to M^\perp$ mit $x = Px + Qx$ für $x \in H$.

2. Die Abbildungen P und Q haben folgende Eigenschaften:

   a. Für $x \in M$ ist $Px = x$ und $Qx = 0$.
   Für $x \in M^\perp$ ist $Px = 0$ und $Qx = x$.

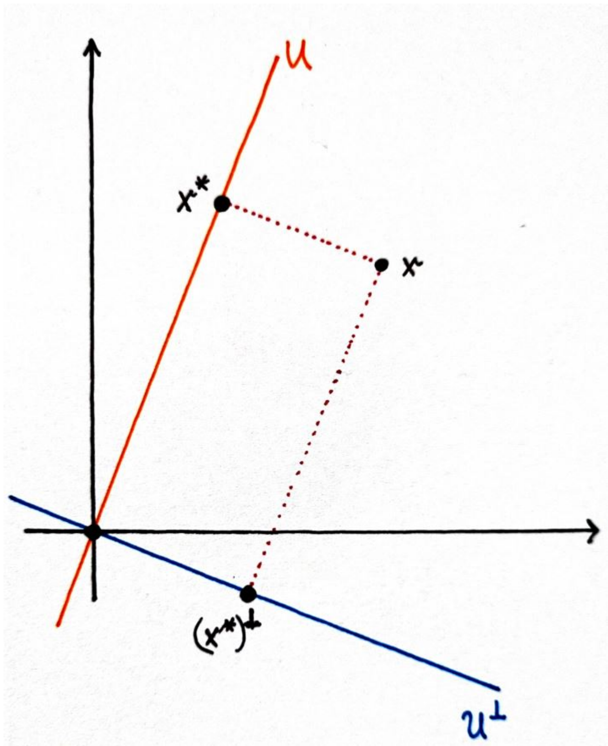


Abbildung 2: Die metrische Projektion eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$ und seine Zerlegung
$x = x^* + (x^*)^\perp \in U \oplus U^\perp$.

b. Für $x \in H$ ist $\|x - Px\|_H = \inf_{y \in M} \|x - y\|_H$.
c. Für $x \in H$ ist $\|x\|_H^2 = \|Px\|_H^2 + \|Qx\|_H^2$.
d. Es gilt $\|P\| = \|Q\| = 1$.

3. Es ist $H = M \oplus M^\perp$. Ist zusätzlich $M \neq H$, so existiert ein $y \in H$ mit $y \neq 0$ und $y \in M^\perp$, d.h. es ist $M^\perp \neq \{0\}$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Definition **2.4.**
Die Abbildungen P bzw. Q aus Satz 2.3 heißen **orthogonale Projektionen von H auf M bzw. $M^\perp$**.

Wir sehen also, dass die metrischen Projektionen auf U bzw. $U^\perp$ aus Abbildung 2 nichts anderes sind als die orthogonalen Projektionen im zweidimensionalen Fall.

ENDE – FOLGE 5

Die orthogonalen Projektionen erlauben uns nun, einen ersten Darstellungssatz für Hilberträume zu beweisen.
Theorem **2.5 (*Darstellungssatz von Fréchet-Riesz*).**
Es sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H'$, $Ty := \phi_y$ mit ϕ_y wie in Satz 1.6. Dann ist T bijektiv, isometrisch und konjugiert linear[5].

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Wir können also für jeden Hilbertraum H vermöge des Operators T eine Isometrie auf H' angeben. Wir werden später ($\rightarrow$ Theorem 5.8) noch mehr zeigen: Jeder Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu einem geeignet gewählten ℓ_2-Raum.

ENDE – FOLGE 6

[5] D.h. es gilt $T(\alpha y) = \overline{\alpha} Ty$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $y \in H$.

3 Orthonormalsysteme

Wir wollen nun Orthonormalsysteme und -basen in allgemeine Hilberträume transportieren. Unser verallgemeinerter Orthogonalitätsbegriff ist hierbei der Schlüssel zur passenden Definition.

***Definition* 3.1.**

Es sei H ein Innenproduktraum.

Eine Teilmenge $S \subset H$ heißt **Orthonormalsystem** von H wenn für alle $x, y \in S$ mit $x \neq y$ gilt: $x \perp y$ und $\|x\|_H = 1$.

Ein Orthonormalsystem heißt **maximal**, wenn für jedes Orthonormalsystem T in H mit $S \subset T$ schon $S = T$ folgt.

***Beispiel* 3.2.**

1. In ℓ_2 ist die Menge $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem.
2. In $L^2[0, \pi]$ sei $e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem.

Beachte, dass es sich bei Orthonormalsystemen per se *nicht* um ein Analogon zu Orthonormal*basen* handelt, d.h. wir können nicht a priori jedes $x \in H$ als Linearkombination der Elemente eines Orthonormalsystems darstellen. Wir können allerdings versuchen, jedes $x \in H$ möglichst gut durch Elemente eines Orthonormalsystems zu approximieren. Dies ist Inhalt der *Gaußschen Approximationsaufgabe*:

Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum, $S := \{e_1, \dots, e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H und $x \in H$. Wir suchen Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|_H \to \min!$.

Da $M := \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)$ ein vollständiger Unterraum von H ist, folgt aus Satz 1.8 und Satz 2.3, dass das Problem eindeutig lösbar ist. Wir bestimmen nun konkret die Lösung.

***Satz* 3.3.**

Im Setting der Gaußschen Approximationsaufgabe ist $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|_H$ minimal genau dann, wenn $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$ für $k = 1, \dots, n$ gilt.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Die Darstellung der α_k bekommt einen eigenen Namen.

Definition **3.4.**

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $S := \{e_1, \ldots, e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H und $x \in H$. Die Zahlen

$$\hat{x}_k := \langle x, e_k \rangle \tag{3.1}$$

heißen **Fourierkoeffizienten von x**.

Wir wollen nun auch überabzählbare Orthonormalsysteme betrachten. Vorher ziehen wir aber noch eine Folgerung aus dem Beweis von Satz 3.3.

Folgerung **3.5.**

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, $S := \{e_1, \ldots, e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H und $x \in H$. Dann gilt die **Besselsche Gleichung**

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k e_k \right\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2 \tag{3.2}$$

und die **Besselsche Ungleichung**

$$\sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2 \leq \|x\|_H^2 . \tag{3.3}$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Um auch überabzählbare Orthonormalsysteme zu betrachten und insbesondere das Konzept der Fourierkoeffizienten auf überabzählbar viele Elemente zu erweitern, benötigen wir eine präzise Definition, wie Summation über beliebigen Indexmengen erklärt wird. Diese stellen wir nun bereit.

Definition **3.6.**

Es sei A eine beliebige Indexmenge, X ein normierter Raum und $x_\alpha \in X$ für $\alpha \in \mathsf{A}$. Die Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{A}}$ heißt **summierbar** zum Wert $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathsf{B}(\varepsilon)$ gibt, so dass für jede endliche Menge $B \subset \mathsf{A}$ mit $\mathsf{B}(\varepsilon) \subset B$ gilt:

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha \right\|_X < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Der Wert von x ist dann eindeutig bestimmt. Wir zeigen zunächst einige technische Eigenschaften von Summierbarkeit.

Lemma **3.7.**

Es sei X ein normierter Raum, A ein Indexmenge, $x_\alpha, y_\alpha \in X$ für $\alpha \in \mathsf{A}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gelten:

1. Gilt $\sum_{\alpha \in \mathsf{A}} x_\alpha = x$ und $\sum_{\alpha \in \mathsf{A}} y_\alpha = y$, so gilt

   $$\sum_{\alpha \in \mathsf{A}} (x_\alpha + y_\alpha) = x + y \text{ und } \sum_{\alpha \in \mathsf{A}} \lambda x_\alpha = \lambda x.$$

2. Es sei X zusätzlich ein Banachraum. Dann gilt folgendes **Cauchykriterium**:
   Die Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{A}}$ ist summierbar genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine *endliche* Teilmenge $\mathsf{B}(\varepsilon) \subset A$ existiert, sodass gilt:

   $$\left\| \sum_{\alpha \in B} x_\alpha \right\|_X < \varepsilon \ \forall B \subset \mathsf{A} \text{ endlich mit } B \cap \mathsf{B}(\varepsilon) = \emptyset.$$

3. Die Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{A}}$ ist summierbar zum Wert $x \in X$ genau dann, wenn höchstens abzählbar viele $x_\alpha \neq 0$ sind und für jede Abzählung $(x_1, x_2, \ldots)$ dieser Elemente gilt:

   $$\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k = x.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Damit erhalten wir nun eine Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Skalarprodukte für beliebige Indexmengen.

Satz **3.8.**

Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum, A eine Indexmenge und $x_\alpha \in H$ für $\alpha \in \mathsf{A}$. Dann gelten:

1. Ist $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ summierbar und $x \in H$, so gilt

$$\left\langle \sum_{\alpha\in\mathsf{A}} x_\alpha, x \right\rangle = \sum_{\alpha\in\mathsf{A}} \langle x_\alpha, x\rangle \, . \tag{3.5}$$

2. Ist H zusätzlich ein Hilbertraum und die x_α paarweise orthogonal, so ist $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ genau dann summierbar, wenn $(\|x_\alpha\|_H^2)_{\alpha\in\mathsf{A}}$ summierbar ist. Es gilt dann

$$\left\| \sum_{\alpha\in\mathsf{A}} x_\alpha \right\|_H^2 = \sum_{\alpha\in\mathsf{A}} \|x_\alpha\|_H^2 \, . \tag{3.6}$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Nun können wir die Fourierkoeffizienten völlig analog zu Definition 3.4 auch für beliebige Indexmengen hinschreiben.

Definition **3.9.**

Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum, A eine Indexmenge, $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in A\}$ ein Orthonormalsystem in H und $x \in H$. Die Zahlen

$$\hat{x}_\alpha := \langle x, e_\alpha\rangle \tag{3.7}$$

heißen **Fourierkoeffizenten** von x bezüglich S.

Die Reihe

$$\sum_{\alpha\in\mathsf{A}} \hat{x}_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathsf{A}} \langle x, e_\alpha\rangle \, e_\alpha \tag{3.8}$$

heißt die **Fourierentwicklung** von x bezüglich S – unabhängig davon, ob die Reihe tatsächlich gegen x konvergiert.

Bevor wir nun überabzählbare Orthonormalsysteme und orthogonale Projektionen verbinden, nehmen wir noch die allgemeine Version der Besselschen Ungleichung am Wegesrand mit.

Satz **3.10 (*Besselsche Ungleichung*).**

Es sei H ein Hilbertraum, A eine Indexmenge und $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in \mathsf{A}\}$ ein Orthonormalsystem in H. Dann gilt

$$\sum_{\alpha\in\mathsf{A}} |\hat{x}_\alpha|^2 \leq \|x\|_H^2 \, . \tag{3.9}$$

Insbesondere sind höchstens abzählbar viele $\hat{x}_\alpha$ ungleich 0.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Zum Abschluss dieses Kapitels verbinden wir Orthonormalsysteme, die Fourierentwicklung und orthogonale Projektionen.

Satz 3.11.

Es sei H ein Hilbertraum, A eine Indexmenge und $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in \mathsf{A}\}$ ein Orthonormalsystem in H. Dann gelten:

1. Für jedes $x \in H$ ist $(\hat{x}_\alpha e_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{A}}$ summierbar.
2. Die Abbildung

$$P : H \to H, \; Px := \sum_{\alpha \in \mathsf{A}} \hat{x}_\alpha e_\alpha, \tag{3.10}$$

ist die orthogonale Projektion von H auf $\overline{\langle S \rangle}$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Bemerkung 3.12.

Die Fourierentwicklung (3.8) – und damit auch der Operator aus (3.10) – ist im Prinzip nichts Neues. Wir betrachten wieder den endlichdimensionalen Fall.

Es sei $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ ein Orthonormal*basis* von $\mathbb{R}^n$. Dazu sei $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Wie sehen die λ_i aus?

Es sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Wir rechnen:

$$\langle v, b_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j \underbrace{\langle b_j, b_j \rangle}_{=\delta_{jj}=1} = \lambda_j.$$

Somit ist $v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle v_i$.

Die Entwicklung eines Vektors nach einer Orthonormalbasis (wie in der linearen Algebra) ist also gerade die endlichdimensionale Fourierentwicklung im Hilbertraum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$!

4 Hilbertbasen

Bevor wir in Satz 3.3 die Gaußsche Approximationsaufgabe gelöst haben, haben wir bemerkt, dass Orthonormal*systeme* kein Analogon zu Orthonormal*basen* sind. Ein solches Analogon wollen wir nun einführen.

***Definition* 4.1.**
Es sei H ein Innenproduktraum, A eine Indexmenge und $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in \mathsf{A}\}$ ein Orthonormalsystem. Das Orthonormalsystem S heißt **Hilbertbasis** (oder auch **vollständiges Orthonormalsystem**), wenn für jedes $x \in H$ gilt:

$$x = \sum_{\alpha \in \mathsf{A}} \hat{x}_\alpha e_\alpha. \tag{4.1}$$

Wir wollen uns nun dem Zusammenhang zwischen maximalen Orthonormalsystemen und Hilbertbasen widmen, um im nächsten Kapitel *alle* Hilberträume charakterisieren zu können. Hierzu beleuchten wir zunächst maximale Orthonormalsysteme genauer.

***Satz* 4.2.**
Es sei $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und S ein Orthonormalsystem in H. Dann existiert ein maximales Orthonormalsystem S' in H mit $S \subset S'$. Insbesondere besitzt H ein maximales Orthonormalsystem.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Nun können wir Hilbertbasen charakterisieren.

***Satz* 4.3.**
Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, A eine Indexmenge und $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in \mathsf{A}\}$ ein Orthonormalsystem in H. Dann sind äquivalent:

1. S ist eine Hilbertbasis.

2. Es gilt $\overline{\langle S \rangle} = H$.

3. Für $x, y \in H$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha \in \mathsf{A}} \hat{x}_\alpha \overline{\hat{y}_\alpha}$.

4. Es gilt die **parsevalsche Gleichung**
$$\|x\|_H^2 = \sum_{\alpha \in \mathsf{A}} |\hat{x}_\alpha|^2 . \tag{4.2}$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Wir wollen nun zeigen, dass jeder Hilbertraum eine Hilbertbasis besitzt. Dafür beweisen wir zunächst eine äquivalente Charakterisierung für maximale Orthonormalsysteme.

***Lemma* 4.4.**
Es sei H ein Innenproduktraum und $S \subset H$ ein Orthonormalsystem in H. Dann sind äquivalent:

1. S ist maximal.
2. Es gilt $S^\perp = \{0\}$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Theorem 4.5.
Es sei H ein Innenproduktraum und S ein Orthonormalsystem in H. Dann gelten:

1. Ist S eine Hilbertbasis, so auch ein maximales Orthonormalsystem.
2. Ist H ein Hilbertraum, so sind die Begriffe „Hilbertbasis" und „maximales Orthonormalsystem" äquivalent.
3. Jeder Hilbertraum besitzt eine Hilbertbasis.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir Beispiele.

***Beispiel* 4.6.**

1. Es sei $H := \ell_2$ und $S := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Offensichtlich ist $\overline{\langle S \rangle} = \ell_2$, folglich ist S eine Hilbertbasis von H.

2. Allgemeiner sei A eine Indexmenge, μ das Zählmaß auf A und $H := L^2(\mu)$. Diesen Raum können wir alternativ schreiben als

$$\ell_2(\mathsf{A}) = \left\{ x : \mathsf{A} \to \mathbb{K} \colon \left(|x(\alpha)|^2 \right) \text{ ist summierbar} \right\},$$

da das L^2-Integral gegen ein Zählmaß zu einer Summe zusammenfällt.
Für $\alpha \in \mathsf{A}$ sei $e_\alpha \in \ell_2(\mathsf{A})$ definiert durch

$$e_\alpha := e_\alpha(\zeta) := \left(\delta_{\zeta,\alpha}\right)_{\alpha \in \mathsf{A}}, \zeta \in \mathsf{A}.$$

Dann ist $S := \{e_\alpha : \alpha \in \mathsf{A}\}$ wie oben eine Hilbertbasis.

***Beispiel* 4.7.**
Wir betrachten $H := L^2[0, 2\pi]$. Dann ist wegen [Sch23, Satz 1.4] die Menge $S := \{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ mit

$$e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$$

ein Orthonormalsystem in H. Wir sehen, dass S gerade die Menge der trigonometrischen Polynome ist. Aus dem Weierstraßschen Approximationssatz [Sch23, Theorem 5.1] folgt, dass S dicht in $(C[0, 2\pi], \|\cdot\|_{\max})$ liegt. Da für $f \in C[a, b]$ die Abschätzung $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\, \|f\|_{\max}$ gilt, liegt S sogar dicht in $(C[0, 2\pi], \|\cdot\|_2)$. Die Vollständigkeit dieses Orthonormalsystems (und damit verbunden die Tatsache, dass S eine Hilbertbasis ist) folgt dann aus dem nächsten Satz.

***Satz* 4.8.**
Für $1 \leq p < \infty$ ist $C[a, b]$ dicht in $L^p[a, b]$.

Beweis. Wir verweisen hier auf , da der Beweis viel Vorlauf an Maßtheorie benötigt. Quelle! ■

5 Charakterisierung von Hilberträumen

Wir wollen zunächst zeigen, dass jeder Hilbertraum isometrisch isomorph zu seinem Dualraum ist.

Satz **5.1.**

Es sei H ein Hilbertraum. Dann gilt $H \overset{\text{iso}}{\simeq} H'$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Nun wollen wir zeigen, dass jeder Hilbertraum *reflexiv* ist. Hierfür definieren wir diesen Begriff zunächst, müssen dazu aber ein wenig ausholen.

Definition **5.2.**

1. Es sei X ein normierter Raum. Der Raum $X'' := (X')' = L(X', \mathbb{K})$ heißt **Bidualraum** von X.

2. Die Abbildung

$$\iota := \iota_X : X \to X'',\ x \mapsto [x' \to x'(x)]\,, \tag{5.1}$$

heißt **kanonische Einbettung** von X in X''.

3. Der Raum X heißt **reflexiv**, wenn ι_X surjektiv ist.

Bemerkung **5.3.**

1. Setzung (5.1) ist wegen $X'' = L(X', \mathbb{K})$ wohldefiniert.

2. Wegen [Brü18, Satz 3.1.1] ist ι_X eine Isometrie. Ist der Raum X also reflexiv, so können wir Elemente $x \in X$ mit der Linearform $\iota_X(x) \in L(X, X'')$ identifizieren: Die Räume X und X'' sind isometrisch isomorph. In diesem Sinne gilt also „$X = X''$“, was auch den Begriff „reflexiv“ erklärt.

3. Vereinbart man die Notation

$$\langle x, x' \rangle_{X \times X'} := x'(x),\ \ x \in X, x' \in X', \tag{5.2}$$

so schreibt sich (5.1) als

$$\iota : X \to X'', \langle x', \iota x\rangle_{X' \times X''} := \langle x, x'\rangle_{X \times X'}, x \in X, x' \in X'. \tag{5.3}$$

In dieser Notation wird ι also durch die Wirkung auf ein „konkretes“ Funktional $x' \in X'$ festgelegt.

***Satz* 5.4.**
Es sei H ein Hilbertraum. Dann ist H reflexiv.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Bemerkung* 5.5.**
Die Umkehrung von Satz 5.4 gilt nicht!
Als Gegenbeispiel dienen die Räume $L^p(\Omega, \mu)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, für einen Maßraum Ω mit positivem Maß μ: Diese sind nach [Kab11, Theorem 9.15] reflexiv, aber keine Hilberträume.

Wir wollen nun zeigen, dass die Mächtigkeit von Hilbertbasen eines Hilbertraums eindeutig ist.

***Satz* 5.6.**
Es sei H ein Hilbertraum und T, S zwei Hilbertbasen in H. Dann sind T und S gleichmächtig.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Bemerkung* 5.7.**
Es sei H ein Hilbertraum und S eine Hilbertbasis. Die Zahl $|S|$ heißt **Hilbertraumdimension**. Sie ist gemäß Satz 5.6 wohldefiniert.

Nun zeigen wir, dass jeder Hilbertraum isometrisch isomorph zu einem geeigneten ℓ_2-Raum ist.

Theorem 5.8 (*Charakterisierungssatz für Hilberträume*).
Es sei H ein Hilbertraum. Dann existiert eine Indexmenge A mit $H \overset{\text{iso}}{\simeq} \ell_2(A)$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir separable[6] Hilberträume.

***Satz* 5.9.**

Es sei H ein Hilbertraum und $\dim H = \infty$. Dann sind äquivalent:

1. H ist separabel.
2. Es gibt eine abzählbare Hilbertbasis von H.
3. Jede Hilbertbasis von H ist abzählbar.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Folgerung* 5.10.**

Es sei H ein separabler Hilbertraum. Dann gilt $H \overset{\text{iso}}{\simeq} \ell_2$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Folgerung* 5.11.**

Es gilt $L^2[0,1] \overset{\text{iso}}{\simeq} \ell_2$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

[6] Zur Erinnerung: Ein metrischer Raum M heißt *separabel*, wenn es in M eine abzählbare dichte Teilmenge gibt; vgl. [Sch19, Definition 4.20].

6 Duale Operatoren

Dieses Kapitel hat vorbereitenden Charakter für die Betrachtung linearer Operatoren *zwischen* Hilberträumen. Wir beginnen zur Motivation mit einem Beispiel aus der linearen Algebra.

Ist $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, so gibt es eine eindeutige *adjungierte* Matrix $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit

$$\langle Ax, y\rangle_m = \langle x, A^*y\rangle_n\,, x \in X, y \in Y. \tag{6.1}$$

Wir wollen nun Gleichung (6.1) auf lineare Operatoren $A \in L(X,Y)$ zwischen zwei *Banachräumen* X, Y übertragen. Auf Banachräumen haben wir aber kein Skalarprodukt zur Verfügung! Hier hilft uns das Konzept *dualer* Operatoren.

Wir benutzen im Folgenden die Schreibweise aus (5.2) in Anlehnung an ein Skalarprodukt.

***Bemerkung* 6.1.**
Es sei X ein Banachraum. Nach dem Satz von Hahn-Banach[7] gibt es für $x \in X$ eine Linearform $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{\mathrm{op}} = 1$ und $|\langle x, x'\rangle| = \|x\|_X$. Somit gilt

$$\|x\|_X = \max\left\{|\langle x, x'\rangle| : x' \in X', \|x'\|_{\mathrm{op}} = 1\right\},\ x \in X. \tag{6.2}$$

Wir konstruieren nun *duale Operatoren.*

***Satz* 6.2.**
Es seien X, Y normierte Räume. Dann existiert zu jedem $T \in L(X,Y)$ *genau* ein $T' \in L(Y', X')$ mit

$$\langle Tx, y'\rangle = \langle x, T'y'\rangle \tag{6.3}$$

für $x \in X$ und $y \in Y'$. Es gilt dann $\|T\| = \|T'\|$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

[7]Z.B. wie in [Sch19, Theorem 18.9].

Definition **6.3.**
Der Operator T' aus Satz 6.2 heißt der zu T **duale Operator**.

Mittels dualer Operatoren kann man das Konzept der Orthogonalität auf Banachräume verallgemeinern. Wir werden an dieser Stelle nicht genauer auf diese Anwendung eingehen; uns dienen duale Operatoren vorrangig zur Konstruktion *adjungierter* Operatoren, die wir im nächsten Kapitel betrachten werden.

7 Adjungierte Operatoren

Mittels der dualen Operatoren aus dem vorigen Kapitel können wir nun tatsächlich ein Analogon zu adjungierten Matrizen konstruieren, sodass eine Formel wie (6.1) gilt.

***Satz* 7.1.**

Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$. Dann existiert ein eindeutiges $T^* \in L(H_2, H_1)$ mit

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} . \tag{7.1}$$

In diesem Fall gilt $\|T\| = \|T^*\|$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Definition* 7.2.**

Der Operator T^* aus Satz 7.2 heißt der zu T **adjungierte Operator**.

Wir betrachten ein Beispiel.

***Beispiel* 7.3.**

Es seien H_1, H_2 Hilberträume mit Hilbertbasen $\{e_i\}_{i\in \mathsf{I}}$ von H_1 bzw. $\{f_j\}_{j\in \mathsf{J}}$ von H_2. Ferner sei $T \in L(H_1, H_2)$ repräsentiert durch

$$M(T) := (a_{ij})_{i\in \mathsf{I}, j\in \mathsf{J}} := (\langle Te_i, f_j \rangle)_{i\in \mathsf{I}, j\in \mathsf{J}} .$$

Dann wird T^* durch die adjungierte Matrix zu $M(T)$ repräsentiert:

$$M(T^*) = (a^*_{ji})_{i\in \mathsf{I}, j\in \mathsf{J}} = (\overline{a_{ij}})_{i\in \mathsf{I}, j\in \mathsf{J}}.$$

Die Details zu dieser Rechnung werden im Videokurs ausgearbeitet.

Es gelten folgende Rechenregeln.

***Satz* 7.4.**

Es seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume, $S, T \in L(H_1, H_2)$ und $U \in L(H_2, H_3)$. Dann gelten:

1. $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

2. $(U \circ T)^* = T^* \circ U^*$.
3. $(T^*)^* = T$.
4. $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.
5. $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$, $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$.
6. $\mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T^*)^\perp$, $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp$. Ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, so gilt $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Bemerkung* 7.5.**

1. Es gibt einen Unterschied zwischen T^* und T': Die Abbildung $T \mapsto T'$ ist linear, während die Abbildung $T \mapsto T^*$ wegen Satz 7.4(1) *konjugiert linear* ist.
2. Ist T ein linearer Operator zwischen endlichdimensionalen Räumen, so wird T durch eine Matrix A dargestellt. Der duale Operator T' entspricht dann der transponierten Matrix A^T, der adjungierte Operator T^* der konjugiert transponierten Matrix $\overline{A}^T$.
3. Die Aussage von Satz 7.4(6) können wir auf die Lösbarkeit der Gleichung $Tx = y$ beziehen. Damit diese Gleichung lösbar ist, muss $y \in \mathcal{R}(T)$ liegen; nach 7.4(6) muss also $y \in \mathcal{N}(T^*)^\perp$ liegen. Diese Bedingung ist oft leichter zu überprüfen.

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Verbindung zu orthogonalen Projektionen.

***Satz* 7.6.**

Es sei H ein Hilbertraum und $P \in L(H)$. Dann ist P genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $P^* = P = P^2$ gilt.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

8 Operatorenklassen

Wir betrachten jetzt spezielle Klassen von Operatoren. Den identischen Operator auf einem Hilbertraum H bezeichnen wir im Folgenden mit id, I oder I_H.

Definition **8.1.**

Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$.

1. T heißt **unitär**, falls $TT^* = I_{H_2}$ und $T^*T = I_{H_1}$ gilt.
2. Ist $H_1 = H_2$ und gilt $T^* = T$, so heißt T **selbstadjungiert**.
3. Ist $H_1 = H_2$ und gilt $T^*T = TT^*$, so heißt T **normal**.

Wir betrachten nun einige Beispiele. Die Details werden im Videokurs ausgearbeitet.

Beispiel **8.2.**

1. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $g \in C(K)$. Wir definieren durch

   $$(M_g f)(t) := g(t)f(t), \ t \in K, f \in L^2(K),$$

   einen *Multiplikationsoperator* $M_g \in L(L^2(K))$. Sein adjungierter Operator ist gegeben durch $M_g^* = M_{\overline{g}}$. Somit ist M_g...
   - ...für jedes $g \in C(K)$ normal.
   - ...selbstadjungiert genau dann, wenn g reellwertig ist.
   - ...unitär genau dann, wenn $|g(t)| = 1$ für fast alle $t \in K$ gilt.
2. Wir definieren einen *Rechts-Shift-Operator* auf ℓ_2 durch

   $$S_+(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots).$$

   Dann ist S_+ eine Isometrie von ℓ_2 nach ℓ_2, aber nicht surjektiv. Für den adjungierten Operator gilt

   $$S_+^* = S_-$$

   mit dem *Links-Shift-Operator* aus [Sch19, Beispiel 17.14 für $p = 2$]. Sowohl S_+ als auch S_- sind nicht normal und für $S_- x_0 \neq 0$

auch nicht unitär. Offensichtlich ist S_+ auch nicht selbstadjungiert.

9 Selbstadjungierte Operatoren

Nun betrachten wir die Klasse selbstadjungierter Operatoren genauer. Dazu beginnen wir mit dem *Satz von Hellinger-Toeplitz*, der schon aus [Sch19, Satz 14.14] bekannt ist. Dort haben wir ihn für *symmetrische* lineare Operatoren auf einem Hilbertraum formuliert; dies geht nun nahtlos in selbstadjungierte Operatoren über. Tatsächlich ist *symmetrisch* nur eine andere Bezeichnung für einen selbstadjungierten *reellwertigen* Operator auf einem Hilbertraum.

***Satz* 9.1 (*Satz von Hellinger-Toeplitz*).**
Es sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ linear und selbstadjungiert. Dann ist T stetig.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

In komplexen Hilberträumen haben wir folgende Charakterisierung der Selbstadjungiertheit.

***Satz* 9.2.**
Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann sind äquivalent:

1. T ist selbstadjungiert.
2. Es ist $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Für selbstadjungierte Operatoren können wir die Operatornorm über das Skalarprodukt ausdrücken. Hierzu benötigen wir als Hilfsmittel die sogenannten *Polarformeln*.

***Lemma* 9.3.**
Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Wir betrachten das Funktional

$$Q_T : H \to \mathbb{K},\ Q_T(x) := \langle Tx, x\rangle\,,$$

die sogenannte *quadratische Form* des Operators T. Dann gelten:

1. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$Q_T(\alpha x + \beta y) = |\alpha|^2 Q_T(x) + \alpha\overline{\beta} \langle x, Ty\rangle + \overline{\alpha}\beta\overline{\langle Tx, y\rangle} + |\beta|^2 Q_T(y). \tag{9.1}$$

   Insbesondere ist $Q_T \notin L'(H)$.

2. Es gelten die *Polarformeln*

$$4\langle Tx, y\rangle = Q_T(x+y) - Q_T(x-y) \tag{9.2}$$

   für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw.

$$4\langle Tx, y\rangle = Q_T(x+y) - Q_T(x-y) + \mathrm{i}\cdot(Q_T(x+\mathrm{i}y) - Q_T(x-\mathrm{i}y)) \tag{9.3}$$

   für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Bemerkung 9.4.
Die Polarformeln liefern eine Möglichkeit, das Skalarprodukt eines Hilbertraums aus dessen Norm zu rekonstruieren. Wir führen dies im Videokurs für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vor, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ funktionieren aber analoge Rechnungen. Für $x, y \in H$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2\right) \tag{9.4}$$

Dies gibt eine Möglichkeit, zu prüfen, ob ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum ist; man testet, ob (9.4) ein Skalarprodukt auf H definiert. Ist dies der Fall, so ist H ein Hilbertraum; ist dies nicht der Fall, so ist es natürlich möglich, dass $\|\cdot\|$ von einem anders gearteten Skalarprodukt induziert wird.

Satz 9.5.
Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\|T\| = \sup_{x\in B_H} |\langle Tx, x\rangle| .$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Folgerung 9.6 (*Kleiner Eindeutigkeitssatz*).
Es sei H ein Hilbertraum, $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in B_H$. Dann ist $T \equiv 0$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Satz 9.6 heißt „kleiner“ Eindeutigkeitssatz, da er im Allgemeinen falsch ist, wenn H ein reeller Hilbertraum und T nicht selbstadjungiert ist. Ein Gegenbeispiel ist hier $H := \mathbb{R}^2$ und T beschreibt eine Drehung um $90°$.

Ist aber H ein komplexer Hilbertraum, so gilt der Satz auch ohne die Voraussetzung, dass T selbstadjungiert ist.

Satz 9.7 (*Großer Eindeutigkeitssatz*).
Es sei H ein komplexer Hilbertraum, $T \in L(H)$ und $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Dann ist $T \equiv 0$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

10 Normale Operatoren

Nun kommen wir zu normalen Operatoren. Wir beginnen mit einer äquivalenten Charakterisierung.

***Satz* 10.1.**
Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann sind äquivalent:

1. T ist normal.
2. Es gilt $\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle$ für $x, y \in H$.
3. Es gilt $\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$ für $x \in H$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Folgerung* 10.2.**
Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ normal. Dann gilt:

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{R}(T^*)^\perp.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Wir verknüpfen zum Abschluss dieses Kapitels normale Operatoren und die Beginne der Spektraltheorie aus [Sch19, Kapitel 17].

***Satz* 10.3.**
Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann gilt

$$r(T) := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \|T\|.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Folgerung* 10.4.**
Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$. Dann gilt

$$\|T\| = r(T^*T)^{1/2}.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

11 Unitäre Operatoren

Zum Abschluss dieses Kurses schauen wir uns unitäre Operatoren genauer an. Wir beginnen mit einer allgemeineren Aussage zu Isometrien.

Satz 11.1.
Es seien H_1, H_2 Innenprodukträume und $T \in L(H_1, H_2)$. Dann sind äquivalent:

1. T ist eine Isometrie.
2. Es gilt $\langle Tx, Ty \rangle_{H_2} = \langle x, y \rangle_{H_1}$ für $x, y \in H_1$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Hiermit können wir nun folgende Charakterisierung beweisen.

Satz 11.2.
Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$. Dann sind äquivalent:

1. T ist unitär.
2. T ist surjektiv und es gilt $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ für $x, y \in H$.
3. T ist ein isometrischer Isomorphismus.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Als Anwendung unitärer Operatoren diskutieren wir die langfristige Evolution physikalischer Systeme. Diese können oft in der Form

$$x(t) = U(t)x_0, \ t \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden, wobei die $U(t)$ unitäre Operatoren auf einem Hilbertraum H und $x_0 \in H$ sind (vgl. z.B. [Sch21, Einleitung und Motivation]). Dabei sollte stets folgende Halbgruppeneigenschaft gelten:

$$U(0) = I, \ U(t+s) = U(t)U(s), \ t, s \in \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

Nach einem Prinzip der Thermodynamik sollten makroskopische Systeme für $t \to \infty$ gegen einen Gleichgewichtszustand streben. Führen wir die Diskretisierung $t = n \in \mathbb{Z}$ ein, so betrachten wir in (11.1) Potenzen $(U^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eines unitären Operators $U \in L(H)$; das Prinzip der Thermodynamik behauptet dann also die Existenz von $\lim_{n\to\infty} U^n x$ für $x \in H$ in einer geeigneten Weise.

Wir nähern uns dem Problem, indem wir den einfachsten Fall $\dim H = 1$ betrachten. Dann ist U einfach eine komplexe Zahl mit $|U| = 1$ und für $U \neq 1$ existiert $\lim_{n\to\infty} U^n$ nicht. Für die arithmetischen Mittel der U^n gilt jedoch:

$$V_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j = \frac{1}{n}\frac{U^n - 1}{U - 1} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & : \quad U \neq 1 \\ 1 & : \quad U = 1 \end{cases}.$$

Dieses Prinzip der *Konvergenz im arithmetischen Mittel* können wir nun auf den allgemeinen Fall übertragen.

Satz 11.3 (*Evolutionssatz*).

Es sei H ein Hilbertraum, $U \in L(H)$ ein unitärer Operator und P die orthogonale Projektion auf den Eigenraum $E(U;1) := \{y \in H : Uy = y\}$. Dann gilt für alle $x \in H$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j x = Px. \tag{11.2}$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Bemerkung 11.4.

Der oben betrachtete Spezialfall geht aus Satz 11.3 dadurch hervor, dass in diesem Fall gerade $E(U,1) = \{0,1\}$ und $Px = \delta_{1,x}$ gilt.

Epilog

Ich hoffe, dass ich mit diesem Kurs und diesem Skript ein wenig Wissen (und nicht zu Letzt auch ein wenig Freude) an der Materie vermitteln konnte. Sollte dies auch nur für einen Zuschauer zutreffen, so hat es sich für mich bereits gelohnt.

Matthias Schulte, 2024.

Abbildungsverzeichnis

1 Geometrische Aussage der Parallelogrammgleichung . . 10
2 Orthogonale Projektion in $\mathbb{R}^2$ 15

Literaturverzeichnis

[Brü18] Rainer Brück. Funktionalanalysis I. Abgerufen am 04.10.2023, 16:57 Uhr. 2018. URL: https://t1p.de/qa4bj.

[Brü19] Rainer Brück. Funktionalanalysis II. Abgerufen am 02.10.2023, 12:11 Uhr. 2019. URL: https://t1p.de/vkier.

[Kab00] Winfried Kaballo. Einführung in die Analysis I. Heidelberg: Spektrum, 2000.

[Kab11] Winfried Kaballo. Grundkurs Funktionalanalysis. Heidelberg: Spektrum, 2011.

[Que01] Boto v. Querenburg. Mengentheoretische Topologie. 3. Aufl. Berlin: Springer, 2001.

[Sch19] Matthias Schulte. Grundlagen der Funktionalanalysis. Abgerufen am 02.10.2023, 12:17 Uhr. 2019. URL: https://t1p.de/zoem4.

[Sch21] Matthias Schulte. Die Laplacetransformation zur Lösung abstrakter Cau Abgerufen am 05.10.2023, 19:28 Uhr. 2021. URL: https://t1p.de/orfsw.

[Sch23] Matthias Schulte. Approximation mit Fourierreihen. Abgerufen am 05.10.2023, 20:11 Uhr. 2023. URL: pending.