

4 导航算法研究

导航算法用于测量无人机的姿态、速度和位置信息。姿态角指的是飞行器的横滚角、俯仰角和偏航角。速度指的是在地理坐标系下的北向速度、东向速度和地面向速度。位置指的是在地理坐标系下的北向位置、东向位置和地面向位置，也可以用经度、纬度和高度来表示。

本章主要介绍了两种导航算法。第一种是使用互补滤波算法解算出飞行器的姿态，从 GPS 获得飞行器的速度和位置。第二种是使用基于 EKF 的多传感器数据融合算法，可以计算出飞行器的姿态、速度和位置信息。对比在正常情况下两种算法得到的结果，可以验证算法的正确性。同时在 GPS 失锁的情况下，基于 EKF 的数据融合算法仍然有效，表现出 EKF 的数据融合算法在特殊工作条件下的优良性能。本章设计实验，使用扩展卡尔曼滤波算法计算出的姿态、速度、位置作为导航信息，设置好航点让无人机去自主跟踪航点，能够很好的完成任务，证明了该算法的可靠性和飞控电路板的实用性。

4.1 基本理论

4.1.1 参考坐标系

惯性导航的基础是精确定义一系列的笛卡尔坐标系，每个坐标系都符合右手定则。本文所使用的坐标系有：地球坐标系（e 系），导航坐标系（n 系）和载体坐标系（b 系）^[41]。

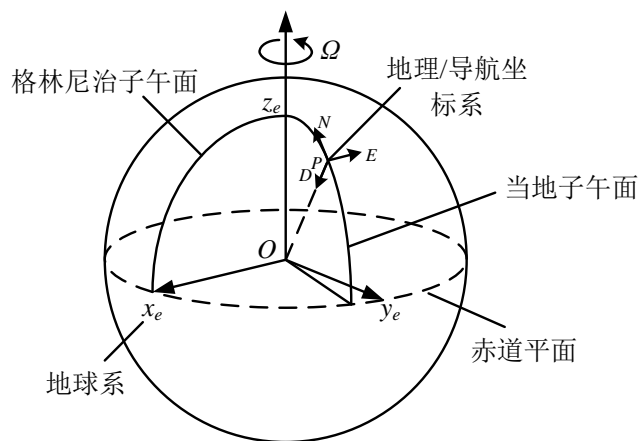


图 4-1 参考坐标系

Figure 4-1 Reference coordinate system

地球坐标系（e 系），原点是地球中心，坐标轴与地球固连，轴向定义是 Ox_e ， Oy_e ， Oz_e 。如图（3.1）所示，其中 Oz_e 的方向是沿地球极轴的方向， Ox_e 的方向是沿格林尼治子午面和地球赤道平面交线的方向。

导航坐标系（n 系），也叫地理坐标系，原点位于图中所示的 P 点，坐标轴指向北、东和当地垂线方向（向下）。

载体坐标系（b 系），也叫机体坐标系，它是一个正交坐标系，轴向分别沿安装有导

航系统的运载体的横滚轴 (x_b)，俯仰轴 (y_b) 和偏航轴 (z_b)。

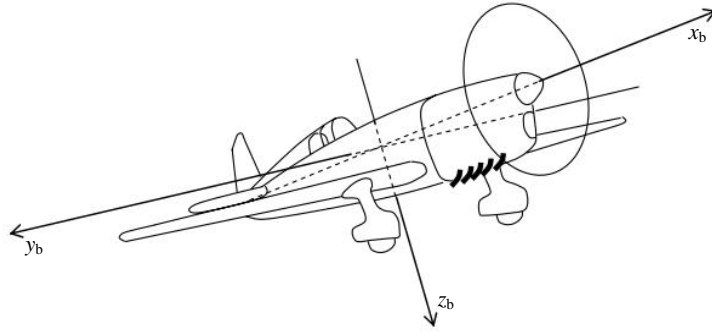


图 4-2 载体坐标系

Figure 4-2 Body coordinate system

4.1.2 姿态表达式

载体相对于参考坐标系的姿态可以用不同的数学表达式来表示。每种方法的计算数值会存储在计算机中，随着载体的转动用陀螺仪测得的值来对姿态进行更新。下面介绍 3 种姿态的表达式。

(1) 方向余弦矩阵

方向余弦矩阵 (Direction Cosine Matrix, DCM)，用符号 C_b^n 表示，是一个 3×3 阶的矩阵，矩阵的列表示载体坐标系中的单位矢量在地理坐标系中的投影， C_b^n 的分量形式如下：

$$C_b^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

在载体坐标系中定义的向量 r^n ，可以通过该向量左乘方向余弦矩阵 C_b^n ，转换到地理坐标系中：

$$r^n = C_b^n r^b \quad (4.2)$$

(2) 欧拉角

一个坐标系到另一个坐标系的变换，可以通过绕不同坐标轴的 3 次连续转动来实现。例如，从地理坐标系到新坐标系的变化可以表示成如下：

绕地理坐标系的 z 轴转动 ψ 角；绕新坐标系的 y 轴转动 θ 角；绕新坐标系的 x 轴转动 ϕ 角。 ψ 、 θ 和 ϕ 称为欧拉转动角。

3 次转动可以用数学方法表示成 3 个独立的方向余弦矩阵，定义如下：

绕 z 轴转动 ψ 角，有

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

绕 y 轴转动 θ 角，有

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

绕 x 轴转动 ϕ 角, 有

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

因此, 地理坐标系到载体坐标系的变化可以用这 3 个独立变化的乘积表示如下:

$$\mathbf{C}_n^b = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \quad (4.6)$$

同样, 从载体坐标系到地理坐标系的变换可以由下式给出:

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_n^{bT} = \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_3^T \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^n &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

上式为用欧拉角表示的方向余弦矩阵。

(3) 四元数

四元数姿态表达式是一个四参数的表达式。四元数姿态表达方法认为, 从一个坐标系变换到另一个坐标系, 可以通过绕矢量 $\boldsymbol{\mu}$ 的转动来实现。用符号 \mathbf{q} 表示四元数, 它具有 4 个元素, 这些元素是该矢量方向和转动大小的函数。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu/2) \\ (\mu_x/\mu)\sin(\mu/2) \\ (\mu_y/\mu)\sin(\mu/2) \\ (\mu_z/\mu)\sin(\mu/2) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

式中: μ_x 、 μ_y 、 μ_z 是角矢量 $\boldsymbol{\mu}$ 的分量, μ 是其大小。

定义 $\boldsymbol{\mu}$ 的大小和方向是使参考坐标系绕 $\boldsymbol{\mu}$ 转动一个角度 μ , 就能与载体坐标系重合。

用四元数来表示方向余弦矩阵, 计算方法如下:

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.1.3 方向余弦矩阵、欧拉角和四元数的关系

综上，方向余弦矩阵可以用欧拉角和四元数表示，如下：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_b^n &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

同样，可以用方向余弦表示四元数。对于小角度位移，四元数可以用下面的关系式推导：

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2}(1 + c_{11} + c_{22} + c_{33})^{1/2} \\
 b &= \frac{1}{4a}(c_{32} - c_{23}) \\
 c &= \frac{1}{4a}(c_{13} - c_{31}) \\
 d &= \frac{1}{4a}(c_{21} - c_{12})
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

式 (4.13) 是用欧拉角表示四元数：

$$\begin{aligned}
 a &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 b &= \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 c &= \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 d &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

式 (4.14) 是用方向余弦表示欧拉角：

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan \left[\frac{c_{32}}{c_{33}} \right] \\ \theta &= \arcsin [-c_{31}] \\ \psi &= \arctan \left[\frac{c_{21}}{c_{11}} \right]\end{aligned}\quad (4.14)$$

4.2 互补滤波算法研究

本节主要介绍如何使用三轴陀螺仪，三轴加速度计，和三轴磁力计通过互补滤波算法来计算出飞机的姿态，同时分析了传统的互补滤波算法存在的问题，并且采取措施进行改进^[42]。

4.2.1 互补滤波的原理与结构

本节介绍的互补滤波算法是使用方向余弦矩阵来进行飞行器的姿态计算。将三轴陀螺仪输出的角速度对时间进行积分运算，得到当前的姿态角。在做积分运算的过程中存在计算误差，会导致每次计算出的方向余弦矩阵逐渐变得不再正交，所以需要对方积分运算得到的方向余弦矩阵进行处理，使它满足正交约束条件。陀螺仪的漂移和计算误差会在积分运算过程中逐渐累积，这个积分累积误差会随时间变大，最终导致计算结果的发散。互补滤波算法的原理为使用一个参考量，在积分误差累积之前就将其消除。这里是使用三轴加速度计测量的加速度来修正姿态角中的横滚角和俯仰角，用磁力测量的航向角来修正姿态角中的偏航角，修正时使用 PI 反馈控制器。互补滤波算法的原理框图如下所示：

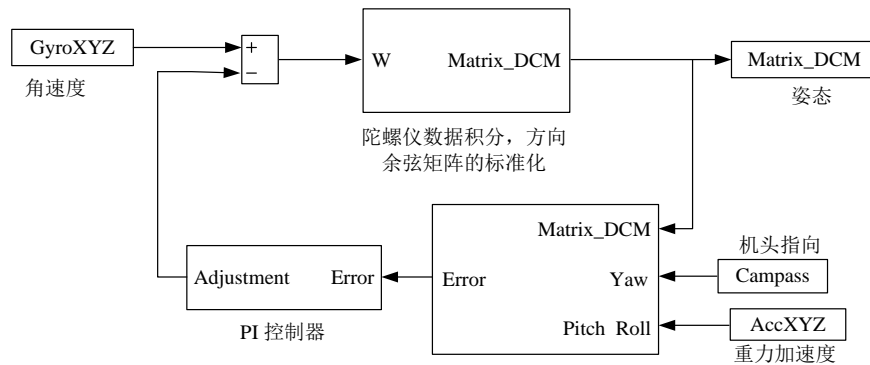


图 4-3 互补滤波原理结构图

Figure 4-3 The structure of the complementary filter

图 4-3 中 GyroXYZ 是用三轴陀螺仪测量出来的载体系的三个轴的角速率，Matrix_DCM 是表示飞机姿态的方向余弦矩阵。Compass 是有三轴磁力测量计算出航向角，将其作为参考向量来对积分运算得到的航向角来进行修正。AccXYZ 是三轴加速度计测得的载体系下的三个轴的飞行器的加速度和重力加速度之和，通常情况下，通常认为飞行器不会持续加速运动，因此认为测量的是重力加速度，将这个量作为参考向量来修正由陀螺

仪积分计算出来的横滚角和俯仰角。

4.2.2 用陀螺仪数据计算方向余弦矩阵

假设陀螺仪没有漂移，那么可以用下面介绍的微分方程来计算出飞行器的姿态，具体推算如下。本次互补滤波算法是使用方向余弦矩阵 C_b^n 来描述飞机的姿态的。

C_b^n 随时间的变化率如下：

$$\dot{C}_b^n = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta C_b^n}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{C_b^n(t + \delta t) - C_b^n(t)}{\delta t} \quad (4.15)$$

式中： $C_b^n(t)$ 和 $C_b^n(t + \delta t)$ 分别表示 t 时刻和 $t + \delta t$ 时刻的方向余弦矩阵。 $C_b^n(t + \delta t)$ 可以写成如下两个矩阵的乘积形式：

$$C_b^n(t + \delta t) = C_b^n(t) A(t) \quad (4.16)$$

对于一个小角度的转动 $A(t)$ 可以表示成如下形式：

$$A(t) = [I + \delta\psi] \quad (4.17)$$

其中 I 是一个 3×3 的单位矩阵，并且有

$$\delta\psi = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 0 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

式中 $\delta\psi$ 、 $\delta\theta$ 和 $\delta\phi$ 分别表示 b 系绕偏航轴、俯仰轴和横滚轴在 δt 时间间隔内转动的小角度。在 δt 趋近于零时，小角度近似有效并且转动的次序变得不那么重要。

可以将式 (4.15) 改写成如下形式：

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\psi}{\delta t} \quad (4.19)$$

在 δt 趋近于零时， $\delta\psi / \delta t$ 是角速率矢量 $\omega_{nb}^b = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ 的斜对称阵形式，表示 b 系相对于 n 系在 b 系的转动角速率，即：

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\psi}{\delta t} = \Omega_{nb}^b \quad (4.20)$$

带入式 (4.18) 得到：

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b \quad (4.21)$$

式中

$$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

这样就可以使用陀螺仪测得的每个轴上的角速率,根据式(4.16)来更新飞机的姿态。其中 ω_x , ω_y 和 ω_z 分别是陀螺仪测量出来的三个值。式(4.16)可写成下面的形式:

$$\mathbf{C}_b^n(t + \delta t) = \mathbf{C}_b^n(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\delta\psi & \delta\theta \\ \delta\psi & 1 & -\delta\phi \\ -\delta\theta & \delta\phi & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b^n(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z \cdot dt & \omega_y \cdot dt \\ \omega_z \cdot dt & 1 & -\omega_x \cdot dt \\ -\omega_y \cdot dt & \omega_x \cdot dt & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

以上是基于陀螺仪没有漂移的假设下,使用式(4.23)直接计算出的姿态角。但实际上由于陀螺仪存在漂移,所以需要给陀螺仪测量出来的数据加上漂移修正量,用式(4.24)来表示:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_{gyro}(t) + \boldsymbol{\omega}_{correction}(t) \quad (4.24)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{gyro}(t)$ 是三轴陀螺仪的测量值, $\boldsymbol{\omega}_{correction}(t)$ 是对陀螺仪的修正量。后面将详细介绍如何计算陀螺仪的修正量。

4.2.3 方向余弦矩阵的归一化处理

方向余弦矩阵最主要的一个特点就是正交。在进行上述计算时会存在计算误差,从而导致旋转矩阵不正交。这个计算误差主要有两个来源,一个是积分误差,一个是量化误差。积分误差指的是在做陀螺仪积分运算的时候,由于传感器采样频率的限制,所使用的时间间隔是有限的,并且假设在这个采样时间内角速率不变,从而带来的计算误差。量化误差指的是当用数字量去表示模拟量的时候,数字位数有限而带来的误差。

这些误差会使得方向余弦矩阵不正交,方向余弦矩阵的每一行都应该是一个单位向量,而这个误差会使它变大或者变小,最终变成无穷大或者消失。一个 3×3 的单位正交矩阵可以用一个立方体来表示,当它不正交的时候会出现图 4-4 的情况。

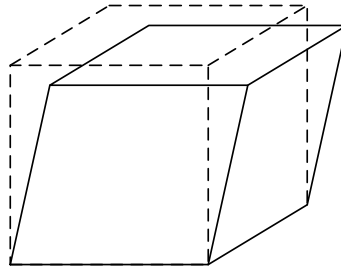


图 4-4 矩阵不正交的示意图

Figure 4-4 The nonorthogonal matrix

由于这些误差积累速度比较慢,所以可以将其强制变成正交矩阵,这个过程称为归一

化处理。

首先，将矩阵的第一行 \mathbf{c}_1 和第二行 \mathbf{c}_2 点乘，点乘的结果表示两向量之间的旋转量。

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{bmatrix}, \quad error = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1^T \cdot \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{bmatrix}$$

把误差分成两份分别加在 \mathbf{c}_1 和 \mathbf{c}_2 上：

$$\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}_{orthogonal} = \mathbf{c}_{1_orthogonal} = \mathbf{c}_1 - \frac{error}{2} \mathbf{c}_2$$

$$\begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{bmatrix}_{orthogonal} = \mathbf{c}_{2_orthogonal} = \mathbf{c}_2 - \frac{error}{2} \mathbf{c}_1$$
(4.25)

使 \mathbf{c}_3 和 \mathbf{c}_1 、 \mathbf{c}_2 都正交的方法是用 \mathbf{c}_1 和 \mathbf{c}_2 叉乘作为 \mathbf{c}_3 的值：

$$\begin{bmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix}_{orthogonal} = \mathbf{c}_{3_orthogonal} = \mathbf{c}_{1_orthogonal} \times \mathbf{c}_{2_orthogonal}$$
(4.26)

最后，将 $\mathbf{c}_{1_orthogonal}$ 、 $\mathbf{c}_{2_orthogonal}$ 和 $\mathbf{c}_{3_orthogonal}$ 进行单位化处理。

4.2.4 陀螺仪漂移误差的消除

在陀螺仪工作正常的情况下，使用 4.2.2 节介绍的方法计算飞行器的姿态时，陀螺仪的漂移会造成每秒约两度的误差，为了将这个偏移消除掉，采用的方法如图 4-3 所示，具体描述如下：

(1) 用三轴磁力计得到的航向角或者 GPS 接收到的航向角做参考量修正偏航角

三轴磁力计和 GPS 模块都可以得到偏航角，它们不会漂移，所以用三轴磁力计或 GPS 得到的航向角做参考向量来消除陀螺仪的漂移。这里没有直接使用三轴磁力计或 GPS 得到的偏航角，是因为陀螺仪的动态性能比三轴磁力计和 GPS 好。使用这种方法既能保持良好的动态性能，又具有较好的稳定性。

GPS 接收机主要用来提供飞行器的位置和速度信息，是从卫星上接收到的这些数据。因为 GPS 的速度信息是通过 GPS 天线每秒位置的改变而获得的，所以 GPS 天线必须在运动。相应的，GPS 必须是在运动的时候才能提供飞行器飞行方向的信息。

图 4-5 显示如何计算偏航角修正量：

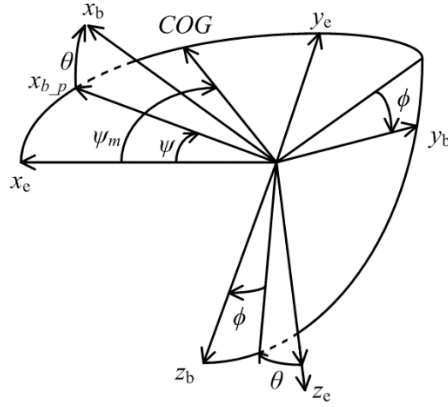


图 4-5 偏航角修正量计算

Figure 4-5 The correction of yaw

图 4-5 中, x_b, y_b, z_b 是载体坐标系, x_e, y_e, z_e 是地理坐标系。 ψ 是偏航角, θ 是俯仰角, ϕ 是横滚角。 x_{b_p} 是 x_b 轴在地理坐标系的 xy 平面上的投影。 COG 是由三轴磁力计或是 GPS 得到对地航向角。 ψ 是用陀螺仪计算出的偏航角, ψ_m 是用三轴磁力计或是 GPS 测量到的偏航角。所以我们将 ψ_m 作为参考向量, 对 ψ 进行修正。用下式计算出偏差:

$$error_{yaw} = \psi_m - \psi \quad (4.27)$$

偏航修正量的计算:

$$correction_{yaw_n} = \sin(error_{yaw}) \quad (4.28)$$

通过上式计算出来的修正量是在地理坐标系下的。所以需要将其转换到载体坐标系下去修正陀螺仪的漂移。由于只是修正的偏航角, 所以只需计算载体坐标系下 z 轴的值:

$$correction_{yaw_b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ correction_{yaw_n} \cdot c_{33} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

(2) 用三轴加速计的测量值作为参考向量修正横滚角和俯仰角

由于加速度计没有漂移, 所以可以用加速度计的测量值来修正横滚角和俯仰角。加速度计测量的是空间真实加速度与重力加速度之差。加速度包括飞机前进的加速度和向心加速度等。在计算修正量之前, 需要先考虑到向心加速度如何获得。向心加速度就等于旋转矢量和速度矢量的叉乘。在多数情况下, 飞行器是朝着机头所指的方向移动的, 可以假设速度是和机体系的 x 轴平行。空速计安装在了飞行器机头与机体系 x 轴平行的位置。将空速计测量的空速作为式 (4.30) 的 V 计算出向心加速度。用陀螺仪的测量值和速度叉乘得到:

$$A_{centrifugal} = \omega_{gyro} \times V \quad (4.30)$$

$$\text{其中: } V = \begin{bmatrix} velocity \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

通常情况下,飞机不会在前进方向上长时间持续加速,因此没有将前进的加速度考虑进去。因此,载体坐标系下重力的测量值如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{reference} &= \mathbf{Accelerometer} + \boldsymbol{\omega}_{gyro} \times \mathbf{V} \\ \mathbf{Accelerometer} &= \begin{bmatrix} Accelerometer_x \\ Accelerometer_y \\ Accelerometer_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

用上式(4.31)中的重力向量作为参考量,方向余弦矩阵的第三行就是加速度计测量的值。将这两项叉乘可以得到误差修正量,计算如下式所示:

$$\mathbf{correction}_{roll_pitch} = \begin{bmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix} \times \mathbf{g}_{reference} \quad (4.32)$$

4.2.5 反馈控制器

每个修正量都乘上权重输入到 PI 反馈控制器里,控制器的输出量加到陀螺仪测量的角速度值上,作为式(4.24)的输入(结构见图 4-3),总的修正量的计算表达式如下所示:

$$\mathbf{correction}_{total} = k_{roll_pitch} \cdot \mathbf{correction}_{roll_pitch} + k_{yaw} \cdot \mathbf{correction}_{yaw} \quad (4.33)$$

然后,将总的修正量传送到 PI 控制器里,PI 控制器的计算表达式如下所示:

$$\begin{aligned} \omega_{P_correction} &= K_P \cdot \mathbf{correction}_{total} \\ \omega_{I_correction} &= \omega_{I_correction} + K_I \cdot dt \cdot \mathbf{correction}_{total} \\ \omega_{correction} &= \omega_{P_correction} + \omega_{I_correction} \end{aligned} \quad (4.34)$$

根据式(4.35)将修正量加到陀螺仪测量值上后再进行矩阵的更新。

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{\omega}_{correction}(t) \quad (4.35)$$

在实际的使用中,PI 参数并不是一个固定值,而是根据飞行器的转速的不同范围来给不同的 PI 参数。在实际的测试中会发现,如果飞机做大机动动作,偏航角误差会比较大。假设飞机的转速是 500 度/秒,陀螺仪的误差是 5%,那么就会有 25 度/秒的误差,偏航角会有 25 度/秒误差累积。此时可以将控制器中的比例参数变大,使其更快的去修正这个较大的误差。

经过多次的实验测试,按式(4.36)来设置 P 参数 K_{P_new} ,旋转角速度用 ω_{spin} 表示:

$$K_{P_new} = \begin{cases} K_P & \text{if } \omega_{spin} < 50 \\ K_P \cdot \omega_{spin} / 50 & \text{if } 50 \leq \omega_{spin} < 500 \\ 100 \cdot K_P & \text{if } \omega_{spin} \geq 500 \end{cases} \quad (4.36)$$

4.2.6 适用于加速飞行的互补滤波算法

上述介绍的互补滤波算法没有将飞行器的加速度考虑进去，本小节的内容会解决这个问题。解决方法的原理是用重力加速度减去飞行器加速度作为参考向量，而不是直接用重力加速度作为参考加速度。

在载体坐标系中，加速度计测量的值为重力加速度减去加速度，表达式如下：

$$\mathbf{A}_b(t) = \mathbf{g}_b(t) - \mathbf{a}_b(t) \quad (4.37)$$

$\mathbf{g}_b(t)$ ：载体系中的重力加速度

$\mathbf{a}_b(t)$ ：载体系中的加速度

$\mathbf{A}_b(t)$ ：加速度计的输出

方向余弦矩阵可以将载体坐标系下的值转换到地理坐标系下，计算如下：

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n(t) \cdot \mathbf{A}_b(t) = \mathbf{g}_n - \mathbf{a}_n(t) \quad (4.38)$$

\mathbf{g}_n ：地理坐标系下的重力加速度

$\mathbf{a}_n(t)$ ：地理坐标系下的加速度

$\hat{\mathbf{C}}_b^n(t)$ ：积分计算出的方向余弦矩阵

如果方向余弦矩阵正确，那么式(4.38)的左右两边应该是相等的，由于陀螺仪的漂移，式子两边不会相等。将式(4.38)的左边和右边叉乘得到陀螺仪的漂移误差。然后对其做积分运算，式子中的加速度表示的量就可以转换成用速度来表示的量，计算过程如下：

$$\int_{t_1}^{t_2} \hat{\mathbf{C}}_b^n(\tau) \cdot \mathbf{A}_b(\tau) \cdot d\tau = (t_2 - t_1) \cdot \mathbf{g}_n - (\mathbf{V}_n(t_2) - \mathbf{V}_n(t_1)) \quad (4.39)$$

误差可以表示成如下形式：

$$\mathbf{error}_n(t_2) = \left(\int_{t_1}^{t_2} \hat{\mathbf{C}}_b^n(\tau) \cdot \mathbf{A}_b(\tau) \cdot d\tau \right) \times ((t_2 - t_1) \cdot \mathbf{g}_n - (\mathbf{V}_n(t_2) - \mathbf{V}_n(t_1))) \quad (4.40)$$

式(4.40)表示的误差是一个二次多项式，为了方便计算，下面将其转换成和时间间隔无关的形式，表达如式(4.41)所示：

$$\mathbf{error}_n(t_2) = \frac{\left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \hat{\mathbf{C}}_b^n(\tau) \cdot \mathbf{A}_b(\tau) \cdot d\tau \right] \times \left[\mathbf{g}_n - \frac{\mathbf{V}_n(t_2) - \mathbf{V}_n(t_1)}{t_2 - t_1} \right]}{\left| \mathbf{g}_n - \frac{\mathbf{V}_n(t_2) - \mathbf{V}_n(t_1)}{t_2 - t_1} \right|} \quad (4.41)$$

将上式(4.41)的误差从地理坐标系转换到载体坐标系，计算如下所示：

$$\mathbf{error}_b = \hat{\mathbf{C}}_n^b(t_2) \cdot \mathbf{error}_n(t_2) \quad (4.42)$$

最后将这个误差直接传到 PI 控制器中。

4.2.7 飞行试验数据分析

以上部分介绍了如何使用互补滤波算法计算出飞行器的姿态，而飞行器的速度和位置信息可以直接用 GPS 得到。GPS 可以接收到东北地速度、经纬度和高度信息。

图 4-6 是使用互补滤波算法解算得到的飞行器的姿态，包括横滚角、俯仰角和偏航角。用互补滤波解算姿态和扩展卡尔曼滤波解算姿态的一致性来证明算法的正确性（详细见 4.4 节）。

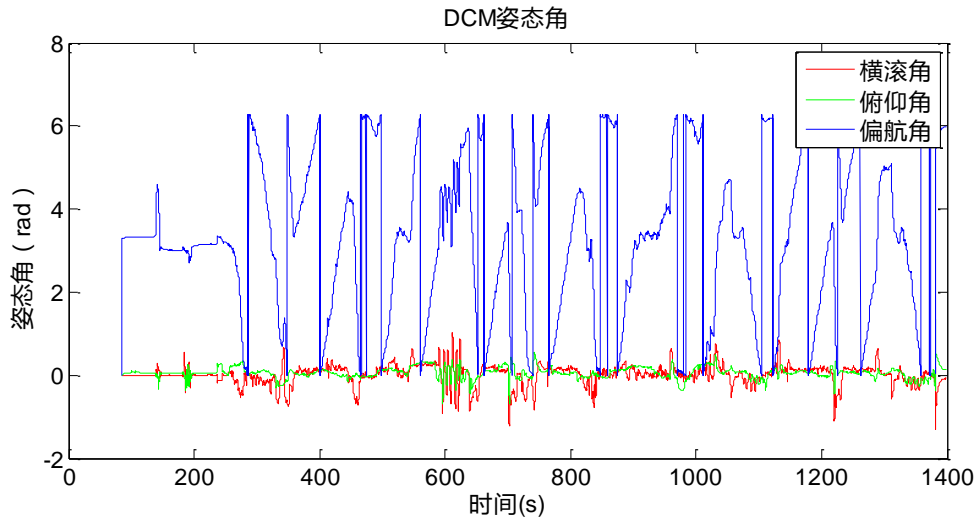


图 4-6 由互补滤波解算出的姿态角

Figure 4-6 The attitude calculated by the complementray filter

图 4-7 由 GPS 接收到的东北地速度信息。其中 V_{eIN} 代表北向速度， V_{eIE} 代表东向速度， V_{eID} 代表地向速度。

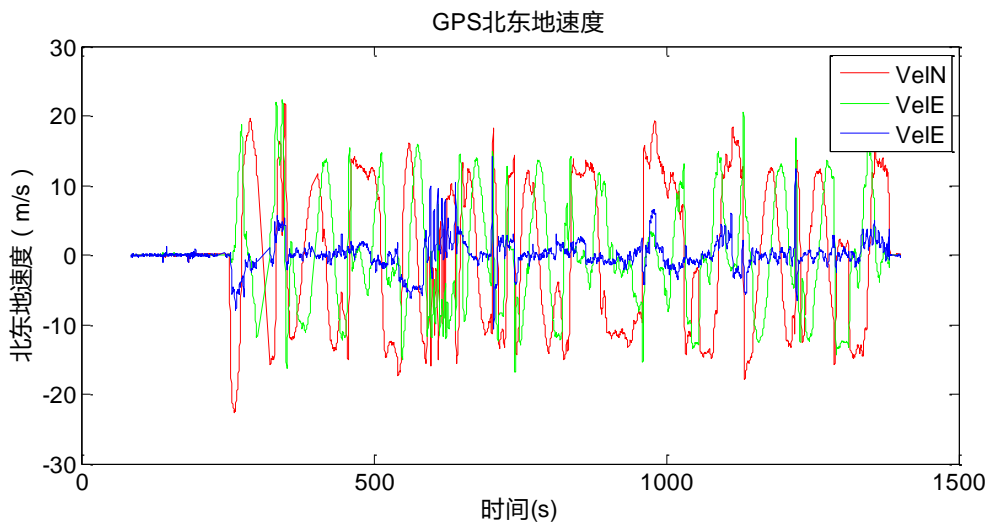


图 4-7 GPS 接收到的东北地速度

Figure 4-7 The velocity obtained from GPS

图 4-8 是 GPS 接收到的经纬度，单位是度。

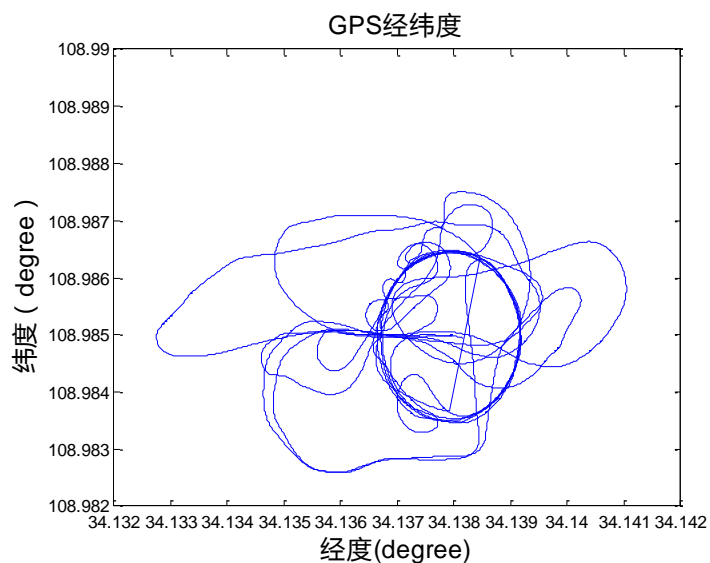


图 4-8 GPS 接收到的经度和纬度

Figure 4-8 The longitudes and latitude obtained from GPS

可以假设飞机起飞的地点为原点，那么就可以根据经度和纬度来计算出飞机相对于原点的位置，也就是北向位置和东向位置，如图 4-9。其中 PosN 是北向位置，PosE 是东向位置。

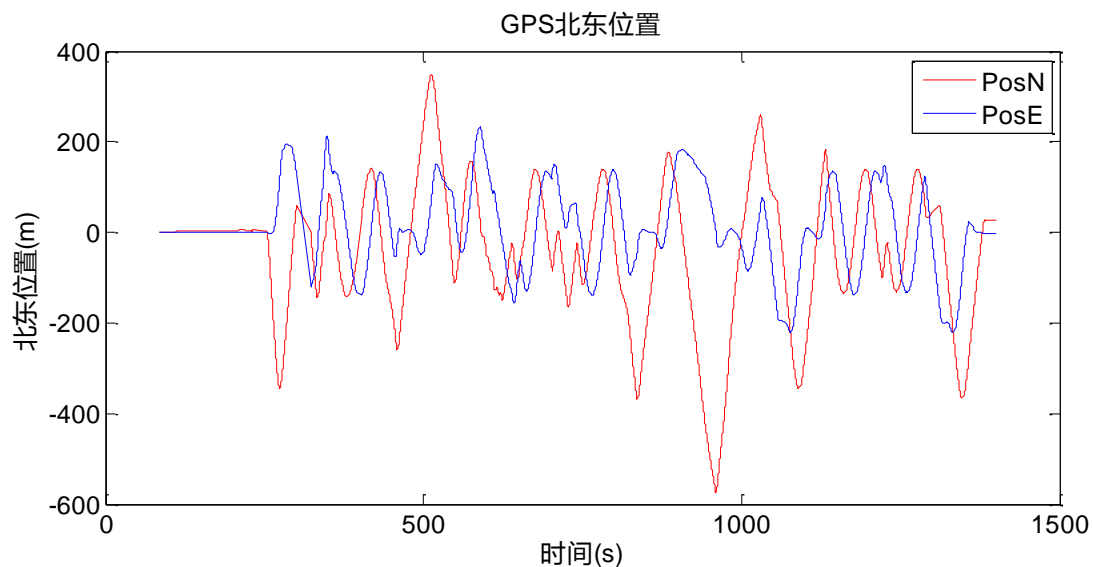


图 4-9 GPS 北向和东向位置

Figure 4-9 Position from GPS

飞机的高度可以通过 GPS 收到或者是通过气压计计算得到，如图 4-10 所示。

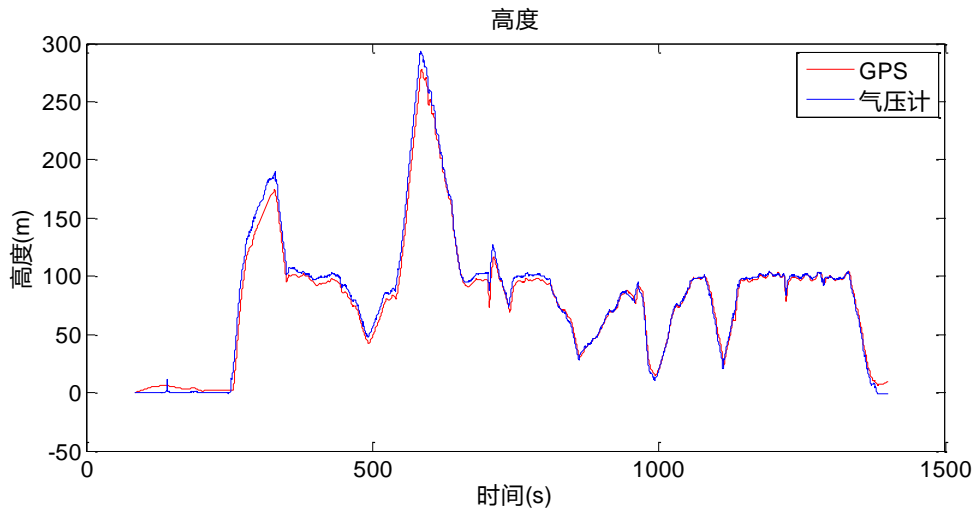


图 4-10 GPS 和气压计测得的高度

Figure 4-10 The altitude obtained from GPS and barometer

4.3 基于扩展卡尔曼滤波的数据融合算法研究

由于本文设计的硬件平台处理器速度快，可以运行复杂度较高的算法，这里使用扩展卡尔曼滤波器来融合陀螺仪、加速度计、磁力计、GPS、空速计和气压计的信息计算出飞行器的姿态、速度和位置。基于 EKF 的多传感器数据融合算法的优点是，能够融合所有传感器测量的数据，所以即使有某个传感器测量数据出现重大错误，也不易影响到导航结果。

4.3.1 总体介绍原理

下面对无人机中基于扩展卡尔曼滤波的数据融合算法实现导航的执行步骤，做一个非数学描述：

- (1) 将陀螺仪测量的角速率积分得到姿态角。
- (2) 将加速度计测得的加速度从载体坐标系转换到地理坐标系，并且减去重力加速度。
- (3) 对加速度进行积分得到速度。
- (4) 对速度积分得到位置。

步骤(1)到步骤(4)使用捷联惯性导航的原理进行建模，在使用扩展卡尔曼滤波做数据融合中，这部分称为“状态预测”。状态量包括了飞行器的姿态角、速度、位置、陀螺仪的漂移、加速度计的漂移、风速、地磁。

(5) 预测出来的陀螺仪和加速度计的噪声，用来估计使用惯性传感器计算出的姿态角、速度、位置时相应的误差的增长。噪声越大，状态估计的误差就越大。这些误差用“状态误差协方差矩阵”来表示。

每次获取到陀螺仪和加速度计数据时，步骤(1)到步骤(5)都要循环重复执行一次。

要使用扩展卡尔曼滤波器将陀螺仪、加速度计、GPS、空速计、气压计、磁力计等传感器的数据进行数据融合，得到鲁棒性更高的姿态、速度和位置。下面的步骤介绍如何使用观测值来修正状态预测出来的状态值。以 GPS 测量的水平位置做观测值为例，该方法也适用于其它观测传感器。

(6) 当 GPS 的数据到达时，由步骤(4)预测的位置值和 GPS 测量的位置值之间的差值，这个差值就是“残差”。

(7) 结合步骤(6)中的“残差”，步骤(5)中的“状态误差协方差矩阵”，和 GPS 的测量误差来修正滤波器中的每个状态量。这一步就叫做“状态修正”。

(8) 由于使用了观测值来修正状态预测值，所以状态的不确定性就会减少，根据“状态修正”计算出不确定性的减少，来更新“状态误差协方差矩阵”，回到步骤(1)。

由上述描述的基于扩展卡尔曼滤波的多传感器数据融合的总体原理的结构图如下所示：

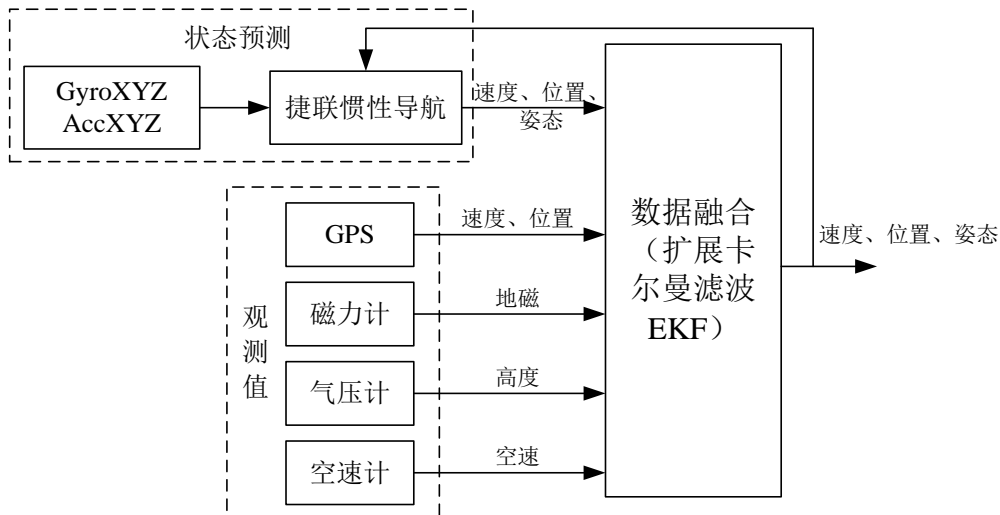


图 4-11 基于 EKF 的多传感器数据融合结构图

Figure 4-11 The structure of data fusion based on EKF

4.3.2 扩展卡尔曼滤波的原理

卡尔曼滤波是一种线性、无偏、以误差方差最小为估计准则的最优估计算法。由于导航系统是一个非线性的系统，所以采用了扩展卡尔曼滤波。扩展卡尔曼滤波的基本思想就是将非线性系统展开成泰勒级数，得到非线性系统的线性化模型，再利用卡尔曼滤波递推方程进行系统的状态估计。

式(4.43)和式(4.44)来表示非线性系统模型：

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (4.43)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_{k-1}) \quad (4.44)$$

式(4.45)和式(4.46)是扩展卡尔曼滤波的预测方程，分别是状态预测和状态误差协方差矩阵的预测：

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-, \mathbf{u}_{k-1}, 0) \quad (4.45)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_k^T \quad (4.46)$$

式 (4.47) 是卡尔曼系数的计算:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T)^{-1} \quad (4.47)$$

式 (4.48) 和式 (4.49) 是分别是扩展卡尔曼滤波的状态更新方程和状态误差协方差矩阵的更新:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)) \quad (4.48)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (4.49)$$

卡尔曼滤波器的原理如下图所示:

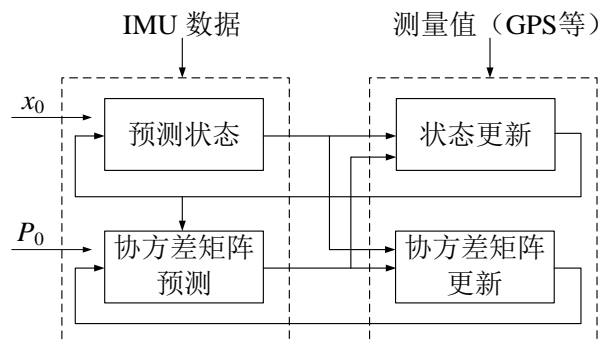


图 4-12 卡尔曼滤波器

Figure 4-12 The kalman filter

状态变量, 观测值, 和控制量的选取, 如下表所示:

表 4-1 状态变量、观测值、控制量

Table 4-1 States, measurements, control

状态变量 (24 状态)	观测值	控制量
飞行姿态 (四元数)	GPS 北东地速度	陀螺仪 角速率
北东地速度	GPS 北东地位置	加速度计 加速度
北东地位置	磁力计 地磁	
陀螺仪漂移	空速计 空速	
加速度计漂移	气压计 高度	
风速		
地磁		
地磁漂移		

4.3.3 捷联惯导算法建模

用陀螺仪和加速度计测得的数据, 计算出飞行器的姿态, 速度, 位置。

飞行器的姿态用四元数表示，如下式：

$$\mathbf{quat} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

C_b^n 表示载体坐标系到地理坐标系的旋转矩阵，由四元数表示如下：

$$C_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

陀螺仪测量出来的是载体坐标系下的角速率，用 \mathbf{gyro} 表示，对角速率积分得到姿态角，姿态角用欧拉角 \mathbf{angle} 表示，还要考虑到陀螺仪的漂移，用 \mathbf{b}_{gyro} 表示所导致的姿态角的漂移量，陀螺仪的采样时间为 Δt ，计算模型如下所示：

$$\Delta \mathbf{angle} = \mathbf{gyro} \cdot \Delta t - \mathbf{b}_{gyro} \quad (4.52)$$

$$\text{其中 } \Delta \mathbf{angle} = \begin{bmatrix} \mathbf{gyro}_x \cdot \Delta t - \mathbf{b}_{gyro_x} \\ \mathbf{gyro}_y \cdot \Delta t - \mathbf{b}_{gyro_y} \\ \mathbf{gyro}_z \cdot \Delta t - \mathbf{b}_{gyro_z} \end{bmatrix}$$

考虑到地球自转，地球自转角速率大小如下：

$$r_{earth} = 7.2921 \times 10^{-5} \text{ rad} / \text{s} \quad (4.53)$$

将上面的地球自转角速率转换到地理坐标系下，其中当地的纬度用 lat 表示，计算公式如下：

$$\mathbf{r}_{earth_NED} = \begin{bmatrix} r_{earth_N} \\ r_{earth_E} \\ r_{earth_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{earth} \cdot \cos(lat) \\ 0 \\ r_{earth} \cdot \sin(lat) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

考虑到计算时有圆锥误差，用 \mathbf{coing} 表示，计算如下：

$$\mathbf{coing} = \frac{1}{12} \cdot (\Delta \mathbf{angle} \times \mathbf{gyro}) \quad (4.55)$$

加上以上修正之后的姿态角的计算模型整理如下表示：

$$\Delta \mathbf{angle}_{correct} = \Delta \mathbf{angle} - C_n^b \cdot \mathbf{r}_{earth_NED} \cdot \Delta t + \mathbf{coing} \quad (4.56)$$

由于上式使用欧拉角来表示，需要将其转换成四元数的形式，对于小角度的转动，有 $\sin \phi \rightarrow \phi$ ， $\sin \theta \rightarrow \theta$ ， $\sin \psi \rightarrow \psi$ ，则通过欧拉角表示的方向余弦矩阵可以简化为如下形式：

$$C_b^n \approx \begin{bmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

根据式 (4.12)，可以得到用欧拉角表示小角度转动时的四元数表达式，如下所示：

$$\Delta quat = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5\phi \\ 0.5\theta \\ 0.5\psi \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

将式 (4.56) 中修正过后的姿态角带入到式 (4.58) 中，得到下式：

$$\Delta quat = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5\Delta angle_{correct}(1) \\ 0.5\Delta angle_{correct}(2) \\ 0.5\Delta angle_{correct}(3) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

最后的姿态计算的方程如下式所示，相乘按四元数的相乘法则进行：

$$quat_{new} = quat \times \Delta quat \quad (4.60)$$

在地理坐标系下，速度用式 (4.61) 的形式表示：

$$velocity = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

在地理坐标系下，重力加速度用式 (4.62) 表示：

$$g = \begin{bmatrix} g_N \\ g_E \\ g_D \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

加速度计测量的是载体坐标系下的飞行器的加速度，对加速度积分就可以得到当前的速度，同样需要加上加速度计的漂移，计算如下式表示：

$$\Delta velocity = accel \times \Delta t - \Delta b_{accel} \quad (4.63)$$

$$\Delta velocity = \begin{bmatrix} accel_x \cdot \Delta t - \Delta b_{accel_x} \\ accel_y \cdot \Delta t - \Delta b_{accel_y} \\ accel_z \cdot \Delta t - \Delta b_{accel_z} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

考虑到划船误差，补偿量计算如下：

$$sculling = \frac{1}{2} \cdot (gyro \times accel) + \frac{1}{12} \cdot (\Delta angle \times accel) \quad (4.65)$$

修正过后的速度变化量的计算如下：

$$\Delta \mathbf{velocity}_{correct} = \Delta \mathbf{velocity} + \mathbf{sculling} \quad (4.66)$$

最终的速度计算的方程计算如下:

$$\mathbf{velocity}_{new} = \mathbf{velocity} + \mathbf{g} \cdot \Delta t + \mathbf{C}_b^n \cdot \Delta \mathbf{velocity}_{correct} \quad (4.67)$$

在地理坐标系下, 位置如下所示:

$$\mathbf{position} = \begin{bmatrix} p_N \\ p_E \\ p_D \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

在地理坐标系, 速度如下所示:

$$\mathbf{velocity} = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

位置的计算如下所示:

$$\mathbf{position}_{new} = \mathbf{position} + \mathbf{velocity} \cdot \Delta t \quad (4.70)$$

陀螺仪的漂移在很短的时间内基本保持不变, 预测方程如下:

$$\Delta \mathbf{b}_{gyro_new} = \Delta \mathbf{b}_{gyro} \quad (4.71)$$

$$\begin{bmatrix} b_{gyro_x_new} \\ b_{gyro_y_new} \\ b_{gyro_z_new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{gyro_x} \\ b_{gyro_y} \\ b_{gyro_z} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

加速度计的漂移在很短的时间内基本保持不变, 预测方程如下:

$$\Delta \mathbf{b}_{accel_new} = \Delta \mathbf{b}_{accel} \quad (4.73)$$

$$\begin{bmatrix} b_{accel_x_new} \\ b_{accel_y_new} \\ b_{accel_z_new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{accel_x} \\ b_{accel_y} \\ b_{accel_z} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

风速在很短的时间内基本保持不变, 并且只考虑水平方向的风, 预测方程如下:

$$\mathbf{v}_{wind_new} = \mathbf{v}_{wind} \quad (4.75)$$

$$\begin{bmatrix} v_{wind_N_new} \\ v_{wind_E_new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{wind_N} \\ v_{wind_E} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

可以认为当地的地磁基本一致, 用地理坐标系下的地磁来表示, 预测方程如下:

$$\mathbf{mag}_{new} = \mathbf{mag} \quad (4.77)$$

$$\begin{bmatrix} mag_{new_N} \\ mag_{new_E} \\ mag_{new_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mag_N \\ mag_E \\ mag_D \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

用磁力测量的地磁偏移量，也保持不变，预测方程如下：

$$\mathbf{b}_{mag_new} = \mathbf{b}_{mag} \quad (4.79)$$

$$\begin{bmatrix} b_{mag_X_new} \\ b_{mag_Y_new} \\ b_{mag_Z_new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{mag_X} \\ b_{mag_Y} \\ b_{mag_Z} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

4.3.4 多传感器数据融合的方法

(a) 状态预测

上一节用捷联算法建立起用陀螺仪和加速度计计算出飞行器姿态、速度和位置的模型，并且还建立了漂移误差模型。所以，被估计的状态量包括姿态（四元数），位置，速度，陀螺仪漂移，加速度计漂移，水平风速，磁力计偏差，地磁场。

$$\mathbf{x}_{k-1} = \{q_0, q_1, q_2, q_3, v_N, v_E, v_D, p_N, p_E, p_D, b_{gyro_x}, b_{gyro_y}, b_{gyro_z}, b_{accel_x}, b_{accel_y}, b_{accel_z}, v_{wind_N}, v_{wind_E}, mag_N, mag_E, mag_D, b_{mag_x}, b_{mag_y}, b_{mag_z}\} \quad (4.81)$$

由上一节可以计算出下个时刻的状态 \mathbf{x}_k ：

$$\mathbf{x}_k = \{q_{0_new}, q_{1_new}, q_{2_new}, q_{3_new}, v_{N_new}, v_{E_new}, v_{D_new}, p_{N_new}, p_{E_new}, p_{D_new}, b_{gyro_x_new}, b_{gyro_y_new}, b_{gyro_z_new}, b_{accel_x_new}, b_{accel_y_new}, b_{accel_z_new}, v_{wind_N_new}, v_{wind_E_new}, mag_{N_new}, mag_{E_new}, mag_{D_new}, b_{mag_x_new}, b_{mag_y_new}, b_{mag_z_new}\} \quad (4.82)$$

以上为扩展卡尔曼滤波中状态预测部分的计算。

(b) 状态误差协方差矩阵的预测

由于在使用 EKF 时，需要对状态方程进行线性化，然后使用卡尔曼滤波进行计算。

线性化过程就是求相应的雅各比矩阵。其中， $\mathbf{F}_k = \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{x}_{k-1}}$ 是状态转移矩阵。

在上述模型中，控制量包括陀螺仪的输出和加速度计的输出：

$$\mathbf{u}_k = \{gyro_x, gyro_y, gyro_z, accel_x, accel_y, accel_z\} \quad (4.83)$$

$$\mathbf{G}_k = \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{u}_k} \quad (4.84)$$

状态误差协方差矩阵的预测方程如下：

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}^T + \mathbf{Q} \quad (4.85)$$

\mathbf{Q}_{k-1} 是陀螺仪和加速度计造成的系统噪声， \mathbf{Q} 是其他的系统噪声。

(c) 观测数据的融合

使用观测数据来修正状态估计值和状态误差协方差矩阵。

观测值用 \mathbf{z} 表示，用前一节状态估计量可以计算出一个预测的观测值，用 \mathbf{z}_p 表示。

$$\mathbf{H}_k = \frac{\partial \mathbf{z}_p}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (4.86)$$

卡尔曼增益计算如下：

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (4.87)$$

其中： \mathbf{R}_k 是观测噪声协方差。

残差的计算如下所示：

$$\mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_p \quad (4.88)$$

状态更新计算如下， \mathbf{x}_k^- 表示修正前的状态量， \mathbf{x}_k^+ 表示修正后的状态量：

$$\mathbf{x}_k^+ = \mathbf{x}_k^- + \mathbf{K} \mathbf{v} \quad (4.89)$$

状态误差协方差矩阵的更新方程如下式所示， \mathbf{P}_k^- 表示修正前的状态误差协方差矩阵， \mathbf{P}_k^+ 表示修正后的状态误差协方差矩阵：

$$\mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^- \quad (4.90)$$

GPS 接收到的速度和位置信息，都是在地理坐标系下的，估计的状态量中也都是在地理坐标系下的速度和位置，所以 \mathbf{H} 矩阵和卡尔曼系数 \mathbf{K} 的计算如下：

$$\mathbf{H} = \frac{\partial (v_N, v_E, v_D, p_N, p_E, p_D)}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^T)(\mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{GPS})^{-1} \quad (4.92)$$

空速计测量的是在载体坐标系下 x 轴和 y 轴的空速矢量和，可以用状态量中的地速和风速来预测出一个空速，计算如下：

$$V_{tasPred} = \sqrt{(v_N - v_{wind_N})^2 + (v_E - v_{wind_E})^2} \quad (4.93)$$

下面可以求出 \mathbf{H} 矩阵，计算如下：

$$\mathbf{H} = \frac{\partial V_{tasPred}}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.94)$$

卡尔曼系数计算如下：

$$\mathbf{K} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^T)(\mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{tas})^{-1} \quad (4.95)$$

三轴磁力计测量出来的是在载体坐标系下的地磁，可以用状态量中的地理坐标系下

的地磁和载体坐标系下地磁的偏移量来计算测量出来的地磁，计算如下：

$$\mathbf{mag}_{pred} = \mathbf{C}_b^n \cdot \mathbf{mag}_{NED} + \mathbf{b}_{mag} \quad (4.96)$$

用下式求出 \mathbf{H} 矩阵：

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{mag}_{pred}}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.97)$$

卡尔曼系数计算如下：

$$\mathbf{K} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^T)(\mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{mag})^{-1} \quad (4.98)$$

4.3.5 扩展卡尔曼滤波算法执行时的计算优化

在做扩展卡尔曼滤波计算时，由于在系统建模时有 24 个状态变量，在计算状态误差协方差矩阵的时候会涉及到 24×24 的大矩阵运算。所以如何将这些计算做出优化和转化成程序语言是比较重要的。

这里是使用的 MATLAB 的符号运算的功能来做出计算的优化和将其转化成 C 语言的形式。首先，在 MATLAB 中进行系统的建模，用 syms 来定义状态变量，用 $\mathbf{F} = \text{jacobian}(\text{processEqns}, \text{stateVector})$ 计算出状态转移矩阵 \mathbf{F} ，stateVector 是 24 个状态量，processEqns 是一次状态预测后的结果。用 $\mathbf{G} = \text{jacobian}(\text{processEqns}, \text{distVector})$ 来计算控制量的转移矩阵。同样可以使用这个函数来计算 \mathbf{H} 矩阵。由于有 GPS 测得的北东地速度，与状态变量中的一致，所以不用计算 \mathbf{H}_{GPS} ，另外可以用 $\mathbf{H}_{TAS} = \text{jacobian}(\text{VtasPred}, \text{stateVector})$ 和 $\mathbf{H}_{MAG} = \text{jacobian}(\text{magMeas}, \text{stateVector})$ 来计算空速和地磁的 \mathbf{H} 矩阵。

可以用 MATLAB 的符号运算功能将上述计算过程全部表示出。这样算法的整个过程就很清楚了，不需要自己手动去计算，包括矩阵的乘法，求逆，求雅各比矩阵等等一些复杂的运算。在 MATLAB 中还有一个计算优化的函数 OptimiseAlgebra()，可以进一步减少算法的复杂度。在计算的过程中，不可避免的会有某些中间计算过程会重复进行计算，那么这个函数就可以用一些中间变量把这些重复计算的部分提出来，只进行一次计算，重复使用的时候就可以只用结果。

另外在用观测器进行状态修正的时候，由于观测值并不是同时到达，所以这里是每到达一个观测值进行一次修正，是一个一个的进行而不是等待所有的观测值到达后一起进行的修正计算。这样执行的另一个好处是可以简单化计算的过程。举个例子，比如在使用 GPS 接收的北东地速度作为观测值进行修正时，是先用北向速度修正，然后再用东向速度，最后用地向速度修正，这样就解决了观测值不同步的问题。例如，当 GPS 接收到数据的同时地磁还没有读到数据，如果等待地磁的数据，那么就会有时间误差而导致错误的计算结果。这个方法既简化计算的过程，又避免做复杂的大矩阵的计算，从而减少出错率。

4.3.6 飞行数据实验结果分析

本实验采用的传感器的数据与 4.2 节一致，使用基于扩展卡尔曼滤波的数据融合的导航算法实验结果如下所示。

图 4-13 是使用基于 EKF 的数据融合算法计算出的飞行器的姿态角，包括飞行器的横滚角、俯仰角和偏航角。

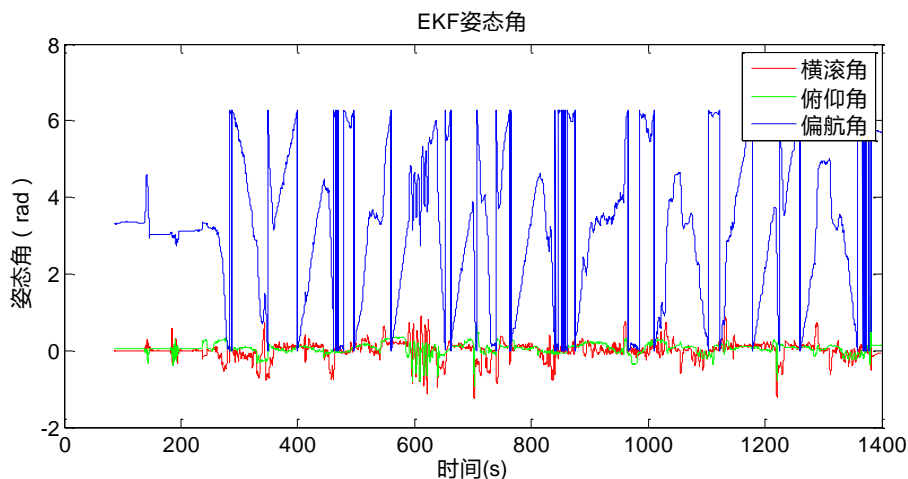


图 4-13 基于 EKF 导航算法计算出的姿态角

Figure 4-13 The attitude calculated by the EKF-based navigation algorithm

图 4-14 是使用基于 EKF 的数据融合算法计算出的飞行器的北东地的速度，其中 Vel_N 是北向速度， Vel_E 是东向速度， Vel_D 是地速。

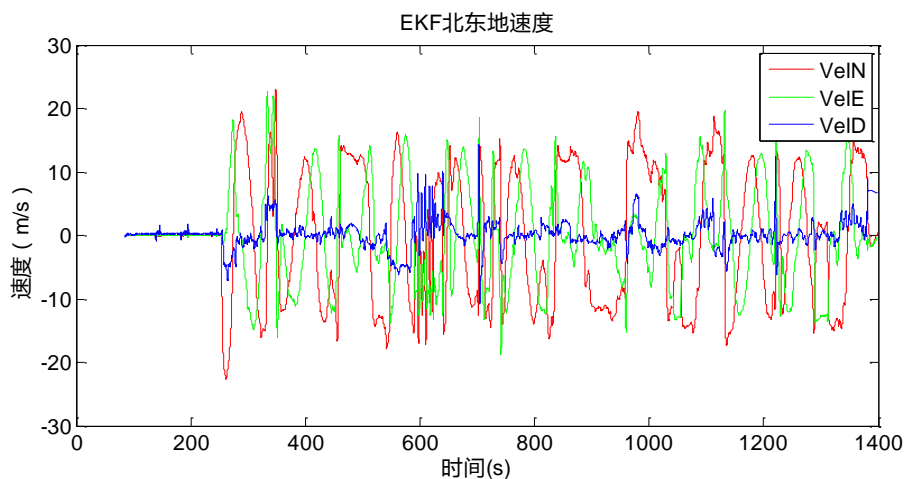


图 4-14 基于 EKF 的导航算法计算出的北东地速度

Figure 4-14 The velocity calculated by EKF-based navigation algorithm

图 4-15 是使用基于 EKF 的数据融合算法计算出的飞行器的北东地位置，其中 Pos_N 是北向位置， Pos_E 是东向位置。

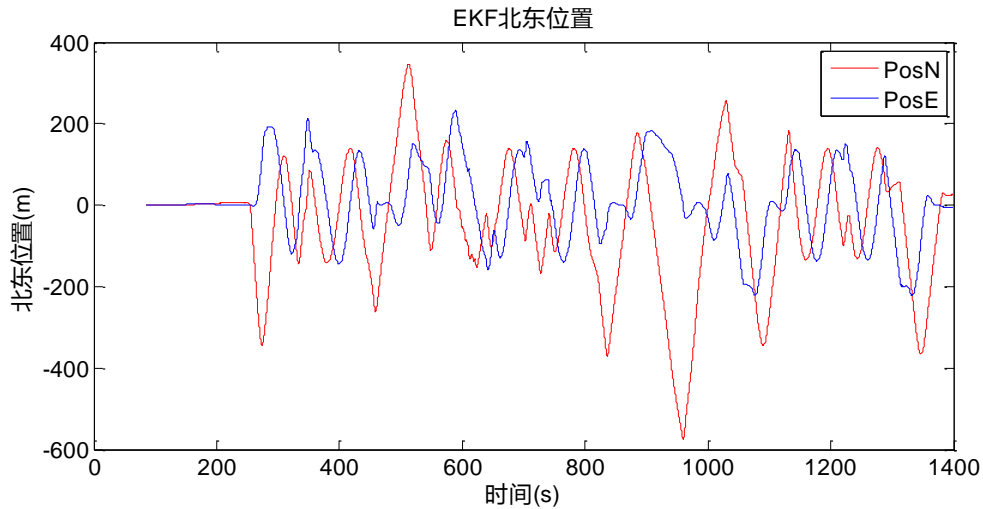


图 4-15 基于 EKF 的导航算法计算出北东位置

Figure 4-15 The position calculated by EKF-based navigation algorithm

图 4-16 是使用基于 EKF 的数据融合算法计算出的飞机的高度。

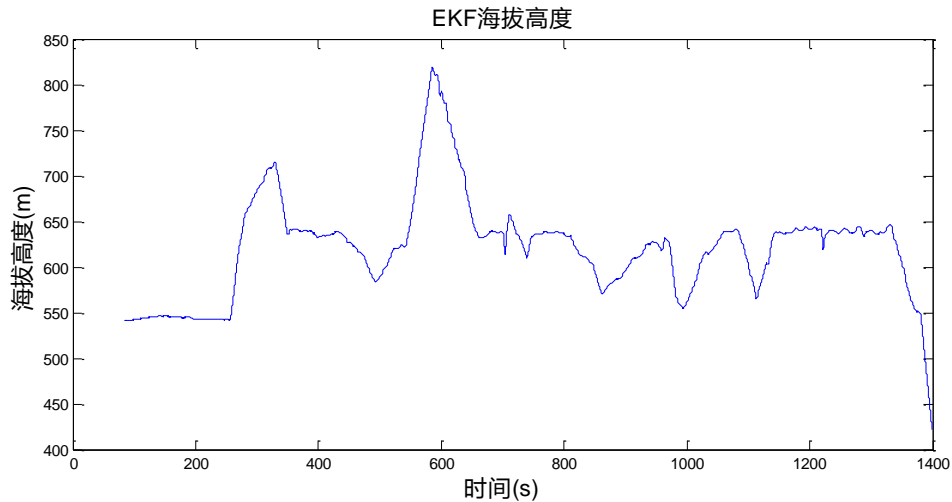


图 4-16 基于 EKF 的海拔高

Figure 4-16 Altitude calculated by EKF-based navigation algorithm

4.4 互补滤波姿态解算和 EKF 数据融合导航算法效果对比与分析

针对本文所研究的互补滤波姿态解算算法和基于扩展卡尔曼滤波的数据融合算法，在不同的飞行状况下，进行无人机导航飞行实验结果的对比分析。

采用同一组传感器采集的数据，分别使用互补滤波算法和扩展卡尔曼滤波算法进行计算，将实验结果进行对比。分别分析了在平缓飞行和大机动飞行时，两种不同导航算法解算出的姿态角，并对比了用 GPS 接收的速度和位置信息与 EKF 计算出的速度和位置。最后是基于 EKF 的多传感器数据融合算法在无人机航点跟踪上的成功使用。

4.4.1 平缓飞行的姿态

下面对飞机在平缓飞行的过程中的姿态角进行两种算法的对比：

图 4-17 为在较为平缓飞行过程中的互补滤波和扩展卡尔曼滤波计算出的飞行器的横滚角。在飞行的第 850s 到 950s 之间，横滚角的波动在 -0.2rad 到 0.4rad 之间，即大约在 -12 度到 23 度之间摆动，属于正常飞行摆动。可以看到两种算法计算出的横滚角差别不大，在图 4-18 中显示两者的差值，差值范围在 -0.005rad 到 0.03rad 之间，即在 -0.2866 度到 1.8 度之间。所以，在飞机正常飞行状态下，两种算法的计算的结果相差不大，结果都比较好。

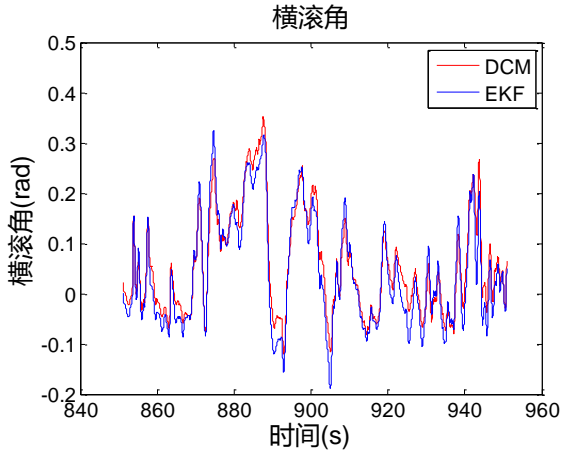


图 4-17 横滚角

Figure 4-17 The roll obtained

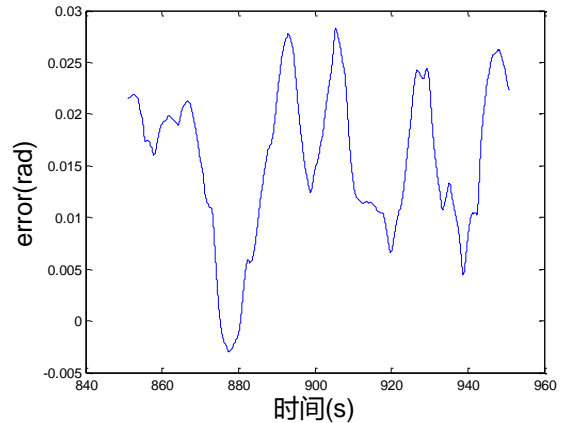


图 4-18 两种算法结果的差值

Figure 4-18 The difference between two algorithms

图 4-19 是在较为平缓飞行过程中的互补滤波和扩展卡尔曼滤波计算出的飞行器的俯仰角。仍然选取的是在飞行的第 850s 到 950s 之间，俯仰角的波动在 -0.1rad 到 0.25rad 之间，即大约在 -6 度到 15 度之间摆动，也属于正常飞行摆动。可以看到两种算法计算出的俯仰角的差别也不大，在图 4-20 中显示两者的差值，差值范围在 -0.01rad 到 0.04rad 之间，即在 -0.6 度到 2.3 度之间。所以在飞机正常平稳运行下，两种算法计算俯仰角结果相差不大。

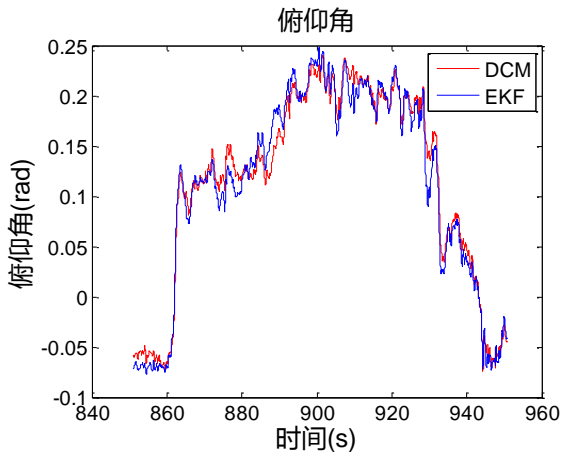


图 4-19 俯仰角

Figure 4-19 The pitch obtained

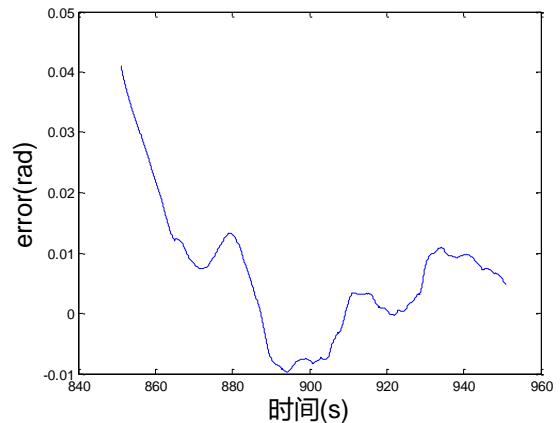


图 4-20 两种算法结果的差值

Figure 4-20 The difference between two algorithms

图 4-21 是在较为平缓飞行过程中的互补滤波和扩展卡尔曼滤波计算出的飞行器的偏航角。仍然选取的是在飞行的第 850s 到 950s 之间，飞机的偏航角由 0rad 比较平缓地转到 3.95rad ，即由 0 度转到 225 度。由于偏航角的范围是 0 度到 360 度之间，所以角度在 0 度左右会出现图 4-21 的前一段所示的情况，从图中仍然可以看到两种算法计算结果相

差不多，图 4-22 表示了两者的差值，两者的差值在 -0.14rad 到 0.04rad 之间，即在 -8.0 度到 2.3 度之间。所以在飞机正常平稳运行下，两种算法计算偏航角结果相差不多。

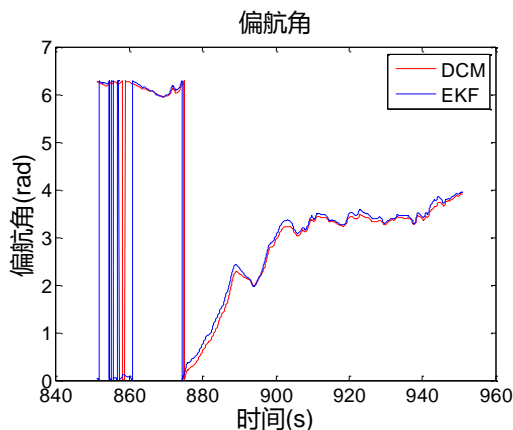


图 4-21 偏航角

Figure 4-21 The yaw obtained

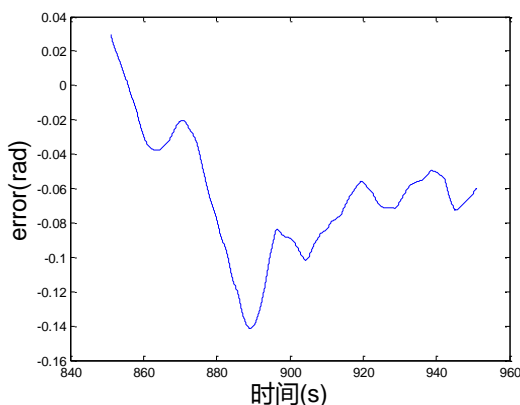


图 4-22 两种算法结果的差值

Figure 4-22 The difference between two algorithms

结果分析：在飞行器平缓飞行的情况下，用互补滤波和卡尔曼滤波解算出来的姿态结果基本一致，偏差相差很小，从结果的一致性说明，两种算法解算出的姿态都是正确的。

4.4.2 大机动飞行的姿态

下面对飞机在大机动飞行过程中的姿态角进行两种算法的对比：

图 4-23 是在大机动飞行时分别用互补滤波和扩展卡尔曼滤波计算出来的横滚角。在飞行的第 580s 到 650s 之间，横滚角频繁地在 -1.5rad 和 1.5rad 之间摆动，即在 -86 度到 86 度之间。此时发现在大机动的情况下计算出的横滚角比在平稳飞行下的差值大。它们的之间的差值如图 4-24 所示，范围在 -0.02rad 到 0.16rad 之间，即在 -1.15 度到 9.17 度之间。

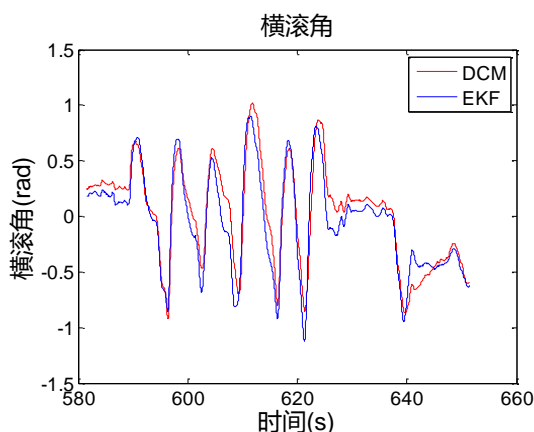


图 4-23 横滚角

Figure 4-23 Roll

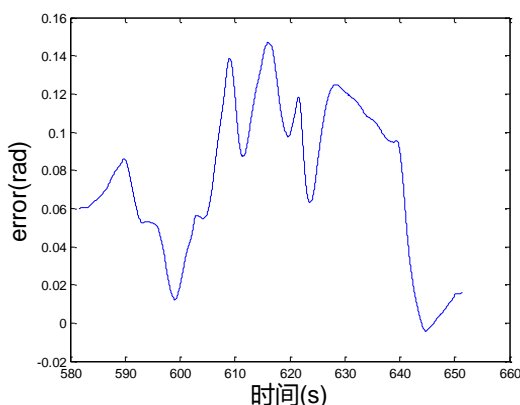


图 4-24 两种算法结果的差值

Figure 4-24 The difference between two algorithms

图 4-25 是在大机动飞行时分别用互补滤波和扩展卡尔曼滤波计算出来的飞机的俯仰角。在飞行的第 580s 到 650s 之间，俯仰角频繁地在 -0.8rad 和 0.4rad 之间摆动，即在 -46 度到 23 度之间。此时发现两种算法计算出来的俯仰角在大机动的情况下，比在平稳飞行下的差值大。它们的之间的差值如图 4-26 所示，范围在 -0.05rad 到 0.25rad 之间，即在

2.87 度到 14.33 度之间。

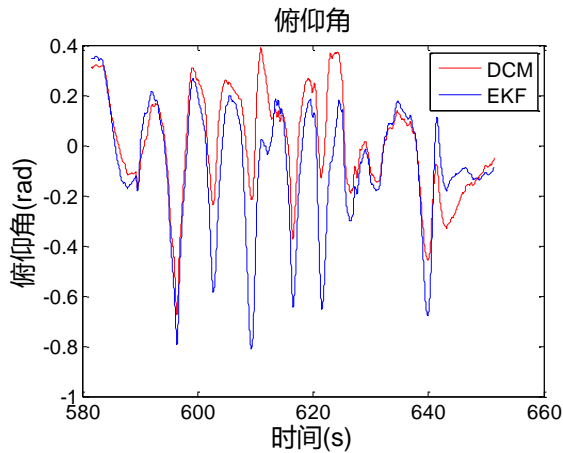


图 4-25 俯仰角

Figure 4-25 The pitch obtained

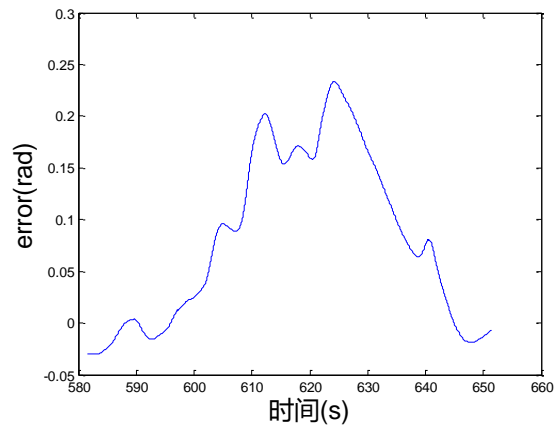


图 4-26 两种算法结果的差值

Figure 4-26 The difference between two algorithms

图 4-27 是在大机动飞行时分别用互补滤波和扩展卡尔曼滤波计算出来的飞机的偏航角。在飞行的第 580s 到 650s 之间，俯仰角频繁地在 0rad 和 6.28rad 之间摆动，即在 0 度到 360 度之间。此时发现两种算法计算出来的俯仰角在大机动的情况下，比在平稳飞行的差值大。它们的之间的差值如图 4-27 所示，范围在 -0.25rad 到 0.3rad 之间，即在 -14.33 度到 17.20 度之间。

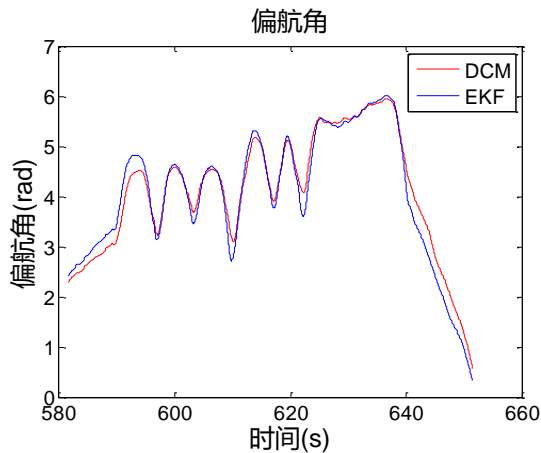


图 4-27 偏航角

Figure 4-27 The yaw obtained

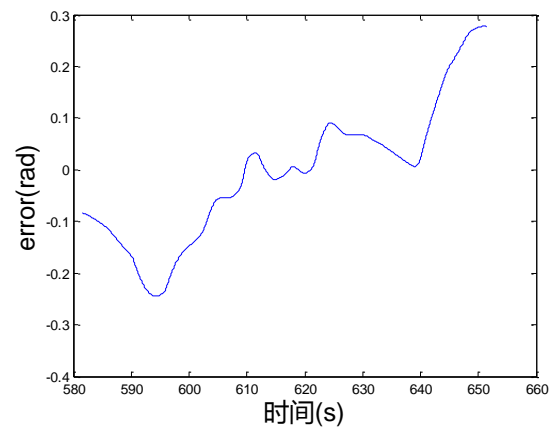


图 4-28 两种算法结果的差值

Figure 4-28 The difference between two algorithms

结果分析：在飞行器做大机动运动的过程中，两种算法计算出的姿态相差比较大，但本文认为这个偏差在合理范围之内，说明两种算法在大机动飞行的时候都适用。

4.4.3 GPS 和 EKF 分别测得的速度和位置

采用互补滤波方式只能计算出飞机的姿态角，飞机的速度和位置是使用 GPS 接收机接收到的北东地速度和飞机的经纬度和高度。还可以使用气压计计算出飞机的高度。在扩展卡尔曼滤波中，状态量中直接包含了飞机的北东地的速度和北东地位置信息。所以下面将 GPS 和 EKF 计算的结果进行比较。

下面是比较 GPS 接收到的飞机的北东地速度和 EKF 计算出的北东地速度。

图 4-29、图 4-30 和图 4-31 分别是北向速度、东向速度和地速。可以看到由 GPS 接收到的北东地速度和 EKF 计算出的北东地速度基本一致，并没有太大误差。

图 4-32、图 4-33 和图 4-34 分别表示的是北向位置、东向位置和地速位置。由 GPS 可以接收到的是经度，纬度，海拔高度。可以根据地球半径计算出飞机的北东地位置。由图看到由 GPS 接收到的北东地位置和 EKF 计算出的北东地速度基本一致，没有太大误差。

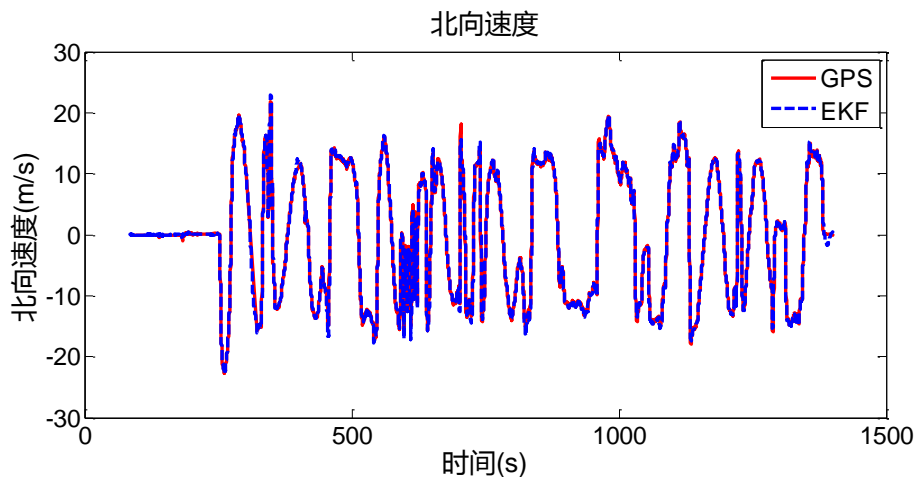


图 4-29 北向速度

Figure 4-29 The north velocity obtained

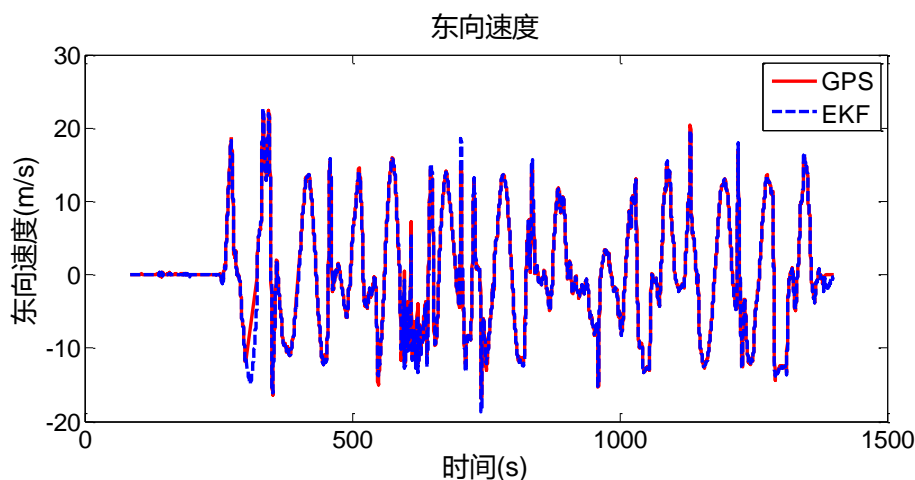


图 4-30 东向速度

Figure 4-30 The east velocity obtained

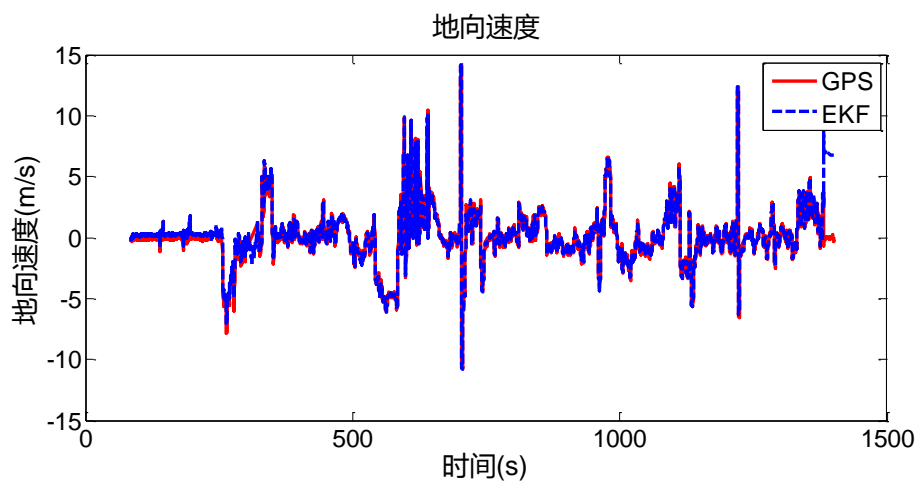


图 4-31 地向下速度
Figure 4-31 The down velocity obtained

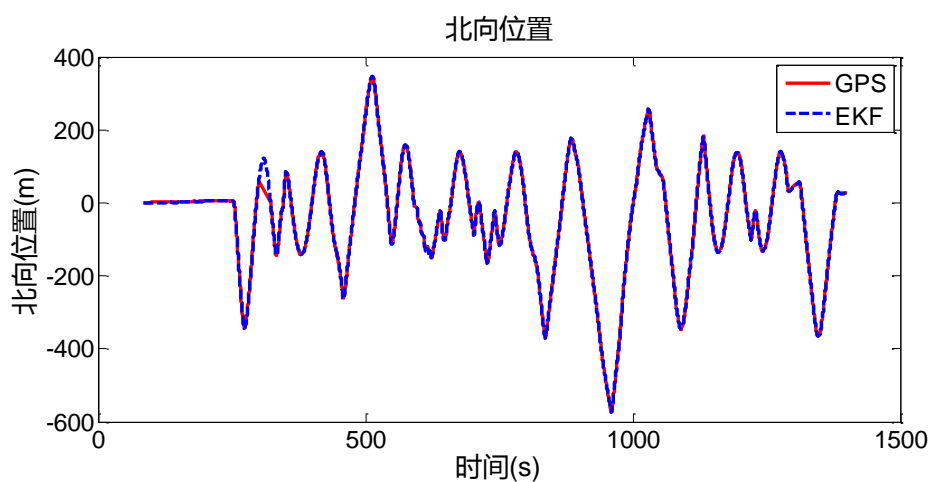


图 4-32 北向位置
Figure 4-32 The north position obtained

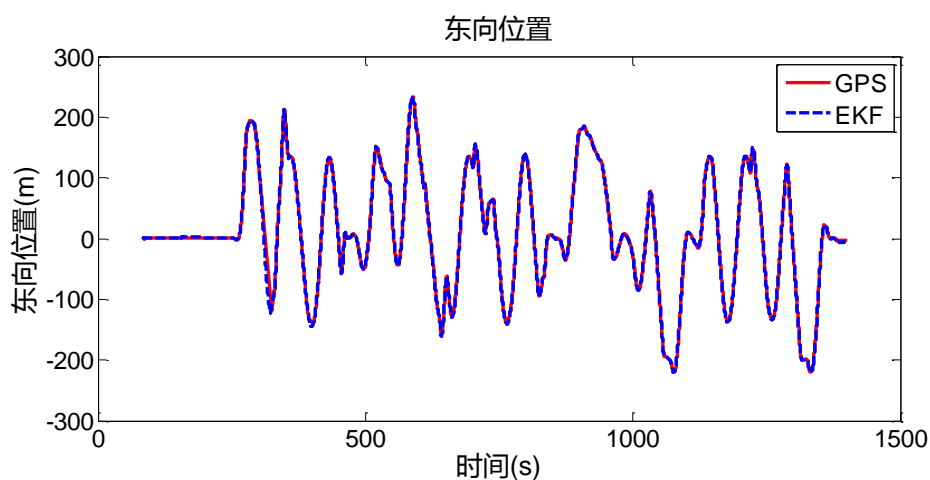


图 4-33 东向位置
Figure 4-33 The east position obtained

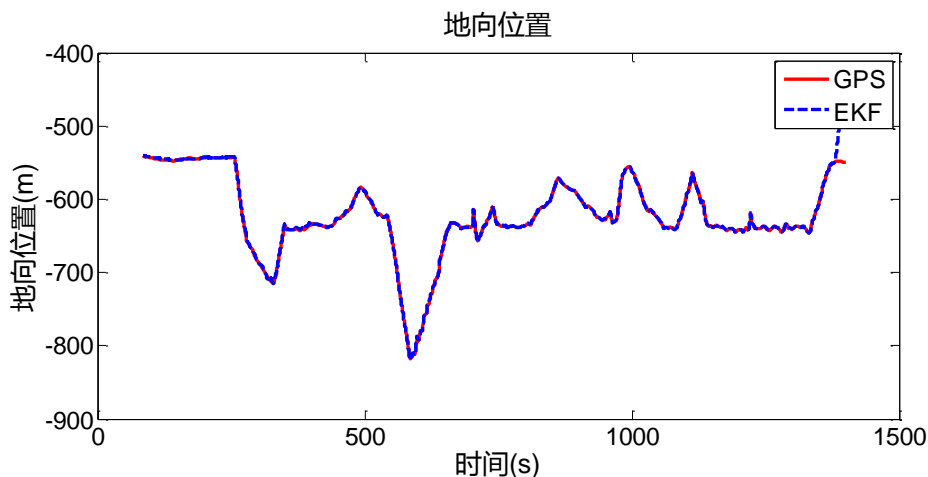


图 4-34 地面向位置

Figure 4-34 The down position obtained

结果分析：从两种方式得到的速度和位置结果的一致性，可以证明用 EKF 计算出的速度和位置的正确性。

4.4.4 GPS 失锁

下图表示的是当 GPS 失锁的情况下，基于 EKF 的多传感器数据融合算法仍然能够很好的计算出飞机的速度和位置。

从第 300s 开始到 325s 之间，GPS 失锁，接收不到有效的无人机速度和位置数据，此时 EKF 仍然能够很好的计算出飞机的速度和位置。从图中可明显看到在 GPS 失锁前和恢复后，GPS 和 EKF 两种方式下的结果一致，而在 GPS 失锁这个过程中，GPS 无法提供无人机飞行数据，EKF 不仅有数据而且这个数据能很好的和失锁前和失锁后的数据连接起来，没有较大的间断，这就可以说明计算的正确性。

图 4-35、图 4-36 和图 4-37 分别是 GPS 和 EKF 测得的北东地速度，图 4-38 图 4-39 图 4-40 是 GPS 和 EKF 测得的北东地位置。

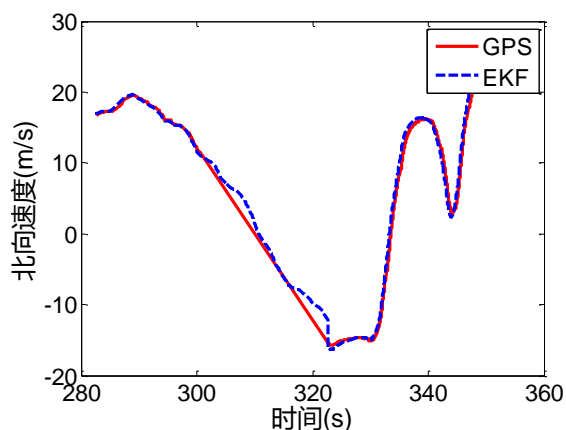


图 4-35 GPS 失锁北向速度

Figure 4-35 The VelN obtained when GPS unlock

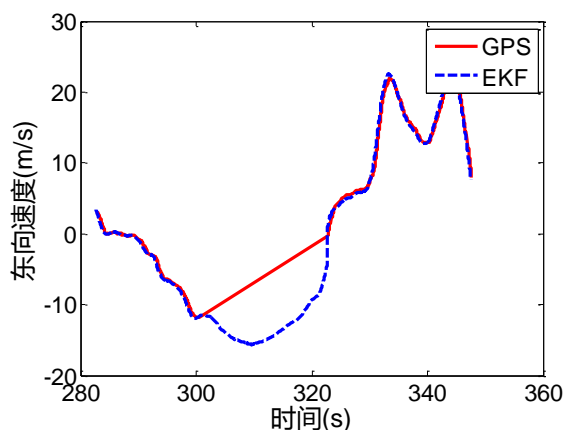


图 4-36 GPS 失锁东向速度

Figure 4-36 The VelE obtained when GPS unlock

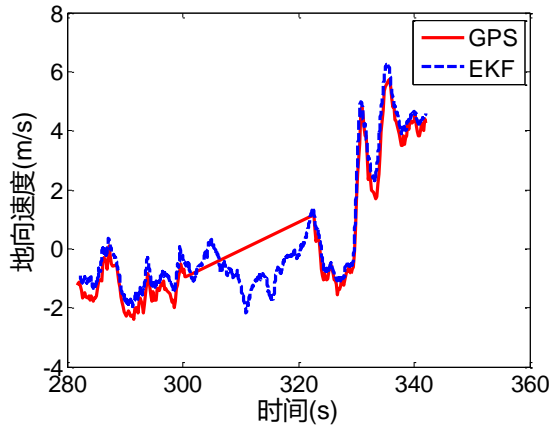


图 4-37 GPS 失锁地速速度

Figure 4-37 The VelD obtained when GPS unlock

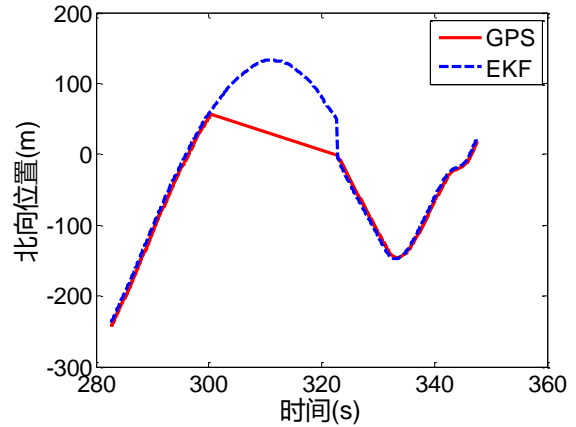


图 4-38 GPS 失锁北向位置

Figure 4-38 The PosN obtained when GPS unlock

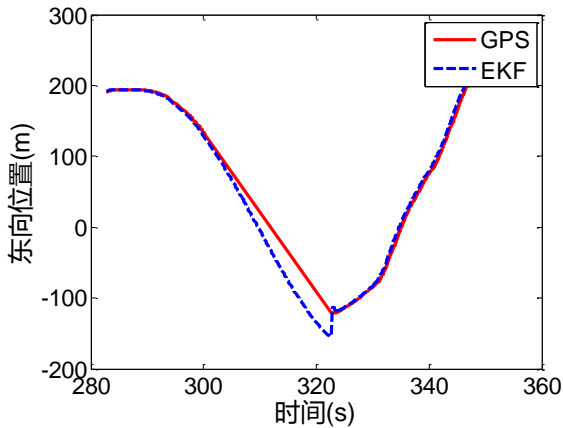


图 4-39 GPS 失锁东向位置

Figure 4-39 The PosE obtained when GPS unlock

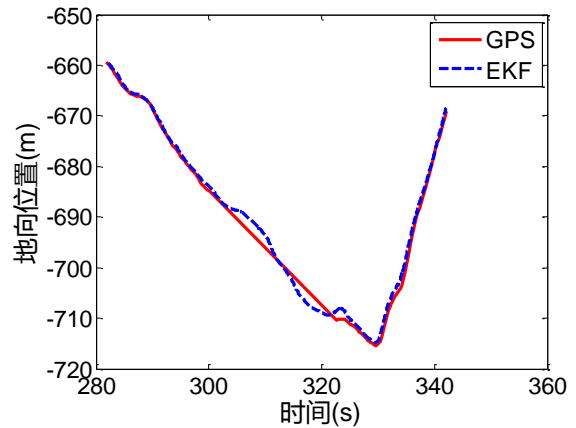


图 4-40 GPS 失锁地速速度

Figure 4-40 The PosD obtained when GPS unlock

4.4.5 航点跟踪

为验证算法在无人机实际飞行中的性能，本节设计了无人机的航点跟踪控制实验。

下面是一次航点跟踪实验的结果，场地是西安市长安区 G65 包茂高速附近。飞机使用的是本文介绍的 X-AUV，飞控使用的是本文设计的飞控电路板，导航算法为基于 EKF 的多传感器数据融合导航算法，使用导航算法计算出的飞行器的姿态、速度、位置，对飞行器进行导航，控制飞行器去跟踪写入飞行器的航点。

实验如图 4-41 所示，其中 H 点为设置的 Home 点，也就是飞机起飞的点。以 Home 点为中心，半径为 250m 依次放置了 8 个航点，飞行高度设置为 200m。起飞和降落的过程使用手动控制，在航点跟踪时，将手动模式切换到自动模式。实验中，首先手动将飞机起飞飞到一定高度，然后切换到自动模式，飞机就开始飞行 1 号航点，然后依次飞过 2 到 7 号航点，最后飞到 8 号航点。图中绿色的线是飞机的航迹线。

从图中可以看到航点跟踪任务能够很好的完成，从而证明本文研究的导航算法的正确性、实用性和所设计的飞控平台的可靠性。

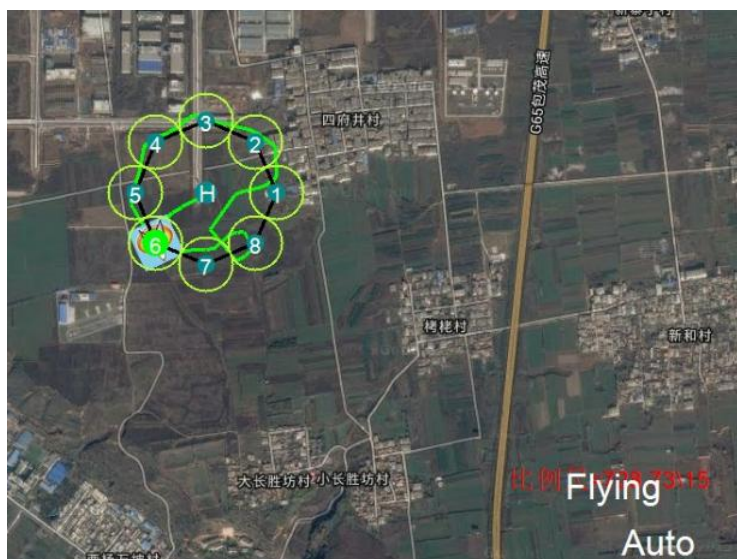


图 4-41 航点跟踪实验

Figure 4-41 The experiment of navigation point tracking

4.5 本章小结

本章主要对导航算法进行了研究和实现，主要研究了互补滤波姿态解算算法和基于扩展卡尔曼滤波的多传感器数据融合算法。将两种算法都在本文设计的硬件电路板上实现并且做了飞行实验，验证了算法的正确性。最后将硬件电路板和导航算法用于航点跟踪实验，说明本文设计的飞控硬件电路板的实用性和导航算法的正确性。

5 总结与展望

5.1 总结

微小型无人机在民用和军用领域都具有广阔的应用前景，是未来无人机的一个重要发展方向。本文结合目前无人机的发展状况，以微小型无人机为载体，展开微小型无人机的导航技术的研究。本文首先自行设计了低成本高性能的飞控硬件平台，其次，对低成本 MEMS 传感器的误差进行建模与校准，对采集的数据进行滤波处理，最后研究了使用互补滤波算法进行姿态解算和扩展卡尔曼滤波进行多传感器的数据融合的导航算法，并设计实验对所研究的算法和所设计的飞控平台的性能进行了检验。

本文的主要工作内容如下：

(1) 自主设计了一块基于 ZYNQ 和低成本 MEMS 传感器的多传感器的飞控硬件平台。相比于目前主流的平台，所设计的飞控硬件电路板具有更强的运算能力，能够支持更为高级复杂的导航算法。该平台使用基于 QNX 的实时操作系统，可以有效的执行复杂的算法并且更为方便，效率更高。

(2) 对本文使用的 MEMS 传感器的误差进行补偿校正，对传感器采集数据中的噪声进行了滤波处理。对三轴陀螺仪采用静置法，计算出零位偏移量。对三轴加速度计使用六面法进行零位偏移校正。用最小二乘法对三轴磁力计进行椭球拟合校准。另外研究了一种可以在飞行过程中实时计算出磁力计零位偏移的算法。对三轴陀螺仪，三轴加速度计和三轴磁力计测得的数据进行均值滤波处理。对气压计的数据进行一阶低通滤波处理。对空速数据进行滑动窗口滤波处理。

(3) 重点研究了导航的算法。首先是实现了互补滤波姿态解算算法，并且在飞机加速运行的情况下，融合 GPS 的速度更准确地计算出飞机的姿态。实现了基于扩展卡尔曼滤波的多传感器数据融合的导航算法。用捷联惯性导航的计算方式对 24 个状态量进行建模，包括用四元数方式表示的姿态、北东地速度、北东地位置、陀螺仪漂移、加速度计漂移、水平风速、地磁、地磁偏移。用 GPS 接收的速度和位置，空速计测得的水平空速和磁力计测得的地磁来做观测值进行状态修正。当 GPS 失锁时，发现扩展卡尔曼滤波算法能够很好的计算出导航信息。最后将该导航算法作为航点跟踪的导航输入，能够很好的进行航点跟踪说明该算法的实用性和正确性。

5.2 展望

以本文设计的飞控硬件平台为基础，未来的研究计划如下：

(1) 提高导航的稳定性和鲁棒性。所设计的飞控硬件平台留有很多接口，可以用双份传感器来进行导航计算，如使用两个陀螺仪和加速度计，以增加系统的稳定性。当两个传感器都正常工作时，用它们的均值进行计算。在其中一个传感器检测出现错误的时候，就可以舍弃该值，去使用另一个传感器。这样就避免了当只有一个传感器时，导航计算结