Das SQP Verfahren

Maximilian Simmoteit

20. Februar 2019

Grundannahmen dieser Arbeit

In dieser Arbeit werden allgemeine Bilder als Funktionen $[0,1]^2 \to [0,1]$ aufgefasst. Diskrete Bilder sind dann zweidimensionale Vektoren mit Werten in $[0,1]$.

1 Das Schärfen von Bildern

In meinem Projekt habe ich mich damit beschäftigt den Algorithmus zum Schärfen von Bildern als Programm umzusetzen. Die Unschärfe eines Bildes wird hier als Faltung aufgefasst. Für einen Faltungskern k und ein Bild u ist das unscharfe Bild dann $k * u$. Für ein gegebenes unscharfe Bild f ergibt sich daraus für die Optimierung der Minimierungsterm:

$$\min_{u \in U} \|k * u - f\| + \alpha TV(u) \tag{1}$$

oder für den diskreten Fall

$$min_{u \in U} \|k * u - f\| + \alpha \left\| \|\nabla_h u\|_2 \right\|_1 \tag{2}$$

Zum Finden der optimalen Lösung u, kann man die Routine von Chambole-Pock nutzen. Als Eingabe benötigt diese einen Term der Form $\min_{x \in X} F(x) + G(Ax)$. Allerdings wird der Term für ein gefaltetes Bild dem nicht ganz gerecht, da dort auch im ersten Term noch eine Funktion auf die Variable angewandt wird. Deswegen setzt man $F(x) = 0$ und setzt den gesamten Term in $G(Ax)$ ein. Hier setzt man $Au = k * u$ und dementsprechend A^* als dessen adjungierte Abbildung. Somit erhält man den folgenden Algorithmus:

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \tau(A^* y_1^k - div y_2^k) \\
\bar{x}^{k+1} &= 2 \cdot x^{k+1} - x^k \\
y_1^{k+1} &= \frac{1}{1+\sigma}(y_1^k + \sigma \cdot A\bar{x}^{k+1} - \sigma \cdot f) \\
y2^{k+1} &= \frac{\alpha(y_2^{k+1} + \sigma \nabla \bar{x}^{k+1})}{\max\{\alpha, \left\| y_2^{k+1} + \sigma \nabla \bar{x}^{k+1} \right\|_2\}}
\end{aligned}$$

2 Umsetzung als Programm

Und so wurde dieser Algorithmus als Programm umgesetzt.
Zuerst betrachten wir, wie die Funktionen der diskreten Ableitung implementiert wurden.

2.1 Der diskrete Gradient

Performance Verbesserungen

2.2 Die diskrete Divergenz

Performance Verbesserungen

2.3 Die diskrete Faltung

Performance Verbesserungen

2.4 Die Optimierungsschleife