复变函数—习题解答

2025 年 2 月 3 日

目录

第一章　复数与复变函数

1.1　复数的定义及其运算

1. 设 z 和 w 是两个复数, 证明:

(1) $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\operatorname{Im} z=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$;

(2) $z\overline{z}=|z|^2$;

(3) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{zw}=\overline{z}\overline{w}$;

(4) $|zw|=|z||w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$;

(5) $|z|=|\overline{z}|$.

证明：设 $z=a+b\mathrm{i}, w=u+v\mathrm{i}$, 则

(1) $\operatorname{Re} z=a=\dfrac{1}{2}[(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})]=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$;

(2) $z\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2=|z|^2$;

(3) $\overline{z+w}=\overline{(a+b\mathrm{i})+(u+v\mathrm{i})}=\overline{(a+u)+(b+v)\mathrm{i}}=(a+u)-(b+v)\mathrm{i}=(a-b\mathrm{i})+(u-v\mathrm{i})=\overline{z}+\overline{w}$;

(4) $|zw|^2=(zw)\overline{(zw)}=|z|^2|w|^2$, 两边同时开方即得 (4);

(5) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-b)^2}=|\overline{z}|^2$.

2. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 证明:

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|,$$

并给出不等式中等号成立的条件.

证明：由复数模的三角不等式可得 $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}|+|z_n|$, 等号成立当且仅当存在 $t_n\geqslant 0$ 使得 $z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}=t_nz_n$, 继续对不等式右侧第一项的 $n-1$ 个复数使用复数模的三角不等式可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}|+|z_n|\leqslant|z_1+z_2+\cdots+z_{n-2}|+|z_{n-1}|+|z_n|$$

等号成立当且仅当存在满足上述的 t_n, 并且存在 $t_{n-1}\geqslant 0$ 使得 $z_1+z_2+\cdots+z_{n-2}=t_{n-1}z_{n-1}$, 于是可得 $(t_{n-1}+1)z_{n-1}=t_nz_n$, 即 z_{n-1} 与 z_n 共线且同向, 如此递归地进行 $n-1$ 次可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|,$$

等号成立当且仅当存在 n 个非负实数 $k_1,\cdots.k_n$, 使得

$$k_1z_1=k_2z_2=\cdots=k_nz_n.$$

3. 证明:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|) \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|.$$

证明: 设 $z=a+b\mathrm{i}$, 则 $\operatorname{Re} z=a, \operatorname{Im} z=b, |z|=\sqrt{a^2+b^2}$, 即证
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a|+|b|) \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a|+|b|,$$
等价于证
$$\frac{1}{2}(|a|+|b|)^2 \leqslant a^2+b^2 \leqslant (|a|+|b|)^2,$$
对左边不等式, 由 $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$, 可得 $2|a||b| \leqslant |a|^2+|b^2|$, 两边同时加 $|a|^2+|b^2|$ 再除以 2 即得 $\frac{1}{2}(|a|+|b|)^2 \leqslant a^2+b^2$; 对右边不等式, 由 $a^2+b^2 \leqslant |a|^2+2|a||b|+|b|^2$, 显然可得,$a^2+b^2 \leqslant (|a|+|b|)^2$

4. 若 $|z_1|=\lambda|z_2|, \lambda>0$, 证明:
$$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|.$$

证明:
$$\begin{aligned}
|z_1-\lambda^2 z_2|^2=(z_1-\lambda^2 z_2)(\overline{z_1}-\lambda^2\overline{z_2}) =& |z_1|^2-\lambda^2 z_2\overline{z_1}-\lambda^2 z_1\overline{z_2}+\lambda^4|z_2|^2 \\
=& \lambda^2|z_2|^2-\lambda^2 z_2\overline{z_1}-\lambda^2 z_1\overline{z_2}+\lambda^2|z_1|^2 \\
=& \lambda^2(|z_2|^2-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}+|z_1|^2) \\
=& \lambda^2(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} \\
=& \lambda^2|z_1-z_2|^2.
\end{aligned}$$
同时开方即得
$$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|.$$

5. 设 $|a|<1$, 证明: 若 $|z|=1$, 则
$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=1.$$

证明: $|1-\overline{a}z|=|z|\left|\frac{1}{z}-\overline{a}\right|=|\overline{z}-\overline{a}|=|\overline{z-a}|=|z-a|$.

6. 设 $|a|<1, |z|<1$. 证明:

(1) $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$;

(2) $1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$;

(3) $\dfrac{||z|-|a||}{1-|a||z|} \leqslant \left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant \dfrac{|z|+|a|}{1+|a||z|}$.

证明：

(1) 由于

$$|z-a|^2 = (z-a)\overline{(z-a)} = (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = |z|^2+|a|^2-a\overline{z}-\overline{a}z,$$

$$|1-\overline{a}z|^2 = (1-\overline{a}z)\overline{(1-\overline{a}z)} = (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) = 1+|a|^2|z|^2-a\overline{z}-\overline{a}z,$$

故原命题等价于证:

$$|z|^2+|a|^2 < 1+|a|^2|z|^2$$

其中 $|z|<1, |a|<1$. 由 $(1-|z|^2)(1-|a|^2) = 1-|z|^2-|a|^2+|a|^2|z|^2 > 0$, 从而命题得证.

(2) 原命题等价于证:

$$|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2),$$

由 (1) 可知

$$|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2 = 1+|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2)$$

(3)

$$1-\left[\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\right]^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1-|a||z|)^2},$$

$$1-\left[\frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}\right]^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1+|a||z|)^2},$$

由复数模的三角不等式显然可得 $1-|a||z| \leqslant |1-\overline{a}z| \leqslant 1+|a||z|$, 从而

$$\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1+|a||z|)^2} \leqslant \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} \leqslant \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1-|a||z|)^2},$$

于是由 (2) 可得

$$1-\left[\frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}\right]^2 \leqslant 1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 \leqslant 1-\left[\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\right]^2.$$

即

$$\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|} \leqslant \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}.$$

7. 设 $z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_n$ 是任意 $2n$ 个复数, 证明复数形式的 Lagrange 等式:

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2 = (\sum_{j=1}^n |z_j|^2)(\sum_{j=1}^n |w_j|^2) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2,$$

并由此推出 Cauchy 不等式:

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2 \leqslant (\sum_{j=1}^n |z_j|^2)(\sum_{j=1}^n |w_j|^2),$$

不等式中等号成立的条件是什么?

证明：

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2 - (\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2)(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2) &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} z_j w_j & \sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2 \\ \sum\limits_{j=1}^{n}|w_j|^2 & \sum\limits_{j=1}^{n}\overline{z_j w_j} \end{vmatrix} \\
&= \left| \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \overline{z_1} \\ w_2 & \overline{z_2} \\ \vdots & \vdots \\ w_n & \overline{z_n} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \begin{vmatrix} z_j & z_k \\ \overline{w_j} & \overline{w_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_j & \overline{z_j} \\ w_k & \overline{z_k} \end{vmatrix} \quad (\text{Cauchy}-\text{Binet 公式}) \\
&= -\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |z_j\overline{w_k} - z_k\overline{w_j}|^2.
\end{aligned}
$$

由复数模的非负性显然可得 Cauchy 不等式:

$$
\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2 \leqslant (\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2)(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2),
$$

等号成立当且仅当对任意 $1\leqslant j<k\leqslant n$, 都有 $z_j\overline{w_k}=z_k\overline{w_j}$, 即存在复常数 k, 使得 $(z_j,z_k)=k(\overline{w_j},\overline{w_k})$, 由任意性可得, 等号成立当且仅当即存在复常数 k 使得

$$
(z_1,z_2,\cdots,z_n)=k(\overline{w_1},\overline{w_2},\cdots,\overline{w_n}).
$$

8. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 证明必有 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 E, 使得

$$
\Big|\sum_{j\in E} z_j\Big| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.
$$

证明：将复平面按象限分成四个闭集, 则这四个闭集中至少有一个闭集记作 A, 使得

$$
\sum_{z_j\in A}|z_j| \geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}|z_j|,
$$

由于同一象限中复数的实部与虚部的符号相同, 不妨设 A 为第一象限与其边界组成的闭集, 则对任一 $z\in A$, 记 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 则 z 在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 上的投影为 $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)$, 并且易得

$$
\Big||z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)\Big| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|z|,
$$

记 $z_j \in A$ 的指标集为 E, 则

$$\Big|\sum_{j\in E} z_j\Big| \geqslant \Big|\sum_{j\in E} |z_j| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cos(\frac{\pi}{4}-\theta_j)\Big| = \sum_{j\in E} \Big||z_j| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cos(\frac{\pi}{4}-\theta_j)\Big|$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j\in E} |z_j| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{8} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \geqslant \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

注：在分割闭集时可以按 $y = \pm x$ 分割, 这样讨论更方便. 更一般的可以将系数改进到 $\dfrac{1}{\pi}$.(详见 Rudin 实分析与复分析 6.3)

1.2　复数的几何表示

1. 把复数 $z = 1 + \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 写成三角形式.

2. 问 n 取何值时有 $(1+\mathrm{i})^n = (1-\mathrm{i})^n$?

3. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

4. 证明:$\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle w_1w_2w_3$ 同向相似的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.3　扩充平面和复数的球面表示

1.4　复数列的极限

1.5　开集、闭集和紧集

1.6 曲线和域

1.7 复变函数的极限和连续性

第二章　全纯函数

2.1 复变函数的导数

2.2 Cauchy-Riemann 方程

2.3 导数的几何意义

2.4　初等全纯函数

2.5　分式线性变换

第三章　全纯函数与积分表示

第四章　全纯函数的 Taylor 展开及其应用

第五章　全纯函数的 Laurent 展开及其应用

第六章　全纯开拓

第七章　共形映射

第八章　调和函数与次调和函数

第九章　多复变全纯函数与全纯映射