Automi

Mattia Patetta

18 ottobre 2025

Indice

1 Linguaggi Regolari

1.1 DFA

1.2 Linguaggio Accettato

1.3 Linguaggi Regolari

1.4 Operazioni sui linguaggi

1.5 Non Determinismo

1.6 NFA

1.7 Teorema: REG = $\mathcal{L}$(NFA)

1.8 Espressioni Regolari

1.9 Pumping Lemma

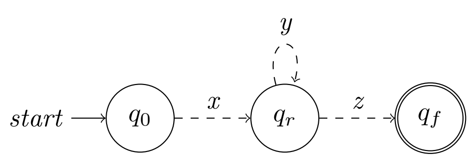
Per provare la non regolarità di un linguaggio, usiamo un teorema chiamato **pumping lemma**, che mostra una proprietà che solo i linguaggi regolari possiedono.
Questa proprietà afferma che, per ogni parola sufficientemente lunga del linguaggio, è possibile ripetere una certa parte della parola in modo che la nuova stringa ottenuta appartenga ancora al linguaggio.

Teorema 1.1. *Se L è regolare, allora esiste un valore $p \in \mathbb{N}$ (lunghezza del pumping) t.c., presa una stringa $w \in L$ con $|w| \geq p$, allora w può essere scomposta in $w = xyz$ (tre sottostringhe), in modo tale che:*

i) $\forall\ i \geq 0,\ xy^iz \in L$

ii) $|y| > 0$

iii) $|xy| \leq p$



Dimostrazione. Sia M (Q, Σ, δ, q_1, F) t.c. $L(M) = L$ e sia $p = |Q|$. Consideriamo $w = w_1, w_2, \ldots, w_n$ t.c. $n \geq p$.
Sia $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ la sequenza di stati attraversati da M su input w (in cui $r_1 = q_1$ e $r_{n+1} \in F$).
In altre parole:

$$\delta(r_i, w_i) = r_{i+1}, \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n$$

Pigeonhole Principle

Poiché $|w| \geq p$, l'automa visita $|w|+1$ stati. Avendo solo p stati disponibili, per il principio dei cassetti almeno uno stato deve essere visitato due volte. Questo ci assicura l'esistenza di un ciclo nell'automa.

Per il principio appena enunciato, nella sequenza considerata c'è almeno uno stato che si ripete.
Scompongo la stringa $w = xyz$ e pongo:

1. $x = w_1, \ldots, w_{i-1}$
2. $y = w_i, \ldots, w_{l-1}$
3. $z = w_l, \ldots, w_n$

Siccome x porta M da $r_1 = q_1$ ad r_i, y porta M da $r_i = r_l$ a $r_{n+1} \in F$, allora:

$$\forall i \geq 0, xy^i z \in L(M)$$

Siccome $i \neq l$, allora $|y| > 0$.
Infine $l \leq p+1$, allora $|xy| = l - 1 \leq p$

$\square$

2 Linguaggi Non Regolari

2.1 Grammatiche Acontestuali

Una grammatica è una sequenza di sostituzioni e produzioni

$$\begin{cases} A \to 0A1 \quad (R_1) \\ A \to B \quad (R_2) \\ B \to \# \quad (R_3) \end{cases}$$

dove:

1. $0, 1, \#$ sono detti terminali
2. A e B sono variabili

La grammatica genera stringhe:

1. Scrivo variabile iniziale
2. Sostituisco le variabili con altre espressioni seguendo le regole della grammatica
3. Ripeto fino a che non ci sono più variabili