

Calcolabilità

Mattia Patetta

13 novembre 2025

Indice

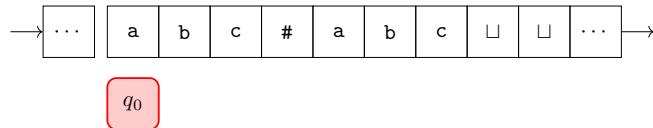
1 Macchine di Turing	3
1.1 Definizione formale di macchina di Turing	3

1 Macchine di Turing

Le Turing Machine corrisponde ad un modello astratto del computer. Utilizza un **nastro** di lunghezza infinita come memoria e una **testina** per poter leggere e scrivere simboli spostandola sia a destra che a sinistra. Inoltre è dotata di uno stato di **accettazione/rifiuto con effetto immediato**, cioè che lo stato *accetta/rifiuta* appena ci si entra.

Esempio 1.

$$L = \{w\#w : w \in \{0,1\}^*\}$$



Dove \square rappresenta uno spazio vuoto.

1.1 Definizione formale di macchina di Turing

Definizione 1: Macchina di Turing

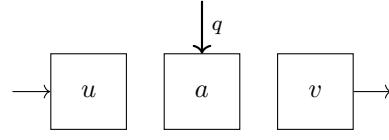
Una macchina di Turing è una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ dove:

- Q è l'insieme degli stati,
- Σ l'alfabeto di input,
- Γ l'alfabeto del nastro,
- δ la funzione di transizione definita come:

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}, \text{ con } L \text{ ed } R \text{ che indicano left e right}$$

- $q_{\text{start}}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}} \in Q$, sono rispettivamente gli stati: iniziali, accettanti e di rifiuto, con la caratteristica che $q_{\text{start}} \neq q_{\text{acc}}$.

Durante la computazione di una macchina di Turing, si verificano cambiamenti rispetto a: **stato**, **contenuto nastro** e **posizione testina**, ed l'impostazione di questi tre elementi è chiamata una **configurazione** della macchina di Turing. Introduciamo in merito a queste configurazioni, la seguente notazione:



$uqav$, dove $u, v \in \Gamma^*$, $q \in Q, a \in \Gamma$.

In cui:

- $q \in Q$, rappresenta lo stato corrente,
- $u, v \in \Gamma^*$, sono stringhe nonché il contenuto corrente del nastro,
- $a \in \Gamma$, rappresenta la posizione attuale della testina.

Nota!

Dopo l'ultimo simbolo di v , il nastro contiene solo simboli blank.

Si dice che la configurazione C_1 **produce** (\vdash_M) la configurazione C_2 se la macchina di Turing M può passare da C_1 a C_2 in un unico passo.

$$uaq_i bv \vdash_M uq_j acv \Leftrightarrow \delta(q_i, b) = (q_j, c, L),$$

Similmente:

$$uaq_i bv \vdash_M uacq_j v \Leftrightarrow \delta(q_i, b) = (q_j, c, R).$$

Abbiamo dei casi particolari nei casi in cui la testina si trova in una delle due estremità della configurazione:

- Per l'estremità di sinistra abbiamo:
 - $q_i bv \vdash_M q_j cv$ se la transizione è verso sinistra,
 - $q_i bv \vdash_M cq_j v$ se la transizione è verso destra.
- Per l'estremità di destra invece la configurazione è:

$$uaq_i = uaq_i \sqcup,$$

perché assumiamo che i simboli *blank* seguano la parte del nastro rappresentata dalla configurazione.

Avremo quindi come configurazione iniziale:

$$q_{start} w, \text{ dove } w \text{ è l'input},$$

mentre come configurazione finale, usando lo stato $q \in \{q_{acc}, a_{rej}\}$:

$$uq_{acc} av, \quad uq_{rej} av.$$

Condizione di accettazione

$$M \text{ accetta } w \in \Sigma^* \Leftrightarrow C_{start} = q_{start}w : C_{start} \vdash_M^* C_{acc},$$

dove C_{acc} è una qualsiasi configurazione di accettazione.

Definizione 2: Linguaggi Turing Riconoscibili

Un linguaggio è Turing riconoscibile se esiste una macchina di Turing M che lo riconosce, ovvero $\forall w \in L$ abbiamo che M accetta w .

La macchina di Turing quando riceve un input può produrre tre risultati:

- Accettato,
- Rifiutato,
- Loop, cioè che la macchina non arriverà mai ad uno stato di arresto.

Nota!

Se $w \notin L$, $M(w)$ può rifiutare o entrare in loop.

Poiché è difficile distinguere una macchina di Turing che è effettivamente in loop da una che sta semplicemente impiegando molto tempo, preferiamo considerare macchine di Turing che si fermano su ogni input. Una macchina del genere è chiamata **decisore** perché in ogni caso *decide* se accettare o rifiutare. Un decisore decide un linguaggio L se è in grado di distinguere correttamente tutte le stringhe che appartengono a L da quelle che non vi appartengono (quindi se lo riconosce).

Definizione 3: Linguaggio Turing Decidibile

Un linguaggio si dice Turing-decidibile (o decidibile) se esiste una macchina di Turing M che lo decide.