复变函数—习题解答

2025 年 2 月 5 日

目录

第一章　复数与复变函数

1.1　复数的定义及其运算

1. 设 z 和 w 是两个复数, 证明:

(1) $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\operatorname{Im} z=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$;

(2) $z\overline{z}=|z|^2$;

(3) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\overline{zw}=\overline{z}\overline{w}$;

(4) $|zw|=|z||w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$;

(5) $|z|=|\overline{z}|$.

证明：设 $z=a+b\mathrm{i}, w=u+v\mathrm{i}$, 则

(1) $\operatorname{Re} z=a=\dfrac{1}{2}[(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})]=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$;

(2) $z\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2=|z|^2$;

(3) $\overline{z+w}=\overline{(a+b\mathrm{i})+(u+v\mathrm{i})}=\overline{(a+u)+(b+v)\mathrm{i}}=(a+u)-(b+v)\mathrm{i}=(a-b\mathrm{i})+(u-v\mathrm{i})=\overline{z}+\overline{w}$;

(4) $|zw|^2=(zw)\overline{(zw)}=|z|^2|w|^2$, 两边同时开方即得 (4);

(5) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-b)^2}=|\overline{z}|^2$.

2. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 证明:

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|,$$

并给出不等式中等号成立的条件.

证明：由复数模的三角不等式可得 $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}|+|z_n|$, 等号成立当且仅当存在 $t_n\geqslant 0$ 使得 $z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}=t_nz_n$, 继续对不等式右侧第一项的 $n-1$ 个复数使用复数模的三角不等式可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}|+|z_n|\leqslant|z_1+z_2+\cdots+z_{n-2}|+|z_{n-1}|+|z_n|$$

等号成立当且仅当存在满足上述的 t_n, 并且存在 $t_{n-1}\geqslant 0$ 使得 $z_1+z_2+\cdots+z_{n-2}=t_{n-1}z_{n-1}$, 于是可得 $(t_{n-1}+1)z_{n-1}=t_nz_n$, 即 z_{n-1} 与 z_n 共线且同向, 如此递归地进行 $n-1$ 次可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|,$$

等号成立当且仅当存在 n 个非负实数 $k_1,\cdots.k_n$, 使得

$$k_1z_1=k_2z_2=\cdots=k_nz_n.$$

3. 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|) \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|.$$

证明： 设 $z=a+b\mathrm{i}$, 则 $\operatorname{Re} z=a, \operatorname{Im} z=b, |z|=\sqrt{a^2+b^2}$, 即证

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|a|+|b|) \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a|+|b|,$$

等价于证

$$\frac{1}{2}(|a|+|b|)^2 \leqslant a^2+b^2 \leqslant (|a|+|b|)^2,$$

对左边不等式, 由 $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$, 可得 $2|a||b| \leqslant |a|^2+|b^2|$, 两边同时加 $|a|^2+|b^2|$ 再除以 2 即得 $\frac{1}{2}(|a|+|b|)^2 \leqslant a^2+b^2$; 对右边不等式, 由 $a^2+b^2 \leqslant |a|^2+2|a||b|+|b|^2$, 显然可得,$a^2+b^2 \leqslant (|a|+|b|)^2$

4. 若 $|z_1|=\lambda|z_2|, \lambda>0$, 证明:

$$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|.$$

证明：

$$\begin{aligned}
|z_1-\lambda^2 z_2|^2=(z_1-\lambda^2 z_2)(\overline{z_1}-\lambda^2\overline{z_2}) =&|z_1|^2-\lambda^2 z_2\overline{z_1}-\lambda^2 z_1\overline{z_2}+\lambda^4|z_2|^2\\
=&\lambda^2|z_2|^2-\lambda^2 z_2\overline{z_1}-\lambda^2 z_1\overline{z_2}+\lambda^2|z_1|^2\\
=&\lambda^2(|z_2|^2-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}+|z_1|^2)\\
=&\lambda^2(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\
=&\lambda^2|z_1-z_2|^2.
\end{aligned}$$

同时开方即得

$$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|.$$

5. 设 $|a|<1$, 证明: 若 $|z|=1$, 则

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=1.$$

证明：$|1-\overline{a}z|=|z|\left|\frac{1}{z}-\overline{a}\right|=|\overline{z}-\overline{a}|=|\overline{z-a}|=|z-a|$.

6. 设 $|a|<1, |z|<1$. 证明:

(1) $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$;

(2) $1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}$;

(3) $\dfrac{||z|-|a||}{1-|a||z|} \leqslant \left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant \dfrac{|z|+|a|}{1+|a||z|}$.

证明：

(1) 由于

$$|z-a|^2 = (z-a)\overline{(z-a)} = (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = |z|^2+|a|^2-a\overline{z}-\overline{a}z,$$

$$|1-\overline{a}z|^2 = (1-\overline{a}z)\overline{(1-\overline{a}z)} = (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) = 1+|a|^2|z|^2-a\overline{z}-\overline{a}z,$$

故原命题等价于证:

$$|z|^2+|a|^2 < 1+|a|^2|z|^2$$

其中 $|z|<1, |a|<1$. 由 $(1-|z|^2)(1-|a|^2) = 1-|z|^2-|a|^2+|a|^2|z|^2 > 0$, 从而命题得证.

(2) 原命题等价于证:

$$|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2),$$

由 (1) 可知

$$|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2 = 1+|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2)$$

(3)

$$1-\left[\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\right]^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1-|a||z|)^2},$$

$$1-\left[\frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}\right]^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1+|a||z|)^2},$$

由复数模的三角不等式显然可得 $1-|a||z| \leqslant |1-\overline{a}z| \leqslant 1+|a||z|$, 从而

$$\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1+|a||z|)^2} \leqslant \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} \leqslant \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1-|a||z|)^2},$$

于是由 (2) 可得

$$1-\left[\frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}\right]^2 \leqslant 1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 \leqslant 1-\left[\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\right]^2.$$

即

$$\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|} \leqslant \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}.$$

7. 设 $z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_n$ 是任意 $2n$ 个复数, 证明复数形式的 Lagrange 等式:

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2 = (\sum_{j=1}^n |z_j|^2)(\sum_{j=1}^n |w_j|^2) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2,$$

并由此推出 Cauchy 不等式:

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2 \leqslant (\sum_{j=1}^n |z_j|^2)(\sum_{j=1}^n |w_j|^2),$$

不等式中等号成立的条件是什么?

证明:

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2-(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2)(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2) &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} z_j w_j & \sum\limits_{j=1}^{n}|z_j|^2 \\ \sum\limits_{j=1}^{n}|w_j|^2 & \sum\limits_{j=1}^{n}\overline{z_j w_j} \end{vmatrix} \\
&= \left| \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \overline{z_1} \\ w_2 & \overline{z_2} \\ \vdots & \vdots \\ w_n & \overline{z_n} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \begin{vmatrix} z_j & z_k \\ \overline{w_j} & \overline{w_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_j & \overline{z_j} \\ w_k & \overline{z_k} \end{vmatrix} \quad (\text{Cauchy}-\text{Binet 公式}) \\
&= -\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2.
\end{aligned}
$$

由复数模的非负性显然可得 Cauchy 不等式:

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2 \leqslant (\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2)(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2),$$

等号成立当且仅当对任意 $1\leqslant j<k\leqslant n$, 都有 $z_j\overline{w_k}=z_k\overline{w_j}$, 即存在复常数 k, 使得 $(z_j,z_k)=k(\overline{w_j},\overline{w_k})$, 由任意性可得, 等号成立当且仅当即存在复常数 k 使得

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)=k(\overline{w_1},\overline{w_2},\cdots,\overline{w_n}).$$

8. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是任意 n 个复数, 证明必有 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 E, 使得

$$\Big|\sum_{j\in E} z_j\Big| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.$$

证明:将复平面按象限分成四个闭集, 则这四个闭集中至少有一个闭集记作 A, 使得

$$\sum_{z_j\in A}|z_j| \geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}|z_j|,$$

由于同一象限中复数的实部与虚部的符号相同, 不妨设 A 为第一象限与其边界组成的闭集, 则对任一 $z\in A$, 记 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, 则 z 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 上的投影为 $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cos(\dfrac{\pi}{4}-\theta)$, 并且易得

$$\Big||z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)\Big| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|z|,$$

记 $z_j \in A$ 的指标集为 E, 则

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j\in E} z_j\Big| \geqslant \Big|\sum_{j\in E}|z_j|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta_j)\Big| &= \sum_{j\in E}\Big||z_j|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta_j)\Big| \\ &\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{j\in E}|z_j| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{8}\sum_{j=1}^{n}|z_j| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.\end{aligned}$$

注：在分割闭集时可以按 $y=\pm x$ 分割, 这样讨论更方便. 更一般的可以将系数改进到 $\dfrac{1}{\pi}$.(详见 Rudin 实分析与复分析 6.3)

1.2　复数的几何表示

1. 把复数 $z=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 写成三角形式.

2. 问 n 取何值时有 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$?

3. 证明:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},\ \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

4. 证明:$\triangle z_1z_2z_3$ 和 $\triangle w_1w_2w_3$ 同向相似的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1\\ z_2 & w_2 & 1\\ z_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

5. 设 $z_1\neq z_2$, 证明:

(1) z 位于以 z_1 和 z_2 为端点的开线段上, 当且仅当存在 $\lambda\in(0,1)$, 使得

$$z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2;$$

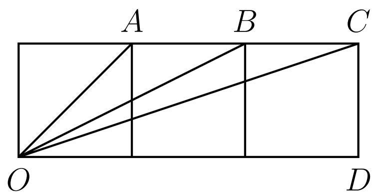
(2) z 位于以 z_1 和 z_2 为端点的开圆弧上, 当且仅当存在 $\theta\,(0<|\theta|<\pi)$, 使得

$$\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\theta.$$

6. 证明: 三点 z_1,z_2,z_3 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1\\ z_2 & \overline{z_2} & 1\\ z_3 & \overline{z_3} & 1\end{vmatrix}=0.$$

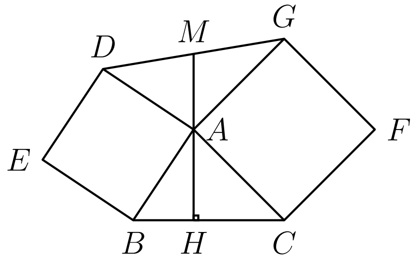
7. 下图是三个边长为 1 的正方形



证明:

$$\angle AOD+\angle BOD+\angle COD=\frac{\pi}{2}.$$

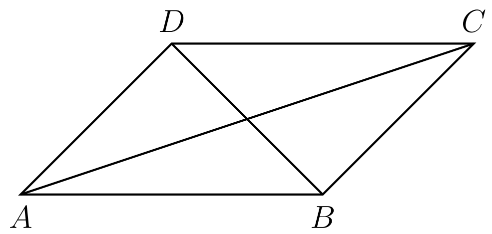
8. 如图,$ABED,ACFG$ 是正方形,$AH\perp BC$,M 是 DG 的中点. 证明:M,A,H 三点共线.



9. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 如果

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^4 + \overline{AD}^4,$$

那么这个平行四边形的锐角等于 $\dfrac{\pi}{4}$.



10. 证明:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

并说明等式的几何意义.

11. 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是单位圆周 (以原点为中心、半径为 1 的圆周) 上的 n 个点, 如果 $z_1, \cdots, z_n$ 是正 n 边形的 n 个顶点, 证明:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0.$$

12. 设 z_1, z_2, z_3 是单位圆周上的三个点, 证明: 这三个点是一正三角形三个顶点的充要条件为

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

13. 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是单位圆周上的四个点, 证明: 这四个点是一矩形顶点的充要条件为

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

14. 设 L 是由方程

$$az\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + d = 0,$$

所确定的点的轨迹, 其中 a, d 是实数,β 是复数. 证明:

(1) 当 $a = 0, \beta \neq 0$ 时,L 是一直线;

(2) 当 $a \neq 0, |\beta|^2 - ad > 0$ 时,L 是一圆周, 并求出该圆周的圆心和半径.

15. 设 $z_1 \neq z_2, 0 < \lambda \neq 1$, 证明由方程

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda,$$

所确定的点 z 的轨迹是一圆周 (通常称为 Apollonius 圆), 该圆周的圆心 a 和半径 R 分别为

$$a = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}, \quad R = \frac{\lambda|z_1 - z_2|}{|1 - \lambda^2|}.$$

16. 如果 $z_1,\cdots,z_n$ 都位于过原点的直线的一侧, 证明 $\dfrac{1}{z_1},\cdots,\dfrac{1}{z_n}$ 也必位于该直线的某一侧, 而且满足

$$z_1+\cdots+z_n=0,\quad \frac{1}{z_1}+\cdots+\frac{1}{z_n}\neq 0.$$

17. 设 $z_1,\cdots,z_n$ 是一个凸 n 边形的 n 个顶点, 如果 a 满足关系

$$\frac{1}{z_1-a}+\cdots+\frac{1}{z_n-a}=0,$$

那么 a 必在这个凸 n 边形的内部.

18. 证明:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

(提示**:** 考虑方程式 $(z+1)^n=1$ 的 $n-1$ 个不为零的根的乘积.)

19. 设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $P_m(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m+1}{2k+1}x^{m-k}$. 证明:

$$\sin(2m+1)\theta=\sin^{2m+1}\theta P_m(\operatorname{ctg}^2\theta).$$

20. 利用上题结果证明:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{m(2m-1)}{3}$;

(2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\operatorname{ctg}^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{1}{2m+1}$.

1.3　扩充平面和复数的球面表示

1. 证明: 在复数的球面表示下,z 和 $\frac{1}{z}$ 的球面像关于复平面对称.

证明：

2. 证明: 在复数的球面表示下,z 和 w 的球面像是直径对点当且仅当 $z\overline{w}=-1$.

证明：

3. 证明: 在复数的球面表示下,$\mathbf{C}_\infty$ 中的点 z 和 w 的球面像间的距离为 $\frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}$.

证明：

4. 证明: 在复数的球面表示下, 若 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是二阶酉方阵, 则 $\mathbf{C}_\infty$ 的变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 诱导了球面绕球心的一个旋转.

证明：

5. 证明: 在复数的球面表示下, 球面上圆周对应于复平面上的圆周或直线, 反之亦然.

证明：

6. 证明: 在复数的球面表示下, 复平面上两条光滑曲线在交点处的夹角与它们的球面像在交点处的夹角相等.

证明：

1.4　复数列的极限

1. 设 $z_0 \notin (-\infty, 0]$, $z_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. 证明: 复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 z_0 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z_0$.

证明：

2. 设 $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}$, 证明:

$$\lim_{nn\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

证明：

3. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = z_0.$$

证明：

4. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k w_{n-k} = z_0 w_0.$$

证明：

5. 设无穷三角阵

$$\begin{array}{lll} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

满足

(1) 对任意固定的 $k, \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$ 存在;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}$ 存在;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{nk}| \leqslant M < \infty, \forall n \in \mathbf{N}$.

证明: 若复数列 $\{z_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} z_k$ 存在.

证明：

1.5　开集、闭集和紧集

1. 证明: 一个平面点集的孤立点的全体至多可列.

1.6　曲线和域

1.7 复变函数的极限和连续性

第二章　全纯函数

2.1　复变函数的导数

2.2 Cauchy-Riemann 方程

2.3　导数的几何意义

2.4 初等全纯函数

2.5 分式线性变换

第三章　全纯函数与积分表示

第四章　全纯函数的 Taylor 展开及其应用

第五章　全纯函数的 Laurent 展开及其应用

第六章　全纯开拓

第七章　共形映射

第八章　调和函数与次调和函数

第九章　多复变全纯函数与全纯映射